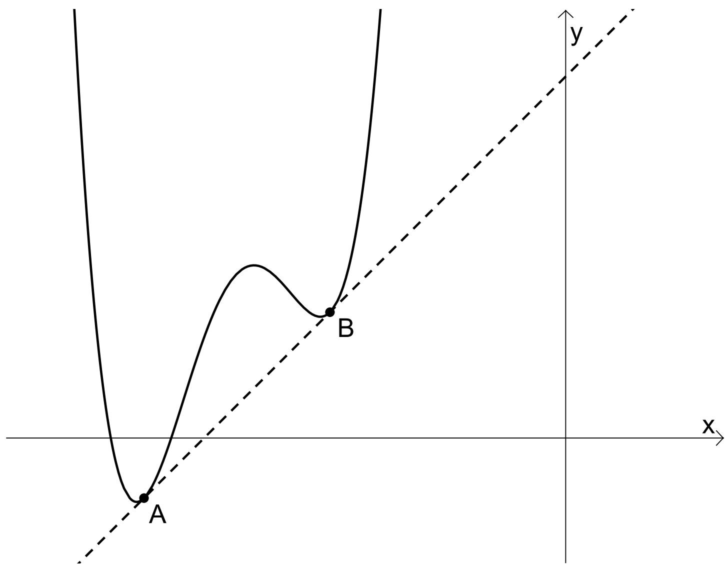
218. La retta bitangente ad una funzione quartica

Francesco Daddi
Liceo Scientifico “F. Buonarroti” Pisa
www.webalice.it/francesco.daddi
francesco.daddi@libero.it

Data una curva quartica della forma

$$\gamma : y = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \quad \text{con } a \neq 0, \tag{1}$$

vogliamo trovare delle condizioni sotto le quali esiste la retta bitangente alla curva (1), ovvero la retta che risulta tangente alla quartica in due punti distinti A e B, e scriverne l'equazione cartesiana. Ad esempio, assegnata la curva $y = \frac{1}{2}x^4 + 10\,x^3 + 73\,x^2 + 231\,x + 270$, vogliamo determinare l'equazione della retta tratteggiata (si faccia riferimento alla figura seguente).



Per risolvere questo problema esistono vari metodi, tra cui segnaliamo un interessante lavoro di Carlo Sintini (si veda [2]). Nel presente articolo sono esaminati altri quattro metodi, dei quali tre si basano su una particolare applicazione delle affinità.

Primo metodo. In analogia con l'articolo [1], cerchiamo l'affinità φ della forma

$$\varphi : \begin{cases} x' = x + h \\ y' = \lambda\,x + \mu\,y + k \end{cases} \tag{2}$$

che trasforma la curva (1) in una quartica della forma

$$\gamma' : y' = (x')^4 + w(x')^2 \tag{3}$$

simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e tangente nell'origine all'asse delle ascisse.

Sostituendo le espressioni di x' e y' nell'equazione della curva (3) si ottiene

$$\lambda\,x + \mu\,y + k = (x+h)^4 + w(x+h)^2$$

e risolvendo rispetto a y si trova

$$y=\frac{1}{\mu}x^4+\frac{4\,h}{\mu}x^3+\frac{6\,h^2+w}{\mu}x^2+\frac{2\,wh+4\,h^3-\lambda}{\mu}x+\frac{h^4+w\,h^2-k}{\mu}\;;$$

uguagliando termine a termine con la (1) si ottengono "a cascata" e nel seguente ordine i coefficienti μ, h, w, λ, k:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}=a\\[2mm] \dfrac{4\,h}{\mu}=b\\[2mm] \dfrac{6\,h^2+w}{\mu}=c\\[2mm] \dfrac{2\,wh+4\,h^3-\lambda}{\mu}=d\\[2mm] \dfrac{h^4+w\,h^2-k}{\mu}=e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=\dfrac{1}{a}\\[2mm] h=\dfrac{b}{4\,a}\\[2mm] w=\dfrac{8\,ac-3\,b^2}{8\,a^2}\\[2mm] \lambda=\dfrac{4\,abc-b^3-8\,a^2d}{8\,a^3}\\[2mm] k=\dfrac{16\,ab^2c-5\,b^4-256\,a^3e}{256\,a^4}\;.\end{cases}\tag{4}$$

Le equazioni dell'affinità φ, pertanto, sono le seguenti:

$$\boxed{\varphi:\begin{cases}x'=x+\dfrac{b}{4\,a}\\[2mm] y'=\dfrac{4\,abc-b^3-8\,a^2d}{8\,a^3}x+\dfrac{1}{a}y+\dfrac{16\,ab^2c-5\,b^4-256\,a^3e}{256\,a^4}\end{cases}}$$

La curva (3) ha due minimi se e solo se risulta $w<0$ e, studiando la derivata prima, si trova che le loro coordinate sono

$$A'\left(-\sqrt{-\frac{w}{2}},-\frac{w^2}{4}\right)\;,\;B'\left(\sqrt{-\frac{w}{2}},-\frac{w^2}{4}\right)\;;$$

la bitangente t' alla curva, essendo la retta passante per A' e B', ha equazione $t':y'=-\dfrac{w^2}{4}$.

Osservazione 1. Un'affinità manda rette tangenti in rette tangenti (e rette bitangenti in rette bitangenti), quindi la curva (1) ammette una bitangente se e solo se l'ammette la curva (3), e ciò accade se e solo se risulta $w<0$; dal momento che $8\,a^2>0$ (si ricordi che $a\neq 0$), la condizione $w<0$ equivale a $8\,a\,c-3\,b^2<0$.

L'equazione della retta bitangente t alla curva (1), sotto la condizione $8\,a\,c-3\,b^2<0$, si trova semplicemente applicando l'affinità φ^{-1} alla retta t'; si ottiene

$$t:\frac{4\,abc-b^3-8\,a^2d}{8\,a^3}x+\frac{1}{a}y+\frac{16\,ab^2c-5\,b^4-256\,a^3e}{256\,a^4}=-\frac{1}{4}\left(\frac{8\,ac-3\,b^2}{8\,a^2}\right)^2$$

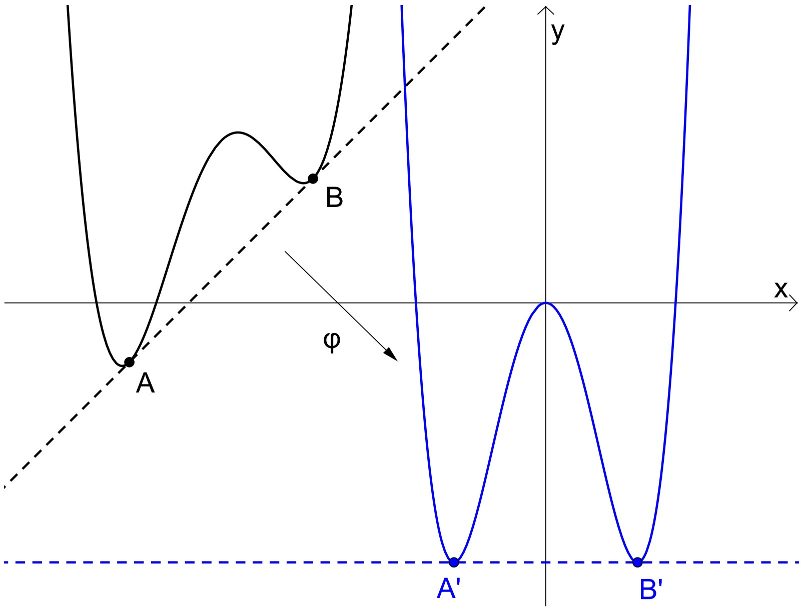
che possiamo scrivere nella più comoda forma esplicita:

$$\boxed{t:y=\left(d-\frac{bc}{2\,a}+\frac{b^3}{8\,a^2}\right)x+e-\frac{c^2}{4\,a}+\frac{b^2c}{8\,a^2}-\frac{b^4}{64\,a^3}}$$

Nel caso specifico, la curva $y = \frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 231x + 270$ viene trasformata nella curva $y' = (x')^4 - 4(x')^2$ mediante l'affinità

$$\varphi : \begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = -2x + 2y - 15 \end{cases}$$

e la retta bitangente ha equazione $y = x + \frac{11}{2}$. Si veda la figura.



Osservazione 2. I punti di minimo della curva $y' = (x')^4 - 4(x')^2$ sono $A'(-\sqrt{2}, -4)$ e $B'(\sqrt{2}, -4)$ e coincidono con le immagini, mediante l'affinità φ, dei punti di tangenza A e B. Applicando quindi l'inversa di φ ai punti A' e B' si ottengono le coordinate dei punti di tangenza:

$$A\left(-5-\sqrt{2}, \frac{1}{2}-\sqrt{2}\right) \quad , \quad B\left(-5+\sqrt{2}, \frac{1}{2}+\sqrt{2}\right).$$

Alternativamente, per determinare le coordinate dei punti A e B è possibile risolvere il sistema

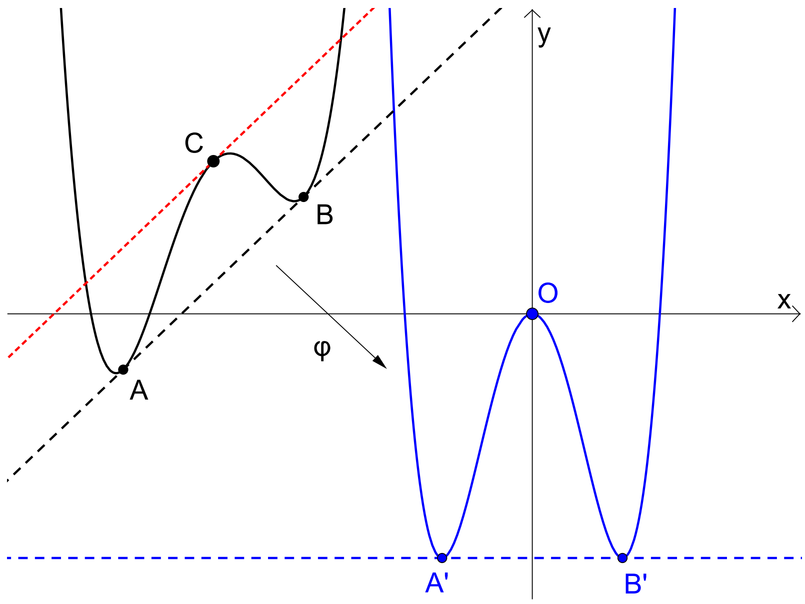
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 231x + 270 \\ y = x + \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 230x + \frac{529}{2} = 0 \\ y = x + \frac{11}{2} \end{cases} ;$$

tenendo conto che si devono ottenere due soluzioni contate entrambe due volte, determiniamo δ e τ in modo che il polinomio $\frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 230x + \frac{529}{2}$ possa essere scritto nella forma $\frac{1}{2}(x^2 + \delta x + \tau)^2$. Svolgendo il quadrato del trinomio e uguagliando i due polinomi si trova l'equazione

$$(10-\delta)x^3 + \left(73 - \frac{\delta^2}{2} - \tau\right)x^2 + (230 - \delta\tau)x + \frac{529}{2} - \frac{\tau^2}{2} = 0 ;$$

sfruttando il principio di identità dei polinomi si ottiene $\delta = 10$ e $\tau = 23$, da cui $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{2}$. Le rispettive ordinate possono essere ottenute semplicemente sostituendo i valori delle ascisse nell'equazione della retta bitangente.

Secondo metodo. Si supponga $8\,a\,c - 3\,b^2 < 0$. Si osserva che l'origine è l'unico punto della curva (3) diverso da A' e B' in cui la tangente è parallela alla bitangente, quindi la retta tangente alla curva (1) nel suo punto $C = \varphi^{-1}(O)$ è parallela alla bitangente (si veda la figura).



Dal momento che l'ascissa del punto C è $x_C = -\dfrac{b}{4\,a}$, per determinare la retta bitangente possiamo procedere come segue:

1) si calcola la pendenza m della retta tangente alla curva (1) nel suo punto di ascissa $x_C = -\dfrac{b}{4\,a}$;
2) si trovano le ascisse dei punti A e B (distinti da C) nei quali la retta tangente alla curva (1) ha pendenza m; non è difficile dimostrare che tali ascisse sono reali e distinte se e solo se $8\,a\,c - 3\,b^2 < 0$;
3) si determina l'equazione della retta che passa per i punti A e B, ottenendo così la bitangente.

Nel nostro caso particolare l'ascissa del punto C è $x_C = -5$ e la tangente corrispondente ha pendenza 1; per cercare i punti della curva in cui la tangente ha pendenza 1 basta imporre che la derivata prima sia uguale ad 1, arrivando così all'equazione

$$2\,x^3 + 30\,x^2 + 146\,x + 231 = 1 \;\Rightarrow\; 2\,x^3 + 30\,x^2 + 146\,x + 230 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + 15\,x^2 + 73\,x + 115 = 0\,;$$

sappiamo che una soluzione è $x = -5$, quindi mediante la divisione polinomiale possiamo riscrivere il polinomio di terzo grado a primo membro nella forma $(x+5)(x^2 + 10\,x + 23)$. Le radici $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{2}$ del polinomio di secondo grado sono le ascisse dei punti A e B; la bitangente è la retta passante per $A\left(-5-\sqrt{2}\,,\, \dfrac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$ e $B\left(-5+\sqrt{2}\,,\, \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$ ed ha equazione $y = x + \dfrac{11}{2}$.

Osservazione 3. L'ascissa del punto C è l'unica radice della derivata terza.

Terzo metodo. Si tratta di una variante del secondo metodo: una volta calcolata la pendenza m della bitangente (di equazione $y = m\,x + k$), per determinare k si impone che sia nullo il discriminante (si veda [3]) del polinomio $a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e - (m\,x + k)$, arrivando così ad un'equazione di terzo grado in k. La soluzione con molteplicità uguale a 2 è quella che corrisponde alla retta bitangente.

Vediamo un'applicazione di questo metodo al nostro caso numerico: la pendenza è $m = 1$ mentre il discriminante del polinomio

$$\frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 231x + 270 - (x + k)$$

è uguale a $-32k^3 + 592k^2 - 3608k + 7260$ (si veda [3]).

Dal momento che la retta tangente in $C\left(-5, \frac{5}{2}\right)$ alla (1) ha equazione $y = x + \frac{15}{2}$, dividendo il discriminante per il binomio $(2k - 15)$ si arriva alla scomposizione

$$-32k^3 + 592k^2 - 3608k + 7260 = (2k - 15) \cdot \left(-16k^2 + 176k - 484\right) = (15 - 2k) \cdot (4k - 22)^2\,;$$

la radice con molteplicità uguale a 2 è $k = \frac{11}{2}$ ed in corrispondenza di questo valore si ottiene l'equazione della bitangente $y = x + \frac{11}{2}$.

Quarto metodo. Facendo riferimento all'Osservazione 2, cerchiamo m, k, δ, τ in modo che il polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - (mx + k)$ possa essere scritto nella forma $a(x^2 + \delta x + \tau)^2$ con $\delta^2 - 4\tau > 0$. Si ottiene

$$\begin{cases} b - 2a\delta = 0 \\ c - a\delta^2 - 2a\tau = 0 \\ d - m - 2a\delta\tau = 0 \\ e - k - a\tau^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \dfrac{b}{2a} \\ \tau = \dfrac{4ac - b^2}{8a^2} \\ m = d - \dfrac{bc}{2a} + \dfrac{b^3}{8a^2} \\ k = e - \dfrac{c^2}{4a} + \dfrac{b^2c}{8a^2} - \dfrac{b^4}{64a^3} \end{cases}$$

da cui l'equazione della retta bitangente: $y = \left(d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2}\right)x + e - \frac{c^2}{4a} + \frac{b^2c}{8a^2} - \frac{b^4}{64a^3}$.

Osservazione 4. La condizione $\delta^2 - 4\tau > 0$ diventa $\frac{3b^2 - 8ac}{4a^2} > 0$ ed equivale, essendo $4a^2 > 0$ (si ricordi che $a \neq 0$), a $3b^2 - 8ac > 0$; si ritrova quindi la condizione scritta nell'Osservazione 1.

Sitografia

[1] F. Daddi, *Cubiche e affinità nel piano*, disponibile agli indirizzi
http://www.webalice.it/francesco.daddi/files/cubiche_daddi_francesco.pdf
http://www.matematicamente.it/approfondimenti/83-matematica/5375–sp-4571

[2] C. Sintini, *Bitangenza e affinità*, disponibile alla pagina web
http://digilander.libero.it/santoppe/altri_appunti_miei.htm

[3] http://mathworld.wolfram.com/PolynomialDiscriminant.html