MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito

• Numero 24 – Aprile 2015 •

miuenski miuenski, collective soul, Flickr

QUARTICHE – SIMMETRIE – DINAMICA POPOLAZIONE – COORDINATE GEOGRAFICHE – DISCALCULIA - LIBRI

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce

ISSN 2035-0449

Hanno collaborato a questo numero

Francesco Daddi, Alfio Grasso, Hume, Michele T. Mazzucato, Domenico Lenzi, Roberta Lenzi, Daniela Molinari.

Sommario

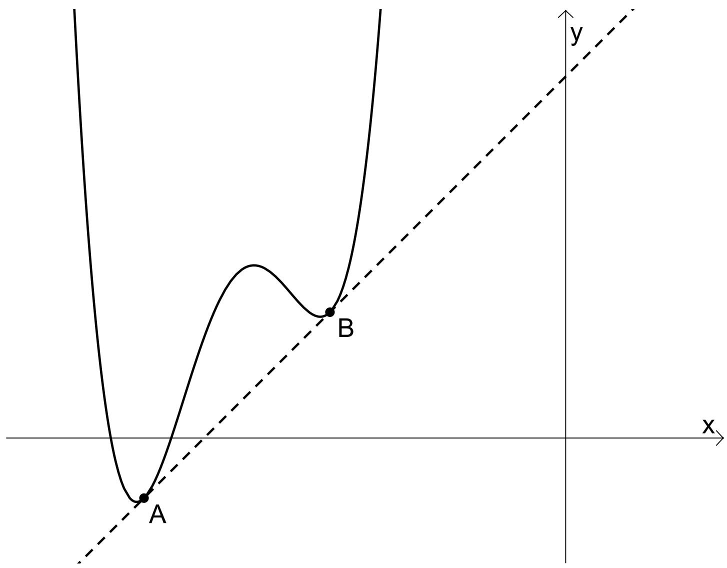
218. La retta bitangente ad una funzione quartica

Francesco Daddi
Liceo Scientifico “F. Buonarroti” Pisa
www.webalice.it/francesco.daddi
francesco.daddi@libero.it

Data una curva quartica della forma

$$\gamma : y = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \quad \text{con } a \neq 0, \tag{1}$$

vogliamo trovare delle condizioni sotto le quali esiste la retta bitangente alla curva (1), ovvero la retta che risulta tangente alla quartica in due punti distinti A e B, e scriverne l'equazione cartesiana. Ad esempio, assegnata la curva $y = \frac{1}{2}x^4 + 10\,x^3 + 73\,x^2 + 231\,x + 270$, vogliamo determinare l'equazione della retta tratteggiata (si faccia riferimento alla figura seguente).



Per risolvere questo problema esistono vari metodi, tra cui segnaliamo un interessante lavoro di Carlo Sintini (si veda [2]). Nel presente articolo sono esaminati altri quattro metodi, dei quali tre si basano su una particolare applicazione delle affinità.

Primo metodo. In analogia con l'articolo [1], cerchiamo l'affinità φ della forma

$$\varphi : \begin{cases} x' = x + h \\ y' = \lambda\,x + \mu\,y + k \end{cases} \tag{2}$$

che trasforma la curva (1) in una quartica della forma

$$\gamma' : y' = (x')^4 + w(x')^2 \tag{3}$$

simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e tangente nell'origine all'asse delle ascisse.

Sostituendo le espressioni di x' e y' nell'equazione della curva (3) si ottiene

$$\lambda\,x + \mu\,y + k = (x+h)^4 + w(x+h)^2$$

e risolvendo rispetto a y si trova

$$y = \frac{1}{\mu}x^4 + \frac{4h}{\mu}x^3 + \frac{6h^2+w}{\mu}x^2 + \frac{2wh+4h^3-\lambda}{\mu}x + \frac{h^4+wh^2-k}{\mu}\,;$$

uguagliando termine a termine con la (1) si ottengono "a cascata" e nel seguente ordine i coefficienti μ, h, w, λ, k:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu} = a \\[2ex] \dfrac{4h}{\mu} = b \\[2ex] \dfrac{6h^2+w}{\mu} = c \\[2ex] \dfrac{2wh+4h^3-\lambda}{\mu} = d \\[2ex] \dfrac{h^4+wh^2-k}{\mu} = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{a} \\[2ex] h = \dfrac{b}{4a} \\[2ex] w = \dfrac{8ac-3b^2}{8a^2} \\[2ex] \lambda = \dfrac{4abc-b^3-8a^2d}{8a^3} \\[2ex] k = \dfrac{16ab^2c-5b^4-256a^3e}{256a^4}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Le equazioni dell'affinità φ, pertanto, sono le seguenti:

$$\boxed{\varphi : \begin{cases} x' = x + \dfrac{b}{4a} \\[2ex] y' = \dfrac{4abc-b^3-8a^2d}{8a^3}x + \dfrac{1}{a}y + \dfrac{16ab^2c-5b^4-256a^3e}{256a^4} \end{cases}}$$

La curva (3) ha due minimi se e solo se risulta $w < 0$ e, studiando la derivata prima, si trova che le loro coordinate sono

$$A'\left(-\sqrt{-\frac{w}{2}}, -\frac{w^2}{4}\right) \quad , \quad B'\left(\sqrt{-\frac{w}{2}}, -\frac{w^2}{4}\right);$$

la bitangente t' alla curva, essendo la retta passante per A' e B', ha equazione $t' : y' = -\dfrac{w^2}{4}$.

Osservazione 1. Un'affinità manda rette tangenti in rette tangenti (e rette bitangenti in rette bitangenti), quindi la curva (1) ammette una bitangente se e solo se l'ammette la curva (3), e ciò accade se e solo se risulta $w < 0$; dal momento che $8a^2 > 0$ (si ricordi che $a \neq 0$), la condizione $w < 0$ equivale a $8ac - 3b^2 < 0$.

L'equazione della retta bitangente t alla curva (1), sotto la condizione $8ac - 3b^2 < 0$, si trova semplicemente applicando l'affinità φ^{-1} alla retta t'; si ottiene

$$t : \frac{4abc-b^3-8a^2d}{8a^3}x + \frac{1}{a}y + \frac{16ab^2c-5b^4-256a^3e}{256a^4} = -\frac{1}{4}\left(\frac{8ac-3b^2}{8a^2}\right)^2$$

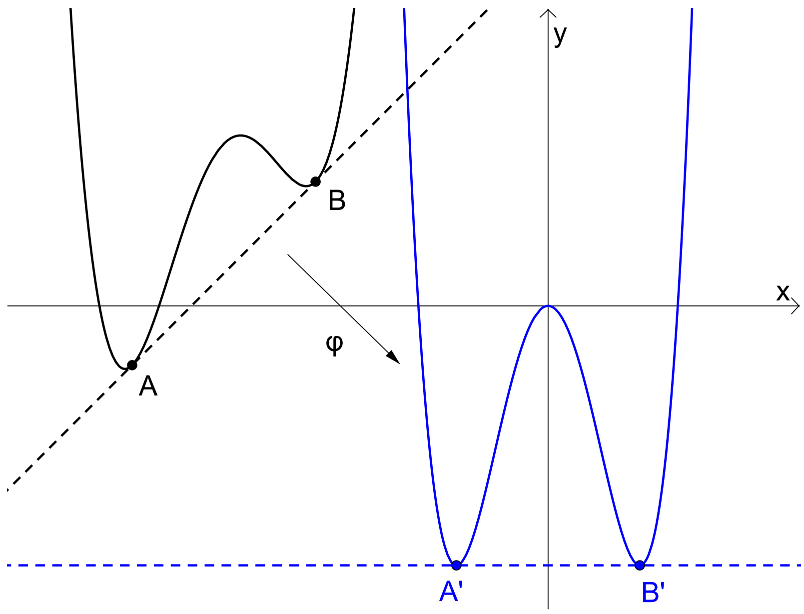
che possiamo scrivere nella più comoda forma esplicita:

$$\boxed{t : y = \left(d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2}\right)x + e - \frac{c^2}{4a} + \frac{b^2c}{8a^2} - \frac{b^4}{64a^3}}$$

Nel caso specifico, la curva $y = \frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 231x + 270$ viene trasformata nella curva $y' = (x')^4 - 4(x')^2$ mediante l'affinità

$$\varphi : \begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = -2x + 2y - 15 \end{cases}$$

e la retta bitangente ha equazione $y = x + \frac{11}{2}$. Si veda la figura.



Osservazione 2. I punti di minimo della curva $y' = (x')^4 - 4(x')^2$ sono $A'(-\sqrt{2}, -4)$ e $B'(\sqrt{2}, -4)$ e coincidono con le immagini, mediante l'affinità φ, dei punti di tangenza A e B. Applicando quindi l'inversa di φ ai punti A' e B' si ottengono le coordinate dei punti di tangenza:

$$A\left(-5 - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) \quad , \quad B\left(-5 + \sqrt{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right).$$

Alternativamente, per determinare le coordinate dei punti A e B è possibile risolvere il sistema

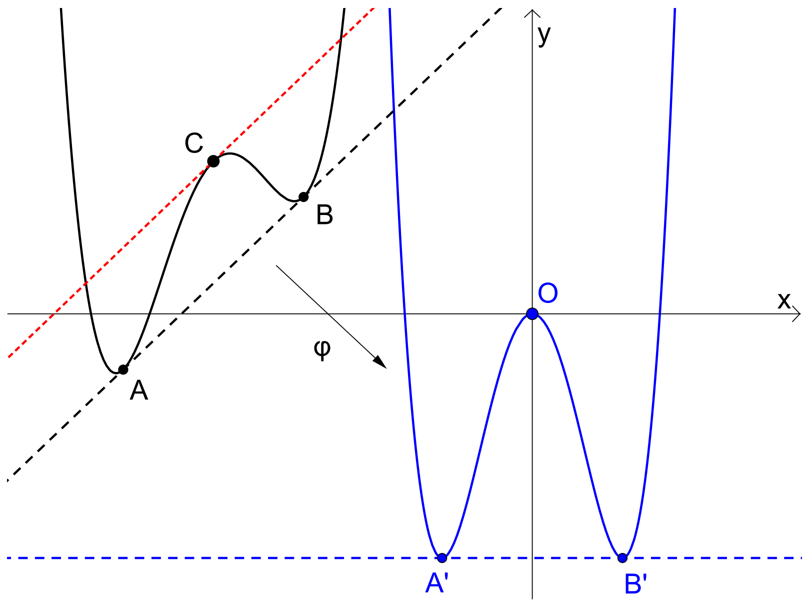
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 231x + 270 \\ y = x + \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 230x + \frac{529}{2} = 0 \\ y = x + \frac{11}{2} \end{cases} ;$$

tenendo conto che si devono ottenere due soluzioni contate entrambe due volte, determiniamo δ e τ in modo che il polinomio $\frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 230x + \frac{529}{2}$ possa essere scritto nella forma $\frac{1}{2}(x^2 + \delta x + \tau)^2$. Svolgendo il quadrato del trinomio e uguagliando i due polinomi si trova l'equazione

$$(10 - \delta)x^3 + \left(73 - \frac{\delta^2}{2} - \tau\right)x^2 + (230 - \delta\tau)x + \frac{529}{2} - \frac{\tau^2}{2} = 0 ;$$

sfruttando il principio di identità dei polinomi si ottiene $\delta = 10$ e $\tau = 23$, da cui $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{2}$. Le rispettive ordinate possono essere ottenute semplicemente sostituendo i valori delle ascisse nell'equazione della retta bitangente.

Secondo metodo. Si supponga $8ac - 3b^2 < 0$. Si osserva che l'origine è l'unico punto della curva (3) diverso da A' e B' in cui la tangente è parallela alla bitangente, quindi la retta tangente alla curva (1) nel suo punto $C = \varphi^{-1}(O)$ è parallela alla bitangente (si veda la figura).



Dal momento che l'ascissa del punto C è $x_C = -\dfrac{b}{4a}$, per determinare la retta bitangente possiamo procedere come segue:

1) si calcola la pendenza m della retta tangente alla curva (1) nel suo punto di ascissa $x_C = -\dfrac{b}{4a}$;
2) si trovano le ascisse dei punti A e B (distinti da C) nei quali la retta tangente alla curva (1) ha pendenza m; non è difficile dimostrare che tali ascisse sono reali e distinte se e solo se $8ac - 3b^2 < 0$;
3) si determina l'equazione della retta che passa per i punti A e B, ottenendo così la bitangente.

Nel nostro caso particolare l'ascissa del punto C è $x_C = -5$ e la tangente corrispondente ha pendenza 1; per cercare i punti della curva in cui la tangente ha pendenza 1 basta imporre che la derivata prima sia uguale ad 1, arrivando così all'equazione

$$2x^3 + 30x^2 + 146x + 231 = 1 \;\Rightarrow\; 2x^3 + 30x^2 + 146x + 230 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + 15x^2 + 73x + 115 = 0;$$

sappiamo che una soluzione è $x = -5$, quindi mediante la divisione polinomiale possiamo riscrivere il polinomio di terzo grado a primo membro nella forma $(x+5)(x^2 + 10x + 23)$. Le radici $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{2}$ del polinomio di secondo grado sono le ascisse dei punti A e B; la bitangente è la retta passante per $A\left(-5 - \sqrt{2}, \dfrac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$ e $B\left(-5 + \sqrt{2}, \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$ ed ha equazione $y = x + \dfrac{11}{2}$.

Osservazione 3. L'ascissa del punto C è l'unica radice della derivata terza.

Terzo metodo. Si tratta di una variante del secondo metodo: una volta calcolata la pendenza m della bitangente (di equazione $y = mx + k$), per determinare k si impone che sia nullo il discriminante (si veda [3]) del polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - (mx + k)$, arrivando così ad un'equazione di terzo grado in k. La soluzione con molteplicità uguale a 2 è quella che corrisponde alla retta bitangente.

Vediamo un'applicazione di questo metodo al nostro caso numerico: la pendenza è $m = 1$ mentre il discriminante del polinomio

$$\frac{1}{2}x^4 + 10x^3 + 73x^2 + 231x + 270 - (x+k)$$

è uguale a $-32k^3 + 592k^2 - 3608k + 7260$ (si veda [3]).
Dal momento che la retta tangente in $C\left(-5, \frac{5}{2}\right)$ alla (1) ha equazione $y = x + \frac{15}{2}$, dividendo il discriminante per il binomio $(2k-15)$ si arriva alla scomposizione

$$-32k^3 + 592k^2 - 3608k + 7260 = (2k-15)\cdot\left(-16k^2 + 176k - 484\right) = (15-2k)\cdot(4k-22)^2\,;$$

la radice con molteplicità uguale a 2 è $k = \frac{11}{2}$ ed in corrispondenza di questo valore si ottiene l'equazione della bitangente $y = x + \frac{11}{2}$.

Quarto metodo. Facendo riferimento all'Osservazione 2, cerchiamo m, k, δ, τ in modo che il polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - (mx+k)$ possa essere scritto nella forma $a(x^2 + \delta x + \tau)^2$ con $\delta^2 - 4\tau > 0$. Si ottiene

$$\begin{cases} b - 2a\delta = 0 \\ c - a\delta^2 - 2a\tau = 0 \\ d - m - 2a\delta\tau = 0 \\ e - k - a\tau^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \dfrac{b}{2a} \\ \tau = \dfrac{4ac - b^2}{8a^2} \\ m = d - \dfrac{bc}{2a} + \dfrac{b^3}{8a^2} \\ k = e - \dfrac{c^2}{4a} + \dfrac{b^2c}{8a^2} - \dfrac{b^4}{64a^3} \end{cases}$$

da cui l'equazione della retta bitangente: $y = \left(d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2}\right)x + e - \frac{c^2}{4a} + \frac{b^2c}{8a^2} - \frac{b^4}{64a^3}$.

Osservazione 4. La condizione $\delta^2 - 4\tau > 0$ diventa $\frac{3b^2 - 8ac}{4a^2} > 0$ ed equivale, essendo $4a^2 > 0$ (si ricordi che $a \neq 0$), a $3b^2 - 8ac > 0$; si ritrova quindi la condizione scritta nell'Osservazione 1.

Sitografia

[1] F. Daddi, *Cubiche e affinità nel piano*, disponibile agli indirizzi
http://www.webalice.it/francesco.daddi/files/cubiche_daddi_francesco.pdf
http://www.matematicamente.it/approfondimenti/83-matematica/5375–sp-4571

[2] C. Sintini, *Bitangenza e affinità*, disponibile alla pagina web
http://digilander.libero.it/santoppe/altri_appunti_miei.htm

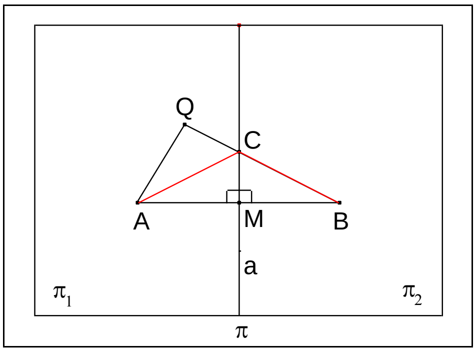
[3] http://mathworld.wolfram.com/PolynomialDiscriminant.html

219. Simmetrie assiali e problemi di minimo o di massimo

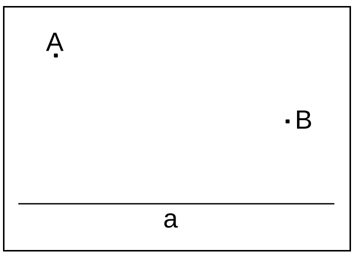
Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it

SUNTO
La rilevanza della simmetria, nel senso moderno d'invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni, nello studio dei fenomeni naturali è accertata e accettata da tempo. In questo piccolo lavoro prospetto l'uso della simmetria assiale nella risoluzione di problemi di minimo o massimo, che si possono presentare al primo o al secondo anno di scuola media superiore. Segnalo innanzitutto che la simmetria assiale riveste un ruolo significativo sia sotto l'aspetto euristico sia sotto quello dimostrativo. Presento due interessanti problemi, uno di minimo, l'altro di massimo, che sono capaci di stimolare l'interesse degli allievi, anche perché possono presentarsi come problemi del mondo reale.

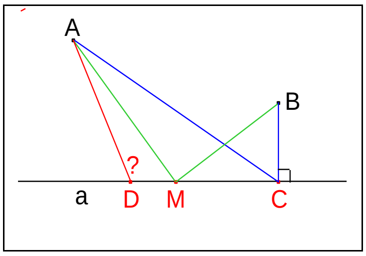
PREMESSA
Intanto facciamo notare che la simmetria assiale trasforma un tragitto spezzato in uno rettilineo che è più semplice da confrontare con altri percorsi.
Riproponiamo la dimostrazione della proprietà:
Se un punto Q non appartiene all'asse di un segmento, allora *non è equidistante dai suoi estremi*: *precisamente ha distanza minore dall'estremo che si trova, rispetto all'asse, nello stesso semipiano cui appartiene il punto Q*.
Di questa proprietà ci si può servire nel trattare la bisettrice di un angolo come asse di simmetria dei lati dell'angolo.
Siano *AB* un segmento di asse *a*, *Q* un punto (figura) che sta nel semipiano π_1 di π individuato da a, cui appartiene *A*. L'occhio suggerisce che $\overline{QA} < \overline{QB}$: proviamolo.
Poiché *Q* e *B* appartengono ai semipiani aperti opposti π_1 e π_2 determinati da *a*, il segmento *QB* interseca l'asse in *C*. Questo è punto unito (perché?) nella simmetria di asse *a*, s_a, nella quale ad *A* corrisponde *B*, quindi: $\overline{CA} = \overline{CB}$. Dobbiamo confrontare $\overline{QA}$ e $\overline{QB} = \overline{QC} + \overline{CB}$. Per la proprietà triangolare $\overline{QA} < \overline{QC} + \overline{CA}$ che è una spezzata, ma $\overline{CA} = \overline{CB}$ e quindi possiamo scrivere, $\overline{QB} = \overline{QC} + \overline{CA}$; in conclusione $\overline{QA} < \overline{QB}$.



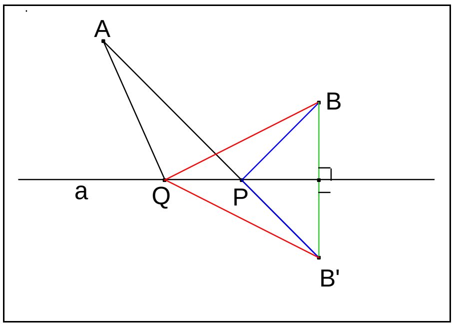
Problema di Erone
Questo problema è stato proposto agli ultimi esami di stato ma, poiché la geometria è colpevolmente trascurata - per usare un eufemismo - è stato spesso ignorato o se n'è data una soluzione analitica, che è come usare una ruspa per smuovere un fuscello.
Obiettivo: Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano aperto rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta.
Prerequisiti: Simmetria assiale, proprietà di partizione, proprietà triangolare.
Si può presentare la situazione mediante il seguente problema tratto dal mondo reale.
In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di un'autostrada *a*. Si deve costruire un casello che serva due cittadine *A* e *B*, che sono dalla stessa parte rispetto *a*.
In quale punto *P* di *a* deve essere realizzato il casello affinché la somma dei tragitti rettilinei *AP+PB* sia la più breve, quindi la più economica? Schematizziamo come in figura la situazione e sollecitiamo i giovani ad suggerire qualche possibile soluzione. I tragitti più gettonati sono:



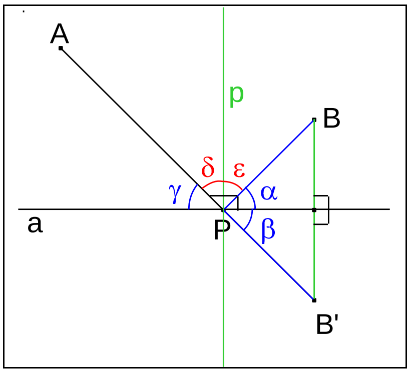
- Tracciamo per B (perché rispetto ad A è più vicino ad a) il segmento di perpendicolare AC ad a e poi il segmento CA.
- (Confuso) Il punto di a cercato è il punto medio M fra A e B su a.



Dopo avere preso un altro punto D su a, tracciati i segmenti AD e DB, chiediamo (inutilmente) la motivazione della loro scelta; facciamo notare che non abbiamo strumenti razionali con cui confrontare le lunghezze delle diverse spezzate che rappresentano i percorsi indicati.
Suggeriamo allora di considerare un punto Q qualsiasi di a e di tracciare i segmenti AQ e QB (figura sotto) e di chiedersi se c'è qualche simmetria che ci può venire in soccorso.
Giovanni allora dice: per l'osservazione precedente c'è la simmetria rispetto ad a, s_a, che permette di trasformare una spezzata in un segmento di uguale lunghezza più facile da confrontare con le spezzate: in particolare costruiamo il simmetrico B'di B nella simmetria rispetto ad a e tracciamo il segmento AB', che interseca a nel punto P e PB simmetrico di PB' in s_a. Da ciò (*)

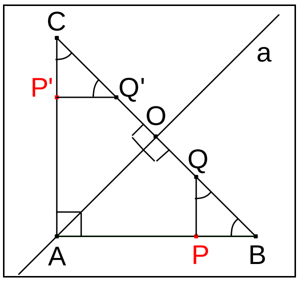


$\overline{PB}' = \overline{PB}$ e quindi $\overline{AB}' = \overline{AP} + \overline{PB}'$ diventa $\overline{AB}' = \overline{AP} + \overline{PB}$.
Prima di andare avanti chiediamo perché il segmento AB' interseca a nel punto P; ottenuta la risposta corretta proseguiamo.
Ricordate che dobbiamo confrontare $\overline{AP} + \overline{PB}$ con $\overline{AQ} + \overline{QB}$. Qualche suggerimento?
Elisa propone: poiché $\overline{AB}' = \overline{AP} + \overline{PB}$, applichiamo la proprietà triangolare ad AQB': abbiamo $\overline{AB}' < \overline{AQ} + \overline{QB}'$ e, poiché (**) $\overline{QB}' = \overline{QB}$ perché simmetrici in $\mathbf{s_a}$, $\overline{AB}' < \overline{AQ} + \overline{QB}$. Allora da $\overline{AB}' = \overline{AP} + \overline{PB}$ segue che $\overline{AP} + \overline{PB}' < \overline{AQ} + \overline{QB}'$.
In conclusione: **il percorso minimo da *A* a *B*, dovendo toccare *a* è determinato dal punto *P* intersezione dell'asse *a* con il segmento AB', con B' simmetrico di *B* rispetto ad *a*.**
È allora nel punto P dell'autostrada che si deve costruire il casello.
È opportuno fare notare che la risoluzione del problema descrive il comportamento della luce quando si riflette.

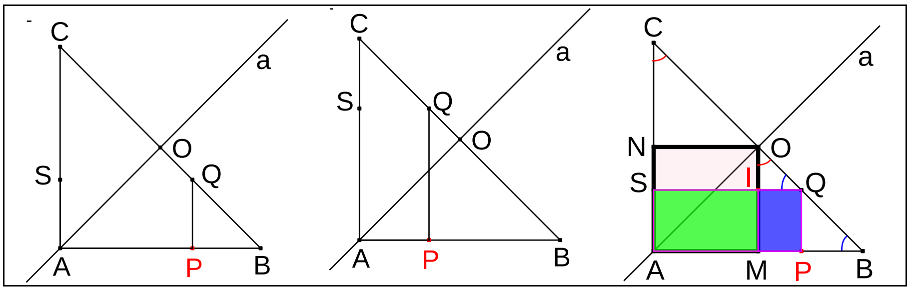


Infatti (figura), α e β hanno la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto ad a e così pure, β e γ in quanto opposti al vertice: dunque α e γ hanno la stessa ampiezza. Indicata allora con p la perpendicolare ad a per P, δ ed ε presentano la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto a p; ma essi rappresentano rispettivamente *l'angolo d'incidenza* e *quello di riflessione* di un raggio luminoso che da A va a B riflettendosi su a:
la legge di riflessione della luce è dunque una legge di simmetria.
A questo punto è interessante porre la domanda: se consideriamo il simmetrico di A rispetto ad a invece del simmetrico di B che succede? Fatelo come esercizio tenendo conto di opportuni angoli di vertice P.
1.
Obiettivo: *Dato un triangolo rettangolo e isoscele determinare il rettangolo di area massima fra quelli inscritti nel triangolo e con un angolo retto coincidente con quello del triangolo.*
Prerequisiti: *simmetria assiale e centrale, punto medio, triangolo isoscele, rettangolo, perimetro, area.*
Anche questo problema può essere esposto prendendo le mosse da una situazione concreta.

Un imprenditore ha un terreno a forma di triangolo rettangolo e isoscele, contornato da due strade lungo i cateti. Vuole costruire un capannone rettangolare che gli serva da deposito in modo che abbia la maggiore area possibile e i cui accessi siano lungo i cateti.



Poiché il triangolo ABC è isoscele possiede….
Alice suggerisce un asse di simmetria nella retta *a* passante per *A* e per il punto medio *O* di *CB*.
Come possiamo costruire uno dei nostri depositi (rettangoli)?
Matteo propone di considerare un punto *P* su *AB* e costruire il segmento *PQ* per *P* perpendicolare ad *AB*. Il triangolo *PBQ* è isoscele sulla base *BQ*, essendo $P\hat{Q}B$ corrispondente di $\hat{C}$ che ha la stessa ampiezza di $\hat{B}$; allora il triangolo *PBQ*, oltre a essere rettangolo è anche isoscele sulla base *QB*, e $\overline{PQ} = \overline{PB}$: quindi $\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PB}$ che è il semiperimetro.
Questo risultato ci assicura che il perimetro rettangolo da costruire, sia *R*, è….
Tiziana afferma p=2 ($\overline{AP} + \overline{PB}$).
Come puoi determinarlo?
Prosegue Tiziana: costruiamo il simmetrico *S* di *P* rispetto al punto medio di *AQ*: otteniamo così il rettangolo *APQS* che è uno di quelli richiesti.
Al variare di *P* (figure sotto) si modifica l'area della superficie di *R*, che diminuisce se *P* si avvicina ad *A* o a *B*, mentre aumenta se *P* è prossimo al punto medio *M* di *AB* e quindi se *Q* è vicino a *O* ed *S* a *N* punto medio di *AC*.



Qualche idea?
Damiano avanza questa congettura: la simmetria della situazione suggerisce di confrontare l'area di *APQS* con quella di *AMON* che risulta un quadrato, poiché è un rettangolo con due lati consecutivi *AM* e *AN* isometrici poiché simmetrici rispetto ad *a*.
Cosa proponete?
Patrizia osserva: se chiamiamo *I* l'intersezione tra *SQ* ed *MO*, il rettangolo *APQS* e il quadrato *AMON* hanno in comune il rettangolo *SION*, è sufficiente confrontare *SION* col rettangolo *MPQI* e provare che *SION* presenta area maggiore di *MPQI*.
Allora Chiara dice: *IQO* è isoscele sulla base *QO* poiché i suoi angoli in $\hat{O}$ e $\hat{Q}$ sono rispettivamente isometrici perché corrispondenti degli angoli $\hat{C}$ e $\hat{B}$; quindi $\overline{IO} = \overline{IQ}$ e $\overline{OM} > \overline{IM}$: allora *SION* possiede area maggiore di *MPQI*.
In forza dell'osservazione di Patrizia il quadrato *AMON* ha area maggiore del rettangolo *APQS*.
Per la simmetria prima evidenziata potremmo usare le stesse argomentazioni prendendo il simmetrico *P'* di *P* su *AC*.
Il risultato ottenuto ci consente di dare una formulazione diversa al problema: **fra i rettangoli di uguale perimetro, quello di area massima è il quadrato.**
Osserviamo infine che i due problemi di minimo e massimo affrontati sono legati alla simmetria. A questa, come abbiamo già visto e come vedremo in seguito, sono spesso riconducibili tali tipologie di problemi.

Giarre 14/12/2014

220. Dinamica di una popolazione

Hume

Premessa

La demografia è lo studio quantitativo delle popolazioni umane; quanti individui, quali le classi di età, i tassi nascita e mortalità, il rapporto numerico tra i generi, la speranza di vita, in che misura queste variabili crescono o decrescono nel tempo. Si ritiene che il primo ad occuparsene sia stato l'economista Malthus alla fine del Settecento. Egli , in base a studi sulle colonie inglesi in nord America, riteneva che la popolazione sarebbe cresciuta in proporzione geometrica, mentre le risorse alimentari sarebbero aumentate in proporzione aritmetica. Da qui la sua convinzione di prossime immani sciagure (a cominciare dalle carestie), a meno di attuare drastiche limitazioni delle nascite. Le sue previsioni si rivelarono fallaci, anche perché il progresso aumentò notevolmente la disponibilità di risorse.
Nel diciannovesimo secolo la demografia cominciò a svilupparsi in modo quantitativo anche con lo sviluppo di modelli matematici. E continuò nel Novecento, anche in seguito alla disponibilità dei calcolatori. Dalla specie umana si dilatò allo studio del regno animale e vegetale, non escludendo virus e batteri. Assumendo la qualificazione *Dinamica delle Popolazioni*. Una tipica e fruttuosa applicazione della matematica alla biologia. Si vide che modelli diversi meglio si adattavano e specie diverse. Ad esempio nello studio dello sviluppo delle foreste si rivelò utile l'equazione di Chapman-Richards.
Un qualunque modello di dinamica della popolazione descrive, al minimo, come varia nel tempo il numero N di individui (maschi + femmine) della popolazione, tenendo conto di nascite, morti, immigrazioni, emigrazioni.
Qui dobbiamo fare una distinzione: alcune specie (ad esempio *Homo Sapiens*) si riproducono in modo continuo, vale a dire le nascite possono avvenire in qualunque istante. La dinamica della popolazione nel tempo viene quantificata con un bilancio istantaneo:

$$\frac{dN}{dt} = f(t, parametri)$$

Il quale altro non è che una equazione differenziale, che richiede di essere integrata per ottenere

$$N = g(t, parametri)$$

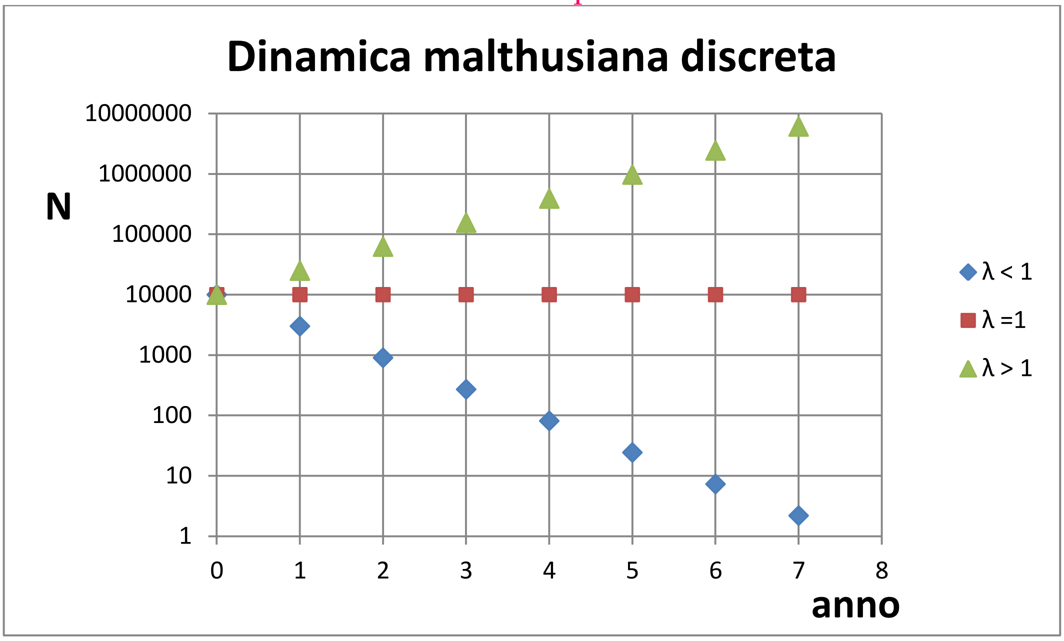
In altre specie, al contrario, le nascite avvengono in determinati periodi dell'anno. Pertanto il bilancio della popolazione si fa ad intervalli di tempo discreti, ad esempio su base annuale. In questo caso il modello è del tipo:

$$N(t+1) = f[N(t), parametri] \qquad (1)$$

Ed è quindi un'equazione alle differenze.
Un tipico modello discreto è quello malthusiano:

$$N(t+1) = \lambda N(t)$$

Dove λ è una costante positiva. Nel caso in cui $\lambda > 1$ la popolazione cresce in modo illimitato (come temeva Malthus). Mentre resta stazionaria quando $\lambda = 1$ e decresce quando $\lambda < 1$.



Lo studio sperimentale della dinamica delle popolazioni ha rivelato che lo sviluppo incontra dei limiti, dovuti all'ecologia: dimensioni limitate del territorio, quantità di cibo disponibile, presenza di predatori, competizione, etc. Questo fatto reale viene preso in considerazione da numerosi modelli dinamici, che prevedono un limite superiore al valore di N.
Un tipico esempio di limitazione si ha con la nota *Funzione Logistica*:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) \qquad (2)$$

Dove r e k sono parametri positivi. Ora sappiamo che $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}}$ misura la variazione istantanea della popolazione. Essa risulta dal prodotto di due termini, il primo, rN, produce una crescita, il secondo, quello tra parentesi, causa una decrescita.
L'equazione è facilmente integrabile, dopo questo passaggio:

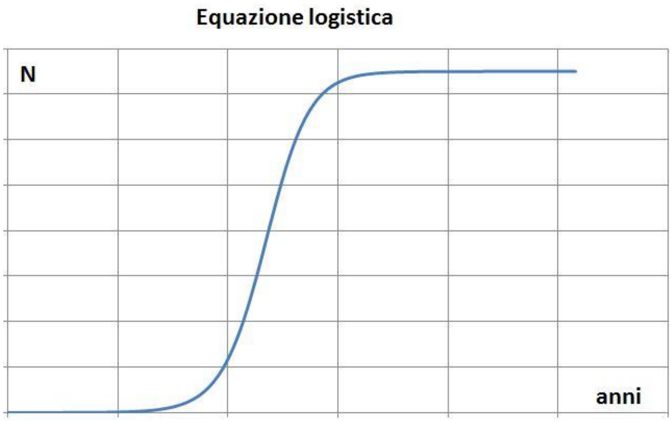
$$\frac{dN}{rN\left(1-\frac{N}{k}\right)} = dt \qquad (3)$$

Con la condizione iniziale: $t=0 \qquad N = N_0$

Si ottiene infine:

$$N = \frac{k}{1 - \frac{N_0 - k}{N_0}\exp\left(-rt\right)}$$

Il diagramma della funzione logistica evidenzia una curva ad *S* con asintoto per $N \to \infty$.
Si vede facilmente che l'asintoto coincide con il parametro k. Che rappresenta il limite superiore alla popolazione.



Dopo questa introduzione vogliamo proporre un problema.

Il problema

Una coppia di uccelli della specie *Edvinus regis* (una rara specie di grande interesse ornitologico, non ancora scoperta) dimorante in un arcipelago del Pacifico, durante un uragano tropicale viene trasportata dai venti, per centinaia di miglia, in un'isoletta sperduta nell'oceano. Qui si stabiliscono e danno origine alla loro discendenza. Per caso un gruppo di ornitologi è presente all'arrivo dei due uccelli e ne registra la presenza come una specie nuova per l'isola. Periodicamente questi studiosi ritornano sull'isola per monitorare le diverse specie di loro interesse e stimano, tramite campionamenti, il numero di individui *Edvinus regis.*

Ecco i risultati delle osservazioni sperimentali nel corso degli anni:

Anno	Ns
0	2
5	18
10	25
15	260
20	580
25	2500
30	3000

Sappiamo che la riproduzione di questa specie avviene una volta all'anno.

DOMANDA 1

Gli ornitologi, dopo molti anni di osservazioni decidono di elaborare la dinamica di crescita di questa specie di uccelli con un modello matematico. Dal momento che la riproduzione avviene una volta all'anno il modello dovrà essere del tipo discreto, come da equazione generale (1) sopra riportata. Sulla base di esperienza precedenti con specie simili si ritiene conveniente adottare il modello logistico sopra descritto. Con l'avvertenza che esso deve essere discretizzato.

Si richiede quindi di:

1) *modificare il modello (2) per renderlo discreto;*
2) *elaborare il modello discreto con i dati della tabella dei dati sperimentali avvalendosi della funzione Risolutore di Excel per ottenere i parametri r e k con il metodo de Minimi Quadrati;*
3) *mediante il modello determinato al punto precedente calcolare la curva di dinamica della popolazione N = f(t, k, r).*
4)

DOMANDA 2

Durante il 32-esimo anno dall'inizio della vicenda, uno stormo della stessa specie, costituito da 2000 individui, si lancia da Tahiti in una migrazione lunga più di mille chilometri e raggiunge l'isola suddetta. In tal modo va ad incrementare il numero di individui Edvinus regis ivi esistenti.

Calcolare e diagrammare la dinamica della specie per gli anni successivi mediante l'equazione della dinamica di popolazione determinata al punto 2 della Domanda 1.

Una soluzione

RISPOSTA 1

La *Funzione Logistica* sopra riportata (2) è in forma differenziale. In modo approssimato possiamo sostituire gli infinitesimi dN e dt con gli incrementi finiti ΔN e Δt. Ora notiamo che $\Delta N = N_{t+1} - N_t$

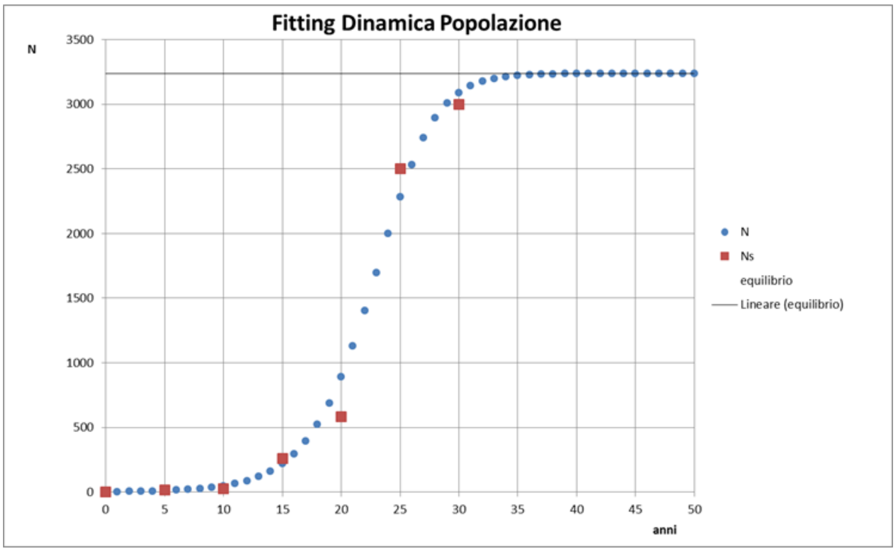
Poniamo ora $\Delta t = 1$ (anno). Si ottiene:

$$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) = (1+r)N_t - \frac{r}{k}N_t^2$$

Le risposte ai punti 2 e 3 della Domanda 1 sono riportate nel file Excel allegato.
In definitiva la dinamica della popolazione è data da:

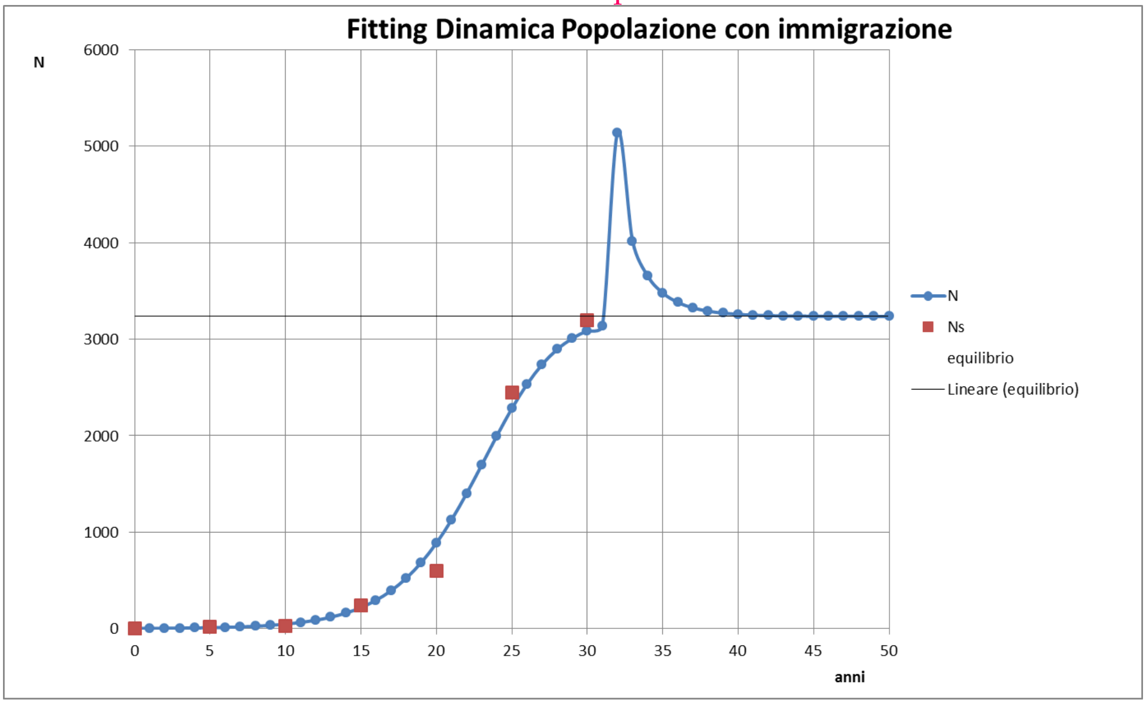
$$N_{t+1} = 1{,}3722\, N_t - \frac{0{,}3722}{3237}N_t^2 \qquad (3)$$

Si nota che il parametro $k = 3237$ rappresenta il numero di individui allo stato di equilibrio nella nicchia ecologica esistente. Questo valore non è un asintoto, ma verrà effettivamente raggiunto dopo un certo numero di anni, nel caso in esame al 45-esimo anno.



RISPOSTA 2

La medesima equazione (3) di cui a risposta 1 può essere usata per determinare il trend della popolazione dopo l'apporto dei nuovi arrivati. Notiamo che nell'anno di arrivo dello stormo la popolazione eccede le 5000 unità, un numero di gran lunga superiore al massimo tollerabile nell'isola(pari a k). Da tale anno dobbiamo aspettarci una decrescita della popolazione. La stessa equazione con i parametri determinati nella fase di crescita si presta bene a determinare il trend nella fase di decrescita. Il file Excel riporta i dettagli.



Occorre fare una precisazione: per risolvere il problema abbiamo fatto, implicitamente, l'ipotesi che l'ecologia dell'isola non cambia nei decenni in cui si svolge la storia. In tal modo è stato lecito ritenere costante il valore di equilibrio della specie. Nella realtà pratica in tale arco temporale si possono verificare cambiamenti non trascurabili nell'ecosistema, che evidentemente influenzano in senso positivo o negativo la dinamica della popolazione.

Allegato
http://www.matematicamente.it/magazine/24aprile2015/220-Hume-dinamica-popolazioni-allegato.xlsx

221. Sulla determinazione delle coordinate geografiche

Michele T. Mazzucato

Too far East is West
proverbio inglese

Per determinare la latitudine φ si misura l'altezza *h* del Sole a mezzogiorno di Tempo Vero Locale e si complementa a 90° aggiungendo (in primavera e in estate) o sottraendo (in autunno e in inverno) la declinazione δ del Sole:

$$\varphi = (90° - h) \pm \delta$$

$\varphi = (90° - h)$ equinozi di primavera e d'autunno
$\varphi = (90° - h) + 23° 27'$ solstizio d'estate
$\varphi = (90° - h) - 23° 27'$ solstizio d'inverno

L'altezza h del Sole si ricava misurando, nell'istante del mezzogiorno in Tempo Vero Locale, la lunghezza σ dell'ombra prodotta da un'asta perpendicolare al piano orizzontale di lunghezza L nota mediante la seguente relazione:

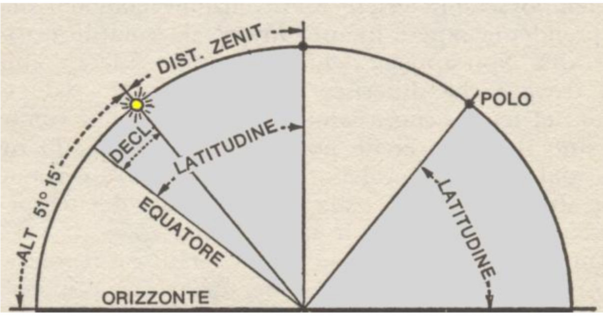
$$\mathrm{tg}h = \frac{\sigma}{L}$$

Per la declinazione δ del Sole si può utilizzare la seguente approssimazione di Cooper

$$\delta = 23.45° \cdot \sin\left[\frac{360(284 + N)}{365}\right]$$

oppure gli sviluppi in serie di Fourier tratti da Ferrari, il cui risultato è espresso in gradi sessadecimali:

$$\delta = +0.3838 + $$
$$+ 23.2623 \cdot \cos(0.9856474 \cdot N - 169.883) + 0.3552 \cdot \cos(1.9712947 \cdot N - 175.526) +$$
$$+ 0.1342 \cdot \cos(2.9569421 \cdot N - 148.378) + 0.0326 \cdot \cos(3.9425894 \cdot N + 2.929) \ldots$$



Rapporto tra latitudine con l'altezza e declinazione del Sole (da Schroeder, 1967).

Mentre il giorno N dell'anno si può ricavare:

per anni ordinari

$$N = int\left(\frac{275 \cdot M}{9}\right) - 2 \cdot int\left(\frac{M+9}{12}\right) + D - 30$$

per anni bisestili

$$N = int\left(\frac{275 \cdot M}{9}\right) - int\left(\frac{M+9}{12}\right) + D - 30$$

Nota: nell'istante di mezzogiorno in Tempo Vero Locale, ossia quando il Sole si trova in culminazione superiore e transita per il meridiano locale, la lunghezza dell'ombra risulta la più corta del giorno.

Per determinare la longitudine λ bisogna:
a) determinare l'ora locale osservando la culminazione del Sole;
b) conoscere l'ora del meridiano di riferimento internazionale;
c) se l'ora locale è maggiore di quella del meridiano di riferimento internazionale ci si trova a EST di questo (sul quale il Sole deve ancora culminare); se minore ci troviamo a OVEST;
d) la longitudine del luogo in cui ci si trova si ottiene dividendo la differenza fra l'ora locale e l'ora del meridiano di riferimento internazionale, espressa in minuti, per 4 minuti.

Nota: il Sole impiega 1 ora per passare sopra 15 meridiani (360 meridiani / 24 ore = 15 meridiani) e 4 minuti per passare da un meridiano all'altro (60 minuti / 15 meridiani = 4 minuti), ossia per coprire la distanza corrispondente a 1° di longitudine e 4 secondi per 1' di longitudine, in tabella:

360° di longitudine =	24 ore
15° di longitudine =	1 ora
1° di longitudine =	4 minuti
15' di longitudine =	1 minuto
1' di longitudine =	4 secondi
15'' di longitudine =	1 secondo

Esempio:

ora di Gw	ora locale	Differenza	longitudine
12h	9h	-3h	180m:4= 45° OVEST
15h	18h 15m	+3h 15m	195m:4= 48° 45' EST

L'istante di Tempo Medio del Fuso (quello segnato dagli orologi) in cui bisogna effettuare la misura in Tempo Vero Locale (in ore):

$$TMF = 12h + (TZ \cdot 15° - \lambda)/15° + Eq/60'$$

$$12h = TMF - (TZ \cdot 15° - \lambda)/15° - Eq/60'$$

L'equazione del tempo Eq in minuti può essere ottenuta mediante gli sviluppi in serie di Fourier tratti da Ferrari:

$$Eq = +7.3670 \cdot \cos(0.9856474 \cdot N + 85.837) + \\ + 9.9182 \cdot \cos(1.9712947 \cdot N + 109.984) + 0.3060 \cdot \cos(2.9569421 \cdot N + 103.642) + \\ + 0.2027 \cdot \cos(3.9425894 \cdot N + 128.678) \ldots$$

legenda

φ = latitudine
h = altezza del Sole
δ = declinazione del Sole
σ = lunghezza dell'asta
L = lunghezza dell'ombra
N = numero dei giorni dall'inizio dell'anno
M = numero del mese
D = numero del giorno
λ = longitudine
TZ = Time Zone = per l'Italia +1 (+2 quando è in vigore l'ora legale)
Eq = equazione del tempo in minuti

Nota: le coordinate geografiche, latitudine e longitudine, si possono ricavare mediante l'utilizzo di un ricevitore GPS mediando misure effettuate ad intervalli di tempo di 10-15 minuti. Dal 2 maggio 2000 è stato rimosso il degrado artificialmente introdotto nel segnale radio trasmesso dai satelliti del sistema pertanto la precisione della misura dipende principalmente dal numero e dalla posizione dei satelliti in visibilità in quel momento e dagli effetti ionosferici. L'apparato fornisce anche l'istante del sorgere e del tramonto con i quali è possibile determinare l'istante del mezzogiorno vero locale (alba + tramonto)/2 e la durata del giorno (tramonto – alba).

Bibliografia

Cooper, P.I., *The absorption of radiation in solar stills*, Solar Energy, Vol. 12, 1969, pp. 333-345
Ferrari, G., *Relazioni e formule per lo studio delle meridiane piane,* Modena 1998
Mazzucato, M.T., *Determinazione approssimata delle coordinate geografiche terrestri*, Matematicamente.it Magazine, n. 16/2011, pp. 25-29
Mazzucato, M.T., *Elementi di Orientamento*, Maggioli Editore, Santarcangelo di Romagna RN 2007
Meeus, J., *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, USA 1991
Tadini, G., *Geografia astronomica applicata*, Hoepli, Milano 1960
Vanin, G., *Misurare la latitudine*, Astronomia UAI, n. 2/1999, pp. 33-39
Vanin, G., *Misurare la longitudine*, Astronomia UAI, n. 3/1999, pp. 44-48

222. Francesca e la sua discalculia

un intervento di recupero dalla scuola dell'infanzia alla primaria

Domenico Lenzi [1] e Roberta Lenzi [2]

Introduzione

Francesca, che ha nove anni e frequenta la quarta classe della scuola primaria, è una bambina a suo tempo diagnosticata come discalculica grave e dislessica.
Quando abbiamo avuto i primi contatti con lei, la piccola non era in grado nemmeno di riconoscere il numero di dita che le venivano mostrate, che ogni volta doveva contare; il che le aveva impedito di acquisire l'automatizzazione delle tabelline dell'addizione e della sottrazione.
Questa è la traccia di un possibile intervento didattico nell'ambito dei primi apprendimenti aritmetici, elaborato sulla base dell'attività effettuata con Francesca, circa due volte a settimana, a partire dal novembre 2014 alla metà di aprile del 2015. La bimba ha reagito bene al trattamento che le viene somministrato. Infatti alla fine di marzo abbiamo ricevuto una sua telefonata con cui ci informava di aver preso nove nella verifica di aritmetica; poi, nel successivo incontro con noi, ci ha comunicato che quel giorno si era offerta per la prima volta di leggere a scuola ad alta voce, prendendo un altro nove. La settimana successiva ha guadagnato un "bravissima" e poi un dieci su attività riguardanti i numeri decimali, seguito da un nove sulle equivalenze.
Qualche giorno fa – siamo a metà aprile - la maestra di Francesca, durante un colloquio con la mamma, ha affermato che a suo avviso la bambina non è più discalculica.
Alcune delle considerazioni teoriche svolte in questo intervento sono ricavate da articoli del primo autore riportati in Bibliografia.

1. Considerazioni generali

1.1. Premessa

Gli alunni affetti da DSA (Disturbi Specifici dell'Apprendimento quali dislessia, discalculia, disgrafia e disortografia) – talora sconosciuti, a volte ignorati e lasciati a se stessi – in Italia hanno un'incidenza di circa un alunno per classe (4-5 %).
Spesso dotati di una notevole intelligenza, hanno la sfortuna di non essere in sintonia con impostazioni didattiche, a volte vecchie e superate, che insegnanti inadeguati – anche a causa della preparazione ricevuta, quasi mai attenta ai problemi dell'apprendimento – non riescono a rimpiazzare con attività più efficaci. Eppure in molte situazioni si potrebbero adottare metodi di insegnamento adatti ai DSA, che siano utili anche agli altri alunni e siano in grado di soddisfare l'ansia di sapere dei bambini. Inoltre per un DSA può essere essenziale una didattica di tipo laboratoriale (qui ne vedremo qualche esempio riferito alla discalculia), purché non scada in un fare approssimativo ed estemporaneo, privo – come a volte accade – di un supporto didascalico semplice e adeguato.

[1] Dipartimento di matematica e fisica dell'Università del Salento, Lecce; domenico.lenzi@unisalento.it.
[2] Tirocinante tutor DSA; Gioia Mathesis Lecce; lrobi.len@gmail.com.

G. Stella e L. Grandi in [22] scrivono: « […] *i DSA, essendo "evolutivi", tendono a migliorare spontaneamente. Purtroppo il momento più grave del disturbo coincide con le maggiori richieste sul piano della letto/scrittura* (*periodo scolastico*) […] ». Come si può evincere anche da ciò che Stella e Grandi dicono in seguito, le loro considerazioni valgono pure sul piano dell'apprendimento aritmetico. In proposito adeguati esercizi di conteggio e di riconoscimento dei numeri – che inizialmente saranno rappresentati tramite le dita – possono rivelarsi molto utili per la conquista degli automatismi tipici di abilità che sono difficili da attivare da parte di un discalculico, ma anche da parte di tanti altri alunni che sono destinati a un rapporto conflittuale con la matematica.

Tuttavia, a nostro avviso, nell'apprendimento matematico gli esercizi – pur importanti – non sempre sono sufficienti a determinare delle soddisfacenti risposte automatizzate, le quali generalmente sono la conseguenza di stimoli attivati da quegli esercizi. Anche perché stimoli di poco differenti – ma finalizzati a un risultato diverso – la cui diversità non venga percepita, potrebbero innescare la vecchia risposta, che non è quella richiesta. Perciò esercizi che non siano legati al solo aspetto procedurale, ma vengano accompagnati – nella fase dell'addestramento – da una giustificazione (per quanto possibile) degli stessi, potrebbero rivelarsi estremamente utili; anche perché quella giustificazione – pur non completamente compresa – a volte è in grado di indirizzare verso la risposta giusta, o di evitare risposte errate.

Per esempio, si pensi agli esercizi sul calcolo del prodotto di due frazioni. Ebbene se uno studente si rendesse conto del modo di procedere (avendo innanzitutto capito cosa significhi moltiplicare due frazioni, cosa di cui quasi mai ci si preoccupa), difficilmente lo trasferirebbe – come spesso avviene[3] - all'addizione di frazioni, le cui ragioni sono del tutto diverse.

Sull'argomento segnaliamo che D. Lucangeli nella Prefazione di [20] afferma: «… insegnare procedure di calcolo a memoria non garantisce dall'errore. »

Tra l'altro, un attaccamento eccessivo a una procedura talora può determinare una sorta di irrefrenabile riflesso condizionato, causando vari inconvenienti; come quello recentemente segnalato da G. Stella, il quale in un seminario ha riferito di una bambina che, posta più volte di fronte alla sottrazione *otto meno cinque*, si affannava pervicacemente a percorrere all'indietro la filastrocca dei numeri partendo dall'*otto*; anche quando questo numero veniva presentato con tre dita di una mano e le cinque dell'altra. C'è poi il caso di un'altra bambina che – nonostante la sua maestra avesse introdotto da diversi giorni, in terza, la procedura di sottrazione in colonna – di fronte a sottrazioni come 25-14 si ostinava ancora nella filastrocca all'indietro 24, 23, 22, 21 … Perciò il rimanere eccessivamente su di una procedura – soprattutto se non è quella definitiva – può essere controproducente.

Qui ci preme anche segnalare atteggiamenti contrari – ma non sufficientemente giustificati – nei riguardi di alcuni materiali didattici strutturati. A nostro avviso, tutto può essere nato da un vecchio articolo didattico di Bruno D'Amore (si veda [4]), da alcuni letto in modo superficiale. Poi il passaparola ha fatto il resto.

Nell'articolo si denunciava soltanto un uso inappropriato di quei materiali; e su questo siamo completamente d'accordo. D'altro canto, i risultati conseguiti da Francesca in ambito aritmetico non possono non essere stati frutto di un accorto uso dei Blocchi Aritmetici (BAM) decimali e dell'abaco, su cui ci soffermeremo al momento opportuno, che hanno fatto capire alla bambina il vero senso della rappresentazione numerica, anche per quel che riguarda l'uso della virgola in riferimento alle misure di lunghezza e alle relative *equivalenze*.

A proposito di BAM, a pag. 14 di [9] N. Galvan e A. Biancardi segnalano un'attività con i Blocchi Aritmetici, condotta da J. Hiebert e D. Wearne (cf. [12]), che si è rivelata particolarmente efficace.

Avviandoci al termine di questo paragrafo, segnaliamo il fatto che alcuni insegnanti lamentano che i loro alunni non comprendano la proprietà commutativa dell'addizione. Ora, a meno che non si tratti di un problema terminologico (legato all'aggettivo "commutativo"!), ciò significa semplicemente che non è stata compresa la genesi della nozione di addizione. Infatti, se inizialmente con 5+3 si intende che partendo da 5 si va avanti di *tre* passi nella filastrocca numerica – che ci si aiuti o meno con la linea dei

[3] Siamo di fronte a un trasfert negativo, ingiustificato. In psicologia generale il transfert, nell'ambito dei processi di apprendimento, è il fenomeno di trasferimento di una proprietà da una situazione a una analoga. In genere, esso facilita nuove conoscenze, che tuttavia vanno verificate. Perciò quando questo processo conduce a errori – come nel caso delle operazioni tra frazioni – è compito dell'insegnante contrastarlo con esempi adeguati.

numeri – è ovvio che non si riesca a capire perché partendo da 3 e andando avanti di cinque passi si arrivi a uno stesso risultato.
In realtà, nella sua prima accezione, l'addizione è legata al mettere insieme gli oggetti di due raggruppamenti distinti, che poi vanno contati nel loro complesso. E agli effetti del contare è indifferente quale dei due raggruppamenti sia stato considerato per primo, dal momento che gli oggetti sono sempre gli stessi; di conseguenza, è indifferente quale dei due numeri che quantificano i raggruppamenti venga considerato per primo. In proposito si osservi la seguente illustrazione, che non necessita di ulteriori commenti.

5 + **3** = **8**

3 + **5** = **8**

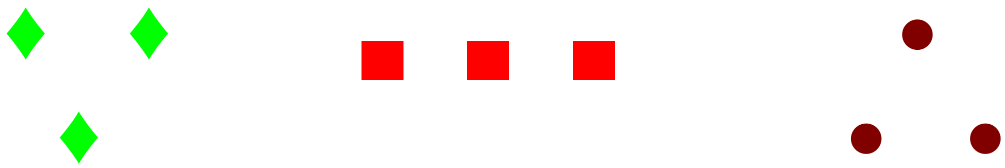
1.2. Le dita, uno strumento indispensabile per imparare a contare

L'uso delle dita in chiave aritmetica può partire in modo sistematico a tre anni, quando i piccoli incominciano a indicare la loro età con il pollice, l'indice e il medio di una mano.
Però già prima sarebbe opportuno intervenire per dare sostanza e sostegno a una naturale tendenza verso il numero, tipica di ogni bambino che incomincia a prendere coscienza di sé e del mondo che lo circonda. Si tratta di attivare potenzialità di cui ogni individuo è dotato grazie alla sua memoria di specie. E non a caso B. Butterworth parla di "cervello matematico" (si veda [1] e [2]).
Allora se le cose stanno così, perché – ci si può chiedere – questo tipo di capacità non si rivela più o meno in maniera analoga in ogni essere umano; così come compare, per esempio, quella di parlare? Ma in realtà si tratta di capacità che sono frutto di ereditarietà genetiche diverse; e molti studiosi le fanno rientrare nel vasto bagaglio degli istinti umani (si veda [3] e [8]); tuttavia questi istinti sono tanto più cogenti – se così si può dire – quanto più antico è il percorso filogenetico che li caratterizza. Se, per esempio, pensiamo all'istinto di sopravvivenza – di gran lunga il più antico, ovviamente – esso si attiva immediatamente alla nascita; così il neonato riconosce facilmente il seno materno e con la bocca va immediatamente alla ricerca del capezzolo, fonte di vita.
Ebbene, come Tullio De Mauro richiama in un'intervista del 1995 (cf. [7]), ci sono alcuni studiosi (Lieberman) secondo cui l'"Homo sapiens" avrebbe imparato a parlare solo dopo tre quarti della sua storia (circa 50 mila di anni fa); mentre secondo altri si deve risalire a circa 300 mila anni fa. Invece, per quel che riguarda le capacità aritmetiche, bisognerebbe far riferimento alla comparsa dell'Homo sapiens sapiens (circa 40.000 anni fa), con i primi reperti – come incisioni di tacche su ossi lunghi di animali – che fanno pensare a rudimentali rappresentazioni numeriche. Anche se ci sono studiosi che fanno

risalire le prime concrete attività aritmetiche, con significativi risvolti sociali, all'avvento del neolitico (circa 10 millenni prima di Cristo).
Inoltre, ogni individuo – già alla sua nascita – è immerso in un universo di parlanti, mentre gli stimoli che egli riceve in ambito aritmetico sono pressoché nulli.
E pensare che K. Devlin, in [8], ci parla di un esperimento condotto da S. E. Antell e D. Keating, psicologi statunitensi, che hanno mostrato – e i loro risultati sono stati confermati da altri ricercatori – che bambini di pochissimi giorni sono in grado di percepire le quantità di insiemi che abbiano al più tre oggetti. Il che fa considerare un po' stupidi alcuni giochini che a volte si vedono su certi libri di prima classe.
È pur vero che – data la maggiore *giovinezza* dell'*Homo mathematicus* – le capacità di tipo aritmetico in molti individui sono più riposte, onde hanno bisogno di essere opportunamente sollecitate. Ma proprio per questo, ciò andrebbe fatto ben prima dell'accesso alla scuola primaria.
Tra l'altro, D. Lucangeli in [20] (p. 26) ha segnalato una ricerca di Le Corre e Carey – del 2007, cf. [13] – che si sono occupati di come a poco a poco i bambini prendano coscienza dei primi numeri. Inoltre, la Lucangeli a pag. 14 di [20] fa una breve sintesi di alcune ricerche condotte sull'argomento.
D'altro canto, bisognerebbe tener presente che quasi tutti gli istinti, se non vengono attivati, finiscono con l'affievolirsi. Si pensi a quanto sia difficile alfabetizzare degli adulti o quanto sia complicato apprendere una lingua straniera da grandi. Si provi anche a immaginare cosa sarebbe di un bambino cresciuto senza stimoli linguistici, per esempio in una foresta.
Recentemente V. Daniele ha elaborato alcuni dati dell'Invalsi, si veda [6], – coordinandoli con informazioni Istat – grazie ai quali ha evidenziato che bambini di regioni in cui la presenza degli asili nido è più elevata, hanno una migliore riuscita in Italiano e in Matematica.
Pur non essendoci uno stretto rapporto di causa ed effetto tra i due tipi di dati, siamo di fronte a un indizio da tenere in stretta considerazione, anche per le considerazioni svolte da Daniele.
Si capisce, allora, che già nella scuola dell'infanzia – che dovrebbe essere resa obbligatoria almeno per un anno, tanto per incominciare – bisognerebbe favorire l'attivazione di semplici ma fondamentali esperienze aritmetiche. E non a caso la Lucangeli – in una conferenza tenuta qualche anno fa nell'annuale convegno matematico di Castel San Pietro (BO) – ha dichiarato che, per quanto riguarda l'aritmetica, i nostri bambini prima dell'accesso alla scuola primaria è come se fossero tenuti nella jungla.
Forse è questa la ragione per cui Jean Piaget riscontrò, a suo tempo, tante difficoltà nei riguardi del Principio di Conservazione delle quantità discrete [4] da parte di bambini d'età inferiore ai sei anni (cf. [21]). E pensare che, ironia della sorte, in molte nazioni i risultati del Piaget hanno determinato l'inizio della scuola dell'obbligo a sei anni.
Con ogni probabilità, la verità è che i bambini normalmente sono immersi in un mondo in cui i confronti di tipo quantitativo sono effettuati in termini spaziali: *più alto*, *meno lungo*, *più grosso*, ecc.; nello stesso tempo, il contare è una cosa talmente semplice che si pensa – a torto – che non valga la pena soffermarcisi più di tanto con i nostri bambini. Però poi molti di questi finiscono con l'avere difficoltà in aritmetica, che potrebbero essere evitate se essi fossero adeguatamente sollecitati.
Significativo è il caso di una mamma che aveva già avviato ai conteggi sua figlia – poco più di tre anni d'età – e che provò a fare un esperimento di tipo piagettiano. Mise di fronte alla bimba alcuni bicchieri e glieli fece osservare per alcuni istanti. Poi allontanò i bicchieri l'uno dall'altro e domandò se la loro quantità fosse rimasta la stessa. La bambina rispose: «mamma, sembrano di più, ma se li conto vedo che sono ancora cinque. ».
D'altro canto, a ogni livello che non sia quello di un corso di laurea in matematica, l'insegnamento di questa disciplina spesso è condotto facendo leva su considerazioni di tipo intuitivo, a volte approssimative e imprecise. Però, per quel che riguarda i primi approcci all'aritmetica, gli aspetti intuitivi riescono a far breccia soprattutto su coloro le cui capacità aritmetiche sono a un livello più superficiale, riuscendo a raccordarsi con queste.
Ovviamente, il primo momento in cui emerge nel bambino un'idea di tipo numerico è quello in cui egli prende coscienza della *singolarità* – che poi sarà legata al numero *uno* – in contrapposizione alla *pluralità*. Ma presto sarà bene che egli acquisti familiarità col tipo più semplice di pluralità: la *binarietà* – portatrice

[4] Questo principio afferma che la quantità di un raggruppamento di oggetti non dipende dalla loro dislocazione nello spazio. Se gli oggetti si avvicinano o si allontanano, la loro quantità resta immutata.

del numero *due* – che scaturisce da una singolarità accoppiata a un'altra. Di questo tipo di pluralità egli ha già molti esempi legati al suo corpo. Perciò gli si farà contare: uno, due occhietti; uno, due piedini; una, due orecchie; una, due manine; una, due gambe; una, due guance … ; ma, naturalmente, anche una, due candeline (nel giorno del suo compleanno); una, due palline; uno, due bicchieri; eccetera. E riuscirà a capire che non importa quale occhio, piede, bicchiere ... si contino per primi: si termina sempre con *due*.
Questa è un'attività che in qualche nido d'infanzia già si incomincia a fare; ma sarebbe bene che anche in famiglia ci si sensibilizzasse in tal senso.
Poi il primo vero e imprescindibile intervento sarà quello dell'*un-due-tre*. E all'alunno si evidenzierà che il contare tre dita, o tre oggetti qualsiasi, è indipendente da come questi siano via via considerati nel conteggio, come è già avvenuto nel caso di due oggetti (o cose) [5].
Quindi in lui a poco a poco emergerà la consapevolezza che, quando siano visibili contemporaneamente, quelli si percepiscono nella loro *trinitarietà*, senza la necessità di contarli (si veda l'illustrazione seguente), come avveniva già nel caso di due oggetti; onde rimarranno in *tre* – e li si vedrà come tali – anche se li si allontana l'uno dall'altro, però facendo in modo che restino percepibili con un colpo d'occhio.
Ciò porta alla presa di coscienza della conservazione della quantità *tre*, primo passo verso l'acquisizione del Principio piagettiano di Conservazione delle Quantità discrete.



Osservazione 1. È noto che la percezione della numerosità di un gruppo di oggetti senza contarli (*subitizing*) va oltre il tre solo se essi siano collocati in posizioni particolari già note, o li si faccia percepire essenzialmente come addizioni del tipo 2+2 (due oggetti e due altri) o 3+1; oppure 3+2, 3+3...
A volte anche la presenza di un elemento superfluo può essere di aiuto. Per esempio, si vedano i due seguenti gruppi di palline.

Sono sette palline in entrambi i gruppo. Ma per quello di sinistra non è facile rendersene conto. Invece nell'altro c'è una lineetta che ci fa capire subito che le palline sono 3+4 (= 7). ■

Presto il bimbo dovrà conoscere i numeri naturali dall'*uno* al *cinque*, e dovrà essere in grado di recitarli nel loro ordine canonico, l'uno dopo l'altro e senza salti.
Però, al fine di evitare inconvenienti – come ci è capitato anche con bambini di cinque anni, che dicevano che il pollice e l'indice indicavano il numero "pistola", dopo che avevano detto che l'indice e il medio indicavano il *due* – è essenziale far capire che per rappresentare il *due* o il *tre* non importa quali dita si scelgano, a parte qualche piccola eccezione – giustificata – che vedremo in seguito. Ciò che serve è che esse vengano contate fino a raggiungere il numero che interessa.
In definitiva, dire tre anni e indicarlo con tre dita, non corrisponde soltanto all'uso di un contrassegno, come per un giocatore di carte che, volendo mostrare al compagno che ha un *tre,* si tocca un orecchio o si gratta il naso; ma quelle dita esprimono una determinata quantità secondo un criterio analitico, in cui ciascun dito svolge un ruolo essenziale. Lo stesso ruolo che presto sarà svolto da cioccolatini, caramelle, eccetera.

[5] Si tratta del Principio di Irrilevanza (o Indifferenza) del modo di scegliere gli oggetti che via via si contano, che vale per tutti i raggruppamenti. Ovviamente, senza tale principio non avrebbe senso contare. Questo normalmente non si dice agli alunni, ed è sbagliato; anche se prima o poi essi arrivano a capirlo da soli, onde l'ultimo numero pronunciato è una sorta di marchio che esprime la quantità (il numero) degli oggetti contati.

Generalmente negli individui prevale la tendenza a una percezione di tipo globale, unificante e poco attenta ai particolari. Questa porta a confrontare ciò che si acquisisce tramite i sensi con quanto si ha nel magazzino della propria memoria; da cui scaturirà – particolare più, particolare meno – l'interpretazione (*percezione*) di quanto i sensi hanno catturato.
Negli adulti questo comportamento spontaneo è dovuto al fatto che esso consente quasi sempre – a parte qualche abbaglio, si pensi alle illusioni ottiche – l'acquisizione di informazioni in maniera più immediata; invece nei bambini è dovuto al fatto che essi inizialmente non hanno altri strumenti di indagine, non avendo ancora attivato – seppure mai ci riusciranno in mancanza di una guida [6], ma a ciò bisognerebbe tendere – le abilità che favoriscono, in caso di necessità, approcci alla conoscenza di tipo analitico, nei quali i singoli elementi che costituiscono un'informazione hanno importanza fondamentale; e ignorarne anche uno solo può portare a notevoli errori: si pensi a cosa succede quando, scrivendo un numero in forma decimale [7], si trascura uno "0" o una qualsiasi altra cifra.
Talora capita di trascurare l'ultima parte di una notizia, poiché quanto si è acquisito è percepito come sufficiente. Cosicché, per esempio, un'informazione quale *Marco ha 3 mele e Giovanni ne ha 2 di più*, viene troncata dopo il "2". E allora il rispondere che Marco ha più mele è un errore che non è imputabile a un deficit in matematica, ma semplicemente a un difetto di percezione o di attenzione.
Una volta che il bambino sarà nel pieno possesso della nozione del *tre*, sarà pronto per il passo successivo, che consiste nell'aggiungere un oggetto a tre altri. Per poi contare: *uno*, *due*, *tre*, *quattro* (dita, o cioccolatini o fiammiferi …). E si terminerà sempre con *quattro*, dato che qualunque sia l'oggetto che si toglie, ne rimangono tre; onde quell'oggetto si associa inevitabilmente a *quattro*.
Il passaggio dal *quattro* al *cinque* avverrà allo stesso modo. Perciò le dita aperte di una mano diverranno l'emblema della quantità *cinque*.
Questo discorso è finalizzato alla rappresentazione dei numeri da *uno* a *cinque* tramite le dita di una mano; che è opportuno abbia come fondamento – per una corretta acquisizione dell'attività del contare – il principio che nel conteggio, a ogni nuovo numero che viene scandito, si aggiunge un altro dito. Perciò, una volta che si sia rappresentato il *tre* con pollice, indice e medio, è opportuno – almeno inizialmente – che il quattro venga rappresentato aggiungendo l'anulare; e non, come spesso si fa, mostrando le dita che vanno dall'indice al mignolo.
Quella descritta è l'inizio della *fase del cinque*, che prevede anche che il bimbo prima arrivi ad automatizzare i calcoli che riguardano addizione e sottrazione che utilizzino le dita di una sola mano, anche per quel che riguarda i risultati, che perciò non supereranno il *cinque* (*intra-cinque*). Poi – superata la precedente fase – si passerà all'automatizzazione di calcoli che per i risultati richiedano anche l'uso di entrambe le mani (*intra-dieci*); perciò sarà bene che i piccoli abbiano imparato a rappresentare – con le dita delle due mani – anche i numeri dal *sei* al *dieci*; e con questi dovranno familiarizzare, prendendo coscienza del fatto che aggiungendo a ciascuno di essi la quantità di dita ripiegate si ottiene *dieci*. Ciò rappresenterà – come vedremo – una base di partenza importante per l'automatizzazione della tabellina dell'addizione, che però dovrà includere anche i risultati dell'addizione entro il diciotto (9+9).

1.3. Una canzone per contare

Naturalmente, è fondamentale che il bambino conosca al più presto la filastrocca dei numeri da *uno* a *cinque*, per poi estenderla rapidamente fino al *dieci*. A questo scopo in [16], per favorirne l'acquisizione stabile, i primi dieci numeri sono stati inseriti in una canzoncina, il cui testo, riportato qui sotto, è stato leggermente modificato e abbreviato. Per semplicità, dei nomi numerici (i *numerali*) è stata usata solo un'abbreviazione, che però aiuta a individuarli. Come nel caso della filastrocca geografica *ma-con-gran-pena-le-re-ca-giù*, che individua i vari gruppi montuosi in cui si suddividono le Alpi: Marittime, Cozie, Graie, Pennine.

Per il blocco *un-due-tre-qua-cin* si possono usare le prime cinque note musicali (*do re mi fa sol*); invece per *sei-sett-o-no-dié* si possono usare le stesse note, ma al contrario (*sol fa mi re do*). Per il resto della canzoncina ci si può arrangiare con una delle tante ariette che si propinano agli alunni.

[6] Per alcuni bambini di cinque anni, l'indice e il medio di una mano rappresentano il tre, considerando inessenziale il fatto che il pollice non sia evidenziato; dato che – verosimilmente – l'indice e il medio (col pollice) sono abituati a vederli nella rappresentazione del *tre*, onde il pollice lo considerano sottinteso.
[7] Salvo diverso avviso, come in questo caso, noi per numeri intenderemo quelli naturali.

L’espediente musicale favorisce l’acquisizione da parte dei bambini dei numerali da uno a dieci – ma in seguito parleremo quasi sempre di numeri – che essi dovranno arrivare a recitare senza salti e trasposizioni. Inoltre, la loro collocazione in due blocchi successivi – per i quali la scala musicale viene usata una volta “in salita” e una volta “in discesa” – serve a favorire nei piccoli l’acquisizione della posizione reciproca di quelli nella loro filastrocca, fino a possederla in forma automatica; avendo percezione immediata del fatto che tre viene prima di cinque, mentre nove viene dopo di sette …, senza la necessità di percorrere la filastrocca.

La canzone del contare

un-due-tre-qua-cin spegni il lumicin
e potrai veder sei-set-o-no-diè

grappoli di stelle che si accendono nel ciel
sembrano fiammelle che risplendono per te

un-due-tre-qua-cin sei-set-o-no-diè
un-due-tre-qua-cin sei-set-o-no-diè

balla conta e canta com'è bello se cantiam
balla conta e canta la canzone del contar

la canzone del contar
la canzone del contar

Osservazione 2. Si tenga presente che generalmente non è facile stabilire automaticamente la posizione reciproca di due elementi rispetto alla loro collocazione in un ordinamento – pur conoscendolo – senza percorrerlo via via, magari parzialmente.
Per esempio, chi sa dire immediatamente – se non è pratico di musica – quale delle due note *la* o *fa* viene prima nella scala musicale? ■

1.4. L'appello numerico

L’appello numerico è un espediente che innanzitutto consente di imparare la *filastrocca* dei numeri che entrano in gioco nel conteggio dei bambini di una classe. Esso presuppone che ciascun alunno memorizzi il numero con cui è indicato nel registro di classe (il suo *nome numerico*). Inoltre, chi abbia un nome numerico diverso da *uno*, dovrà imparare anche il nome numerico precedente. Quindi, al momento dell’appello, il primo alunno dirà ad alta voce *uno*; dopodiché ogni altro bambino pronuncerà il proprio nome numerico non appena avrà ascoltato quello precedente; che, qualora ci sia qualche assente, sarà pronunciato dall’insegnante.
Così, giorno dopo giorno, gli alunni impareranno nel loro giusto ordine i nomi numerici di ognuno di loro; l’ultimo dei quali, ovviamente, è il numero dei bambini della classe. Poi – a partire da un certo giorno – ogni bambino, dopo aver pronunciato il suo nome numerico, andrà a scriverlo in cifre arabe sulla lavagna, a beneficio suo e di tutti gli altri alunni.
Trascorso qualche tempo, l’appello sarà fatto da un bambino, che chiamerà i suoi compagni coi rispettivi nomi numerici, che pronuncerà via via secondo l’ordine naturale. Non importa se le prime volte commetterà degli errori; ci sarà sempre qualche compagno, o la stessa maestra, che potranno intervenire per aiutarlo. E sarà interessante accertare quando tutti gli alunni riusciranno a conoscere, nel giusto ordine, i *nomi numerici* della classe. In seguito l'appello numerico sarà effettuato anche a ritroso.
Ovviamente, i bambini si renderanno conto che quell’appello può effettuarsi allo stesso modo in qualunque luogo si trovi la classe, che essi siano vicini o lontani tra loro, purché siano a tiro di voce. Perciò, una volta che abbiano acquisito il Principio di Irrilevanza dell'ordine con cui si scelgono le cose, gli oggetti o gli individui da contare (prima se ne è parlato in nota)[8], constateranno la validità del Principio di Conservazione delle Quantità discrete per quel che riguarda i bambini della classe, sulla base del fatto che con l'appello numerico ci si arresta sempre sullo stesso alunno/numero, dovunque ci si trovi. Ciò li aiuterà ad accettare tale principio in ogni caso.

8 Salvo diverso avviso, come in questo caso, noi per numeri intenderemo quelli naturali.

2. Interventi su Francesca

2.1. I primi approcci

Molte delle difficoltà incontrate da alunni che non hanno avuto un contatto iniziale con l'aritmetica sufficientemente concreto noi le abbiamo potute riscontrare nella nostra Francesca.

Nei riguardi della bimba la sua ASL aveva formulato, il 22/07/2014, la seguente diagnosi: «… presenta significative difficoltà nell'apprendimento delle strumentalità scolastiche di base che sono causate da un Disturbo Specifico di Apprendimento …». Successivamente, il 05/12/2014, la psicologa clinica che seguiva Francesca – dopo averle somministrato i test AC-MT per la matematica – si è espressa così: «… non si individua alcun cambiamento nella qualità delle prestazioni rispetto alle somministrazioni precedenti[9] ... L'area che presenta maggiore problematicità è la matematica … »

Per quel che riguarda l'aritmetica, la bambina non riusciva a riconoscere le classiche somme fatte con le dita delle mani, che ogni volta doveva contare. Però ciò non le aveva impedito di imparare le procedure di calcolo in colonna delle varie operazioni, che per lei non presentavano difficoltà eccessive, a parte qualche saltuaria dimenticanza nei *riporti* e qualche esitazione nella divisione con resto. Tuttavia lo svolgimento dei relativi esercizi la stancavano enormemente, proprio perché le mancavano gli automatismi riguardanti le varie tabelline, per cui spesso rifiutava di applicarvisi. Ovviamente, non avendo automatizzato l'uso delle tabelline della moltiplicazione, la bambina aveva bisogno di usare la tavola pitagorica. Ricordiamo che la mancanza di automatismi senza adeguati strumenti compensativi – per esempio, la stessa tavola pitagorica per la moltiplicazione o una calcolatrice – tra l'altro può costringere il discalculico a impegnarsi su obbiettivi secondari, spesso facendo perdere di vista quello principale.

Qui sotto riportiamo la tavola pitagorica ridotta inizialmente usata da Francesca. Rispetto a quella classica – che un tempo si trovava nella copertina interna di tutti i quaderni a quadretti, ed è stato un grave errore l'averla soppressa – la tavola ridotta è apparentemente da preferire, dato che in essa ci sono meno risultati da ricordare. Ma ciò è dovuto semplicemente al fatto che, dati due fattori distinti, grazie alla proprietà commutativa è sufficiente riportarne il risultato una sola volta; tuttavia, per ottenerlo, col fattore più grande nella tabella si deve entrare da sinistra, mentre col fattore più piccolo si deve entrare da sopra. Ovviamente, nella tavola manca il fattore *1*, che è inutile, poiché moltiplicare un numero *a* per *1* ci dà come risultato *a*.

		Numero minore							
	×	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Numero maggiore	**2**	4							
	3	6	9						
	4	8	12	16					
	5	10	15	20	25				
	6	12	18	24	30	36			
	7	14	21	28	35	42	49		
	8	16	24	32	40	48	56	64	
	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tuttavia, la tavola ridotta determina qualche inconveniente. Infatti, dovendo rispondere alla domanda "quante volte entra … [10]", mentre nella tavola classica si può procedere sia da sinistra che dall'alto, invece con la tavola ridotta bisogna trovare il modo di procedere adatto. Perciò, una volta che l'alunno si sarà appropriato della commutatività della moltiplicazione [11,] sarà più comodo usare la tavola pitagorica classica.

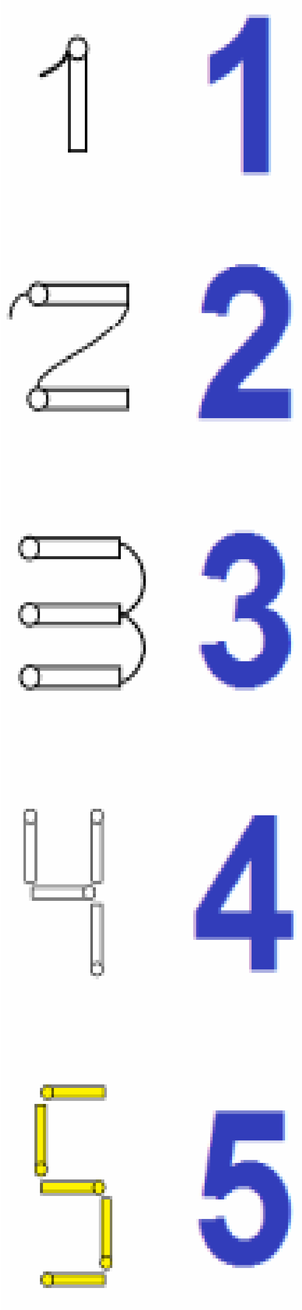
Le difficoltà di base di Francesca ci hanno costretto a inframmezzare, all'attività tipica della sua classe, dei brevi *flash* dedicati alla *digito-aritmetica* e alla parziale ricapitolazione di nozioni e di attività a suo

9 Queste erano state effettuate in data 10/03/2014.

10 Per esempio, "quante volte *cinque* entra in *trentadue*?", tipica della procedura della divisione.

11 Proprietà ovvia, se la moltiplicazione viene introdotta – come si dovrebbe – attraverso gli schieramenti.

tempo condotte forse troppo frettolosamente, che richiedono anche l'uso di oggetti diversi e facili da reperire, affinché la nozione di *numero* non resti agganciata indissolubilmente alle sole dita delle mani, e nello stesso tempo non assuma una dimensione formale, priva di significati concreti, come spesso avviene con bambini che sanno svolgere le operazioni, ma non ne capiscono il perché.



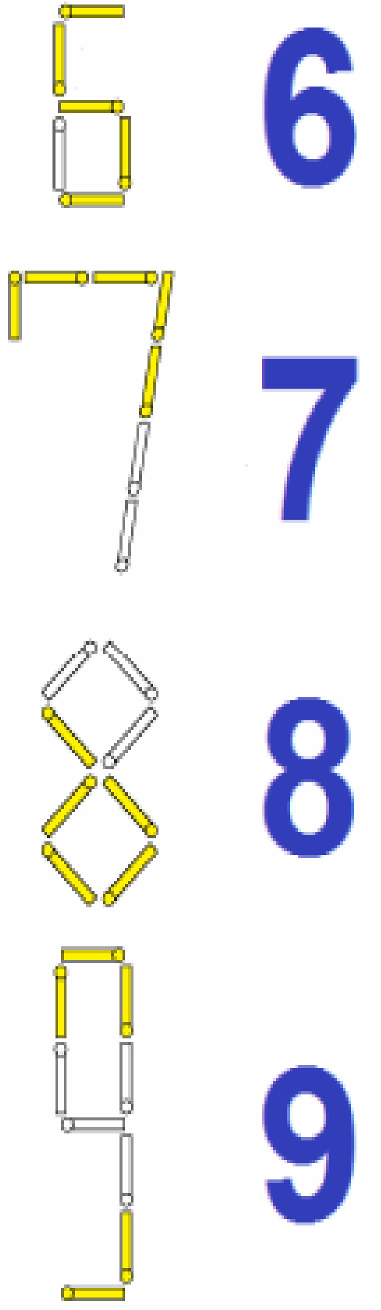


Tavola A **Tavola B**

La ricapitolazione è stata effettuata sulla base del principio che la conoscenza avviene per stadi. E il passaggio a un nuovo stadio può avvenire solo innestandolo sul precedente, senza salti, quando ormai quest'ultimo si è pressoché stabilizzato. Ciò in qualche modo ricorda il Principio dello Sviluppo Prossimale dello psicologo Lev Vygotskij – a cui ci si può riferire parlando di *piccoli passi ragionati* – che ritroviamo nelle evoluzioni stadiali, sia verso l'acquisizione della conservazione delle quantità (Piaget), sia verso l'acquisizione delle abilità di lettura. In particolare, per un dislessico può essere prematuro il cosiddetto trattamento sub-lessicale – che si basa prevalentemente su un'analisi sillabica della parola – se egli non ha ancora conquistato in maniera conveniente lo stadio alfabetico.

Anche se le ultime considerazioni possono sembrare fuori tema, ricordiamo che molto spesso i problemi di discalculia – se sono veramente tali, e non sono problemi nati da un approccio inadeguato alla matematica – si accompagnano a problemi di dislessia; onde il conseguimento di risultati apprezzabili in uno dei due ambiti – soprattutto se efficaci sul piano dell'autostima – si riflettono sull'altro ambito. Ciò è avvenuto con Francesca. Alla base della nostra attività c'è stata la strategia del *"learning by doing"* teorizzata dal pedagogista John Dewey, secondo il quale quando il bambino agisce e opera, allora capisce e impara più facilmente; una strategia che ha ispirato anche la didattica della nostra Maria Montessori.

Nei nostri primi incontri con Francesca – per abituarla a trattare con le addizioni di piccoli numeri, quelli presenti sui dadi – a volte ci siamo serviti anche del gioco dell'oca, in cui la bambina era solita usare un artificio interessante, che le permetteva di non calcolare immediatamente la somma – che evidentemente non conosceva – dei due numeri sorteggiati; senza però che ciò costituisse una perdita di tempo agli effetti del gioco. Infatti se – per esempio – uscivano il *quattro* e il *tre*, allora la bambina si muoveva dalla sua casella provvisoria contando *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, a cui faceva seguire *cinque*, *sei* e *sette*; tra l'altro dando prova di una buona *memoria a breve termine*, in una situazione in cui acquista significatività il fatto di identificarla come *memoria di lavoro*.

All'inizio, per agevolare il ricordo delle cifre numeriche e il loro significato, alla bimba sono state date – in un'unica tavola – le due Tabelle riportate qui sotto, che sono facilmente comprensibili. Si noti, per il *quattro*, che i fiammiferi ne delineano l'usuale forma corsiva. Questa forma è adoperata (come quelle del cinque e del sei) anche nelle cifre degli orologi digitali. Inoltre cinque fiammiferi li abbiamo costantemente colorati in giallo [12]. In fine, nel *nove* i quattro fiammiferi bianchi sono collocati come nel *quattro*.

Facciamo presente che le due tavole andrebbero consegnate già nella scuola materna. La prima all'inizio della fase del *cinque*, mentre l'altra è da consegnare non appena iniziano i conteggi che riguardano tutti i numeri della prima decina.

Tra l'altro, la Tavola B dovrebbe aiutare a distinguere e a fissare i significati delle due cifre *6* e *9*. Naturalmente, si dirà che lo *zero* (il *niente*) si rappresenta come un vassoio vuoto: *0*.

2.2. I listelli colorati

In un primo momento, per agevolare la percezione numerica, sono stati adoperati anche i primi cinque listelli riportati qui sotto in Fig. 1, che – dopo averli ingranditi e plastificati – sono stati consegnati alla bambina, la quale ha provveduto a ritagliarli.

Poi, in una delle tante attività laboratoriali svolte, i listelli di Fig. 2 – che rappresentano i numeri dal sei al nove – sono stati realizzati dalla bimba stessa, incollando al listello del *cinque* quelli di valore minore, in modo che i due listelli attaccati potessero essere assimilati rispettivamente alle cinque dita della mano sinistra e – per la parte minore – alle corrispondenti dita della mano destra.

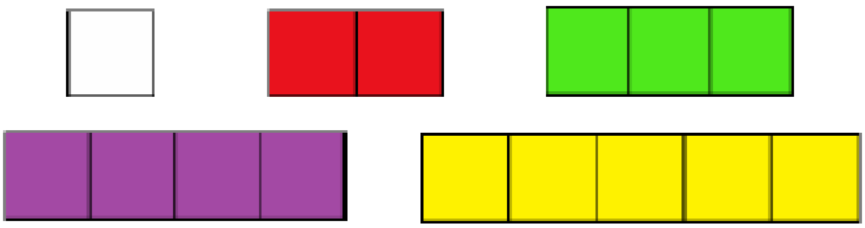


Figura 1 – Listelli numerici colorati da 1 a 5

[12] In [16] è usato il colore rosso, ma qui – per evitare confusioni – abbiamo preferito usare i colori in analogia con i *regoli colorati*, anche se – come si vedrà – noi abbiamo un atteggiamento molto critico nei riguardi di que-sto materiale.

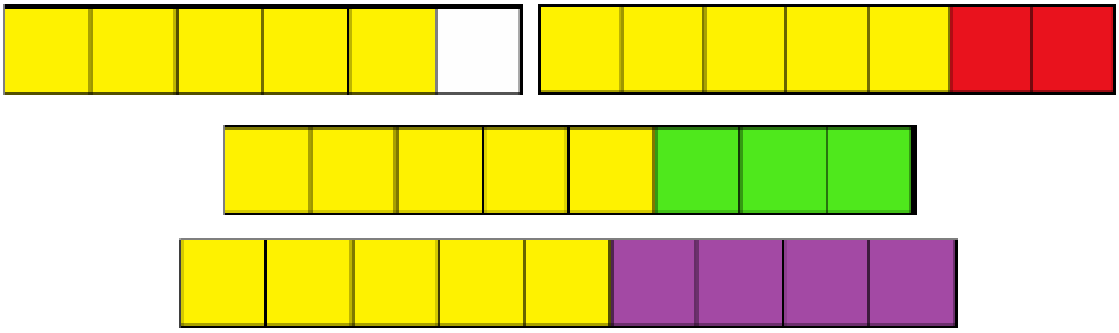


Figura 2 – Altri listelli numerici colorati

Nella nostra attività con Francesca i listelli hanno sostituito i regoli colorati (*numeri in colore*) che vediamo in Fig. 3. Questi nei primi approcci all'aritmetica sono inutili, se non addirittura dannosi. Infatti, essendo privi di suddivisioni, costringono gli alunni a inutili complicazioni mnemoniche. In definitiva, in essi il colore è un mezzo attraverso cui risalire al valore numerico, che invece dovrebbe essere percepito immediatamente.

Figura 3 – I regoli colorati (numeri in colore)

Perciò con i regoli colorati si verifica l'inconveniente tipico di quando non conosciamo bene una lingua straniera. Per esempio, dovendo chiedere del pane in un market inglese, nella nostra mente non si accende immediatamente la parola *bread*, ma arriviamo a essa traducendola dall'italiano.
Invece coi nostri listelli i colori svolgono un ruolo accessorio per il riconoscimento numerico, poiché questo – dopo un po' di pratica – avviene immediatamente, riconoscendo la quantità di quadratini che compongono un listello. Solo in un secondo momento si automatizzerà il riconoscimento anche tramite i colori; così come, a un certo punto, anche le banconote si riconoscono dal loro colore.

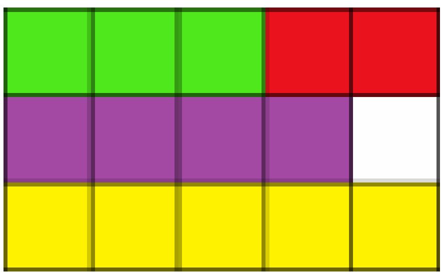


Figura 4 – Un accostamento dei primi listelli

Qui sopra, in Fig. 4, i primi cinque listelli sono stati disposti – avendoli consegnati alla bambina in una

scheda a parte – in modo che ella percepisse facilmente la complementazione rispetto a *cinque*, dopo essersi già esercitata con le dita di una mano.
Quest'attività aiuta a ricordare che *due* è quanto manca a *tre* per ottenere *cinque*, ma pure che *cinque* meno *tre* fa *due*; eccetera. Inoltre i listelli, in sinergia con le dita, favoriscono l'automatizzazione sia delle somme entro il *cinque*, sia – ovviamente – delle somme in cui un addendo è il *cinque*. Più in là vedremo come proseguire.
Per facilitare l'automatizzazione del complemento a *dieci,* la bimba si è anche esercitata – oltre che con le dita – piegando in vari modi la striscia di Fig. 5, costituita da dieci quadratini.

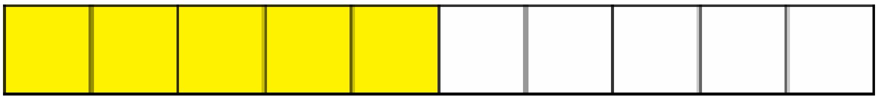


Figura 5 – Un ulteriore listello

Il complemento a *dieci* è utile anche nell'addizione. Ad esempio, per calcolare 7 + 4, generalmente si procede utilizzando la parte della quantità *quattro* che manca a *sette* per arrivare a *dieci* (*tre*); dopodiché, aggiungendo *uno* (la parte rimasta dal *quattro*), si raggiunge *undici.*
Però – in attesa che una procedura come quella vista or ora sia automatizzata – quando almeno uno dei due addendi è inferiore a *cinque* e la somma supera *cinque*, allora si possono allineare i listelli corrispondenti, così come è mostrato nella parte superiore di Fig. 6.

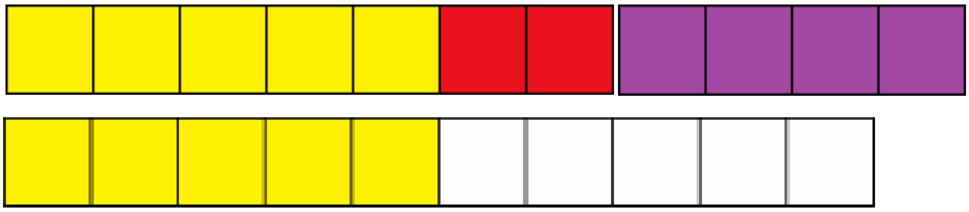


Figura 6 – Un esempio: 7+4 = 11

Quindi il risultato sarà di immediata lettura in riferimento all'altro listello, poiché si vede subito di quanto esso trabocca rispetto al *dieci* di quel listello.
Invece quando i due addendi sono entrambi maggiori o uguali a *cinque* (si veda Fig. 7), poiché i quadratini gialli danno complessivamente un contributo pari a *dieci*, la somma si ottiene aggiungendo a *dieci* il totale dei quadratini residui (il che è riconducibile alla fase *intra-cinque*).
Questo criterio, nel paragrafo 2.4, lo trasferiremo a un particolare uso delle dita, in cui il pollice non esteso dà un contributo numerico pari a *cinque*. Naturalmente, nel caso che i listelli - per varie ragioni - vengano a mancare, l'uso delle dita diventa essenziale.

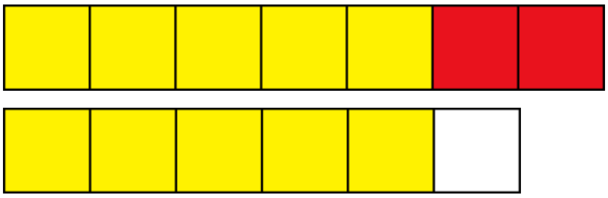


Figura 7 – Un esempio: 7+6 = 13

2.3. Verso le tabelline di addizione e di sottrazione

Per favorire la memorizzazione di altri risultati riguardanti le tabelline dell'addizione – ma anche della moltiplicazione, come vedremo – sono molto utili frasi scherzose e modi di dire. La prima frase usata con Francesca è stata: *Due e due quattro, quattro e quattro otto, mamma ha fatto il risotto; tre e tre sei, cinque e cinque dieci, ma io preferisco pasta e ceci.*
Una volta che la frase è stata memorizzata, strategicamente i precedenti calcoli sono stati espressi con le

due mani [13]. Poi in essi abbiamo aumentato uno degli addendi di *uno* (e quindi anche il corrispondente risultato), dicendo: *un dito in più su una mano e un dito in più in tutto*. Ottenendo così: 3+2 = 5, 4+3 = 7, 5+4 = 9.
In tal modo – poiché avevamo già esaurito il caso in cui un addendo era il cinque – abbiamo pressoché realizzato la tabellina dell'addizione con addendi entro il *cinque*. Infatti, prescindendo dall'ovvio addendo *uno*, restava da aggiungere il solo calcolo 4+2 = 6.
Comunque, il *più due* – in ogni situazione – si realizza facilmente scorrendo di due passi la filastrocca dei numeri. E ciò sarà bene metterlo in evidenza non appena l'alunno avrà capito che una addizionare equivale a scorrere la linea dei numeri a partire da uno degli addendi.
Ciascuna di queste somme – proprio perché riprodotta anche con le dita – ci ha permesso di far osservare regolarmente che se al numero di dita che esprimono una somma si sottrae il numero corrispondente a uno degli addendi, si ricava l'altro addendo. Farlo vedere con le dita è più facile che dirlo. Ed è estremamente importante, in quanto ci permette di realizzare anche le tabelline della sottrazione; che, come vedremo fra poco, si possono realizzare con le dita delle due mani.
Con Francesca ci siamo serviti anche del gioco della *scopa*; però con una possibilità in più, che consente, con una data carta, di prenderne dal tavolo un'altra con la quale abbia come somma *dieci*. Ciò per facilitare la percezione del complemento a *dieci* (*quanto manca a dieci*); su cui la bimba si stava già esercitando con le dita.
Può essere utile esercitarsi anche con lo scopone, in cui le carte vengono distribuite tutte sin dall'inizio (magari limitandosi a quelle entro il cinque o il sei), senza metterne alcuna sul tavolo di gioco. Infatti, onde avere una precisa percezione delle carte che si hanno in mano, queste vanno ordinate dal punto di vista numerico. Inoltre, si farà capire perché il primo giocatore – per poter evitare una scopa – inizialmente metterà in tavola una carta di cui abbia altre carte dello stesso valore numerico.
Per semplicità abbiamo usato le carte da *ramino* senza figure, che sono particolarmente utili poiché riportano in cifre il numero di oggetti (*quadri*, *cuori* …) raffigurati – salvo il caso di un oggetto, che è indicato con A (*Asso*) – contribuendo a favorire la memorizzazione delle cifre numeriche. Così, a poco a poco Francesca ha raggiunto una buona abilità nel trattare i numeri entro la decina, il che le ha consentito di ottenere una sua autonomia con le tabelline dell'addizione e della sottrazione.
In Fig. 8 mostriamo le carte di *quadri* da *2* a *10*. Ovviamente, in esse i *quadri* a cui ci riferiamo sono quelli grandi e non quelli piccoli, vicini al segno numerico.
Da tali carte si ricavano vari esempi di addizioni con risultati che non superano il *dieci*, con semplici somme in cui si percepiscono la proprietà commutativa e quella associativa; come dal *nove di quadri*, in cui si vede subito che 9 = 4+1+4 = 4+4+1 = 1+4+4.
Ora, se osserviamo attentamente le carte di Fig. 8, vediamo che – a parte in quelle del *due* e del *tre* – nelle altre i quadri sono situati prevalentemente su due colonne verticali. In alcune abbiamo anche dei *quadri* situati in posizione centrale.
Però nelle carte *otto* e *dieci* questi sono esattamente due [14]; onde sarebbe stato possibile distribuirli uno nella colonna di sinistra e l'altro nella colonna di destra. In definitiva, in certe carte, i *quadri* sono o si sarebbero potuti distribuire in paia (coppie); il che vale anche per il *due* di *quadri*, dove abbiamo un paio di *quadri* posti in verticale. Questo fa sì che numeri che corrispondono a una quantità di oggetti che si possano distribuire in paia vengano detti *numeri pari* [15]. Invece gli altri numeri (naturali) vengono detti *dispari*; come i numeri che si riferiscono alle carte in cui uno solo dei *quadri* è collocato al centro, risultando perciò spaiato.
Ovviamente il primo numero, l'*uno*, è dispari; mentre il *due* è pari, poiché due oggetti costituiscono sempre una coppia, un paio (un paio di scarpe, un paio di calze, un paio di orecchie ...). Dopodiché, in successione, avremo costantemente un numero dispari e uno pari … ; come si può capire dopo aver svolto alcuni incolonnamenti. Infatti, se in un incolonnamento gli oggetti sono appaiati (in orizzontale) – onde sono in quantità pari – l'aggiunzione di un nuovo oggetto spaia la situazione (e avremo un

[13] Tuttavia, forse è opportuno esprimere con le dita i numeri della frase via via che li si pronuncia.
[14] Con ogni probabilità, in queste carte la disposizione scelta è dovuta a come i *quadri* sono disposte nelle carte di valore più piccolo. Così nella carta *otto* il suo valore si percepisce come 6+2; però è bene far capire agli alunni che i due *quadri* centrali si sarebbero potuti distribuire sulle due colonne laterali.
[15] In molti dialetti "paro" ("paru" nel meridione) significa paio.

numero dispari di oggetti). Però l'aggiunzione di un ulteriore oggetto ripristina la situazione di parità.
Tutto questo è stato evidenziato a Francesca, che si è divertita a cercare di suddividere in due parti uguali vari raggruppamenti realizzati con le sue numerose palline o con i suoi gettoni.

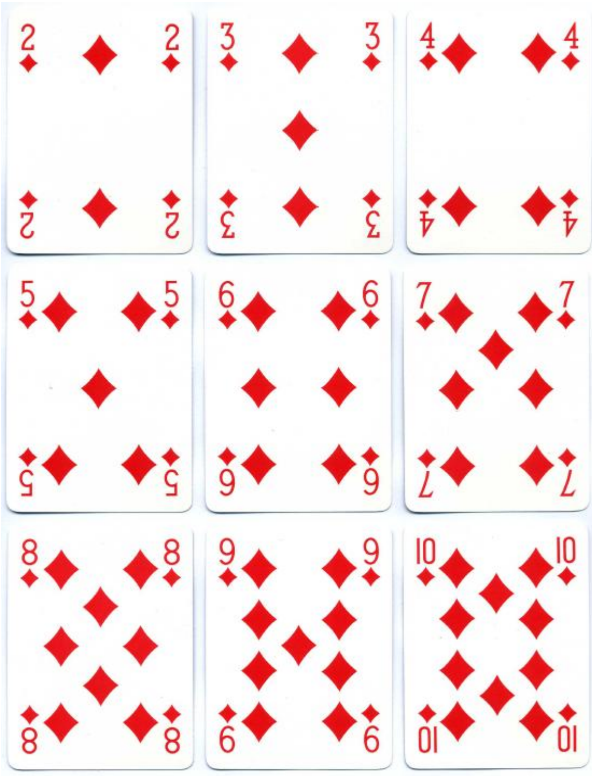


Figura 8 – Alcune carte da ramino

In definitiva, raggruppamenti formati con un numero pari di oggetti sono suddivisibili in due parti uguali, la cui quantità chiamiamo *metà* del *numero pari di partenza*. Invece se un raggruppamento ha un numero dispari di oggetti, si possono avere due parti uguali, però con l'avanzo di un elemento che risulta spaiato. In tal caso la quantità di oggetti di ciascuna di quelle parti si può chiamarla ancora *metà* del *numero dispari di partenza*; ma sarà bene aggiungere l'aggettivo *ridotta*. In tal modo si ha – in chiave vygotskijana – un primissimo approccio alla divisione con resto. Più in là quella *metà* (piena o ridotta) diventerà un quoziente della divisione con divisore *due*.
Le cose dette poco fa hanno aiutato Francesca ad automatizzare la tabellina del *cinque*, per la quale non ci sono stati eccessivi problemi. Infatti – come lei ha potuto verificare con la sua tavola pitagorica – basta prendere un numero di oggetti corrispondente al moltiplicatore e considerarne la metà (intera o ridotta che sia); dopodiché, se il moltiplicatore è pari, allora alla destra di quella metà si aggiunge 0 ($5 \cdot 2 = 10$ [16]; $5 \cdot 4 = 20$; $5 \cdot 6 = 30$; $5 \cdot 8 = 40$) invece, se il moltiplicatore è dispari, allora alla destra di quella metà – per compensarne la riduzione – si aggiunge qualcosa di più grande di 0; precisamente, si aggiunge 5 ($5 \cdot 3 = 15$; $5 \cdot 5 = 25$; $5 \cdot 7 = 35$; $5 \cdot 9 = 45$).

2.4. Dita che parlano

A un certo punto abbiamo abituato la bambina a indicare i numeri compresi tra *cinque* e *nove* con una sola mano in cui il dito pollice risulta non esteso. In tal modo al pollice chiuso si può attribuire convenzionalmente il valore *cinque*. E i numeri da *sei* a *nove* si otterranno aggiungendo a *cinque* il numero di dita distese, che saranno presentate andando via via dal mignolo all'indice. Anche per questo precedentemente abbiamo consigliato di abituare gli alunni a indicare il *quattro* ripiegando il mignolo.

[16] Siccome ci sono alunni che hanno difficoltà a distinguere il segno di addizione **+** dal segno di moltiplicazione x, tanto vale usare direttamente il puntino come segno di moltiplicazione.

Figura 9 – Dita che parlano (1): 6+7 = 10+3

In Fig. 9 sono rappresentati il *sei* e il *sette*; e si vede subito che *sei* più *sette* fa *tredici*, dato che i due pollici danno come contributo *dieci*.
Ma ci sono altri modi significativi di rappresentare con le dita alcuni numeri minori di *cento*. Essi richiedono preliminarmente di distendere le dita di entrambe le mani accostate (si veda Fig.10). Poi se ne ripiegano una o più di una, purché siano consecutive.
Quindi basta considerare le dita situate alla sinistra delle dita ripiegate come se rappresentino delle decine, mentre quelle situate sulla destra delle dita ripiegate sono da considerare come delle unità. Perciò, se si ripiega il solo anulare della mano sinistra, poiché alla sua sinistra ci sono *tre* dita (per un valore di *tre* decine), mentre alla sua destra ci sono *sei* dita (*sei* unità), allora il numero rappresentato è *36*.

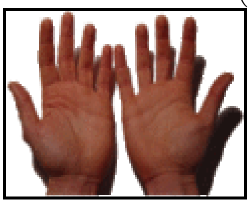


Figura 10 – Dita che parlano (2)

Ovviamente, se si ripiegano il pollice e l'indice della mano sinistra[17], il numero rappresentato è 8, dato che non ci sono decine; mentre se si ripiegano pollice e indice della mano destra, il numero rappresentato è *80*, poiché non ci sono unità.
È chiaro che i numeri rappresentabili in tale modo sono tutti quelli per i quali la cifra delle decine e quella delle unità hanno come somma un numero più piccolo di *dieci*. Per esempio, se i numeri sono 35, 42, 16 e 7, allora le loro rappresentazioni sono quelle situate in Fig.11; dove i segni ▌ rappresentano le dita distese, mentre i segni □ rappresentano le dita chiuse.
Il segno | è usato per facilitare i conteggi, separando i due gruppi costituiti dai cinque segni che rappresentano le dita di ciascuna mano.

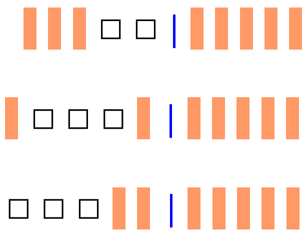


Figura 11 – Dita che parlano (3)

2.5. Ancora su addizione e sottrazione

In questo paragrafo vogliamo approfondire vari aspetti riguardanti l'addizione e la sottrazione.
Facciamo presente che, in un primo approccio è fondamentale vedere l'addizione in termini insiemistici; al di là di tanti surrogati che, se si trascura la genesi insiemistica, a volte possono risultare anche dannosi. In vero, l'essenza di quest'operazione sta nel mettere insieme due o più aggregati disgiunti. Anche se poi nella terminologia i due numeri che entrano in gioco sono chiamati *addendi*; il che vuol

[17] Ovviamente, il discorso riguarda individui che non abbiano un difetto di lateralizzazione: la difficoltà nel distinguere le due parti destra e sinistra.

dire che, di fatto, si aggiungono l'uno all'altro. Anzi, alcuni studiosi distinguono tra i due numeri in questione, chiamando il primo *augendo* (da accrescere) e chiamando *addendo* il secondo, che si va ad aggiungere all'altro.
L'approccio insiemistico è stato necessario riproporlo alla nostra Francesca, anche al fine di ritornare successivamente su alcune proprietà significative della sottrazione e della moltiplicazione. Per esempio, anche se il termine "sottrazione" è legato all'azione del togliere – come inizialmente avevamo fatto vedere operando su gettoni e palline, che la bimba possedeva in abbondanza – è pur vero che ciò che resta esprime quanto si deve aggiungere (*quanto manca*) a ciò che si è tolto (il *sottraendo*) per riottenere la quantità di partenza (il *minuendo*). Ciò giustifica etimologicamente il termine "differenza", usato per indicare il risultato della sottrazione. E proprio su questa duplice veste si basa la *prova* di tale operazione. Infatti, risulta 8-3 = 5 così come 3+5 = 8 (la prova!).
Però, in un secondo momento, il permanere sulla fase del "mettere insieme" può costituire un freno per l'evoluzione del concetto di addizione, se questa non è ben guidata; inducendo l'alunno a ricontare, nel loro complesso, tutte le dita o le palline (o altri oggetti) che esprimano gli addendi. Ragion per cui – per esempio – a volte la maestra, dovendo calcolare 4+3, dice all'alunno: *Il quattro in testa, poi vai avanti di tre numeri*. Quello esegue – come faceva Francesca nel gioco dell'oca – ma spesso non capisce perché debba fare così (invece la bambina aveva capito).
A ciò si può ovviare attraverso *la linea dei numeri* – di cui in Fig. 12 diamo un esempio – dove si può notare che i numeri posti al di sotto delle palline blu servono a dare loro un nome, ma consentono anche di contarle a partire dalla prima pallina blu di sinistra. Infatti, per esempio, dalla pallina 1 alla pallina 5 si contano *cinque* palline.
Perciò, per calcolare 5+3, basta partire dal 5 – che sulla linea corrisponde ad aver fissato *cinque* palline blu – e prenderne altre *tre*, contandole dopo la pallina del *5*. Allora il fatto che si arrivi a *8* ci dice subito che abbiamo preso in tutto *otto* palline; quindi *8* si ottiene come *5+3*. E tale risultato lo abbiamo ottenuto semplicemente scorrendo la linea dei numeri di tre passi a partire da 5.

Figura 12 – Linea dei numeri

Così l'approccio insiemistico rimane salvo e non risulta alterato: si è semplicemente evoluto mostrando una nuova e importantissima faccia dell'addizione. Poi l'aspetto insiemistico di tale operazione riemergerà in tutta la sua importanza nel momento in cui si introdurrà la moltiplicazione.
Con *la linea dei numeri* si ritrovano facilmente le due facce della sottrazione a cui si è già accennato. Per esempio, *8-3* può essere visto come il risultato del sottrarre le ultime *tre* palline alle prime *otto*, onde si arriva sul *5*, che ci dice che le palline residue sono *cinque*. Ma nello stesso tempo sulla linea dei numeri si vede che queste *cinque* palline insieme alle altre *tre* ci danno *otto*; onde esse sono quanto manca a quelle *tre* per ottenere le *otto* palline di partenza.

Concludiamo questo paragrafo con la proprietà invariantiva, una delle più importanti per la sottrazione. Affinché se ne abbia piena coscienza, è bene che ci si disponga verso quest'operazione in termini di differenza (*quanto manca?*), che può essere anche *zero* (*niente*, ma in tal caso la proprietà è banale).

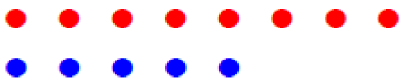
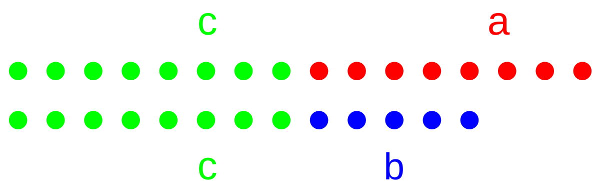


Figura 13 – Palline e proprietà invariantiva della sottrazione

La precedente Fig. 13 permette di rendersi conto facilmente di questa proprietà, senza defatiganti esercizi su esercizi. Infatti, se sulla prima e sulla seconda fila di palline aggiungiamo o togliamo sulla sinistra uno stesso numero di palline – conservando gli allineamenti in colonna – la differenza tra le quantità di palline della prima e della seconda fila non cambia, poiché è comunque data dalle ultime tre

palline rosse della prima fila.
In termini più completi, può essere utile anche la precedente illustrazione, in cui ciascuna lettera sta a indicare il numero di palline che hanno il suo stesso colore. Numero che non si percepisce a prima vista, ma che richiederebbe un conteggio; che però è inutile, dato le palline rosse in eccesso rimangono sempre le stesse, a prescindere dai numeri in gioco.



Strategie per la sottrazione. Il complemento a 10 facilita notevolmente il calcolo delle sottrazioni. Infatti, per ricavare 23-8 non occorre, secondo l'usuale procedura del prestito, formare il 13 mettendo una decina accanto al 3; ma quella decina può essere usata autonomamente, considerando il complemento di 8 a 10, aggiungendolo poi a 3. In alternativa, in una prima fase, dal 23 si può sottrarre soltanto 3 – che è una parte di 8; onde la parte residua 5 sarà sottratta da una decina.

Queste due strategie liberano gli alunni dalla necessità di automatizzare il risultato di ben trentasei sottrazioni [18] nelle quali il minuendo è compreso tra 11 e 18 (11-2, 11-3, 11- 4, …17-8, 17-9, 18-9), collocando la tabellina della sottrazione nell'ambito delle dita delle due mani.

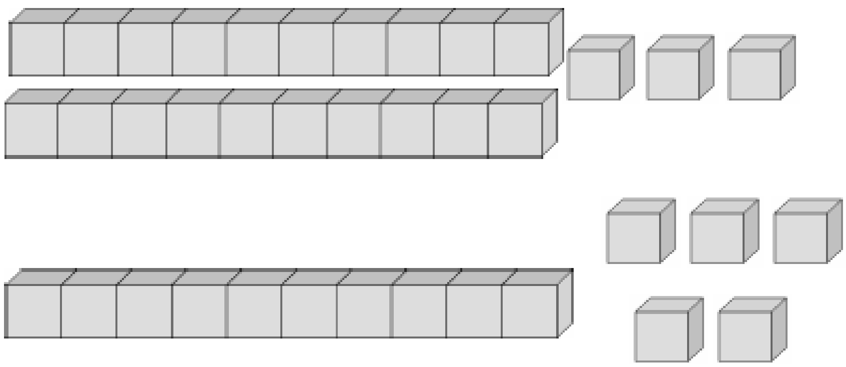


Figura 14 – Alcuni aggregati BAM in base decimale

Francesca – posta di fronte a quella sottrazione in termini materiali – avendole presentato i blocchi riportati nella parte superiore di Fig. 14, ha preso il *lungo* decimale e lo ha sostituito con i due cubetti che di esso rimanevano dopo avergli sottratto otto cubetti; ottenendo così la situazione illustrata nella parte inferiore di Fig. 14. Il che si fa di solito quando la situazione è espressa in euro [19]. Ma allora perché complicare le cose con gli inutili *prestiti*?

2.6. Blocchi Aritmetici decimali e Abaco

I BAM visti prima, insieme a quelli delle centinaia e delle migliaia, denominati rispettivamente *piatto* (si veda Fig. 15) e *cubo*, analoghi a quelli delle *basi due* e tre (riportati successivamente in Figg. 17 e 18), sono stati essenziali per far capire a Francesca qual è la vera natura della rappresentazione numerica decimale. Infatti, dopo che le era stato dato un certo numero di Blocchi decimali di vario tipo, la bambina si divertiva a raggruppare a dieci a dieci quelli dello stesso valore numerico, poi sostituiva ciascun raggruppamento ottenuto con un blocco del livello successivo; il che era come saldare i Blocchi precedentemente raggruppati.

[18] Non consideriamo differenze come 10-1, 10-2 … riconducibili alla complementazione. Si tenga presente che trentasei sono anche i prodotti presenti nella tavola pitagorica ridotta; che tanti problemi procurano agli alunni.
[19] Si pensi a due banconote da dieci euro e tre monete da un euro, da cui si debbano sottrarre otto euro.

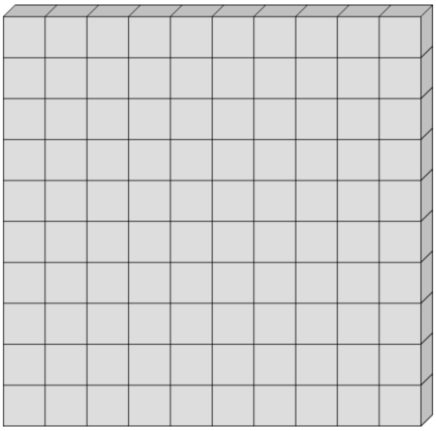


Figura 15 – Un piatto decimale

A conferma di ciò, dopo aver raggruppato dieci lunghi decimali (decine), prima di sostituirli con un piatto decimale (centinaio) – rappresentato in Fig. 15 – la bambina li collocava su quest'ultimo pezzo, verificando che quei dieci lunghi collimavano perfettamente con esso.
Dato che l'attività coi blocchi decimali a volte, in uno stesso incontro, si svolgeva in concomitanza con attività connesse con l'addizione di numeri inferiori a *dieci*, a un certo punto – per la realizzazione dei lunghi decimali – abbiamo incominciato a usare anche dei blocchi presi in prestito da altre basi, nei quali ci fosse un quantità di cubetti inferiore a *dieci*. Come esempio, si considerino i Blocchi di Figg. 17 e 18 (escludendo il cubo della base tre, in cui sono aggregati 27 cubetti). Perciò, con quei Blocchi, Francesca a volte otteneva la decina come 4+4+2, altre volte come 3+3+2+2, altre ancora come 8+1+1.
È chiaro che lo stesso tipo di attività si può svolgere con gli euro; come talora abbiamo fatto con la bambina, a cui inizialmente abbiamo consegnato anche banconote da venti e da cinque euro, nonché monete da due euro, che però doveva aggregare in tagli monetari di tipo decimale.

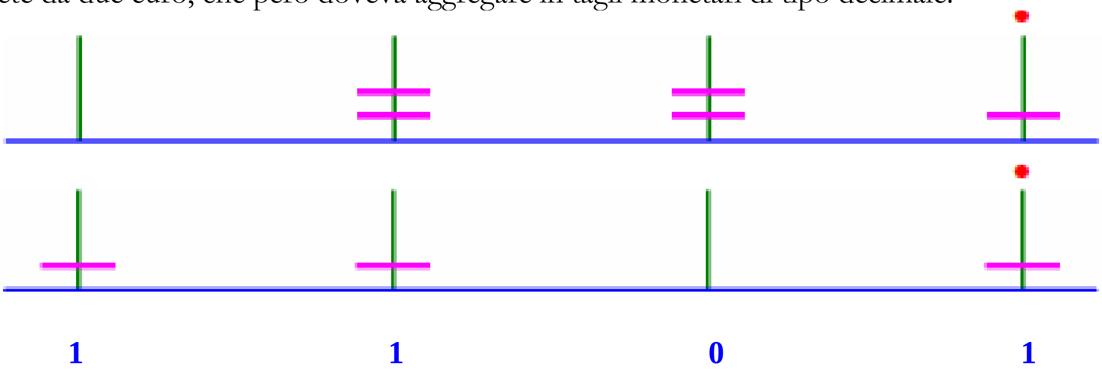


Figura 16 – Abaci

Al termine, quando *non c'era* più la possibilità di effettuare altri raggruppamenti di Blocchi [20] – onde eravamo giunti a un'*aggregazione speciale* – Francesca registrava tutto su di un abaco: un anellino sulla prima asticella da destra per ogni unità/cubetto residuo, un anellino sulla seconda asticella da destra per ogni decina/lungo residua, e così via.
In proposito si vedano gli abaci riportati qui sopra in Fig. 16. In essi al di sopra della prima asticella di destra è stato collocato un pallino rosso, che in abaci concreti è una sorta di cappuccetto. Questo, nel caso di un difetto di lateralizzazione, aiuta a riconoscere quale sia l'asticella delle unità (cubetti); onde la registrazione prosegue allontanandosi via via da quella.
Dalle cifre situate al di sotto del secondo abaco si capisce che esse servono semplicemente a indicare quanti anellini rosa sono infilati in ciascuna asticella. Perciò Francesca ha capito che la cifra *0* è importante come tutte le altre e non si può sopprimere, poiché essa esprime un *niente* relativo a un'asticella dell'abaco: uno *status* di quell'asticella. Negli abaci di Fig. 16 sono stati registrati rispettivamente 221 e 1101 cubetti.

[20] Come quando si ha una quantità di euro che non sia possibile aggregare in tagli monetari maggiori.

La bambina è stata fatta passare più volte dalla rappresentazione con l'abaco a quella grafica – che si riduce a scrivere l'una dopo l'altra e nello stesso ordine le cifre relative alle varie asticelle – affinché per lei permanesse un riferimento subliminale sia nei riguardi del raggruppamento speciale rappresentato, sia nei riguardi della totalità iniziale di cubetti.
È forse superfluo raccomandare che la procedura in colonna dell'addizione venga svolta dopo che l'attività descritta poc'anzi sia stata assimilata dagli alunni. Ciò permette loro di rendersi conto delle ragioni che sono alla base dei vari modi di procedere. Per gli abaci di Fig. 16 – con le due aggregazioni speciali che essi rappresentano – mettere insieme i blocchi delle due aggregazioni corrisponde a mettere insieme anellini che sugli abaci occupano asticelle omologhe che sono di competenza di quei blocchi.
Ovviamente, in casi diversi da quello precedente, l'aggregazione "somma" potrebbe non essere speciale, in quanto potrebbero essere stati messi insieme più di nove Blocchi di uno stesso tipo, onde sull'asticella corrispondente verrebbero ad esserci più di nove anellini. In tal caso si procede con le dovute aggregazioni di dieci blocchi omologhi. Quindi ognuna di queste aggregazioni forma un blocco del livello successivo; e ciò corrisponde a sostituire dieci anellini dell'asticella corrispondente con un anellino dell'asticella successiva (il riporto!).
In definitiva, si sfrutta il fatto che quantitativamente ogni anellino in un'asticella rappresenta la stessa quantità che dieci anellini nell'asticella precedente, semplicemente perché il blocco che esso indica corrisponde a dieci blocchi immediatamente più piccoli.
Questa considerazione è essenziale in alcune sottrazioni. Infatti, ci è capitato di vedere insegnanti in difficoltà di fronte a una sottrazione del tipo 2003-8, dato che alla sinistra del 3 sembra non esserci alcuna decina da utilizzare; perciò temono che gli alunni non riescano a percepire le decine presenti nelle *due* migliaia di 2003. D'altro canto, per quanto detto precedentemente, è chiaro che delle *due* migliaia, una si può "sciogliere" in *dieci* centinaia; che poi rimangono in nove, poiché una di esse viene "sciolta" in *dieci* decine, che a loro volta rimarranno in nove, poiché a una di esse viene sottratto 8... .
Tutto ciò può essere svolto sull'abaco.
Sulla carta la precedente procedura si svolge materialmente trasformando il 2 in 1, i due 0 in 9 (semplicemente aggiungendo loro una zampetta) e sovrapponendo un 10 all'ex primo 0 da destra, a cui sarà sottratto l'8; così si ricaverà 2, che sarà aggiunto a 3.

2.7. Blocchi aritmetici e basi piccole

Nelle classi iniziali della scuola primaria, come si faceva un tempo – ma forse anche con bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia – l'uso di BAM e Abaci nei modi presentati prima sarebbe bene che fosse preceduto da attività riguardanti basi piccole quali *due*, *tre* (vedere Figg. 17 e 18, dove sono rappresentati i blocchi relativi a queste basi, cf. [14]). Spesso in queste basi le quantità di cubetti dei vari pezzi che entrano in gioco si percepiscono con un colpo d'occhio rassicurante, senza la necessità di contare; cosa che generalmente costituisce un momento di distrazione rispetto a quanto si vuole mostrare in concreto all'alunno.
Per esempio, nel *piatto* di Fig. 18 si vede che i *lunghi* che lo costituiscono sono *tre*. Invece nel *piatto* decimale di Fig. 15, il fatto che esso sia costituito da dieci *lunghi* (decine) lo si può accertare soltanto con un conteggio.

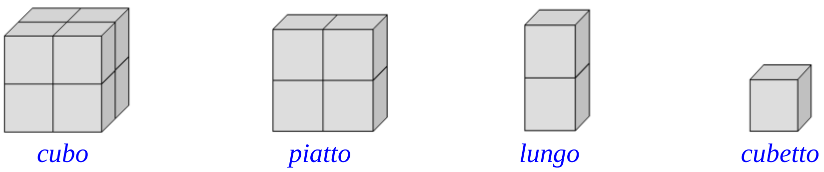


Figura 17 – I blocchi della *base due*

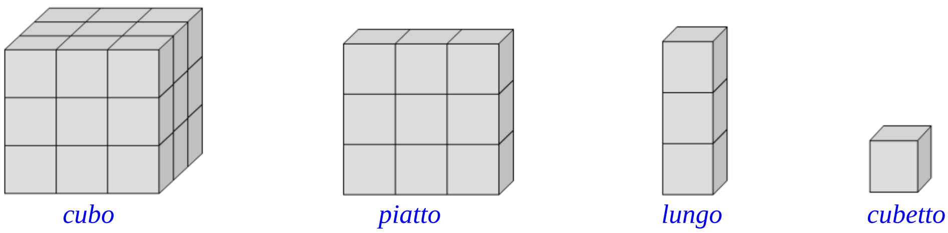


Figura 18 – I blocchi della base tre

Nella sottostante Fig. 19 vediamo come, in un crescendo vigotskiano, siano state prima aggregate in *base tre*, e poi rappresentate su di un abaco, diverse quantità di cubetti; poi sotto a ogni abaco è stata attuata una prima forma di rappresentazione grafica delle quantità di cubetti aggregati. Onde in *base tre* i numeri in gioco sono rispettivamente:

— = 0 —   — 0 — =   = = = 0

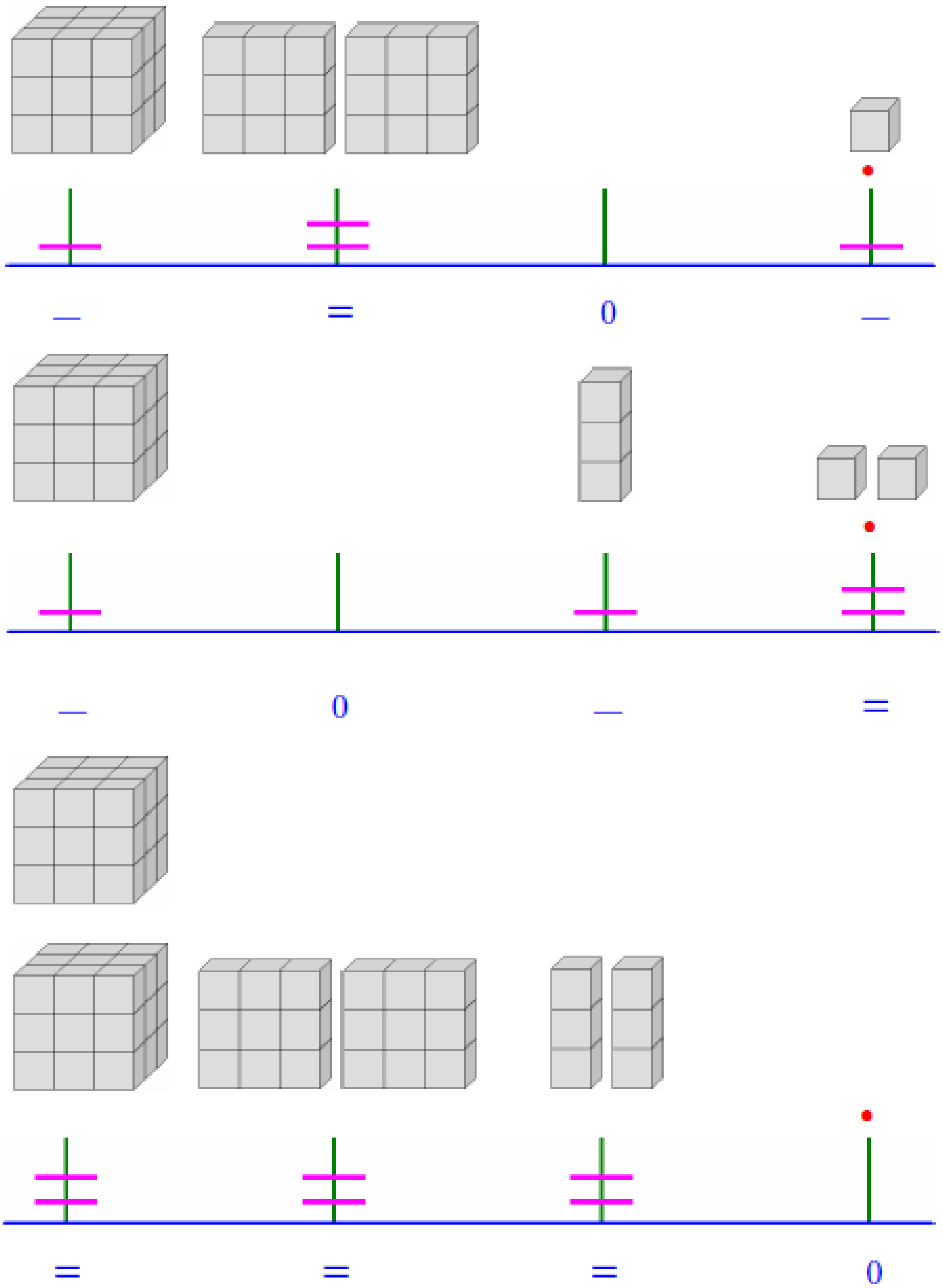


Figura 19 – I blocchi della base tre

Quindi in un primo momento non c'è neppure il problema di ricordare le cifre numeriche, avendo semplicemente detto agli alunni che 0 è il simbolo di un vassoio vuoto che rappresenta un'asticella vuota.
Perciò, a partire dalle aggregazioni speciale che sono state realizzate, con l'Abaco si concretizza un primo passo verso una rappresentazione di tipo formale, che per le tre quantità in gioco poi diventerà – ma si tratterà solo di una traduzione grafica – 1201_3, 1012_3, 2220_3; ove l'indice 3 serve a ricordare che si sta lavorando in *base tre*.
Si noti che l'ultima aggregazione corrisponde ad aver fatto prima un tutt'uno delle due precedenti, il che prefigura la somma delle quantità di cubetti presenti in quelle aggregazioni. Quindi, al fine di avere un'*aggregazione speciale*, è avvenuta una "saldatura" dei tre cubetti che prima erano separati.
In definitiva, è come se si mettessero insieme due raggruppamenti monetari e poi si effettuassero – ove possibili – i cambi in monete di taglio superiore.
Tutto ciò ha corrisposto a mettere insieme anellini che prima erano situati su asticelle omologhe di abaci distinti; dopodiché i tre anellini che si sono venuti a trovare nella prima asticella di destra sono stati sostituiti da un anellino situato nell'asticella successiva.
Alcuni insegnanti segnalano la difficoltà che alcuni alunni hanno nel dover accettare il fatto che una cifra abbia valore diverso quando è in posizione diversa. Ciò dipende, a nostro avviso, dal fatto che non venga svolto un percorso come quello illustrato qui; in cui si vede che un anellino su un'asticella indica un certo tipo di blocchi. Ma sono i blocchi ad aggregare quantità diverse di cubetti, quindi sono essi che hanno valori diversi. E questo si vede!
In definitiva, un anellino (e più tardi una cifra) ci indica una quantità proprio attraverso la sua posizione, così come la lancetta delle ore di un orologio ci dice quanto tempo è passato – per esempio, dalla mezzanotte – attraverso la sua posizione. Insomma, una stessa cifra quando è in posizioni diverse segnala quantità diverse di oggetti, così come la lancetta di un orologio quando è in posizioni diverse segnala quantità diverse di ore.

3. Verso attività più impegnative

3.1. La moltiplicazione

Con la bambina abbiamo rivisto la moltiplicazione attraverso gli schieramenti, sulla base del fatto che il moltiplicare corrisponde a considerare – una o più volte (ma anche *zero* volte!) – sempre la stessa quantità di oggetti.

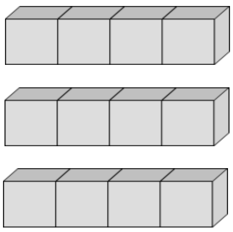


Figura 20 – una moltiplicazione concreta

In Fig. 20 è rappresentato il prodotto $4 \cdot 3$, dato che ciascuno dei quattro cubetti posti orizzontalmente è stato considerato *tre* volte. Lo stesso discorso vale per le palline della successiva Fig. 21.
Come è noto, i due numeri che si moltiplicano sono chiamati rispettivamente *moltiplicando* (il primo) e *moltiplicatore* il secondo, che è quello che attivamente determina quante righe di palline [o di altri oggetti] ci debbono essere. Invece il risultato è chiamato *prodotto*.
Si tenga presente che – poiché il numero *zero* si identifica col *niente* – considerare un certo numero di palline *zero* volte corrisponde a non schierare palline: ci sono *zero* righe di palline, quindi non ci sono palline. Perciò è ovvio che il moltiplicare per *zero* dia come risultato *zero*: $4 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 0 = 0$, $7 \cdot 0 = 0$ …
D'altro canto, moltiplicare lo *zero* (e quindi il *niente*) per nessuna, una o più volte, in concreto non ci dà niente come risultato, perciò è naturale che si ponga $0 \cdot 4 = 0$, $0 \cdot 2 = 0$, $0 \cdot 7 = 0$ …

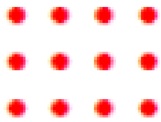


Figura 21 – Il prodotto 4·3

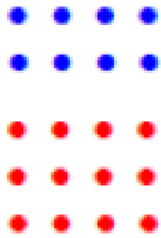


Figura 22 – verso la proprietà distributiva

Nota Bene. Ci preme precisare che ciò che si scrive – così come ciò che si dice – ha un significato che dipende da convenzioni, che possono apparire del tutto naturali. Perciò spesso finiamo col convincerci che i modi di dire o di fare siano naturalmente insiti nelle cose di cui ci occupiamo. Però non è sempre così. ■

Se osserviamo Fig. 23 e 24, vediamo che $4\cdot 1 = 4$ e $1\cdot 4 = 4$. E si capisce che questo comportamento di *1* rispetto alla moltiplicazione riguarda il suo prodotto con qualsiasi altro numero *a*; cioè, $a\cdot 1 = a = a\cdot 1$. Ciò ci fa dire che, rispetto alla moltiplicazione, *1* è *elemento neutro* (a volte *altruista*, dato che come risultato dà sempre il numero con cui si moltiplica).
I comportamenti di *0* e di *1* preludono alla proprietà commutativa della moltiplicazione, di cui si ha una percezione immediata ruotando Fig. 21 di 90 gradi. Infatti con la rotazione si ottiene il prodotto $3\cdot 4$, che coincidere con $4\cdot 3$, dato che le palline rimangono le stesse.

Figura 23 – Il prodotto 4·1

Figura 24 – Il prodotto 1·4

Quindi il *moltiplicando* e il *moltiplicatore* possono scambiarsi i ruoli senza che il risultato cambi. Per questa ragione, spesso si dà loro lo stesso nome: *fattori* (che *fanno*, che eseguono la moltiplicazione [21]) o anche *divisori* del risultato, per ragioni legate all'operazione di divisione; mentre si dice che il prodotto che essi hanno determinato è un loro *multiplo*. Perciò ogni numero *a* è un multiplo di se stesso e di *1*, dato che $a=a\cdot 1$.
In contrapposizione al termine *multiplo*, spesso i due fattori sono detti *sottomultipli* del loro risultato. Perciò, in virtù del fatto che $a=a\cdot 1$, ogni numero è contemporaneamente un multiplo e un sottomultiplo di se stesso; inoltre *1* è sottomultiplo di ogni numero.
Quando l'essere un multiplo o un sottomultiplo (fattore) chiama in causa numeri diversi, allora si aggiunge l'aggettivo *proprio* (multiplo proprio, sottomultiplo proprio, fattore proprio).

Osservazione 3. Alcuni insegnanti rivelano una certa difficoltà dei loro alunni nel ricordare il significato dei vari termini che si usano in aritmetica. Ciò è comprensibile e richiede che vengano forniti degli appigli mnemonici – per quanto è possibile, anche se in alcuni casi possono sembrare stiracchiati – che siano mutuabili dai significati che certe parole hanno nel linguaggio comune [22].
Ebbene, generalmente gli oggetti di uno schieramento che esprima una moltiplicazione sono di più (molti, anche se non sempre) rispetto agli oggetti situati su una riga o su una colonna; perciò torna

[21] Generalmente, le parole che finiscono in "tore" (oppure "sore") indicano cose o persone che svolgono l'azione che è indicata dalla prima parte della parola: contatore, guaritore, protettore, difensore.
[22] Il problema è talmente sentito – anche nei riguardi di altri termini matematici – che il 25 giugno di quest'anno, a Locarno (CH, Ticino), si svolge un convegno dal titolo "Questo matrimonio s'ha da fare", Italiano e matematica nella scuola del terzo millennio.

naturale dire che il numero di oggetti dello schieramento è un multiplo dei due fattori che lo hanno determinato. ■

Quanto detto giustifica anche il nome che è stato dato all'operazione di cui si sta discutendo. Però stona col fatto che 0 risulti essere multiplo di ogni numero *a*, dato che $0\cdot a = 0 = a\cdot 0$; tuttavia, per comodità, la denominazione si conserva anche in questa strana situazione.
Facciamo presente che nella precedente Fig. 22 è illustrata – così come l'abbiamo presentata a Francesca – la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Proprietà che deriva da due modi diversi di valutare la quantità di palline dello schieramento. Infatti, in ogni riga ci sono 4 palline; ma siccome le righe sono $2+3$ $(= 5)$, allora le palline in tutto sono $4\cdot(2+3)$. D'altro canto, considerando prima le palline blu (che sono $4\cdot 2$) e poi quelle rosse (sono $4\cdot 3$) si hanno $4\cdot 2 + 4\cdot 3$ palline. Poiché i due differenti conteggi conducono allo stesso numero complessivo di palline, allora $4\cdot(2+3) = 4\cdot 2 + 4\cdot 3$.
Quanto fatto non ha avuto bisogno di conti. Ciò aiuta a capire che il discorso non cambia se i numeri in gioco sono diversi, onde possono essere indicati con nomi generici.
Un addestramento all'uso in matematica delle lettere dell'alfabeto – utilizzate per denotare numeri ignoti (*mascherati*), come tanti "Pierini", "Tizi", "Caî" o "Semproni" della matematica (si veda [17]) – in molti casi potrebbe aiutare a sintetizzare; come in precedenza, in cui si è usata la lettera *a* come se fosse un numero.
Per quel che riguarda la proprietà distributiva, se *a* è il numero di palline di ciascuna riga e se *b* e *c* rappresentano rispettivamente i numeri di righe dei due gruppi colorati, allora quella proprietà si esprime così: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

Nota Bene. È il caso di precisare che in matematica il segno di uguaglianza (=) non deve essere visto come una freccia → che congiunga un'espressione più complicata a una più semplice. In realtà = congiunge due espressioni – delle quali una può essere semplicemente un numero o un ente, che sarà detto risultato dell'altra – che indicano una stessa cosa, uno stesso termine, uno stesso risultato.
Perciò i membri della precedente uguaglianza si possono scambiare; il che ci dà l'altra faccia della proprietà distributiva, che va sotto il nome di "mettere in evidenza":

$$a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Ovviamente, quando si susseguono più espressioni separate dal segno = , allora l'uguaglianza riguarda anche espressioni distanti tra loro. ■

Sottolineiamo che in Fig. 22 sono stati considerati soltanto due schieramenti di palline (uno blu e l'altro rosso); però si capisce che ci potevano essere anche degli altri schieramenti, intendendo la somma come aggregazione di quegli schieramenti.

La moltiplicazione in colonna. Tornando al nostro Abaco, facciamo notare che una volta che ci si sia resi conto che moltiplicare per *dieci* un certo numero di cubetti significa (come per le palline o altro) riprodurre dieci volte ciascuno di essi – che siano sciolti oppure aggregati – si capisce che ciò corrisponde a riprodurre dieci volte ciascun Blocco decimale, visto che si riproduce dieci volte ciascun cubetto che lo costituisce. Conseguentemente, ciascun anellino si sposterà nell'asticella situata alla sua sinistra; e nella rappresentazione grafica ciò si traduce nell'aggiungere 0 sulla destra.
Quanto osservato dà la possibilità di rendersi conto della procedura della moltiplicazione in colonna rispetto a un moltiplicatore avente più di una cifra. Infatti – per esempio – grazie alla proprietà distributiva, moltiplicare per 52 (= 2 + 50) si traduce nel moltiplicare per 2 e per 50, dopodiché si addizionano i due risultati.
D'altro canto, grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione, moltiplicare per 50 (= 5·10) è come moltiplicare prima per *cinque* e poi per *dieci*. E il moltiplicare per *dieci* si realizza spostando il prodotto per *cinque* di un posto sulla sinistra, senza la necessità – come in un abaco – di aggiungere uno 0, dato che le posizioni delle cifre sono definite dall'incolonnamento.

$$\begin{array}{r} 91 \cdot \\ \underline{52 =} \\ 182 \\ \underline{455} \\ 4732 \end{array}$$

Verso i numeri decimali. Osservando due blocchi decimali di cubetti a cui competano asticelle contigue, Francesca – grazie all'infaticabile attività di aggregazione a dieci a dieci svolta da lei – oltre ad aver preso coscienza del fatto che il blocco collocato più a sinistra corrispondeva a dieci volte l'altro, si è resa conto, di conseguenza, che il secondo blocco corrispondeva alla decima parte del primo. Perciò, spostando sull'abaco un anellino di un posto verso destra, esso veniva ad indicare un valore che era la decima parte di quello relativo alla posizione precedente.
Sulla base di ciò, dopo aver aggiunto un altro abaco alla destra del primo, era plausibile che un anellino posto sull'asticella situata a destra di quella col pallino rosso, indicasse un valore che è la decima parte (cioè, un *decimo*) di quella di una unità; e così via per centesimi, millesimi… Ciò ha permesso di richiamare la nozione di frazione, che la bambina aveva trattato fugacemente l'anno precedente. In Fig. 25 è rappresentato il numero 221,3231 [23].

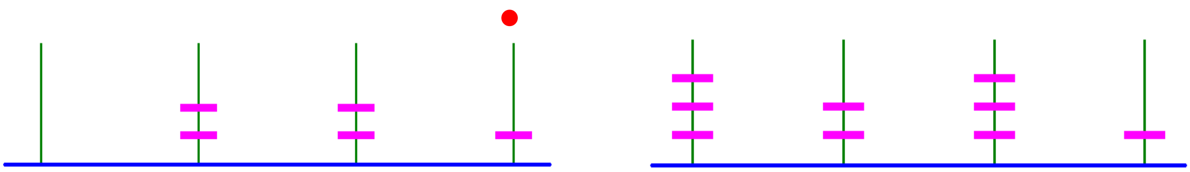


Figura 25 – un numero decimale sull'abaco

3.2. Sulle tabelline della moltiplicazione

Precedentemente si è visto che le tabelline dell'addizione e della sottrazione si possono ricondurre all'uso delle dita delle due mani. Diversamente, male che vada, si va su o giù – al più di nove passi – lungo la filastrocca dei primi diciotto numeri (9+9=18), il che conferisce all'alunno una sufficiente autonomia.
Invece per la moltiplicazione le cose sono più complicate. Però Francesca ha convissuto agevolmente con la sua Tavola Pitagorica e con essa ha acquisito autonomia e indipendenza, anche se per lei abbiamo messo in atto altre strategie – di cui ora parleremo – dal momento che bisogna tener presente che la tabellina a volte potrebbe non essere a disposizione, così come potrebbe mancare anche una semplice calcolatrice. Perciò è bene mettere in opera delle procedure semplici affinché gli alunni realizzino una loro autonomia anche nei riguardi delle tabelline della moltiplicazione, in mancanza di mezzi elementari di calcolo.
Con la bambina sono stati svolti diversi esercizi di automatizzazione per le tabelline della moltiplicazione, che però è stata raggiunta solo nel caso del *due*, del *cinque* e, in parte, del *nove*.
La Tavola Pitagorica ridotta vista precedentemente riporta ben trentasei risultati. Tuttavia va tenuto presente che quelli relativi al fattore *2* – che sono otto – rientrano nell'addizione, dato che moltiplicare un numero per *2* equivale ad addizionarlo a se stesso. Il che, per il fattore *2*, riconduce a quel tipo di autonomia di cui si è parlato precedentemente. Inoltre bisogna considerare che – automatizzando la tabellina del cinque, come con Francesca è stato fatto agevolmente – il *5* ha in quella Tavola altri sette risultati, (dato che il $5 \cdot 2$ è stato già conteggiato). Il che riduce a *ventuno* i risultati da ricordare.
D'altro canto, se ci riferiamo al paragrafo 2.4, le dita di Fig. 10 si possono numerare da 1 a 10, da sinistra verso destra; come in una sorta di linea dei numeri in cui invece delle palline si susseguono le dieci dita. Onde il numero relativo a ciascun dito ci dice anche, ovviamente, quante dita ci sono a

[23] Qui la virgola serve a rappresentare la separazione tra i due abaci. I numeri decimali non sono altro che particolari frazioni. Esse sono dette decimali in quanto hanno come denominatore 1 oppure 10 o una qualsiasi altra potenza di 10. Il che permette di scriverle in questa forma, che risulta essere una somma particolare di frazioni decimali più semplici.

partire dal pollice di sinistra fino al dito preso in considerazione. In tal modo si controlla subito – come abbiamo fatto con Francesca, usando la sua Tavola Pitagorica – che, ripiegando il dito cui compete un certo numero, si ottiene il prodotto di *nove* per quel numero; che si può semplicemente leggere sulle mani (lo abbiamo già visto precedentemente) come su di un abaco [24].
Quindi abbiamo fatto prendere coscienza alla bambina del fatto che il numero di dita che precedevano il dito ripiegato corrispondevano al numero di quel dito (per esempio, *6*) diminuito di uno (perciò *5*); mentre le dita che venivano dopo corrispondevano al complemento a *dieci* del numero relativo a quel dito (il complemento a *dieci* di *6* è *4*) [25]. Tutto ciò ha portato a semplici calcoli mentali che sono facilmente deducibili dalle due righe che seguono. La prima riga corrisponde al moltiplicatore (rispetto al moltiplicando *9*); mentre al di sotto di questo c'è il prodotto che esso determina.

2	3	4	5	6	7	8	9
18	27	36	45	54	63	72	81

Quindi, se nella Tavola Pitagorica ridotta ignoriamo i sei risultati residui relativi al fattore *9* – nei riguardi dei quali è stata evidenziata una significativa autonomia – si vede che i risultati da ricordare si riducono a *quindici*.
In sinergia con quanto espresso poco fa, col tipo di rappresentazione di Fig. 9 (Dita che parlano (1)) è possibile svolgere, come abbiamo mostrato a Francesca, moltiplicazioni di numeri compresi tra cinque e nove. Infatti – e con lei lo abbiamo verificato ricorrendo ancora alla tavola pitagorica – basta contare ciascun dito disteso come una decina, aggiungendo poi il prodotto delle dita chiuse dell'una e dell'altra mano. Si ricordi che qui il 5 si rappresenta col pugno chiuso. Nel caso di Fig. 9 si hanno tre decine, a cui si deve aggiungere $12\ (=4\cdot3)$, per un totale di *quarantadue* ($6\cdot7=42$).
Perciò il metodo richiede la conoscenza delle tabelline del *due*, del *tre* e del *quattro*, oltre al fatto che bisogna ricordare che $5\cdot5 = 5$.
Con la bimba abbiamo anche cercato di innescare un'automatizzazione per la tabellina del sette, facendo ricorso a un'arietta musicale che ha dato risultati soddisfacenti solo in parte. Però in proposito abbiamo da raccontare un episodio significativo. Una volta abbiamo chiesto alla piccola, con tono normale, quanto facesse sette per quattro; e lei è rimasta muta. Allora abbiamo inserito la domanda nella canzoncina; e lei, canticchiando, ha risposto "ventotto fa".
Questo episodio ci ha rafforzato nella convinzione – non solo nostra – che l'automatizzazione della tabellina di un'operazione non è altro che l'attivazione di un processo che troviamo nei riflessi condizionati. Precisamente, per le tabelline ogni singola domanda (per esempio, *sei* per *nove*) rappresenta lo stimolo *neutro* (o *indifferente*, nel senso che non è uno stimolo naturale e potrebbe essere diverso, come il suono della campanella di Pavlov), che essendo stato ripetutamente accostato a un evento – nel nostro caso la risposta *cinquantaquattro*; nel caso pavloviano la presentazione di cibo, che poi ha determinato il riflesso spontaneo di salivazione in un cane), finisce per evocare quell'evento in maniera automatica.
Quel tipo di rapporto – stimolo/risposta, la cui importanza è superfluo sottolineare – di per sé non presenta difficoltà eccessive di attivazione. In proposito citiamo il caso di un nostro familiare, che – pur essendo affetto da demenza senile (Alzheimer) – quando alla televisione sente la parola *hotel*, reagisce immediatamente dicendo *Trivago*.
Inizialmente, nel caso pavloviano il processo di salivazione del cane è del tutto naturale, dato che è l'evocazione del cibo a determinarla (come l'acquolina in bocca per noi umani al pensiero di un manicaretto prelibato). Tuttavia, la salivazione (cioè, il riflesso condizionato) può estinguersi, se da un certo punto in poi il cibo – che ne rappresenta il cosiddetto *rinforzo* (rispetto al suono della campanella) – viene a mancare, onde se ne perde anche l'evocazione.
Invece, se l'apprendimento delle tabelline è stato automatizzato, generalmente esso tende a permanere. Nel senso che ciascuna domanda tende a evocare abbastanza stabilmente la risposta che le compete.

[24] Forse più agevolmente, poiché la numerosità delle dita in gioco dovrebbe essere facilmente percepibile.
[25] Nel caso dell'esempio fornito molti docenti preferiscono considerare, invece del complemento a *dieci* di 6, il complemento a *nove* di 5. Sul piano del risultato non cambia nulla; però gli alunni sono più avvezzi al complemento a dieci, che entra in gioco in diverse situazioni.

Infatti il risultato legato a una tabellina ce lo ricordiamo anche dopo molti anni che non lo adoperiamo più; forse perché a un certo punto ci siamo resi conto che il legame che le tabelline esprimono non è estemporaneo – come nel caso della campanella – ma ha una giustificazione e una funzionalità.

Quanto detto ci induce a pensare che le filastrocche delle tabelline – del tipo *sei*, *dodici*, *diciotto*, *ventiquattro, trenta, trentasei* ... – nella forma in cui vengono proposte possano essere pressoché inutili. Infatti, nonostante lo sforzo che richiedono per memorizzarle, esse non consentono di avere immediatamente i risultati cercati: per sapere quanto fa *sei* per *sette*, la filastrocca bisogna scorrerla per sette passi: non c'è automatismo!

Però, se quelle filastrocche – sulla base della moltiplicazione fatta con le dita – le limitiamo ai primi quattro risultati – *sei*, *dodici*, *diciotto*, *ventiquattro*; *sette*, *quattordici*, *ventuno*, *ventotto* ... , come richiesto nel caso della pratica di moltiplicazione vista prima, che si riferisce a numeri che non sono inferiori a cinque – sarà più agevole determinare il risultato. Infatti, rispetto ai moltiplicatori *tre* o *quattro* [26], si potrà andare velocemente alla penultima o all'ultima delle quattro parole della filastrocca in gioco.

3.3. Sulla proprietà associativa della moltiplicazione

A volte capita di trovare scritture del tipo $4{\cdot}2{\cdot}8{\cdot}5{\cdot}6$, che di per sé non avrebbero senso in mancanza di un'indicazione su come procedere, per la quale si dovrebbe ricorrere a delle parentesi che ci dicano in quale ordine i vari segni di moltiplicazione debbano operare. Però – va ricordato ai ragazzi – un segno di operazione non può agire quando alla sua destra o alla sua sinistra c'è una parentesi. Infatti quella parentesi dice di lasciare quel segno in sospeso fino a quando la parentesi non sarà sparita, avendo svolto la sua funzione. In definitiva, una parentesi è come un avviso di impedimento nei riguardi di un segno di operazione, che non può agire finché è fiancheggiato da quella parentesi.

Tuttavia, a volte l'impedimento può essere costituito anche da *caratteri di forza* che vengono attribuiti alle diverse operazioni. Per esempio, per svolgere l'espressione $4{\cdot}2 + 4{\cdot}3$, dopo aver calcolato $4{\cdot}2$ si deve calcolare $4{\cdot}3$, dato che – per convenzione [27] – la moltiplicazione va svolta prima dell'addizione e della sottrazione. A meno che non ci sia una parentesi a impedirlo, poiché la forza inibitoria di una parentesi prevale sempre. Come nell'espressione $(3+5){\cdot}2$, in cui si svolge prima l'addizione: $(3+5){\cdot}2=8{\cdot}2=16$.

Però, se le parentesi mancano e si ha $3+5{\cdot}2$, allora prima si svolge il prodotto $5{\cdot}2 = 10$, dopodiché si calcola la somma $3+10 = 13$.

Ma, tornando alla scrittura $4{\cdot}2{\cdot}8{\cdot}5{\cdot}6$, come svolgere i calcoli in mancanza di parentesi? In casi del genere gli studenti procedono in analogia con l'addizione – a volte anche partendo dai segni posti all'interno dell'espressione – applicando la cosiddetta proprietà associativa della moltiplicazione. Anzi, talora la moltiplicazione viene svolta tra numeri che sono lontani. Per esempio, in $4{\cdot}2{\cdot}8{\cdot}5{\cdot}6$, a volte prima si svolge il prodotto $2{\cdot}5$ $(=10)$; onde l'espressione si trasforma in $4{\cdot}10{\cdot}8{\cdot}6$.

Gli alunni accettano in modo del tutto naturale tale modo di operare, proprio perché già lo usano con l'addizione. Però per l'addizione la proprietà associativa deriva dal fatto che, in presenza di tre o più gruppi di oggetti da assemblare, non importa come si proceda: o mettendo subito insieme tutti gli oggetti, oppure attraverso assemblaggi successivi; il che corrisponde a procedere attraverso delle somme intermedie. Ma ciò è consentito dal fatto che alla fine gli oggetti da contare sono sempre gli stessi, comunque si proceda negli assemblaggi.

Procedere in maniera analoga per la moltiplicazione è un esempio tipico di *transfert* positivo. Però è importante far capire che le analogie a volte possono essere fonte di errori, come è stato già segnalato nel caso delle operazioni tra frazioni. Perciò applicare il *transfert* in maniera acritica è una grave presunzione che contravviene a un principio a cui gli studenti vanno gradatamente educati: in genere – come in un gioco di carte – è consentito procedere soltanto in base ad accordi che siano già stati stabiliti per convenzione; seguendo criteri, assiomi e postulati dichiarati esplicitamente[28], nonché proprietà che siano state verificate.

Naturalmente, quanto detto poc'anzi non significa che non debbano essere apprezzati studenti che riescano a percepire in anticipo i procedimenti più opportuni.

---

26 Si è già ricordato che il moltiplicatore *due* riconduce all'addizione di due addendi uguali.

27 Termine che esprime un accordo, spesso legato a situazioni di "convenienza" operativa o semplificativa.

28 Sotto questo punto di vista siamo in accordo con la disciplina giuridica – che a volte, a torto, viene considerata agli antipodi della matematica – per la quale vale l'assunto "ubi lex voluit, dixit".

La proprietà distributiva della moltiplicazione (rispetto all'addizione) permette di dimostrare agevolmente la piccola proprietà associativa della moltiplicazione, che non è del tutto scontata come nel caso dell'addizione. Usiamo l'aggettivo “piccola” in quanto si chiamano in causa soltanto tre numeri.

Questa proprietà dice che, scelti tre numeri arbitrari, il risultato finale della moltiplicazione è sempre lo stesso, qualunque sia il segno che opera per primo. In simboli: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
Tale uguaglianza si verifica subito se c vale 1 oppure 0; poiché nel primo caso i due risultati si riducono al calcolo di $a \cdot b$; mentre nel secondo caso essi si riducono a 0.
Ora noi faremo una verifica per $c = 3$ e per $c = 4$. Da cui si capirà che lo stesso tipo di ragionamento vale per qualsiasi altro valore di c che sia diverso da 1 e da 0. Perciò non siamo di fronte a semplici verifiche, che valgano nei casi particolari trattati. Esse hanno una valenza più generale, dato che fanno capire che possono essere estese agli altri casi.
Ebbene, mettendo in evidenza a nel secondo passaggio, si ha:

$$(a \cdot b) \cdot 3 = a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b = a \cdot (b + b + b) = a \cdot (b \cdot 3)$$

$$(a \cdot b) \cdot 4 = a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b = a \cdot (b + b + b + b) = a \cdot (b \cdot 4).$$

Si noti come negli ultimi ragionamenti non entrino in gioco i valori di a e di b.

Successivamente si potrà provare (ma ciò è piuttosto complicato, anche per studenti delle scuole superiori) che la proprietà associativa vale secondo l'usuale formulazione, in cui inizialmente possono essere dati anche più di tre numeri. In definitiva, valgono uguaglianze come le seguenti:

(*) $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 2 = (3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 2 = (3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 2) = 90 \cdot 20 = 1800.$

Anzi, si potranno eseguire dei prodotti provvisori pure tra fattori lontani, grazie alla proprietà commutativa che permette di cambiare la posizione dei numeri dati, invertendo via via la collocazione di numeri che si susseguono.

3.4. Sulla decomposizione in fattori primi

Il fatto che un numero sia ottenuto in diversi modi come risultato di una moltiplicazione tra due o più numeri, come nel caso di $1800 = 90 \cdot 20$ e $1800 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$ – che ricaviamo dalla (*) del paragrafo precedente – ci fa dire che $90 \cdot 20$ e $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$ sono decomposizioni (tramite la moltiplicazione) di 1800[29].

Nota Bene. Anche se può sembrare strano, si suole dire che ogni numero è decomposizione di se stesso (decomposizione banale). Il che consente di semplificare la descrizione di alcune proprietà numeriche; soprattutto quando entrano in gioco i numeri primi, ognuno dei quali è l'unica decomposizione di se stesso.
Il precedente modo di dire si giustifica col fatto che a fianco di ogni numero a può essere considerate sottintese le espressioni $1 \cdot$, oppure $\cdot 1$, dato che $1 \cdot a = a = a \cdot 1$. ■

Osservazione 4. L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro della (*) – e simili – ci dice anche che per due numeri a e b dei quali si abbiano delle decomposizioni [per 90 e 20 sono quelle che figurano in parentesi nel terzultimo membro della (*)] il prodotto coincide con l'accostamento di quelle decomposizioni, separate dal segno di moltiplicazione [$90 \cdot 20 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$]. ■

È chiaro che se le decomposizioni di due numeri a e b sono costituite da numeri primi, allora – come si è visto nel caso di 90 e 20 – l'accostamento di queste (tramite il segno $\cdot$) è una decomposizione in fattori primi di $a \cdot b$.

29 D'ora in poi ci riferiremo tacitamente a numeri naturali diversi da 0; perciò un prodotto sarà sempre maggiore o eguale dei singoli fatti.

Alcune delle considerazioni svolte precedentemente possono apparire ovvie e scontate; ma ciò non vale per tutti gli alunni. Perciò diventa importante non trascurarle, affrontandole senza pedanterie inutili.
Ora osserviamo le seguenti uguaglianze:

$$100 = 50\cdot 2 = 5\cdot 10\cdot 2 = 5\cdot 2\cdot 5\cdot 2 \qquad 100 = 25\cdot 4 = 5\cdot 5\cdot 2\cdot 2 \qquad 100 = 20\cdot 5 = 5\cdot 4\cdot 5 = 5\cdot 2\cdot 2\cdot 5$$

Come si vede, 100 è stato via via decomposto – con tre procedimenti diversi – nel prodotto di numeri sempre più piccoli e diversi da 1; finché ci si è dovuti fermare, poiché si è giunti a esprimere 100 come prodotto di numeri primi, che hanno decomposizioni banali.
Con un po' di riflessione, ci si rende conto che comunque si consideri un numero composto – per esempio, 6384 – esso non si può decomporre via via senza fermarsi mai, a meno che non si usi il fattore 1. Infatti a ogni passo della decomposizione i fattori diventano sempre più piccoli, e a un certo punto non potranno più essere decomposti: onde saranno dei numeri primi. In definitiva, ogni numero composto ha una decomposizione in fattori primi.
Però nelle precedenti decomposizioni di 100 si nota qualcosa di estremamente più interessante: in ciascuna di esse abbiamo esattamente gli stessi numeri primi – 2 e 5 – e ciascuno di essi è presente in ogni decomposizione lo stesso numero di volte. Per cui queste decomposizioni, prescindendo dalla posizione dei fattori, sono sempre le stesse.
Ebbene, si può provare che questa proprietà riguarda ogni numero diverso da 1, che si decompone nel prodotto di numeri primi in maniera unica; naturalmente, prescindendo dalla posizione finale di quelli. La relativa dimostrazione in linea di massima è accessibile a studenti della scuola secondaria superiore, purché sia condotta con la dovuta accortezza.

Ossrvazione 5. Grazie all'unicità della decomposizione in fattori primi, è chiaro che il prodotto di due numeri diversi da 1 non può avere un divisore primo diverso da quelli che figurano nell'una o nell'altra decomposizione. Infatti, la decomposizione in numeri primi del prodotto si ottiene accostando quelle dei due fattori. Perciò la quantità di presenze di un numero primo p nella decomposizione in numeri primi di un prodotto è data dalla somma delle sue presenze nelle decomposizioni in numeri primi dei fattori.
Quindi, se un numero primo è un divisore del prodotto di due numeri, esso deve necessariamente essere divisore di almeno uno dei due. In definitiva, con la moltiplicazione non si *creano* fattori primi che non siano già in uno dei fattori.
A dire il vero, Euclide dimostrò direttamente quest'altra proprietà e poi se ne servì per provare facilmente l'unicità della decomposizione in fattori primi. ■

Il risultato sull'unicità della decomposizione in fattori primi, che può apparire scontato, in realtà dipende in modo essenziale da come è strutturata l'operazione di moltiplicazione. In vero, se invece che con la moltiplicazione si procede con decomposizioni successive di un numero tramite l'addizione, si ottiene qualcosa di molto banale. Infatti, ogni numero più grande di 1 si può decomporre tramite l'operazione di addizione in addendi uguali a 1. Infatti $2 = 1+1$, $3 = 1+1+1$, $4 = 1+1+1+1$ ….
Però, se dal novero dei numeri escludiamo 0 e 1 – come è stato durante secoli e secoli di storia dell'umanità [30] – e i nostri numeri li facciamo partire da 2, allora 2 e 3 sono addendi primi; cioè, rispetto all'addizione sono l'analogo dei numeri primi rispetto alla moltiplicazione, poiché (avendo escluso 0 e 1) 2 e 3 non si possono esprimere come somma di altri numeri naturali. Inoltre è chiaro che ogni numero a maggiore di 3 si può decomporre negli addendi 2 e/o 3, dal momento che $a = 2 + (a-2)$; e così via sottraendo 2 finché non si arrivi a 2 se a è pari, altrimenti si arriva a 3. Però non abbiamo una proprietà di unicità della decomposizione, come nel caso della moltiplicazione. Infatti, per esempio, si ha:

$$8 = 2 + 2 + 2 + 2 \qquad \text{e} \qquad 8 = 2 + 3 + 3.$$

Nello stesso tempo, se consideriamo $4 = 2 + 2$, si ha:

[30] Infatti il termine *numero* allora era legato al concetto di molteplicità, a cui ora è associato l'aggettivo *numeroso*.

$$8 = 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 3.$$

Onde nella somma di 4 con 4 compare l'addendo indecomponibile 3; che non è presente inella decomposizione di 4, poiché non possiamo scrivere 4 = 3 + 1, dato che prescindiamo da 1.

3.5. Numeri primi colorati

In questo paragrafo e in quello seguente vogliamo presentare – ispirandoci a RiTabella (si veda [25]) – alcune proprietà moltiplicative limitatamente a numeri che hanno soltanto 2, 3 e 5 come fattori primi. L'estensione ad altri numeri primi sarà del tutto ovvia.
Qui i colori rosso e verde li utilizzeremo per indicare il 2 e il 3 rispettivamente tramite i quadratini 🟥 e 🟩[31], mentre per il 5 useremo il quadratino rosaceo 🟧, in quanto il colore giallo non risalta sufficientemente.
Teniamo presente che qualora in una decomposizione sia evidenziato al più un numero, tramite la sua ordinaria rappresentazione decimale, mentre gli altri numeri sono sostituiti da lettere o da altri segni, allora si è soliti sottintendere i segni di moltiplicazione, a meno che non si voglia metterne in risalto qualcuno. Perciò se i fattori primi 2, 3 e 5 li sostituiamo rispettivamente con i quadratini 🟥, 🟩 e 🟧, allora – tenendo conto del fatto che in un prodotto si possono scambiare le posizioni dei vari fattori – i prodotti 3·2·5·3 e 2·5·2 li possiamo riscrivere rispettivamente così: 🟥🟩🟩🟧 e 🟥🟥🟧. Onde il loro prodotto 🟥🟩🟩🟧·🟥🟥🟧 è dato da 🟥🟥🟥🟩🟩🟧🟧.
Ora, se osserviamo 🟥🟥🟥🟥🟥🟥🟥🟥🟩🟧🟧🟧🟧🟧🟧🟧, non si riesce a percepire immediatamente quanti fattori 🟥 e quanti fattori 🟧 ci siano. Per questa ragione è invalso l'uso di mettere un solo quadratino per ogni colore, però inserendo subito dopo, in alto a destra, un numero – chiamato *esponente*, per il fatto che lo si evidenzia, lo si espone – che indica quante volte quel quadratino è da considerare presente. Però se l'esponente è 1, allora quasi sempre si preferisce ometterlo.
Perciò, invece di 🟥🟥🟥🟥🟥🟥🟥🟥🟩🟧🟧🟧🟧🟧🟧🟧, per semplicità si scrive 🟥^{8}🟩🟧^{7}, dove la percezione del numero dei vari fattori in gioco è immediata.
Quando un numero a (diverso da 0) non è presente in una decomposizione, allora si dice che esso è presente lì con esponente 0; cioè ha *zero* presenze.
Anzi, a volte lo si inserisce nella decomposizione sotto la forma a^0. Per evitare confusioni, si è convenuto di attribuire al simbolo a^0 il valore *1* ($a^0 = 1$); dato che l'aggiunta del fattore *1* non altera il risultato di una decomposizione.
In particolare, diremo che 🟧 in 🟥^{3}🟩^{2} ha esponente (presenza) 0. Poiché 🟧^{0} = 1, allora 🟥^{3}🟩^{2}🟧^{0} = 🟥^{3}🟩^{2}.
Questo tipo di impostazione rende del tutto naturale il concetto di potenza. Inoltre è ovvio che sia 🟥^{3}·🟥^{5} = 🟥^{8}, dal momento che un esponente non fa altro che segnalare quante volte un fattore à presente.
Tale convenzione si estende anche al caso in cui si abbiano prodotti di numeri espressi in chiaro, anche quando non sono numeri primi; onde per il numero precedente si ha:

$$2^8 \cdot 3 \cdot 5^7 = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^7 = 6 \cdot 10^7 = 60.000.000.$$

3.6. Minimo comune multiplo e massimo comun divisore

Se consideriamo un numero a, è ovvio che un suo multiplo proprio d si ottiene moltiplicando a per uno o più fattori primi. Viceversa, se partiamo dalla decomposizione in fattori primi di d, allora eliminando da essa uno o più fattori primi si ottengono i vari divisori propri di d[32].
Per quel che riguarda 🟥^{3}🟩^{2}🟧^{2}, ecco alcuni suoi divisori propri: 🟥🟩^{2}🟧^{2}, 🟥^{2}🟩🟧^{2}, 🟥🟩^{2}🟧, *1*. Invece 🟥^{3}🟩^{3}🟧^{2}, avendo un divisore 🟩 in più, non è un divisore di 🟥^{3}🟩^{2}🟧^{2}; ma è un suo multiplo.
La presentazione dei numeri primi attraverso quadratini colorati rende più agevole, al di là delle enunciazioni verbali, la comprensione del calcolo del minimo comune multiplo (m.c.m.) e del massimo

[31] È chiaro che noi i quadratini colorati li stiamo usando come numeri mascherati, così come facciamo con le lettere dell'alfabeto.
[32] Naturalmente, se i divisori primi vengono eliminati tutti, allora si fa emergere il fattore sottinteso **1**, che è un divisore di ogni numero.

comun divisore (m.c.d.) tra due o più numeri; purché siano chiari gli aggettivi *minimo* e *massimo*, nonché i concetti di *multiplo* e di *divisore*.
Per esempio, tenendo conto di quanto detto all'inizio del paragrafo, se si vuole ottenere un multiplo d sia di ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ che di ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$, è chiaro – tanto per fissare le idee – che ${\color{red}\blacksquare}$ in d dovrà essere presente almeno 3 volte; altrimenti d non potrebbe essere un multiplo di ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$, dato che ${\color{red}\blacksquare}$ in ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$ compare tre volte.
Però, dato che vogliamo il minimo m tra tutti i multipli di ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ e di ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$, in m ${\color{red}\blacksquare}$ dovrà essere presente solo 3 volte, poiché in ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ compare una volta sola. Lo stesso discorso vale per ${\color{green}\blacksquare}$ e per ${\color{orange}\blacksquare}$. Perciò ${\color{green}\blacksquare}$ (che in ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ è presente 4 volte e in ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$ 2 volte) in m sarà presente 4 volte, mentre ${\color{orange}\blacksquare}$ (che in ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ è presente 6 volte e in ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$ 0 volte) in m sarà presente 6 volte.
Quindi il minimo comune multiplo cercato è ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$, dato che esso è un multiplo di ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ e di ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$; e non si può trovare un multiplo più piccolo. Infatti ciò significherebbe eliminare da ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ qualche fattore primo; il che vuol dire diminuire qualche esponente che compare in esso. Ma se in ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ diminuiamo l'esponente di ${\color{red}\blacksquare}^3$ non abbiamo più un multiplo di ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$; mentre se diminuiamo l'esponente di ${\color{green}\blacksquare}^4$ o di ${\color{orange}\blacksquare}^6$, non abbiamo più un multiplo di ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$.
Perciò, sulla base dell'esempio considerato, ci si rende conto che, comunque vengano dati due o più numeri *a, b, c* ... decomposti in fattori primi, per ottenere il loro minimo comune multiplo si prenderà ciascun fattore primo p che compaia in qualcuno di quei numeri, col minimo esponente indispensabile per costruire il multiplo richiesto; onde si dovrà prendere il massimo esponente con cui p compare nei vari *a, b, c* … Dopodiché si svolgerà il prodotto di quei numeri primi, ognuno munito dell'esponente che gli è stato attribuito.
Viceversa, quanto detto all'inizio del paragrafo ci fa capire come procedere per la determinazione del massimo comun divisore di due o più numeri *a, b, c* ... . Infatti, per ciascun fattore primo p che compaia in *ognuno* di quei numeri dovremo scegliere il più piccolo. Dopodiché anche ora si svolgerà il prodotto di quei numeri primi, ognuno munito dell'esponente che gli è stato attribuito.

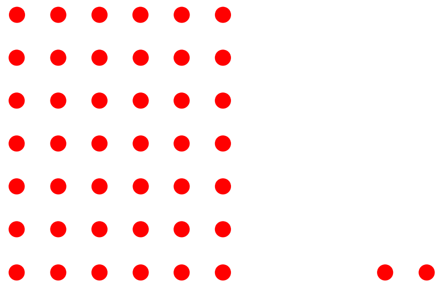
Nota Bene. Questo significa che se un numero primo p non è presente come fattore primo in uno degli *a, b, c* ... , chiamiamolo h, allora p non dovremo considerarlo. Infatti, se p non compare in h, non può comparire nemmeno in un divisore proprio di h, che si ottiene – come si è visto – eliminando qualche fattore primo di h.
Detto diversamente, p è come se fosse presente in h con esponente 0; onde nella costruzione del massimo comun divisore dovremmo inserire p con esponente 0. Il che è come non considerarlo, dato che $p^0 = 1$.
Ovviamente, se nessun fattore p compare in tutti gli *a, b, c*... con esponente diverso da 0, allora quei numeri non hanno alcun fattore primo in comune; perciò il loro massimo comun divisore è 1. ■

In riferimento al massimo comun divisore tra ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ e ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$, il fattore ${\color{orange}\blacksquare}$ non lo considereremo, dato che esso non compare in ${\color{red}\blacksquare}^3{\color{green}\blacksquare}^2$. Invece per ${\color{red}\blacksquare}$ sceglieremo l'esponente 1 e per ${\color{green}\blacksquare}$ sceglieremo l'esponente 2. Quindi il massimo comun divisore di ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^4{\color{orange}\blacksquare}^6$ e ${\color{red}\blacksquare}^3$ ${\color{green}\blacksquare}^2$ è ${\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare}^2$.

3.3. La sottrazione ripetuta e la divisione con resto

Come abbiamo già espresso fugacemente, spesso agli alunni l'aritmetica si insegna limitandosi ad addestrarli a procedure di cui non avvertono le ragioni; il che ne rende difficili sia l'apprendimento che il ricordo (e l'automatizzazione quando è necessaria).
Ma, affinché essi possano rendersi conto di una procedura, debbono anche capire il significato dell'operazione che tramite quel modo di procedere si vuole svolgere. In particolare, per la *divisione con resto*, di cui ci occuperemo in connessione con la *sottrazione ripetuta*.
Qualche tempo fa, durante un convegno didattico, un professore di scuola media affermò che i suoi allievi non avevano la nozione di *resto*. In verità, il resto spesso viene visto come un'appendice secondaria di una *spartizione mal riuscita*; il che porta, a torto, a dargli poca importanza, con tutte le conseguenze negative che ne derivano.
E pensare che un tempo era in voga una canzoncina dello *Zecchino d'oro*, il cui testo diceva: «…*quarantaquattro gatti in fila per sei col resto di due* … »; e tutti capivano. E capivano anche il finale, in cui i bambini cantavano: « … *sei per sette quarantadue, più due quarantaquattro* ».

In proposito si veda lo schieramento seguente, dove i gatti sono stati sostituiti con delle palline. Per realizzarlo alle 44 palline iniziali sono state sottratte ripetutamente 6 palline per metterle via via in fila, fino a quando ne sono rimaste solo due.



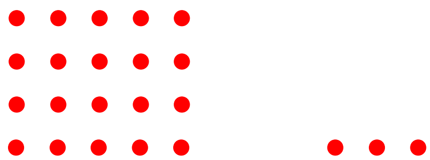
Perciò qui di seguito abbiamo scritto:

44 - **...** 6 = 2.

Quanto detto introduce un'operazione poco considerata: la *sottrazione ripetuta*; che invece – presentata subito dopo la sottrazione ordinaria – potrebbe svolgere, sempre in chiave vygotskijana, un ruolo propedeutico importante nei riguardi della *divisione con resto*.
La *sottrazione ripetuta* – a cui cui noi abbiamo attribuito il segno -**...** (ma che tecnicamente si indica col simbolo *mod*) si svolge a partire da un numero – il *minuendo*, che esprime la quantità di oggetti di un raggruppamento di partenza – da cui sottrarre via via un dato numero chiamato *modulo* [33] (però con i bambini conviene continuare a parlare di sottraendo). In definitiva, il *modulo* non è altro che un sottraendo costante che agisce una o più volte finché è possibile; o nessuna volta, se esso è maggiore del minuendo, onde in tal caso come risultato si assume lo stesso sottraendo. In ogni caso, il risultato che si ottiene si chiama *resto* (o *residuo*). Onde si ha:

4 -**...** 5 = 4 [4 *mod* 5 = 4] …

Si tenga presente che, precedentemente, aver sottratto quattro volte di seguito 5 da 23 corrisponde ad aver effettuato la sottrazione 23 - 5·4. E in tale situazione siamo soliti dire che quel 4 ci dice *quante volte* 5 *entra* nel 23. Nel contempo, 5·4 è il più grande multiplo di 5 che non supera 23 [34]. Tutto ciò corrisponde allo schieramento seguente:



Perciò il risultato di una sottrazione ripetuta corrisponde a sottrarre, al minuendo *a*, il più grande multiplo del *sottraendo* che non supera *a*. E il fattore per cui quel *sottraendo* si moltiplica (per avere il suddetto multiplo) esprime, come si è soliti dire, *quante volte esso entra* nel minuendo.

Osservazione 4. Se *a* è un numero scritto in forma decimale, allora *a* -**...** 10 è la cifra delle unità di *a*, dato che il sottrarre 10 da un numero non ne altera la cifra delle unità. In definitiva, risulta:

57 -**...** 10 = 7   201 -**...** 10 = 1. ■

È chiaro che così abbiamo mosso i primi passi per la *divisione con resto*. E a Francesca il caso presentato all'inizio del paragrafo è stato illustrato come la suddivisione in parti uguali, per quanto possibile, di 44

---

[33] La sottrazione ripetuta è legata a un settore molto importante dell'aritmetica: che va sotto il nome di aritmetica modulare.

[34] Infatti, 5·4 = 20, mentre 5·5 =25.

palline tra 6 bambini. Onde a ciascun bambino toccavano le 7 palline situate, verticalmente, in una colonna.
Con la piccola inizialmente abbiamo evidenziato quanto normalmente si fa nelle spartizioni concrete, che si svolgono all'insegna dell'*uno a me*, *uno a te*, *uno a lui*, … , facendola soffermare sul fatto che, a ogni *tornata*, la quantità da distribuire diminuisce di una quota pari al numero di individui su cui si effettua la distribuzione.
Quindi il *minuendo* e il *modulo* della *sottrazione ripetuta* sono diventati rispettivamente il *dividendo* e il *divisore* della *divisione*; con il *resto* che ha continuato a essere tale.

Usando le sue palline – supponendo di volerle distribuire tra cinque bambini – a ogni tornata la piccola ha sottratto un quota uguale a *cinque* alle palline che aveva a disposizione. Nel contempo, a ogni giro la quantità complessivamente distribuita – che veniva schierata, come nel caso dei gattini/palline – aumentava di una quota uguale al divisore *cinque*. E questa quota si fissava nel momento in cui la sottrazione ripetuta si arrestava, dato che quanto si sarebbe voluto distribuire era diventato inferiore al sottraendo.
Perciò, attraverso lo schieramento, si vedeva che la quantità finale distribuita era legata al numero più grande per cui si poteva moltiplicare il divisore senza superare la quantità iniziale.
Francesca si è anche resa conto che, se si partiva da tre palline soltanto, queste non si potevano distribuire tra cinque bambini. Perciò rimanevano lì indivise e rappresentavano il *resto* [35].
È chiaro che questo tipo di attività sulla divisione, insieme a quella del prossimo paragrafo, può essere utile anche in una didattica per alunni non discalculici.

3.4. La procedura della divisione

Un abaco può rivelare anche un interessante aspetto della procedura della divisione. Per esempio, se vogliamo suddividere in parti uguali fra due bambini i cubetti rappresentati sull'abaco situato nella parte bassa di Fig. 16 – che sono 1101, onde in tal caso tale numero è il dividendo e *due* è il *divisore* – intanto è chiaro che il migliaio non lo possiamo ripartire come tale, ma lo dobbiamo scindere in *dieci* centinaia; perciò – tenendo conto del centinaio residuo, rappresentato nella terza asticella da destra dell'abaco – veniamo ad avere *undici* centinaia di cubetti, che ci consentono di distribuirne *cinque* a ciascuno dei due bambini, col residuo di un centinaio. Quindi questo andrà smembrato in *dieci* decine, che potremo suddividere in due parti da cinque decine. Però ci sarà il residuo di un cubetto/unità che non è possibile distribuire. Perciò ciascuno dei due bambini verrà ad avere *zero* unità, onde la sua parte sarà di 550 cubetti (col *resto* di un cubetto).
La suddivisione in due parti generalmente non presenta molti problemi. Diverso, invece, è il caso di un divisore più grande di *due*. In situazioni del genere quasi sempre all'alunno si descrive una procedura, senza preoccuparsi di fargli capire cosa ci sia dietro. A Francesca queste cose sono state fatte vedere in concreto, ed ella ha capito.
Qui sotto si ha un esempio di divisione svolta con Francesca. La piccola si è resa conto che inizialmente non era possibile suddividere in cinque parti le centinaia (di cubetti) poiché ce n'erano solo 2, e 2 è più piccolo di 5. Allora, dato che ogni centinaio è dato da dieci decine, tenendo conto delle altre due, si sono considerate 22 decine (e il colore rosso usato in Fig. 25 sta a evidenziare proprio questo fatto). Quindi con 22 decine si sono ottenute 5 parti costituite ciascuna da 4 decine, per un totale di 20 (5•4) decine; il che ha determinato un residuo di 2 decine. Poi ...

```
227|5__
20   45
 27
 25
  2
```

Figura 19 – Una divisione

35 Molti bambini hanno difficoltà ad accettare come *resto* qualcosa che non ricavano dall'usuale procedura di divisione.

Una volta spiegato il perché della procedura, essa è stata applicata in diversi esempi, senza il bisogno di richiamare a ogni piè sospinto i raggruppamenti di cubetti che erano in gioco, visto che Francesca aveva capito che i vari passi si svolgevano tutti allo stesso modo.
Ovviamente, si è avuta qualche difficoltà coi divisori aventi più di due cifre, che richiedono una verifica supplementare di cui non è facile far capire le ragioni; e noi abbiamo evitato di affrontare la questione.

3.8. Moltiplicazione, aree, abaci per il sistema metrico decimale ed equivalenze

Il prodotto di un numero per se stesso viene detto *numero quadrato*, per ragioni legate al calcolo delle aree. Anche 0 è un numero quadrato, ma solo per il fatto che $0 = 0 \cdot 0$.
Inoltre i numeri che descrivono la quantità di oggetti di schieramenti costituiti da più di una riga e più di una colonna, ivi compresi i quadrati che soddisfino a questa condizione – vale a dire, sono il prodotto di due fattori diversi da 1 – sono detti *rettangolari*.
La denominazione è legata al fatto che, se si guardano gli schieramenti relativi a quei numeri, si ha l'impressione di vedere dei rettangoli.
Questi numeri sono anche detti *composti*. Mentre, come è noto, i numeri che non si possono esprimere come prodotto di due fattori diversi da 1 sono detti *primi* (o anche *irriducibili*).
I numeri primi possono avere soltanto uno schieramento con una sola riga o con una sola colonna (schieramenti *lineari*).
Gli alunni, opportunamente avviati, vedono subito che 2, 3, 5 e 7 hanno soltanto schieramenti lineari. Poi capiranno che anche 11, 13, 17 e 19 (fermandosi al di sotto di 20) sono primi. Tuttavia la ricerca di numeri primi non può avere termine, poiché Euclide ha provato che ci sono infiniti numeri primi.

Facciamo presente che da quanto è stato detto all'inizio del paragrafo deriva il modo di esprimere l'area di un rettangolo (in particolare, di un quadrato).
Per esempio, il rettangolo colorato di Fig. 27 ha un'area di $5 \cdot 3$ cm^2, semplicemente perché è costituito da $5 \cdot 3$ quadratini che hanno il lato lungo 1 centimetro [36].

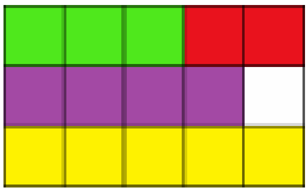


Figura 27 – Un rettangolo

In definitiva, ogni quadratino ha i lati che sono lunghi 1 centimetro (1 cm), onde esso e la sua superficie sono chiamati *centimetro quadrato* (o *centimetro quadro*; in breve, *cm*^{2}). Perciò l'area complessiva – che ci dice semplicemente quanti di quei *cm*^{2} ci sono nel rettangolo – è di $5 \cdot 3$ cm^2 (15 cm^2) così come 5 caramelle ripetute 3 volte corrispondono a $5 \cdot 3$ (15) caramelle.
Per la stessa ragione, la faccia quadrata del piatto decimale situato in Fig. 15 ha un'area di $10 \cdot 10$ cm^2 (100 cm^2).
La faccia quadrata del piatto decimale di Fig. 15 ha un lato lungo *1 decimetro* (1 dm); onde essa e la sua superficie sono chiamate *decimetro quadrato* (o *decimetro quadro*; in breve, *dm*^{2}). Ovviamente, il decimetro quadrato può assumersi anch'esso come unità di misura di superficie. Perciò, per quanto visto, risulta:

$$1 \text{ dm}^2 = 10 \cdot 10 \text{ cm}^2 \ (100 \text{ cm}^2).$$

Un discorso analogo si può fare con gli alunni facendogli preparare un quadrato che ha i lati lunghi 1 metro (1 m), onde esso e la sua superficie sono chiamati *metro quadrato* (o *metro quadro*; in breve, *m*^{2}).

[36] Ovviamente, se accostiamo un numero primo di quadratini, abbiamo un rettangolo; tuttavia, generalmente si preferisce riservare l'aggettivo "rettangolare" ai soli numeri composti (non primi).

Avendo controllato che la lunghezza di quei lati (1 m) corrisponde a 10 dm, sarà facile rendersi conto che il nostro quadrato si suddivide in dieci fasce costituite ciascuna da 10 dm; di conseguenza risulta:

$$1\ m^2 = 10 \cdot 10\ dm^2\ (100\ dm^2).$$

Ora supponiamo di avere svolto la misurazione di una lunghezza – per esempio, quella di un corridoio o della palestra della scuola – e di aver rilevato che essa è di 3 decametri, più un metro, più due decimetri, più 1 centimetro. Indicazioni che, come è mostrato in Fig.28, riportiamo su di un abaco.

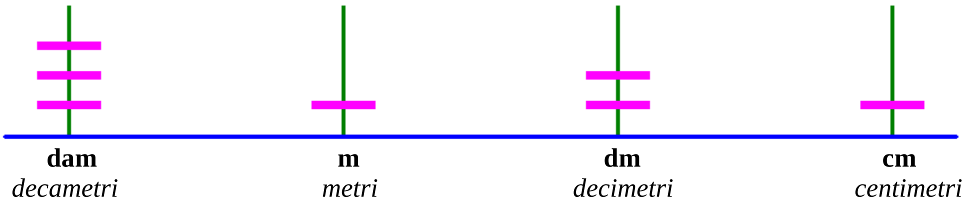


Figura 28 – una misura di lunghezza registrata sull'abaco

Osserviamo che le asticelle – come già nella registrazione dei blocchi decimali – sono adoperate in modo tale che se un anellino si sposta di un posto a sinistra, esso va a indicare una quantità dieci volte più grande.
Ma come si può esprimere sinteticamente quella misura? Ebbene, l'informazione data da Fig. 28 è sovrabbondante, in quanto basta fornire la posizione di una sola delle unità di misura, dato che la posizione delle altre si ottiene di conseguenza (si veda Fig. 29).

Figura 29 – una semplificazione della figura precedente

Ora, facendo riferimento a Fig. 29, eliminiamo da essa l'abaco e sostituiamo ogni blocco di anellini con la cifra che ne esprime la quantità. Allora si ha la seguente scrittura, che – su una sola linea – potremo riscrivere come è mostrato nella riga successiva:

3	1 m	2	1
3	1m	2	1

Però, compattando il tutto, si preferisce portare il simbolo dell'unità di misura alla fine della scrittura numerica, lasciando al suo posto un segno – la virgola – che ne ricorda la reale posizione; onde si scrive 31,21 m.
Un discorso analogo si può ripetere con le altre misure. Perciò, dato che la lunghezza considerata è sempre la stessa, si hanno le seguenti uguaglianze: 31,21 m = 312,1 dm = 3,121 dam = 3121 cm … .

Queste uguaglianze ci dicono come si possono svolgere le famigerate equivalenze in maniera del tutto rigorosa, perfettamente coerente col significato che ha la rappresentazione di una lunghezza rispetto a una fissata unità di misura: basta mettere la virgola dopo la cifra relativa all'unita di misura prescelta.
Ricordiamo che l'altro metodo usato per svolgere le *equivalenze* si basa sul prodotto tra frazioni. Infatti 1 dm = 1/10 m. Perciò 312,1 dm = 312,1 · 1/10 m = 31,21 m.
Quanto visto per le misure di lunghezza si trasferisce immediatamente alle misure di capacità.
Francesca, dopo tutto il lavoro fatto con l'abaco, non ha avuto alcun problema a capire l'argomento.

Per le misure di superficie si mostra la seguente illustrazione, che tiene conto del fatto che in questo contesto ogni un'unità di misura – come si è cercato di far vedere – corrisponde a *cento* volte quella che la precede.

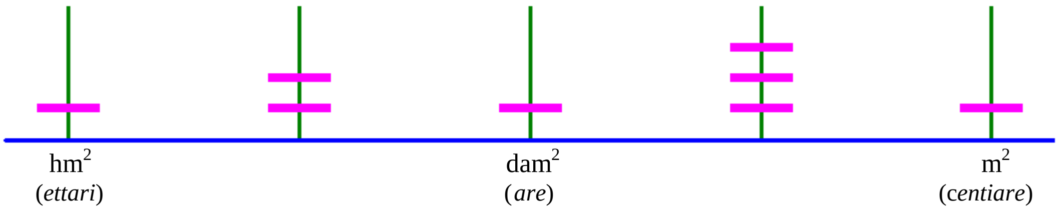


Figura 30 – una misura di superficie registrata sull'abaco

Perciò la misura della superficie di Fig. 30 è: 1,2131 hm^2 = 121,31 dam^2 = 12131 m^2, e così via per le unità di misura mancanti.
Per le misure di volume ci si regola di conseguenza, tenendo conto che in tal caso ogni unità di misura corrisponde a mille volte l'unità di misura immediatamente più piccola (il che nella rappresentazione sull'abaco corrisponde a spostarsi da un'asticella a quella situata tre posti a sinistra). Di ciò gli alunni hanno parziale coscienza attraverso il lavoro svolto con i BAM decimali.
Infatti il *cubetto* ha i lati lunghi 1 cm, mentre il *cubo* ha i lati lunghi 1 dm. Allora a un certo punto sarà naturale chiamare *cubetto* e *cubo* rispettivamente centimetro cubo (in breve, cm^3) e decimetro cubo (in breve, dm^3). E quegli alunni già sapranno, ovviamente, che 1 decimetro cubo (cioè, un *cubo*) è costituito da mille centimetri cubi (*cubetti*). Onde risulta:

$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3\ .$$

Poi, con un po' di attività laboratoriale, il metro quadrato approntato prima – posto in terra, ai cui angoli saranno stati piazzati quattro *cubi* (dm^3) – potrà costituire la base di un *metro cubo* (in breve, m^3), i cui quattro spigoli verticali potranno essere realizzati con spaghi che saranno opportunamente tenuti tesi da otto bambini.
E poiché 1 m^2 = 100 dm^2, si farà osservare che quella base può essere ricoperta dalle facce di100 *cubi*; così come la faccia del piatto decimale di Fig. 15, posta sul tavolo, risulta ricoperta dalle facce di 100 *cubetti*.
Ora – così come quei cento *cubetti* vanno a formare la prima di dieci fasce orizzontali che si possono vedere in un *cubo* – i cento *cubi* che ricoprono il metro quadrato vanno a formare la prima di dieci fasce orizzontali che costituiscono il metro cubo, per un to-tale di 10·100 *cubi*. Onde risulta:

$$1\ m^3 = 1000\ \ dm^3.$$

E l'alunno dovrà arrivare a rendersi conto che analogo discorso si può fare per le altre unità di misura[37].
Sarà opportuno stabilire anche un legame tra misure di capacità e di volume. Perciò si farà presente che una bottiglia che abbia la forma di un cubo e la capacità di 1 litro (in breve, *1 l*), ha i lati (della parte interna al vetro) lunghi *1 dm*. Perciò, assimilando capacità e volume, risulta $1\ l = 1\ dm^3$. Onde risulta [38]:

$$1\ m^3 = 1000\ \ dm^3 = 1000\ \ l = 10\ hl.$$

[37] Sarebbe molto utile che venissero realizzati – per esempio usando della carta millimetrata – dei cubetti le cui sei facce fossero ripartite in *cento* quadratini i cui lati sono lunghi 1 mm. In tal modo nel cubetto si potrebbero ravvisare 10•100 cubicini i cui lati misurano 1 mm^3. Dalla carta millimetrata si possono ritagliare anche sei quadratini di un centimetro cubo, per attaccarli a un cubetto BAM.
[38] Si tenga presente che i consumi di acqua fornita dagli acquedotti pubblici sono misurati in metri cubi.

4. Appendice [39]

4.1. Brevi considerazioni sui numeri interi relativi [40]

I bambini prendono coscienza abbastanza presto dei numeri interi negativi; come controparte dei numeri naturali, i quali – escludendo lo *zero* – assumono la denominazione di numeri interi positivi.
I numeri interi negativi vengono visti come misuratori di un debito, o di una temperatura inferiore allo *zero*, oppure come livello di un piano o di un gradino al di sotto del piano terra, eccetera.
Una volta introdotti questi nuovi numeri, gli alunni presto si rendono conto che il segno "-", oltre a essere per loro un distintivo, è anche un operatore che applicato a un numero – positivo o negativo – ne conserva il ***modulo*** (cioè il numero stesso senza segno) ma ne cambia la *specie*: se quello è positivo lo fa diventare negativo, e viceversa; onde -(-3) = 3, ecc. Nel caso particolare dello *zero*, si pone -0 = 0.

Nota Bene. In -0 = 0, il segno "-" non è un distintivo superfluo, ma la precisazione del comportamento dell'operatore - rispetto a 0, che è lasciato inalterato. ■

Una descrizione dei numeri interi relativi [in futuro spesso useremo soltanto la dizione "interi", con le eventuali specificazioni "positivi" o "negativi"] si realizza prolungando la *linea dei numeri* dall'altra parte dello *zero*. Onde si viene ad avere – o meglio, a ipotizzare – una linea infinita da ambo le parti.

…..●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●---●…..
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Sulla linea dei numeri – come su ogni linea – si possono considerare due *sensi* di percorrenza in opposizione tra loro, il principale dei quali – detto *senso (o verso) positivo* – è quello che dai numeri negativi va verso lo zero e poi, proseguendo, verso numeri positivi sempre più grandi. L'altro è detto *senso (o verso) negativo*.

Ora immaginiamo i nostri interi come misure di temperatura. Allora ci si rende conto che man mano che quelle scendono, i corrispondenti valori numerici percorrono *la linea dei numeri* in senso negativo e sono da considerare via via più piccoli, come via via più piccole sono le temperature che essi descrivono. Onde interi negativi sempre più lontani dallo zero vengono considerati sempre più piccoli – e più piccoli degli altri numeri, 0 compreso – anche se il loro modulo è via via maggiore. In definitiva, sulla precedente linea dei numeri, andando da sinistra a destra, si hanno numeri sempre più grandi.
Sulla linea dei numeri si possono rivedere anche le operazioni di addizione e di sottrazione tra interi relativi, che saranno già state introdotte facendo riferimento a considerazioni legate a *debiti* e *crediti*. Precisamente, come nel caso dei numeri naturali, partendo da un qualsiasi intero a pensato sulla linea dei numeri – non importa se positivo, negativo o nullo – addizionare a esso un intero <u>positivo</u> b corrisponde a spostarsi da a in senso positivo di un numero b di passi; invece, sottrarre b corrisponde a spostarsi da a in senso negativo, ma sempre di un numero b di passi.
Se le stesse operazioni le vogliamo svolgere a partire da a, ma utilizzando un numero negativo $-b$ (onde b è il suo modulo) si procede allo stesso modo, ma invertendo i sensi di percorrenza. Vale a dire, per addizionare $-b$ ad a, da a ci si sposta di b passi, ma in senso negativo; invece, per sottrarre $-b$, da a ci si sposta in senso positivo di un numero b di passi.
In definitiva addizionare un numero negativo $-b$ è come sottrarre il suo modulo b; mentre sottrarre un numero negativo $-b$ è come addizionare il suo modulo b.
Per quel che riguarda la moltiplicazione tra interi relativi, il discorso è più delicato e sarà affrontato nel prossimo paragrafo [41].

---

[39] L'Appendice non riguarda l'attività condotta con Francesca, dato che l'argomento non rientrava nel programma che ella stava seguendo. Tuttavia quanto verrà detto potrebbe risultare utile in casi simili.

[40] Qui usiamo gli interi relativi poiché così si possono prendere le mosse dai numeri naturali – che sono la loro parte positiva – sui quali la moltiplicazione e altre nozioni hanno un significato concreto di notevole efficacia. Ciò consente di trattare i numeri interi relativi, in maniera abbastanza semplice e completa; volendo, anche a partire dalla terza classe della scuola primaria.

4.2. La moltiplicazione tra interi relativi

Già nella prima classe della scuola primaria gli alunni imparano che i due numeri che entrano in gioco in una moltiplicazione hanno ruoli differenti. Infatti il *moltiplicatore* è un operatore che svolge un'azione sull'altro numero. Perciò è quest'azione che va opportunamente estesa e interpretata nell'ambito degli interi relativi. Per i numeri che verranno in seguito la strada sarà già stata aperta.

Ora non c'è difficoltà a estendere la moltiplicazione agli interi (relativi) quando il moltiplicatore è positivo o nullo, assegnandogli lo stesso ruolo che esso già svolge nell'ambito dei numeri naturali. Vale a dire, il moltiplicatore dirà quante volte il moltiplicando – adesso anche quando è negativo – figura come addendo in un'addizione che non abbia altri addendi, a parte – eventualmente – qualche *zero*, che però è inessenziale agli effetti della somma. Onde questa somma viene scelta come risultato della moltiplicazione.
Perciò se il moltiplicatore è 1, allora il risultato è dato dal moltiplicando, mentre se il moltiplicatore è 0 il risultato è 0.
Ma come ci si regola quando il ruolo di moltiplicatore è assegnato a un numero negativo $-b$ (onde b è positivo)? Ebbene, così come un moltiplicatore positivo quantifica la presenza del moltiplicando in un'addizione (nel senso precisato prima), a un moltiplicatore negativo si attribuisce il compito – rispetto a un moltiplicando a – di indicare, col suo modulo, quante volte in un'addizione deve essere presente $-a$.
Ciò è legato al fatto che – come convenzione generale – quando in una notazione matematica due operatori sono abbinati, allora l'operatore che risulta complessivamente si comporta, sull'oggetto a che subisce l'azione, facendo agire su a prima l'operatore che è più vicino ad a; dopodiché sul risultato ottenuto agisce l'altro operatore.
Ora applichiamo questa convenzione ad $a\cdot(-b)$, essendo b un numero naturale situato in posizione di moltiplicatore, a cui è stato abbinato l'operatore "-". Allora l'azione di $-b$ su a si traduce nel fatto che su questo prima agisce "-" (che è più vicino ad a rispetto a b) trasformandolo in $-a$, dopodiché su $-a$ agisce b, ottenendo così $(-a)\cdot b$. Il che è come porre:

$$a\cdot(-b) := (-a)\cdot b$$ [42].

Usando la convenzione che un operatore unario (cioè, che agisca su di un solo ente, come fa l'operatore "-") agisce sempre sul risultato dell'espressione più semplice collocata alla sua destra, la formula precedente si riscrive così (dove in $-a\cdot b$ il segno "-" agisce solo su a):

$$a\cdot -b = -a\cdot b\,.$$

Allora risulta immediatamente:

$$4\cdot -2 = -4\cdot 2 = -4 + -4\cdot = -(4\cdot 2) \qquad -4\cdot -2 = --4\cdot 2 = 4\cdot 2 \quad \ldots$$

Sulla base di questa definizione riguardante un moltiplicatore negativo, in Fig. 31 illustriamo concretamente il caso in cui il moltiplicando 4 numera delle palline. Perciò il risultato della moltiplicazione ci dà la quantità finale di palline. Ebbene, via via che il moltiplicatore diminuisce di 1, la quantità di palline diminuisce di quattro unità, anche in relazione a moltiplicatori negativi.
Infatti, a partire da 4 palline considerate 2 volte, diminuendo il moltiplicatore di una unità si ha una diminuzione di 4 palline, ottenendo 4 palline. Dopodiché il procedimento si ripete col moltiplicatore 0, il cui comportamento corrisponde a una ulteriore diminuzione di 4 palline, onde si passa a *zero* palline (nessuna pallina). Una volta arrivati al moltiplicatore 0, il passaggio al moltiplicatore -1 porta da *zero* palline a $4\cdot -1$ (= 0-4 = -4) palline; cioè, ancora a quattro palline in meno: a un debito di 4 palline [43]. Poi il passaggio al moltiplicatore -2 fa aggiungere un altro debito di 4 palline: $4\cdot -2$ (= $(-4)\cdot 2$) palline. E così via, sottraendo di volta in volta 4 palline.

---

41 Il tipo di introduzione degli interi relativi a cui facciamo riferimento qui rende complicata la verifica delle proprietà delle operazioni che già si conoscono nel caso dei numeri naturali (a parte il caso della proprietà commutativa per addizione e moltiplicazione). Perciò con gli alunni si limiterà a enunciarle e a spiegarle.

42 Il segno := – da usare solo all'inizio, anche in altri casi – significa che l'uguaglianza è frutto di una convenzione, di una definizione.

43 Nelle illustrazioni abbiamo indicato le palline in debito in rosso e le abbiamo poste al di sotto della linea continua.

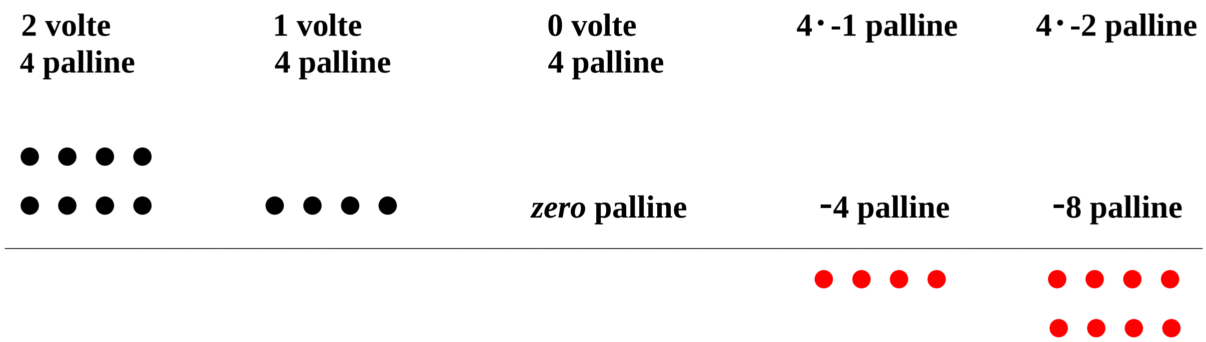


Figura 31 – l'evolversi di un prodotto con moltiplicando positivo

Questo tipo di comportamento di un moltiplicatore negativo si nota pure nel caso in cui anche il moltiplicando sia negativo, poiché la diminuzione di una unità del moltiplicatore si traduce anche ora in una diminuzione del risultato di una quantità pari al moltiplicando; il che, essendo questo negativo, corrisponde a un aumento uguale al suo opposto. In particolare, come moltiplicando scegliamo -4, riferito a un debito di 4 palline. Allora, seguendo Fig. 32, partiti dal moltiplicatore 2 e arrivati al moltiplicatore 0 – che ci dà come risultato un debito nullo (di *zero* palline) – il passaggio al moltiplicatore -1 porta a $-4 \cdot -1 = 4 \cdot 1$ (4 palline). Poi il passaggio al moltiplicatore -2 porta a $-4 \cdot -2 = 4 \cdot 2$ $(4 + 4$ palline); e così via, aggiungendo di volta in volta 4 (palline).

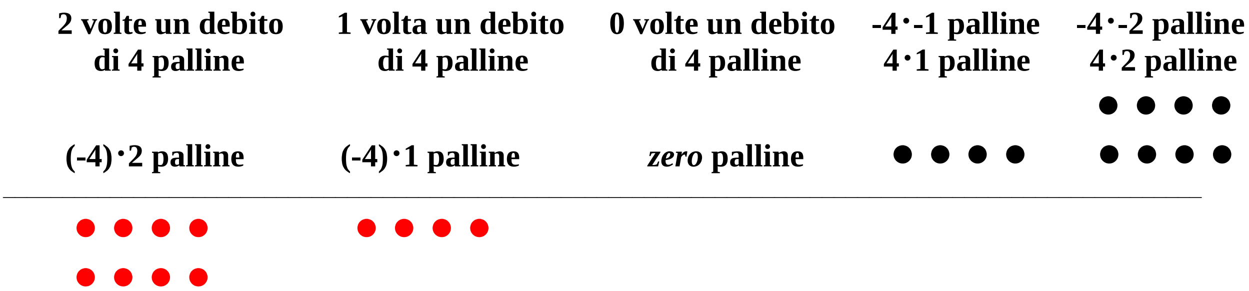


Figura 32 – l'evolversi di un prodotto con moltiplicando negativo

Conclusione

Intanto noi continuiamo a lavorare con Francesca, che – come si è già detto – qualche tempo fa ha preso nove sia in aritmetica che nella lettura, avendo per la prima volta chiesto spontaneamente di leggere ad alta voce. Successivamente la bimba ha guadagnato prima un bravissima e poi un dieci sui numeri decimali, seguiti da un nove sulle equivalenze. In proposito, presumiamo che l'attività svolta con BAM e abaco sia stata risolutiva.

A metà aprile la sua maestra, durante un colloquio con la mamma, ha affermato che a secondo lei la bambina non è più discalculica.

Con ciò non pretendiamo di aver "guarito" Francesca. In realtà ci permettiamo solo di presumere che i test attualmente in uso per una diagnosi di discalculia non siano del tutto affidabili; soprattutto in presenza di test per la dislessia, molto più credibili, che a volte possono indurre a credere che ci sia una forma di comorbilità, con la conseguenza che si scambi per discalculia una semplice difficoltà di apprendimento in aritmetica, sulla quale non si sia intervenuti in modo adeguato.

Del resto in [20] (Lucangeli e altri), p. 31, si ipotizza che "... molti dei casi individuati (di discalculia n. d. r.) siano dei falsi positivi riconducibili alla condizione di difficoltà piuttosto che a quella di disturbo".

Ringraziamo Anna Cerasoli e Antonio Bernardo
per l'accurata lettura e per gli utili consigli

Sito/Bibliografia

[1] Butterworth B. (1999). *Intelligenza matematica.* Ed. Rizzoli, Milano.
[2] Butterworth B. (2005). The development of arithmetical abilities. *The journal of child Psychology and Psychiatry, 46,* 318.
[3] Ceccarelli F. (1982). *L'istinto linguistico*, Ed. Sansoni.
[4] D'Amore B. (2002). Basta con le cianfrusaglie!. *La Vita Scolastica*, 8, 14-18.
[5] D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in Matematica*, 11, 1, 89-109.
[6] Daniele V. (2014). «Il più prezioso dei capitali» Infanzia, istruzione, sviluppo del Mezzogiorno. *Rivista economica del Mezzogiorno, 3,* 597-616, Ed. il Mulino.
http://www.rivisteweb.it/doi/10.1432/79068
[7] De Mauro T. (1995). L'origine del linguaggio (un'intervista di Sara Fortuna), *Rai Educational.* http://www.emsf.rai.it/articoli/articoli.asp?d=40
[8] Devlin K. (2008). L'istinto matematico, Ed. Mondolibri.
http://www.mondolibri.it/immagini/pdf/assaggio_770149.pdf
[9] Galvan N., Biancardi A. (2007). *Una Didattica per la Discalculia* ("*uno, due, dui*"), Associazione Italiana Dislessia, Ed. Libri Liberi, Firenze.
[10] Genovese E., Ghidoni E. (2013). *Discalculia nei giovani adulti. Indicazioni e strumenti per uno studio efficace* (a cura di Guaraldi G.), Ed. Erickson, Trento.
[11] Fox S. E., Levitt P., Nelson C. A. (2010). How the Timing and Quality of Early Experiences Influence the Development of Brain Architecture, in *Child Development*, Vol. 81, n. 1, pp. 28-40.
[12] Hiebert J., Wearne D. (1996). Instruction, understanding and skill in multidigit addition and subtraction, in *Cognition and Instruction*, 14, pp. 251-283.
[13] Le Corre M., Carey S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles, *Cognition,* 105, 395-438.
[14] Lenzi D. (2011). Un uso appropriato e coordinato dei Blocchi Aritmetici Multibase e dell'Abaco, *Education 2.0.*
http://www.educationduepuntozero.it/Temi/Didattica-e-apprendimento/2011/02/img/lenzi4_all.pdf
[15] Lenzi D., Marra I. (2011). Frazioni e scuola dell'obbligo. *Matematicamente.it.*
http://www.matematicamente.it/magazine/maggio2011/155-Lenzi-Marra-Frazioni.pdf
[16] Lenzi D., (2012). Verso la conquista del numero, *Education 2.0.*
http://www.educationduepuntozero.it/Temi/Didattica-e-apprendimento/2012/05/img/lenzi6_all.pdf
[17] Lenzi D., (2014). L'altra aritmetica, *Education 2.0.*
http://www.educationduepuntozero.it/Temi/Curricoli-e-saperi/2014/03/img/lenzi12_all1.pdf
[18] Lenzi D., Lenzi R., (2015). Le dita, un laboratorio naturale per i primi apprendimenti aritmetici. *Atti convegno naz. GRIMED*, Lucca, 10-12 aprile 2015.
[19] Lucangeli D., Poli S., Molin A. (2003). *L'intelligenza numerica*, vol. 1; Ed. Erickson, Trento.
[20] Lucangeli D. (a cura di), (2012). *La discalculia e le difficoltà in aritmetica*, Giunti Scuola, Firenze.
[21] Piaget J., Szeminska A. (1968). *La genesi del numero nel bambino.* La nuova Italia.
[22] Stella G., Grandi L. (2011). *La Dislessia e i DSA,* Giunti Scuola, Firenze.
[23] Tierney A., Nelson C. A. (2009). Brain Development and the Role of Experience in the Early Years, in *Zero to Three*, Vol. 30, n. 2, pp. 9-13.
[24] Vallortigara G., Panciera N. (2014). *Cervelli che contano,* Adelphi, Milano.
[25] Bartole R., La Ritabella. http://www.laritabella.com/index.php?pag=1

223. Lo scaffale dei libri

"Un biglietto di sola andata" di Bruno Codenotti

Un libro davvero originale nello sviluppo dell'argomento e il sottotitolo "Un invito alla logica e alla teoria dei giochi" non potrebbe essere più adeguato, visto che si tratta di un vero e proprio invito ad approfondire.
Nella prefazione, Codenotti ci racconta la genesi di questo testo, nato dalle conferenze divulgative tenute dall'autore stesso sull'argomento e dal confronto continuo con le persone incontrate, riflettendo e costruendo progressivamente la struttura del libro. L'idea prende inoltre spunto dagli scritti di Raymond Smullyan, "un maestro della divulgazione scientifica" e non a caso nel corso della narrazione più volte sono citati i suoi giochi.
La forza del testo è nella mancanza di riferimenti a formalismi che potrebbero costituire un ostacolo alla comprensione. Non solo: l'autore mette in guardia il proprio lettore, utilizzando un carattere diverso per gli argomenti che presentano maggiore difficoltà. Il lettore può quindi scegliere di lasciarsi guidare nella soluzione – seguendo i ragionamenti di Aldo – oppure mettersi alla prova tentando di risolvere i quesiti. L'ultima scelta è quella di saltare i problemi proposti e seguire semplicemente le vicende di Aldo attraverso le sue riflessioni, in questa simpatica storia che incuriosisce il lettore, vista l'imprevedibilità della vicenda.
Aldo è, appunto, il protagonista, ma è un personaggio molto particolare: diciamo che non è un uomo come noi, ma un Homo Rationalis, ovvero "agisce sempre con uno scopo e logicamente e ha la capacità di calcolare tutto ciò che è necessario per raggiungere il proprio scopo. Contrariamente all'homo sapiens (HS), l'homo rationalis 'crede' a qualcosa se e solo se la può dimostrare logicamente." Potrebbe sembrare l'alunno ideale di ogni insegnante di matematica, ma quando, nel corso della storia, Aldo fa il suo incontro con la scuola e diventa l'alunno di un Liceo Sperimentale, scopriamo che per il suo insegnante di matematica la vita si fa davvero difficile.
La storia di Aldo si svolge in tre luoghi diversi: tra gli Homo Sapiens, sull'Isola VeroFalso e a Logicolandia. Tra gli Homo Sapiens, Aldo incontra giovani "aperti a nuove amicizie" e che "fanno poche domande": Jacopo ad esempio, uno studente di scuola superiore che chiede spesso e volentieri il suo aiuto nei compiti di matematica, oppure Lavinia, che studia fisica, ma anche con gli alunni di un Liceo Sperimentale e quelli di una scuola elementare. I problemi presentati portano alla soluzione di un "famoso rompicapo logico introdotto da Raymond Smullyan", ma non mancano i giochi di "The Canterbury Puzzles" di Dudeney, i problemi proposti da George Boolos e alcuni problemi del famoso Martin Gardner.
Il secondo luogo è nei sogni di Aldo ed è l'Isola VeroFalso, dove il nostro protagonista si scontra con la definizione di verità e, quindi, anche con il teorema di Gödel. La guida del bibliotecario PantaRes gli permetterà di superare anche le minacce che gli vengono rivolte e proprio le vicende accadute durante il sogno aiuteranno Aldo a capire chi è veramente.

L'ultimo luogo è Logicolandia, la terra degli Homines Rationales, dove Aldo deve mettersi alla prova e ottenere la certificazione, con la guida del fantomatico Signor Q e di Pino Prati e Ciro Corvi. A Logicolandia, scopriamo come i paradossi appartengano alla vita di tutti i giorni: il paradosso di Condorcet inficia delle elezioni che, in un mondo perfettamente razionale, ci aspetteremmo sicuramente democratiche; il dilemma del prigioniero, esempio della teoria dei giochi, non aiuta certo a capire chi sono davvero i responsabili di un omicidio e il paradosso di Braess ci spiega come, a volte, decisioni apparentemente inspiegabili, in termini di gestione del traffico, siano quelle più adatte per affrontare i problemi. Insomma, pare proprio che la vita non sia semplice nemmeno dove regna sovrana la razionalità.
Il nostro Aldo, intanto, è impegnato a scoprire quale sia la sua storia, quale sia il legame con gli Homo Sapiens, perché si sia svegliato una mattina in un appartamento, con una lettera tra le mani e avendo per vicino di casa un ragazzino, Jacopo, che a scuola si trova ad affrontare problemi davvero difficili…
La lettura di questo testo è consigliata a tutti: chi lo vorrà leggere anche solo per diletto, saltando le parti davvero complesse, troverà che non sempre la verità è così semplice da trovare, nemmeno quando si lascia campo libero alla razionalità.

Daniela Molinari

"Il problema di matematica nella pratica didattica" di Bruno D'Amore

Il libro è una rivisitazione di un testo del 1993, edito dalla Franco Angeli, "Problemi, pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving". Della prima edizione, estensione della tesi di laurea in pedagogia di D'Amore, la versione attuale conserva la struttura e le citazioni, ma con alcuni ampliamenti e modifiche. Nella premessa, l'autore riconosce di essersi addentrato in temi di ricerca che sconfinano nella pedagogia e nella psicologia, ma per quanto l'attività di risoluzione di problemi sia "l'intima natura della matematica stessa", durante la lettura ci si rende conto di come questa disciplina abbia a che fare anche con le emozioni e la psicologia. "Nel processo di apprendimento/insegnamento della matematica si devono considerare come prioritari e sempre sotto osservazione l'immagine che l'insegnante e l'allievo hanno della matematica, l'immagine che ha l'allievo di sé quando fa matematica ed anche l'immagine che ha l'insegnante di sé nel corso del proprio ruolo".
L'opera presenta una carrellata di studi dedicati ai problemi, ma non si limita ad una trattazione teorica, che sarebbe in tal caso sterile: è "una fonte di ricche stimolazioni concrete per l'insegnante di scuola primaria, soprattutto, nella sua azione quotidiana". In realtà, addentrandomi nella lettura del testo, ne ho gustato tutta la ricchezza, che va decisamente oltre la scuola primaria: alcune considerazioni valgono per tutti i livelli scolastici e per l'insegnamento in generale.

Polya, matematico ungherese, sostiene che "risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, […] per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile." D'Amore afferma fin da subito che risolvere problemi è il modo migliore per imparare: ogni volta che, in completa autonomia, si risolve un problema, si crea una strada nuova, che il nostro cervello potrà richiamare alla memoria quando se ne presenta l'occasione. Questo aspetto viene ripreso più volte, considerato che, come ci sottolinea l'autore stesso, l'opera segue un percorso a spirale, tornando più volte sugli stessi argomenti a livelli di profondità diversi.

Numerosi sono gli ingredienti che concorrono alla soluzione del problema e che vengono esplorati dall'autore: si comincia con l'immaginazione, necessaria per darsi una rappresentazione adeguata, si procede con la motivazione, per la quale il ruolo della famiglia e dell'insegnante sono fondamentali e non può mancare il riferimento all'intuizione, "centro nevralgico della risoluzione di un problema". Viene posto l'accento sul fatto che ognuno di noi rielabora le proprie conoscenze "continuamente, le discute ogniqualvolta si trova di fronte ad un fatto nuovo". Per questo motivo, ha poco senso la ripetizione di problemi simili tra loro: oltre a rischiare di generare un effetto Einstellung, ostacolando la creazione di nuove strategie, esso è poco produttivo e può portare alla depressione, perché quando non funziona, al cambio del contesto, l'alunno si convince di non essere in grado di risolvere i problemi.

Interessanti anche i richiami al giusto atteggiamento che dovrebbe avere l'insegnante nel momento in cui lo studente, dopo che gli è stato presentato il problema, si concentra per giungere a una soluzione: gli insegnanti in genere intervengono sollecitando o suggerendo, mentre dovrebbero avere un atteggiamento tale da invitare alla concentrazione. L'autore evidenzia il cambio di prospettiva del 1985, visto che, con la promulgazione dei nuovi programmi scolastici, viene riconosciuto finalmente il giusto ruolo della matematica, che "contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti" e invade persino l'ora di lettere, come dimostra l'importanza dell'educazione linguistica nella soluzione dei problemi. Non per niente, le prime difficoltà sono a monte della soluzione vera e propria: dall'interpretazione del problema alla rappresentazione della situazione, dalla soluzione matematica al calcolo vero e proprio, soprattutto se all'interno del problema ci sono dati espressi con numeri decimali.

In tutto questo, D'Amore sottolinea che il momento della riflessione, al termine della soluzione del problema, è fondamentale e che l'insegnante ha il compito di guidare questo momento ponendolo al di fuori della fase valutativa e permettendo che essa si svolga "senza giudizi in un clima di grande fiducia e serenità". Questo percorso di scoperta non può che svolgersi in modo personale: secondo Polya, "primo e principale obiettivo dell'insegnamento della matematica, soprattutto nella scuola secondaria" è quello di "insegnare a pensare" e il libro di D'Amore può essere un buon punto di partenza per scoprire come fare.

Daniela Molinari

"Sette brevi lezioni di fisica" di Carlo Rovelli

Carlo Rovelli, attualmente ordinario di fisica teorica all'Università di Aix-Marseille e dirigente del gruppo di ricerca in gravità quantistica del Centre de Physique Théorique de Luminy a Marsiglia, è uno dei fondatori della loop quantum gravity (gravità quantistica a loop). Questo libro raccoglie l'espansione di una serie di articoli pubblicati per un supplemento del Sole24Ore: offrono una "carrellata su alcuni degli aspetti più rilevanti e affascinanti della grande rivoluzione che è avvenuta nella fisica del XX secolo" e devono la propria semplicità al fatto che sono stati pensati "per chi la scienza moderna non la conosce o la conosce poco".

In effetti, per quanto gli argomenti siano complessi, sono affrontati con un linguaggio semplice. Il lettore viene guidato, a partire dalla relatività generale e dalla meccanica quantistica, fino alle ricerche contemporanee della fisica, ovvero fino alla gravità quantistica a loop. Lo stesso Rovelli descrive il suo lavoro parlando di una "fotografia della realtà" che ha provato a comporre. D'altra parte la fisica contemporanea non è che un tentativo di descrivere la realtà nella quale ci troviamo a vivere.

Con le prime due lezioni, Rovelli ci introduce alla relatività generale e alla meccanica quantistica, "i due pilastri della fisica del Novecento". Fin da subito, il fisico ci permette di confrontarci con il tema della bellezza: "Ci sono capolavori assoluti che ci emozionano intensamente, il Requiem di Mozart, l'Odissea, la Cappella Sistina, Re Lear… Coglierne lo splendore può richiedere un percorso di apprendistato. Ma il premio è la pura bellezza. E non solo: anche l'aprirsi ai nostri occhi di uno sguardo nuovo sul mondo. La Relatività Generale, il gioiello di Albert Einstein, è uno di questi." La meccanica quantistica è invece descritta come ammantata dal mistero, nonostante le numerose applicazioni che hanno cambiato la nostra vita quotidiana.

Ancora una volta viene sottolineato il ruolo di primo piano avuto da Einstein, che ha compreso la realtà dei "pacchetti di energia", considerati dai suoi contemporanei solo un ottimo stratagemma di calcolo. La vicenda umana, in questo caso, è in primo piano rispetto alle scoperte.

Sulla base di relatività e meccanica quantistica, nella seconda metà del XX secolo ha preso forma una nuova descrizione dell'universo, nel quale la nostra galassia non è che un "granello di polvere in un'immensa nuvola di galassie".

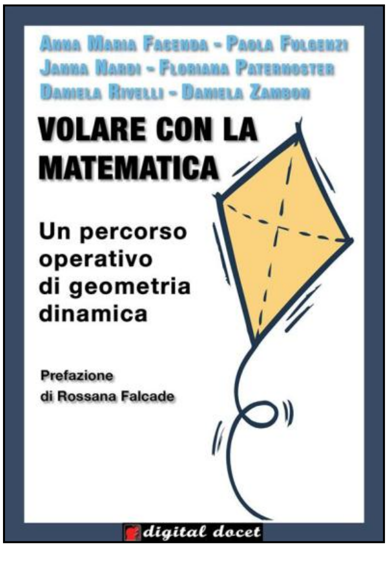
Dalla grandezza del cosmo, con la quarta lezione si passa alle particelle, che sono descritte come "minuscole ondine che corrono", muovendosi "secondo le strane regole della meccanica quantistica".

Il tentativo di conciliare la meccanica quantistica e la relatività generale, entrambe ottime teorie se prese singolarmente ma in contraddizione l'una con l'altra, sfocia nella quinta lezione, dedicata alla gravità quantistica. Il tema di questa lezione è anche il percorso compiuto dalla fisica: apparentemente i conflitti hanno un'accezione negativa, ma per la conoscenza il momento del conflitto – in questo caso tra due parti importanti della fisica – non può che essere un'opportunità per fare ulteriori passi avanti nella comprensione del mondo. La gravità quantistica è un tentativo per descrivere ancora meglio la realtà, anche se apparentemente sembra allontanarsene ancora di più, visto che

le sue equazioni ci portano lontano da tutto ciò che ci è familiare, non contenendo la variabile "tempo".
Tempo e calore sono strettamente intrecciati, visto che il calore fluisce spontaneamente dalle cose calde alle cose fredde, come ci dicono i principi della termodinamica e questo flusso del calore ci dà il verso del tempo. Con la termodinamica, la probabilità fa il proprio ingresso nella fisica e l'uomo comincia ad avere una visione diversa del mondo, del tempo. Proprio le domande che gravitano attorno al tempo e al suo significato evidenziano come sia sfuocata la nostra percezione del mondo. E il calore emanato dai buchi neri, mai osservato, ma calcolato in modo convincente da Hawking, evidenzia quanto sia vasta la nostra ignoranza in materia.
Una fisica ancora in evoluzione e, al tempo stesso, piena di lati oscuri che forse, con il progresso della conoscenza, otterranno una spiegazione. La visione che ci offre Rovelli è sì una "fotografia della realtà", ma, al tempo stesso, un'immagine destinata a cambiare. E, all'interno di quest'immagine, noi, imprevedibili nel nostro comportamento, troppo complessi perché le leggi di natura possano in qualche modo prevedere le nostre decisioni, siamo al tempo stesso osservatori ed osservati, soggetti e oggetti della fisica contemporanea. In altre parole: "Lo studio della fisica teorica si nutre della passione e delle emozioni che portano la nostra vita."
Rovelli ci ha presentato una fisica sempre in movimento e con un volto umano: il nostro!

Daniela Molinari

"Volare con la matematica" AA. VV.



Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon, Volare con lamatematica, un percorso operativo di geometria dinamica, Prefazione di Rossana Falcade, Collana Risorse Didattiche Digitali – Digital Docet. L'esperienza nell'ambito dell'insegnamento, la passione e la volontà di rinnovare ogni giorno gli strumenti a propria disposizione, inventando nuove strategie e nuove strade, sono gli ingredienti di questo stimolante libretto, offerto da insegnanti ad altri insegnanti, purché questi abbiano la volontà di mettersi in gioco.
Il percorso che ci viene proposto da queste sei colleghe è un invito a percorrere strade alternative, presentando una matematica più aperta, la matematica che ognuno di noi si porta dentro, ovvero la "stimolante attività del pensiero" che tanto ci appassiona.
Libertà ed esplorazione sono le parole chiave di questo percorso: gli alunni possono gestire liberamente il proprio processo di apprendimento, grazie ad un'esplorazione guidata del mondo dei quadrilateri, dopo che l'insegnante ha delineato il perimetro del campo d'azione e ha offerto agli alunni gli strumenti necessari.
Veniamo quindi agli oggetti di questo percorso: i deltoidi, ovvero l'aquilone della copertina, ma non solo. I veri oggetti sono i quadrilateri, con le loro proprietà. Solo che la strada scelta per incontrarli è completamente diversa rispetto a quella usuale: i deltoidi / aquiloni, che, già solo per i ricordi della nostra infanzia che evocano, costituiscono un ottimo cavallo di Troia,

colpiscono la nostra immaginazione e trovano una strada di accesso privilegiata alla nostra mente.
Dallo studio e dalla manipolazione di questi aquiloni, i concetti prendono forma e un passo per volta gli alunni, veri artefici e protagonisti del processo, ricostruiscono tutta la famiglia dei quadrilateri.
Il percorso è accattivante e ha molti punti di forza: innanzi tutto, le definizioni matematiche – spesso calate dall'alto nel processo di apprendimento – vengono costruite un passo per volta, analizzando quanto sia necessario dire e quanto possa essere invece accantonato. In una delle tabelle riassuntive, troviamo proprio la distinzione tra definizioni che si possono basare solo su una proprietà e definizioni che necessitano di due proprietà per individuare univocamente gli oggetti in questione. Inoltre, in questo processo di costruzione delle definizioni, l'errore assume un ruolo ben definito e positivo: è solo commettendo errori che possiamo completare i nostri processi di scoperta. E in questa ridefinizione dell'errore, il ruolo dell'insegnante è fondamentale: come conoscitore del punto d'arrivo e del percorso che si sta costruendo, l'insegnante può guidare gli alunni attraverso gli errori, evidenziandone l'utilità per giungere all'obiettivo finale. Solo gli errori permettono infatti di elaborare le strategie vincenti.
Per questo, forse, la matematica ci appare più aperta: gli alunni spesso conoscono una matematica che, apparentemente, è fatta solo di procedimenti perfetti e lineari, forse perché noi insegnanti, impegnati a presentare al meglio i nostri algoritmi, impegnati ad aiutare gli alunni nel loro processo di apprendimento, cerchiamo di evitare tutte le buche del percorso, dimenticando però che a volte proprio le cadute in queste buche, regalandoci un diverso punto di vista, ci permettono di raggiungere meglio gli obiettivi che ci eravamo prefissati.
Un altro aspetto non secondario è l'uso che viene fatto del modello, che può essere sia concreto che virtuale: il modello concreto è costruito operativamente dagli studenti, che sono guidati a costruire il proprio deltoide con carta, forbici ed elastici. Il modello virtuale è invece presentato con software didattici adeguati, quali Cabri-geométre e GeoGebra (all'interno del testo, disponibile in formato elettronico, ci sono numerosi link che rimandano ai filmati di youtube per la costruzione dei modelli necessari all'apprendimento). Entrambi i modelli mostrano i propri limiti ed è compito dell'insegnante presentarne tutte le ombre in modo che possano risaltare meglio le luci del modello mentale che ci portiamo dentro, rispetto al quale ogni altro modello non può che essere perdente.
Potremmo quasi dire che l'invito di questi insegnanti è a trovare dentro di sé la propria strada, il proprio modello. Come insegnanti, siamo invitati a trovare strategie e metodologie alternative: personalmente, il percorso presentato mi ha stimolata tantissimo, suggerendomi modifiche, alternative, ulteriori percorsi possibili, diversi ma al contempo simili a quello proposto dalle colleghe e credo che l'obiettivo fosse proprio questo. Il percorso, le schede per la rielaborazione, la proposta di un lavoro a piccoli gruppi o individuale, le verifiche finali, i filmati e le immagini… una ricchezza che chiede solo di essere sfruttata. E come alunni? Ogni giorno invitiamo i nostri alunni a trovare un proprio metodo di studio, una strategia con la quale affrontare lo studio della matematica (diciamoci la verità: spesso combattiamo con il poco interesse…) e questo percorso, stimolando l'entusiasmo del docente, non può che far nascere un po' di simpatia da parte degli alunni nei confronti dell'odiata matematica. In

fondo, la libertà che il percorso offre permette di costruirsi una propria matematica, proprio a partire dalle definizioni che spesso chiediamo ai nostri alunni di studiare a memoria, bacchettandoli se dimenticano un particolare, ma non consentendo loro di percepire fino in fondo l'importanza di ogni particolare.

Daniela Molinari

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito

Anno 9 Numero 24 Aprile 2015
Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce
ISIN ISSN 2035-0449
Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it