220. Dinamica di una popolazione

Hume

Premessa

La demografia è lo studio quantitativo delle popolazioni umane; quanti individui, quali le classi di età, i tassi nascita e mortalità, il rapporto numerico tra i generi, la speranza di vita, in che misura queste variabili crescono o decrescono nel tempo. Si ritiene che il primo ad occuparsene sia stato l'economista Malthus alla fine del Settecento. Egli , in base a studi sulle colonie inglesi in nord America, riteneva che la popolazione sarebbe cresciuta in proporzione geometrica, mentre le risorse alimentari sarebbero aumentate in proporzione aritmetica. Da qui la sua convinzione di prossime immani sciagure (a cominciare dalle carestie), a meno di attuare drastiche limitazioni delle nascite. Le sue previsioni si rivelarono fallaci, anche perché il progresso aumentò notevolmente la disponibilità di risorse.

Nel diciannovesimo secolo la demografia cominciò a svilupparsi in modo quantitativo anche con lo sviluppo di modelli matematici. E continuò nel Novecento, anche in seguito alla disponibilità dei calcolatori. Dalla specie umana si dilatò allo studio del regno animale e vegetale, non escludendo virus e batteri. Assumendo la qualificazione *Dinamica delle Popolazioni*. Una tipica e fruttuosa applicazione della matematica alla biologia. Si vide che modelli diversi meglio si adattavano e specie diverse. Ad esempio nello studio dello sviluppo delle foreste si rivelò utile l'equazione di Chapman-Richards.

Un qualunque modello di dinamica della popolazione descrive, al minimo, come varia nel tempo il numero N di individui (maschi + femmine) della popolazione, tenendo conto di nascite, morti, immigrazioni, emigrazioni.

Qui dobbiamo fare una distinzione: alcune specie (ad esempio *Homo Sapiens*) si riproducono in modo continuo, vale a dire le nascite possono avvenire in qualunque istante. La dinamica della popolazione nel tempo viene quantificata con un bilancio istantaneo:

$$\frac{dN}{dt} = f(t, parametri)$$

Il quale altro non è che una equazione differenziale, che richiede di essere integrata per ottenere

$$N = g(t, parametri)$$

In altre specie, al contrario, le nascite avvengono in determinati periodi dell'anno. Pertanto il bilancio della popolazione si fa ad intervalli di tempo discreti, ad esempio su base annuale. In questo caso il modello è del tipo:

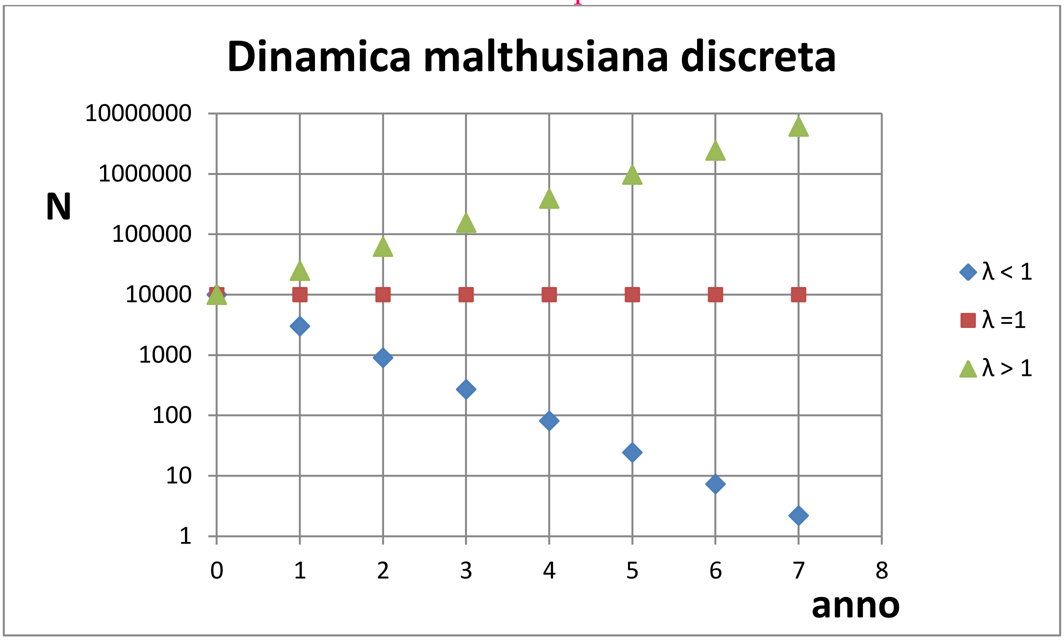
$$N(t+1) = f[N(t), parametri] \qquad (1)$$

Ed è quindi un'equazione alle differenze.

Un tipico modello discreto è quello malthusiano:

$$N(t+1) = \lambda N(t)$$

Dove λ è una costante positiva. Nel caso in cui $\lambda > 1$ la popolazione cresce in modo illimitato (come temeva Malthus). Mentre resta stazionaria quando $\lambda = 1$ e decresce quando $\lambda < 1$.



Lo studio sperimentale della dinamica delle popolazioni ha rivelato che lo sviluppo incontra dei limiti, dovuti all'ecologia: dimensioni limitate del territorio, quantità di cibo disponibile, presenza di predatori, competizione, etc. Questo fatto reale viene preso in considerazione da numerosi modelli dinamici, che prevedono un limite superiore al valore di N.
Un tipico esempio di limitazione si ha con la nota *Funzione Logistica*:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) \qquad (2)$$

Dove r e k sono parametri positivi. Ora sappiamo che $\frac{dN}{dt}$ misura la variazione istantanea della popolazione. Essa risulta dal prodotto di due termini, il primo, rN, produce una crescita, il secondo, quello tra parentesi, causa una decrescita.
L'equazione è facilmente integrabile, dopo questo passaggio:

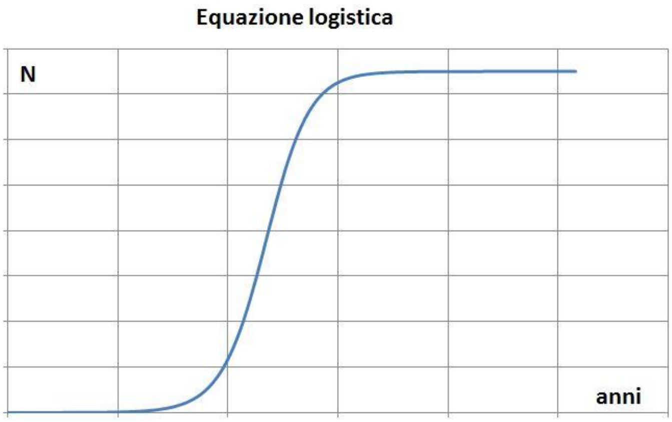
$$\frac{dN}{rN\left(1-\frac{N}{k}\right)} = dt \qquad (3)$$

Con la condizione iniziale: $t=0 \qquad N = N_0$

Si ottiene infine:

$$N = \frac{k}{1 - \frac{N_0 - k}{N_0} \exp\left(-rt\right)}$$

Il diagramma della funzione logistica evidenzia una curva ad *S* con asintoto per $N \to \infty$.
Si vede facilmente che l'asintoto coincide con il parametro k. Che rappresenta il limite superiore alla popolazione.



Dopo questa introduzione vogliamo proporre un problema.

Il problema

Una coppia di uccelli della specie *Edvinus regis* (una rara specie di grande interesse ornitologico, non ancora scoperta) dimorante in un arcipelago del Pacifico, durante un uragano tropicale viene trasportata dai venti, per centinaia di miglia, in un'isoletta sperduta nell'oceano. Qui si stabiliscono e danno origine alla loro discendenza. Per caso un gruppo di ornitologi è presente all'arrivo dei due uccelli e ne registra la presenza come una specie nuova per l'isola. Periodicamente questi studiosi ritornano sull'isola per monitorare le diverse specie di loro interesse e stimano, tramite campionamenti, il numero di individui *Edvinus regis.*
Ecco i risultati delle osservazioni sperimentali nel corso degli anni:

Anno	Ns
0	2
5	18
10	25
15	260
20	580
25	2500
30	3000

Sappiamo che la riproduzione di questa specie avviene una volta all'anno.

DOMANDA 1

Gli ornitologi, dopo molti anni di osservazioni decidono di elaborare la dinamica di crescita di questa specie di uccelli con un modello matematico. Dal momento che la riproduzione avviene una volta all'anno il modello dovrà essere del tipo discreto, come da equazione generale (1) sopra riportata. Sulla base di esperienza precedenti con specie simili si ritiene conveniente adottare il modello logistico sopra descritto. Con l'avvertenza che esso deve essere discretizzato.
Si richiede quindi di:

1) *modificare il modello (2) per renderlo discreto;*
2) *elaborare il modello discreto con i dati della tabella dei dati sperimentali avvalendosi della funzione Risolutore di Excel per ottenere i parametri r e k con il metodo de Minimi Quadrati;*
3) *mediante il modello determinato al punto precedente calcolare la curva di dinamica della popolazione* $N = f(t, k, r)$.
4)

DOMANDA 2

Durante il 32-esimo anno dall'inizio della vicenda, uno stormo della stessa specie, costituito da 2000 individui, si lancia da Tahiti in una migrazione lunga più di mille chilometri e raggiunge l'isola suddetta. In tal modo va ad incrementare il numero di individui Edvinus regis ivi esistenti.
Calcolare e diagrammare la dinamica della specie per gli anni successivi mediante l'equazione della dinamica di popolazione determinata al punto 2 della Domanda 1.

Una soluzione

RISPOSTA 1

La *Funzione Logistica* sopra riportata (2) è in forma differenziale. In modo approssimato possiamo sostituire gli infinitesimi dN e dt con gli incrementi finiti ΔN e Δt. Ora notiamo che $\Delta N = N_{t+1} - N_t$

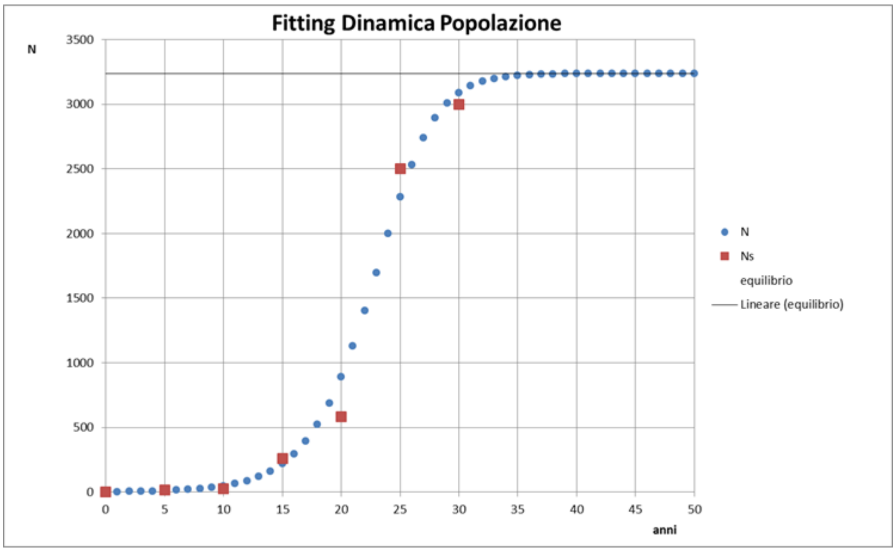
Poniamo ora $\Delta t = 1$ (anno). Si ottiene:

$$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) = (1+r)N_t - \frac{r}{k}N_t^2$$

Le risposte ai punti 2 e 3 della Domanda 1 sono riportate nel file Excel allegato.
In definitiva la dinamica della popolazione è data da:

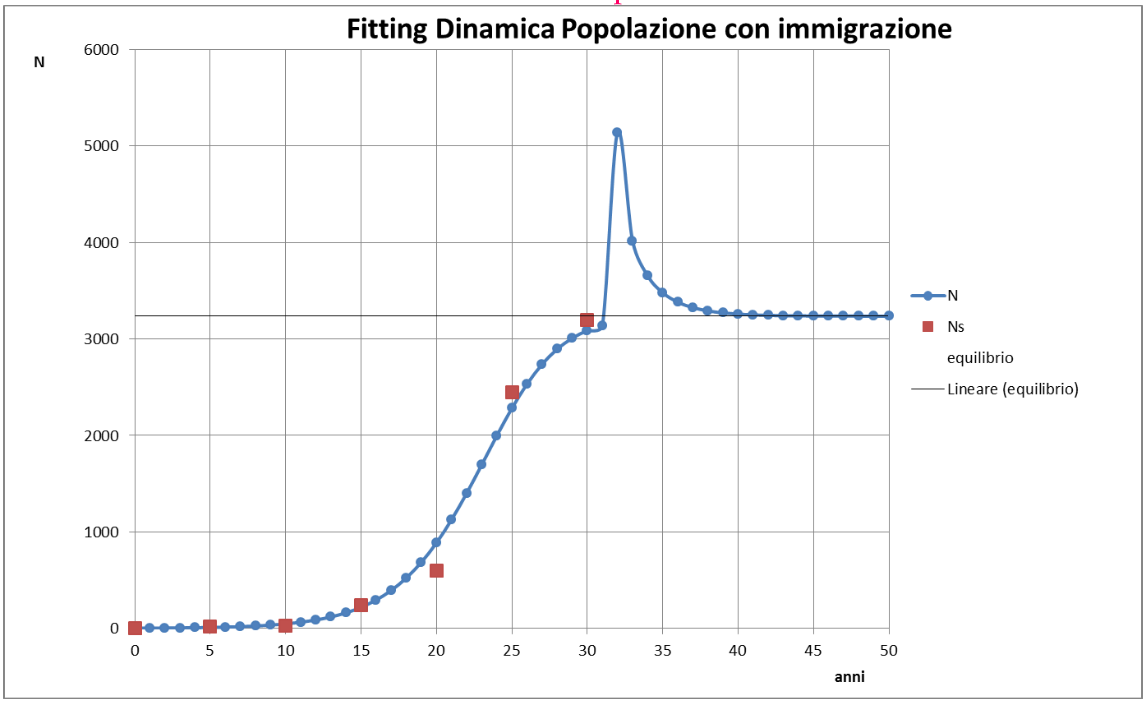
$$N_{t+1} = 1{,}3722\, N_t - \frac{0{,}3722}{3237}N_t^2 \qquad (3)$$

Si nota che il parametro $k = 3237$ rappresenta il numero di individui allo stato di equilibrio nella nicchia ecologica esistente. Questo valore non è un asintoto, ma verrà effettivamente raggiunto dopo un certo numero di anni, nel caso in esame al 45-esimo anno.



RISPOSTA 2

La medesima equazione (3) di cui a risposta 1 può essere usata per determinare il trend della popolazione dopo l'apporto dei nuovi arrivati. Notiamo che nell'anno di arrivo dello stormo la popolazione eccede le 5000 unità, un numero di gran lunga superiore al massimo tollerabile nell'isola(pari a k). Da tale anno dobbiamo aspettarci una decrescita della popolazione. La stessa equazione con i parametri determinati nella fase di crescita si presta bene a determinare il trend nella fase di decrescita. Il file Excel riporta i dettagli.



Occorre fare una precisazione: per risolvere il problema abbiamo fatto, implicitamente, l'ipotesi che l'ecologia dell'isola non cambia nei decenni in cui si svolge la storia. In tal modo è stato lecito ritenere costante il valore di equilibrio della specie. Nella realtà pratica in tale arco temporale si possono verificare cambiamenti non trascurabili nell'ecosistema, che evidentemente influenzano in senso positivo o negativo la dinamica della popolazione.

Allegato

http://www.matematicamente.it/magazine/24aprile2015/220-Hume-dinamica-popolazioni-allegato.xlsx