219. Simmetrie assiali e problemi di minimo o di massimo

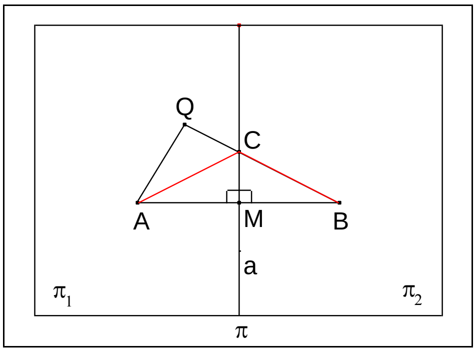
Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it

SUNTO

La rilevanza della simmetria, nel senso moderno d'invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni, nello studio dei fenomeni naturali è accertata e accettata da tempo. In questo piccolo lavoro prospetto l'uso della simmetria assiale nella risoluzione di problemi di minimo o massimo, che si possono presentare al primo o al secondo anno di scuola media superiore. Segnalo innanzitutto che la simmetria assiale riveste un ruolo significativo sia sotto l'aspetto euristico sia sotto quello dimostrativo. Presento due interessanti problemi, uno di minimo, l'altro di massimo, che sono capaci di stimolare l'interesse degli allievi, anche perché possono presentarsi come problemi del mondo reale.

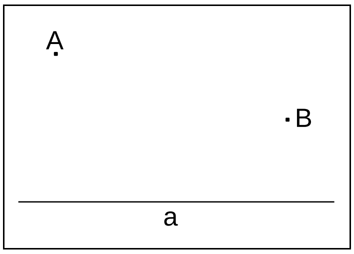
PREMESSA

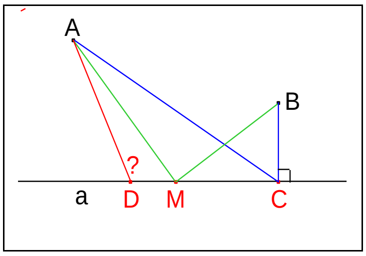
Intanto facciamo notare che la simmetria assiale trasforma un tragitto spezzato in uno rettilineo che è più semplice da confrontare con altri percorsi.
Riproponiamo la dimostrazione della proprietà:
Se un punto Q non appartiene all'asse di un segmento, allora *non è equidistante dai suoi estremi*: *precisamente ha distanza minore dall'estremo che si trova, rispetto all'asse, nello stesso semipiano cui appartiene il punto Q*.
Di questa proprietà ci si può servire nel trattare la bisettrice di un angolo come asse di simmetria dei lati dell'angolo.
Siano *AB* un segmento di asse *a*, *Q* un punto (figura) che sta nel semipiano π_1 di π individuato da a, cui appartiene *A*. L'occhio suggerisce che $\overline{QA} < \overline{QB}$: proviamolo.
Poiché *Q* e *B* appartengono ai semipiani aperti opposti π_1 e π_2 determinati da *a*, il segmento *QB* interseca l'asse in *C*. Questo è punto unito (perché?) nella simmetria di asse *a*, s_a, nella quale ad *A* corrisponde *B*, quindi: $\overline{CA} = \overline{CB}$. Dobbiamo confrontare $\overline{QA}$ e $\overline{QB} = \overline{QC} + \overline{CB}$. Per la proprietà triangolare $\overline{QA} < \overline{QC} + \overline{CA}$ che è una spezzata, ma $\overline{CA} = \overline{CB}$ e quindi possiamo scrivere, $\overline{QB} = \overline{QC} + \overline{CA}$; in conclusione $\overline{QA} < \overline{QB}$.



Problema di Erone

Questo problema è stato proposto agli ultimi esami di stato ma, poiché la geometria è colpevolmente trascurata - per usare un eufemismo - è stato spesso ignorato o se n'è data una soluzione analitica, che è come usare una ruspa per smuovere un fuscello.
Obiettivo: Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano aperto rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta.
Prerequisiti: Simmetria assiale, proprietà di partizione, proprietà triangolare.
Si può presentare la situazione mediante il seguente problema tratto dal mondo reale.
In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di un'autostrada *a*. Si deve costruire un casello che serva due cittadine *A* e *B*, che sono dalla stessa parte rispetto *a*.
In quale punto *P* di *a* deve essere realizzato il casello affinché la somma dei tragitti rettilinei *AP+PB* sia la più breve, quindi la più economica? Schematizziamo come in figura la situazione e sollecitiamo i giovani ad suggerire qualche possibile soluzione. I tragitti più gettonati sono:



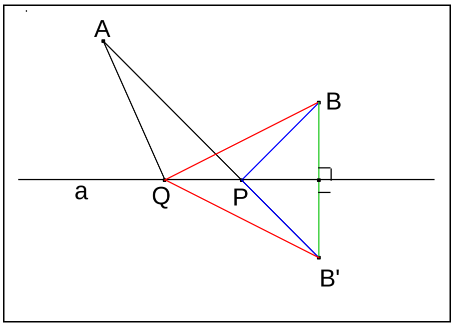


- Tracciamo per B (perché rispetto ad A è più vicino ad a) il segmento di perpendicolare AC ad a e poi il segmento CA.
- (Confuso) Il punto di a cercato è il punto medio M fra A e B su a.

Dopo avere preso un altro punto D su a, tracciati i segmenti AD e DB, chiediamo (inutilmente) la motivazione della loro scelta; facciamo notare che non abbiamo strumenti razionali con cui confrontare le lunghezze delle diverse spezzate che rappresentano i percorsi indicati.

Suggeriamo allora di considerare un punto Q qualsiasi di a e di tracciare i segmenti AQ e QB (figura sotto) e di chiedersi se c'è qualche simmetria che ci può venire in soccorso.

Giovanni allora dice: per l'osservazione precedente c'è la simmetria rispetto ad a, s_a, che permette di trasformare una spezzata in un segmento di uguale lunghezza più facile da confrontare con le spezzate: in particolare costruiamo il simmetrico B' di B nella simmetria rispetto ad a e tracciamo il segmento AB', che interseca a nel punto P e PB simmetrico di PB' in s_a. Da ciò (*)



$\overline{PB'} = \overline{PB}$ e quindi $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB'}$ diventa $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$.

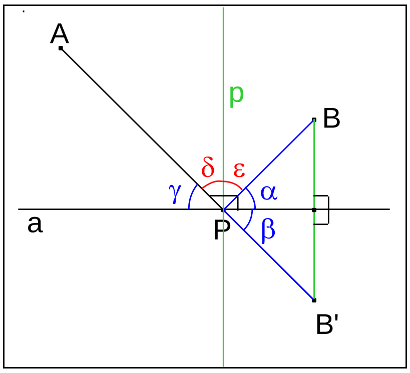
Prima di andare avanti chiediamo perché il segmento AB' interseca a nel punto P; ottenuta la risposta corretta proseguiamo.

Ricordate che dobbiamo confrontare $\overline{AP} + \overline{PB}$ con $\overline{AQ} + \overline{QB}$. Qualche suggerimento?

Elisa propone: poiché $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$, applichiamo la proprietà triangolare ad AQB': abbiamo $\overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB'}$ e, poiché (**) $\overline{QB'} = \overline{QB}$ perché simmetrici in $\mathbf{s_a}$, $\overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB}$. Allora da $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$ segue che $\overline{AP} + \overline{PB'} < \overline{AQ} + \overline{QB'}$.

In conclusione: **il percorso minimo da A a B, dovendo toccare a è determinato dal punto P intersezione dell'asse a con il segmento AB', con B' simmetrico di B rispetto ad a.**

È allora nel punto P dell'autostrada che si deve costruire il casello.



È opportuno fare notare che la risoluzione del problema descrive il comportamento della luce quando si riflette.

Infatti (figura), α e β hanno la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto ad a e così pure, β e γ in quanto opposti al vertice: dunque α e γ hanno la stessa ampiezza. Indicata allora con p la perpendicolare ad a per P, δ ed ε presentano la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto a p; ma essi rappresentano rispettivamente *l'angolo d'incidenza* e *quello di riflessione* di un raggio luminoso che da A va a B riflettendosi su a:

la legge di riflessione della luce è dunque una legge di simmetria.

A questo punto è interessante porre la domanda: se consideriamo il simmetrico di A rispetto ad a invece del simmetrico di B che succede? Fatelo come esercizio tenendo conto di opportuni angoli di vertice P.

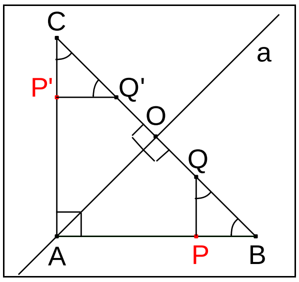
1.

Obiettivo: *Dato un triangolo rettangolo e isoscele determinare il rettangolo di area massima fra quelli inscritti nel triangolo e con un angolo retto coincidente con quello del triangolo.*

Prerequisiti: *simmetria assiale e centrale, punto medio, triangolo isoscele, rettangolo, perimetro, area.*

Anche questo problema può essere esposto prendendo le mosse da una situazione concreta.

Un imprenditore ha un terreno a forma di triangolo rettangolo e isoscele, contornato da due strade lungo i cateti. Vuole costruire un capannone rettangolare che gli serva da deposito in modo che abbia la maggiore area possibile e i cui accessi siano lungo i cateti.



Poiché il triangolo ABC è isoscele possiede….

Alice suggerisce un asse di simmetria nella retta *a* passante per *A* e per il punto medio *O* di *CB*.

Come possiamo costruire uno dei nostri depositi (rettangoli)?

Matteo propone di considerare un punto *P* su *AB* e costruire il segmento *PQ* per *P* perpendicolare ad *AB*. Il triangolo *PBQ* è isoscele sulla base *BQ*, essendo $P\hat{Q}B$ corrispondente di $\hat{C}$ che ha la stessa ampiezza di $\hat{B}$; allora il triangolo *PBQ*, oltre a essere rettangolo è anche isoscele sulla base *QB*, e $\overline{PQ} = \overline{PB}$: quindi $\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PB}$ che è il semiperimetro.

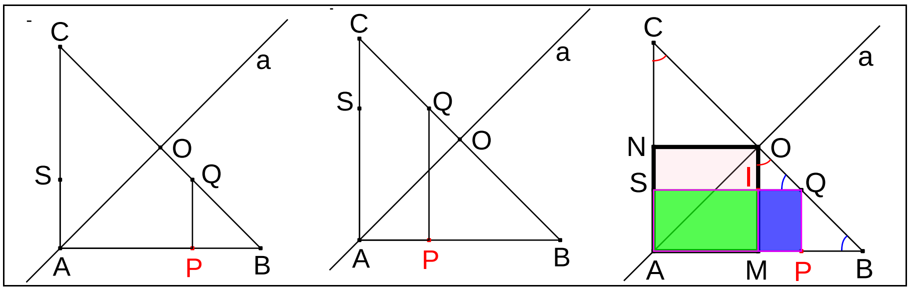
Questo risultato ci assicura che il perimetro rettangolo da costruire, sia *R*, è….

Tiziana afferma p=2 ($\overline{AP} + \overline{PB}$).

Come puoi determinarlo?

Prosegue Tiziana: costruiamo il simmetrico *S* di *P* rispetto al punto medio di *AQ*: otteniamo così il rettangolo *APQS* che è uno di quelli richiesti.

Al variare di *P* (figure sotto) si modifica l'area della superficie di *R*, che diminuisce se *P* si avvicina ad *A* o a *B*, mentre aumenta se *P* è prossimo al punto medio *M* di *AB* e quindi se *Q* è vicino a *O* ed *S* a *N* punto medio di *AC*.



Qualche idea?

Damiano avanza questa congettura: la simmetria della situazione suggerisce di confrontare l'area di *APQS* con quella di *AMON* che risulta un quadrato, poiché è un rettangolo con due lati consecutivi *AM* e *AN* isometrici poiché simmetrici rispetto ad *a*.

Cosa proponete?

Patrizia osserva: se chiamiamo *I* l'intersezione tra *SQ* ed *MO*, il rettangolo *APQS* e il quadrato *AMON* hanno in comune il rettangolo *SION*, è sufficiente confrontare *SION* col rettangolo *MPQI* e provare che *SION* presenta area maggiore di *MPQI*.

Allora Chiara dice: *IQO* è isoscele sulla base *QO* poiché i suoi angoli in $\hat{O}$ e $\hat{Q}$ sono rispettivamente isometrici perché corrispondenti degli angoli $\hat{C}$ e $\hat{B}$; quindi $\overline{IO} = \overline{IQ}$ e $\overline{OM} > \overline{IM}$: allora *SION* possiede area maggiore di *MPQI*.

In forza dell'osservazione di Patrizia il quadrato *AMON* ha area maggiore del rettangolo *APQS*.

Per la simmetria prima evidenziata potremmo usare le stesse argomentazioni prendendo il simmetrico *P'* di *P* su *AC*.

Il risultato ottenuto ci consente di dare una formulazione diversa al problema: **fra i rettangoli di uguale perimetro, quello di area massima è il quadrato.**

Osserviamo infine che i due problemi di minimo e massimo affrontati sono legati alla simmetria. A questa, come abbiamo già visto e come vedremo in seguito, sono spesso riconducibili tali tipologie di problemi.

Giarre 14/12/2014