224. Il teorema dello Gnomone e i teoremi di Euclide

Domenico Lenzi *
Nicola Carichino **
Cosimo De Mitri ***

Sunto

Uno degli scopi di questo articolo è quello di provare che il I e il II Teorema di Euclide (in breve, Teoremi I;E e II;E) sono facili conseguenze del Teorema dello Gnomone, che è semplicemente la Proposizione 43 del Libro I degli Elementi di Euclide (in seguito, semplicemente *Elementi*).
In particolare, il II Teorema di Euclide deriverà dalla proprietà – che noi chiameremo III Teorema di Euclide (Teorema III;E) – che determina l'altezza del rettangolo costruito su di un cateto di un triangolo rettangolo, in modo tale che quel rettangolo sia equivalente al quadrato costruito sull'altro cateto. Come già per il Teorema I;E, Euclide non enuncia direttamente nemmeno il Teorema III;E, che si ricava riadattando – in un caso particolare – la dimostrazione della Proposizione 44 degli *Elementi* (cf. [5], p. 142).

Abstract. In this paper we use the euclidean gnomon theorem (see [5], p. 140, Proposition 43) in order to give very simple proofs of several Euclidean properties; in particular, of the first and of the second Euclide's theorems.

1. Considerazioni generali

Generalmente si dà poca importanza alla proposizione euclidea nota come Teorema dello Gnomone. Forse ciò dipende dall'enunciato un po' ermetico che il grande maestro ne diede. Eppure quella proposizione è densa di conseguenze importanti e pressoché immediate. Tra queste citiamo il Teorema I;E, che l'illustre alessandrino riporta nella dimostrazione della Proposizione 47 del Libro I degli *Elementi*.
Il Teorema dello Gnomone noi lo riproponiamo nella proposizione seguente, ricalcando in parte la formulazione che A. Frajese ne ha fatto nella nota 31 a p. 140 di [5].

Proposizione 1.1. Dato un parallelogramma, per un punto di una sua diagonale distinto dagli estremi si conducano due rette parallele ai lati. Allora dei quattro parallelogrammi nei quali il parallelogramma dato risulta suddiviso, sono equivalenti i due non attraversati dalla predetta diagonale. ■

La dimostrazione della Proposizione 1.1, che si riferisce ai due parallelogrammi in blu di Fig. 1, scaturisce immediatamente per sottrazione – dai due triangoli uguali *ABC* e *ADC* – dei triangoli bianchi, a due a due uguali, che risultano dalla suddivisione dei due parallelogrammi bianchi operata dalle rispettive diagonali.

* Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce; domenico.lenzi@unisalento.it
** I.I.S. "F. Bottazzi" – Casarano (LE); carichino.nicola@libero.it
*** Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce; cosimo.demitri@unisalento.it

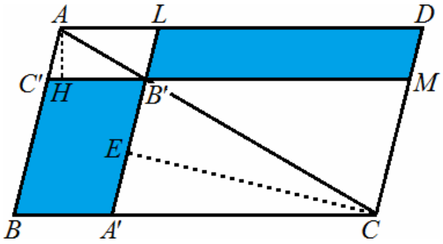


Fig. 1

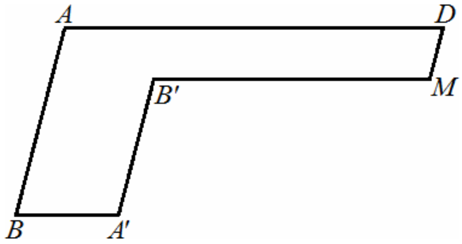
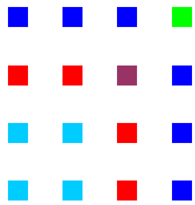


Fig. 2

Col termine geometrico *gnomone* Euclide [1] intende quanto rimane del parallelogramma *ABCD* di Fig. 1, quando ne venga cancellato il parallelogramma *B'A'CM* (Fig. 2) [2].

Nota Storica. Lo Gnomone – inteso come bordatura – ha avuto un ruolo importante, per la scuola pitagorica, nello studio dell'aritmogeometria. Per esempio, se di un numero quadrato come il 16 consideriamo la rappresentazione tipica attraverso dei quadratini (si veda l'illustrazione sottostante), che sostituiscono i classici sassolini (*calculi*), e dello schieramento conserviamo solo i 6 ($=3 \cdot 2$) quadratini blu e quello verde, si percepisce subito che la differenza tra 4^2 e 3^2 è $3 \cdot 2 +1$. E cosa analoga si percepisce nel passaggio dallo schieramento di 2^2 a quello di 3^2 quadratini.
Allora – in termini di schieramenti e senza ricorrere al calcolo del binomio $(n+1)^2$ – si capisce subito che per ottenere il quadrato successivo a n^2, basta aggiungergli $2 \cdot n+1$, che rappresenta l'(n+1)-mo numero dispari.



2. Semplici conseguenze del Teorema dello Gnomone

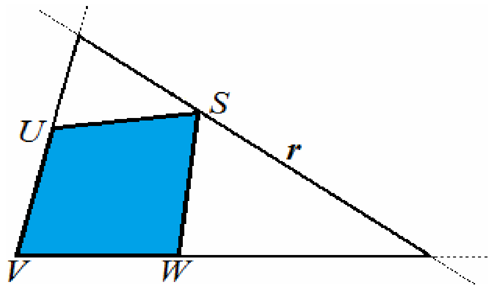
Ora, dato un triangolo, su due lati distinti si fissino due punti *B'* e *C'* diversi dai vertici; onde il segmento *B'C'* ripartisce il triangolo in un quadrilatero e in un triangolo più piccolo che chiameremo **triangolo minore** (si veda la parte sinistra di Fig. 3). Quindi nel triangolo minore chiameremo **vertice pivot** il vertice distinto da *C'* e *B'*, e **altezza pivot** l'altezza condotta da quel vertice.

Fig. 3

[1] Euclide introduce il termine gnomone solo nel Libro II degli *Elementi* (si veda [5], p. 157, Def. 2).

[2] In orologeria lo gnomone è l'asta di un orologio solare (o meglio, la sua punta), onde a volte si chiama gnomone anche la parte del quadrante che durante la giornata non è mai in ombra. Nel caso geometrico si immagina che il quadrante solare sia il parallelogramma *ABCD* di Fig. 1 e che l'asta sia infissa nel vertice *C*, mentre la parte descritta dall'ombra nel corso della giornata si suppone che sia il parallelogramma *B'A'CM*.
A volte per gnomone si intende una bordatura o qualcosa che viene aggiunto.

Se *B'* lo si congiunge anche con un punto *A'* del terzo lato, allora si determina, oltre a un altro triangolo minore, un quadrilatero convesso: quello avente come vertici *A', B', C'* e un opportuno vertice del triangolo di partenza (si veda la parte destra di Fig. 3 e il triangolo *ABC* in Fig. 1). Quindi in ciascuno dei triangoli minori chiameremo **lato pivot** quello che prolunga un lato del quadrilatero.
Traendo spunto dalla parte destra di Fig. 3, noi diremo che un quadrilatero convesso (in particolare, un parallelogramma) è *inscritto* in un triangolo ***T*** – che diremo circoscritto al quadrilatero – quando tre dei suoi vertici sono interni ai tre lati di ***T***, mentre il quarto vertice coincide con un vertice di ***T***. Perciò, per circoscrivere un triangolo a un quadrilatero convesso ***K***, basta prendere una retta ***r*** che intersechi ***K*** esattamente in un vertice – chiamiamolo *S*, mentre gli altri li chiamiamo, nell'ordine, *U, V e W* – e che intersechi le semirette *VU* e *VW* (si veda l'illustrazione sottostante).



Un'immediata conseguenza del Teorema dello Gnomone è la seguente Proposizione 2.1, che ne è una riformulazione riferita a un triangolo, per la quale possiamo fare riferimento al triangolo *ABC* di Fig. 1. Noi la chiameremo *Proprietà triangolare dello Gnomone.*

Proposizione 2.1. Dato un parallelogramma inscritto in un triangolo, esso è equivalente al rettangolo che ha come lati consecutivi l'altezza pivot di uno dei triangoli minori e il lato pivot dell'altro triangolo minore.

Dimostrazione. Infatti – facendo riferimento a Fig.1 – si ha che il lato pivot *A'C* è uguale a *B'M* e l'altezza pivot *AH* coincide con l'altezza del parallelogramma *LB'MD* condotta sul lato *B'M*. Con gli opportuni cambiamenti, analogo discorso può essere fatto rispetto al lato pivot AC' e all'altezza pivot *CE*[3].
Pertanto il rettangolo dell'enunciato è equivalente al parallelogramma *LB'MD*, cosicché la tesi discende dalla Proposizione 1.1. ■

Dalla Proposizione 2.1 discende immediatamente il corollario seguente

Corollario 2.2. Dato un parallelogramma inscritto in un triangolo, il lato pivot e l'altezza pivot di ciascuno dei due triangoli minori stanno in un rapporto costante. ■

Osservazione 2.3. Si noti che, nella teoria delle similitudini – che Euclide affronta nel Libro VI – il Corollario 2.2 è ovvio. Infatti, in Fig. 1, i triangoli rettangoli *AC'H* e *CA'E* sono simili, poiché l'angolo in *C'* del primo e l'angolo in *A'* del secondo sono uguali, avendo essi lati a due a due paralleli. ■

[3] Se il triangolo *ABC* è rettangolo in *B* (onde il parallelogrammo è un rettangolo), allora *AH = AC'* e *CE = CA'*.

3. La Proprietà triangolare dello Gnomone e i teoremi di Euclide

Come è noto, il Teorema I;E stabilisce che, dato un triangolo rettangolo, sono equivalenti il quadrato costruito su di un cateto e il rettangolo avente come base l'ipotenusa e come altezza la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. Ma è altrettanto interessante l'equivalenza tra quel quadrato e il rettangolo avente come base l'altro cateto e come altezza quella che deriva dalla proposizione seguente (cf. [5], dimostrazione della Proposizione 44 del Libro I, p. 142: caso particolare di un angolo retto).

Proposizione 3.1. Dato un rettangolo *C'BA'B'*, si prolunghi *BA'* di un segmento *A'C*.
Allora *C'BA'B'* è equivalente al rettangolo avente per lati consecutivi *A'C* e il segmento *AC'*, dove *A* è il punto d'incontro delle rette B*C'* e *CB'*.

Dimostrazione. Basta applicare la Proprietà triangolare dello Gnomone al rettangolo *C'BA'B'*, che è inscritto nel triangolo *ABC*. ■

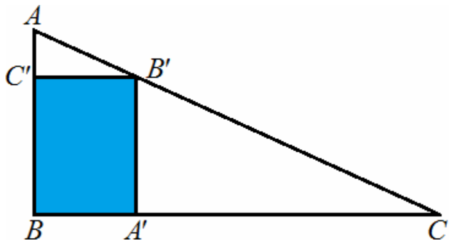


Fig. 4

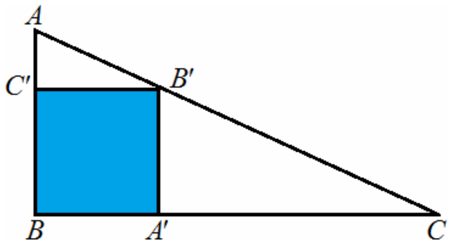


Fig. 5

Nel caso in cui il rettangolo *C'BA'B'* sia un quadrato (Fig. 5), noi la Proposizione 3.1 la chiamiamo III Teorema di Euclide (Teorema III;E), in onore del grande maestro, riformulandola nella Proposizione 3.2 seguente.

Proposizione 3.2. Dato un triangolo rettangolo ***T*** [4], si consideri il quadrato ***Q*** costruito su un suo cateto ***c***. Quindi si inscriva ***Q*** – prolungando, sino al loro punto d'incontro, l'ipotenusa del triangolo e il lato del quadrato che si oppone a ***c*** – in un nuovo triangolo rettangolo di cui ***T*** è un triangolo minore, ottenendo un secondo triangolo minore ***T'*** (si veda Fig. 5).
Allora ***Q*** è equivalente al rettangolo avente come lati consecutivi l'altro cateto di ***T*** e l'altezza pivot del triangolo minore ***T'***. ■

Come vedremo, dal Teorema III;E si ricava facilmente il Teorema II;E, il quale afferma che in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati consecutivi le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa. Anche questo teorema negli *Elementi* non compare autonomamente, ma lo si può ricavare applicando la Proposizione 8 del Libro VI (si veda [E], p. 373).
Premesso ciò, vediamo come il Teorema II;E si può ricavare dal Teorema III;E. Ebbene dato il triangolo *NB'C* (si veda Fig. 6) – rettangolo in *B'* – sull'altezza *B'A'* condotta da *B'* all'ipotenusa *NC*, si costruisca il quadrato *C'BA'B'*. Quindi considerando il punto di incontro *A* delle rette *BC'* e *CB'*, si ottiene una figura che amplia quella espressa in Fig. 5. Allora basta verificare che il segmento *AC'* è uguale alla proiezione *NA'*.

[4] Si faccia riferimento al triangolo *B'A'C* di Fig. 5.

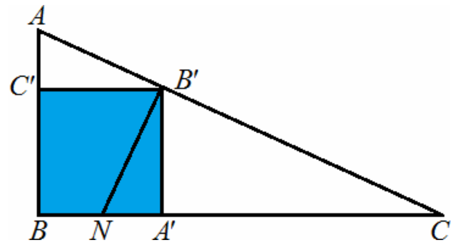


Fig. 6

In vero, i due angoli *C'AB'* e *B'NA'* – che sono angoli acuti rispettivamente del triangolo rettangolo *AC'B'* e del triangolo rettangolo *NA'B'* – sono uguali in quanto entrambi complementari dell'angolo *A'CB'*. Perciò i suddetti triangoli sono uguali, dato che hanno uguali anche gli altri due angoli acuti e i rispettivi cateti *C'B'* e *B'A'*. Perciò sono uguali anche gli altri due cateti *AC'* ed *NA'*.

Ora vedremo che dalla Proprietà triangolare dello Gnomone deriva facilmente anche il I Teorema di Euclide, di cui abbiamo già ricordato l'enunciato. Per la dimostrazione noi facciamo riferimento al triangolo rettangolo *B'A'C*, retto in *A'*, preso in considerazione nella Proposizione 3.1, costruendo sul cateto *B'A'* il quadrato *C'BA'B'* riportato in Fig. 5. Ebbene, in Fig. 7 si vede che il parallelogramma *ASA'B'* è inscritto nel triangolo *ABC* ed è equivalente al quadrato *C'BA'B'*.
Quindi si consideri il vertice pivot *B* e la corrispondente altezza pivot *BF*. Si tratta di provare che *BF* = *B'K*, per poi concludere la dimostrazione applicando la Proprietà triangolare dello Gnomone (Proposizione 2.1).

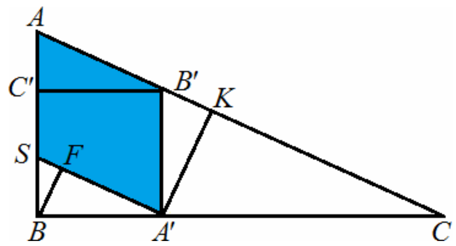


Fig. 7

In vero, i due triangoli rettangoli *BFA'* e *B'KA'* hanno ipotenuse uguali in quanto lati di uno stesso quadrato; d'altro canto i due angoli acuti *BA'F* e *B'A'K* sono uguali in quanto complementari dell'angolo *SA'B'*, onde sono uguali anche gli altri due angoli acuti. Perciò i triangoli *BFA'* e *B'KA'* sono uguali; quindi sono uguali anche *BF* e *B'K*, dato che si oppongono ad angoli uguali in triangoli uguali.
In fine, per evidenziare sinteticamente la semplicità e l'efficacia della Proprietà triangolare dello Gnomone, riportiamo la seguente figura. In essa si possono leggere i vari teoremi di Euclide di cui ci siamo occupati in questo paragrafo, riferendo i Teoremi I;E e III;E al triangolo *B'A'C,* e il Teorema II;E al triangolo *B'NC*.

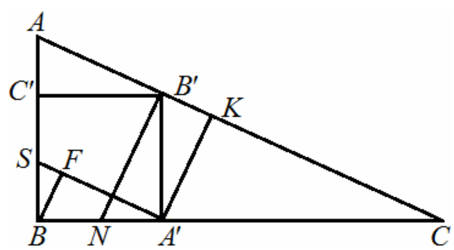


Fig. 8

Bibliografia

[1] Amaldi U., Sulla teoria della equivalenza, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*; raccolte e coordinate da F. Enriques, Parte I, Vol. 2°, Zanichelli, BO, 1983.

[2] Bernardi C., Cateni L., Fortini R., Maracchia S., Olivieri G., Rohr F., *Il pensiero matematico*, *geometria*, Le Monnier Scuola, 2011.

[3] Carichino N., De Mitri C., Su alcune dimostrazioni del I e del II teorema di Euclide, *Matematicamente.it. Magazine*, N. 22, pp. 5-10; 2014.

http://www.matematicamente.it/magazine/22maggio2014/203Carachino-DeMitri_Dimostrazioni-Euclide.pdf

[4] Enriques F., Amaldi U., *Elementi di geometria, Parte I*, Zanichelli, BO, 1970.

[5] Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, 1970.

[6] Euclide, *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Bompiani, 2008.