

226. Sull'esistenza di punti coniugati su superfici

Alexander Pigazzini

“... siccome non era in grado di rispondere a nessuna delle domande, non dava molto peso alla maniera in cui se le poneva”.

Le Avventure di Alice nel Paese delle Meraviglie.
Lewis Carroll 1865

Introduzione

Partendo da una minimalista introduzione dei concetti di superfici parametriche, campo di vettori, tensore di curvatura e torsione, mappa esponenziale, punti coniugati ed equazione di Jacobi, lo studio di questo breve articolo è quello di mostrare sulle superfici, che rispondano a premesse caratteristiche, la presenza di geodetiche che ammettano punti coniugati ed alcuni risultati dovuti alla “tecnica” utilizzata.

1. Richiami preliminari

1.1. Superfici parametriche

Sia M una varietà differenziabile.

Definizione 1.1.1. Una superficie parametrica in M è un'applicazione differenziabile $f: U \rightarrow M$, definita su un aperto connesso U di R^2 .

Siano (t, s) le coordinate in R^2 . Poniamo

$$\frac{\partial f(t, s)}{\partial t} = f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,s)}, \text{ e } \frac{\partial f(t, s)}{\partial s} = f_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_{(t,s)}.$$

con f_* il differenziale di f in un punto $p \in M$.

Definiamo **campo di vettori** su f l'applicazione differenziabile $V: U \rightarrow TM$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{V} & TM \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Ipotizziamo ora che su M sia stata assegnata una connessione lineare Γ , così facendo per ogni s fissato, la $t \rightarrow f(t, s)$, e per ogni t fissato la $s \rightarrow f(t, s)$, sono curve differenziabili in M e possiamo calcolare le derivate covarianti di V lungo tali curve. Queste le identificheremo con

$$(1.1.1) \quad \frac{DV}{\partial t}(t, s) \text{ e } \frac{DV}{\partial s}(t, s)$$

1.2. Richiami a T ed R

In geometria differenziale, la **torsione** è un tensore che misura il grado di torsione degli spazi tangenti lungo una geodetica in una varietà differenziabile dotata di connessione. La nozione è quindi ispirata a quella di torsione di una curva nello spazio usata nella geometria differenziale delle curve.

È bene considerare che in una varietà riemanniana (caso di nostro interesse) la torsione è sempre nulla, infatti la connessione di Levi-Civita usata in geometria riemanniana è precisamente l'unica connessione senza torsione che preserva la metrica.

Definizione 1.2.1. Sia M una varietà differenziabile dotata di una connessione. Il **tensore di torsione** è il campo tensoriale T di tipo $(1,2)$ definito dalla relazione:

$$(1.2.1) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

con ∇ derivata covariante e $[,]$ parentesi di *Lie*.

La curvatura o **tensore di Riemann** è un tensore di tipo $(1,3)$ che codifica nel modo più completo la curvatura di una varietà riemanniana. Prende il nome dal matematico Bernhard Riemann ed è generalmente indicato (nella notazione con indici) tramite il simbolo \mathcal{R}_{jkl}^i .

Tutte le altre entità che descrivono la curvatura di una varietà possono essere dedotte dal tensore di Riemann, ad esempio il tensore di Ricci, la curvatura scalare e la curvatura sezionale, quest'ultima verrà richiamata più avanti.

Definizione 1.2.2. Sia M una varietà differenziabile dotata di una connessione. Il tensore di Riemann è il campo tensoriale R di tipo $(1,3)$ che soddisfa l'uguaglianza:

$$(1.2.2) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

per ogni terna X, Y, Z di campi vettoriali su M .

Il teorema di Schwarz asserisce che nello spazio euclideo le derivate parziali commutano: questo fatto non è vero in una varietà con connessione arbitraria; il tensore di Riemann tiene conto in un certo senso di questo fenomeno. I primi due termini della formula sono infatti proprio le derivazioni commutate applicate ad un campo Z ; la presenza del terzo termine, che fa uso della parentesi di *Lie* $[,]$, è necessaria affinché R sia effettivamente un tensore.

1.3. Superfici Piatte e Superfici Sviluppabili

Definizione 1.3.1 $S \subset \mathcal{R}^3$ è detta superficie patta se e solo se la sua curvatura Gaussiana è ovunque nulla.

Definizione 1.3.2 $S \subset \mathcal{R}^3$ è detta superficie sviluppabile se e solo se essa è localmente isometrica al piano euclideo.

Intuitivamente le superfici sviluppabili sono quelle superfici che possono essere appiattite su un piano senza “stiramenti” o “strappi”.

Proposizione 1.3.1 Dato che il piano è banalmente una superficie dove $K = 0$, allora le superfici sviluppabili sono superfici in cui la curvatura Gaussiana è nulla.

Proposizione 1.3.2 Una superficie sviluppabile è anche una superficie rigata.

Proposizione 1.3.3 $K = 0 \Leftrightarrow N$ è parallelo lungo le generatrici R_p .

1.4. Mappa Esponenziale e punti coniugati.

Definizione 1.4.1 Sia $M \in \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e completa con $p \in M$. L'applicazione definita come:

$$(1.4.1) \quad \exp: T_p M \rightarrow M, \quad v \mapsto \exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$$

è detta **mappa esponenziale** ed essa associa ad un vettore fissato $v \in T_p M$, un punto di M , ottenuto valutando la geodetica $\gamma: I \in \mathbb{R} \rightarrow M$, dove $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, con $t = 1$, $t \in I$.

La mappa esponenziale è:

- un'applicazione differenziabile,
- un diffeomorfismo se ristretta ad un aperto.

$$(1.4.2) \quad B_\varepsilon(0) = \{v \in T_p M : \|v\| < \varepsilon\} \subset T_p M$$

con $\varepsilon > 0$, scelto opportunamente.

Con la definizione appena data di mappa esponenziale, segue logico introdurre il concetto di punti coniugati, che sono il “cardine”, come vedremo in seguito, di questo articolo.

Intuitivamente i punti coniugati sono le coppie di punti p, q con la proprietà che la geodetica, che parte da p , smette di essere “minimizzante” a partire da q . Una definizione più formale è la seguente:

Definizione 1.4.2 Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodetica. $\gamma(b)$ è *coniugato* di $\gamma(a)$ lungo γ se esiste un campo di Jacobi (vedi paragrafo I.7) non identicamente nullo tale che $J(a) = J(b) = 0$.

Estremamente utile è anche la seguente *caratterizzazione dei punti coniugati*:

Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ una geodetica. Poniamo $v := \dot{\gamma}(0)$, per cui γ può essere espressa come $\exp_p(tv)$. Allora $\gamma(0)$ è *coniugato* di $\gamma(1)$ lungo γ se e solo se v è un punto critico di \exp_p , ossia $(\exp_p)_*$ non è invertibile. Quindi \exp_p smette di essere invertibile a partire dal valore v lungo la retta $t \mapsto tv$.

Esempio Sia S^2 la sfera in \mathbb{R}^3 , è risultato noto che i punti coniugati sono tutti e soli i punti tra loro antipodali.

1.5. La Curvatura Sezionale

Intuitivamente, in Geometria Differenziale, la *curvatura sezionale* misura la curvatura di una varietà riemanniana lungo piani dello spazio tangente in un punto della varietà. Di seguito la definizione più rigorosa:

Definizione 1.5.1. Sia p un punto in una varietà riemanniana M e π un piano nello spazio T_p in p .

La mappa esponenziale manda un aperto di π , contenente l'origine, su una superficie S contenuta in M e tangente a π in p . Si tratta della superficie ottenuta prendendo localmente tutte le geodetiche uscenti da p e tangenti a π , la curvatura sezionale $K(\pi)$ di M rispetto a π , è la curvatura gaussiana di S in p .

Essa può essere ricavata direttamente dal tensore di Riemann: siano u e v due vettori che generano il piano π , allora

$$(1.5.1) \quad K(\pi) = \frac{\langle R(u,v)u,v \rangle}{\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle - \langle u,v \rangle^2}$$

dove R è il tensore di Riemann ed il prodotto scalare è dato dal tensore metrico.

1.6. La Curvatura Totale

La *curvatura totale* (K_{TOT}) di una regione A della superficie M , è l'integrale di superficie

$$(1.6.1) \quad \int_A K \, dM$$

della curvatura gaussiana K su A .

Essa misura quanto si differenzia globalmente la geometria di A da quella di una regione piatta sul piano.

Un classico esempio è la curvatura totale di un triangolo geodetico T , che è pari alla differenza fra la somma degli angoli interni (misurati in radianti) e π . In altre parole:

$$(1.6.2) \quad \sum_{i=1}^3 \Theta_i = \int_T K \, dM$$

1.7. L'equazione di Jacobi

Fissiamo un punto $p \in M$ e consideriamo l'applicazione esponenziale exp_p , definita sull'intorno W_p di 0 in $T_p M$. Per calcolarne il differenziale in un punto $V \in W_p$, consideriamo una curva $v(s) \in C^\infty([-\varepsilon, \varepsilon], T_p M)$ con $v(0) = v$ e $\dot{v}(0) = w$ e la superficie parametrica

$$(1.7.1) \quad f(t, s) = exp_p(tv(s)),$$

definita su un intorno aperto U di $[0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ in R^2 . E'

$$(1.7.2) \quad (exp_p)_*(v)(w) = \frac{\partial f(1, 0)}{\partial s}.$$

Il campo di vettori $J(t) = \frac{\partial f(t, 0)}{\partial s}$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine lungo la geodetica $\gamma(t) = exp_p(tv)$. Infatti, poiché per ogni s la $t \rightarrow f(t, s) = exp_p(tv(s))$ è una geodetica, abbiamo:

$$(1.7.3) \quad 0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{D}{\partial t} \left(T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}.$$

La (1.7.3) è ricavata considerando le (1.7.4) e (1.7.5) della seguente:

Siano $f: U \rightarrow M$ una superficie parametrica in M e V un campo di vettori su f . Valgono allora le:

$$(1.7.4) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$(1.7.5) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

Per la verifica di quest'ultime, occorre tenere a mente che f , vicino a ciascun punto (t, s) in cui sia un'immersione ossia $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial s}$ siano linearmente indipendenti, è possibile scriverla in un sistema di coordinate locali x^1, \dots, x^m , come $(t, s) \rightarrow (t, s, 0, \dots, 0)$. ■

Dalla (1.7.3) abbiamo quindi ottenuto l'equazione di Jacobi per il campo di vettori $J(t)$ lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{expp}(tv)$:

$$(1.7.6) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + \frac{DT(J, \dot{\gamma})}{dt} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

L'equazione di Jacobi per una connessione simmetrica, Levi-Civita, si semplifica poi nella

$$(1.7.7) \quad \ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Sia $\gamma \in C^\infty(I, M)$ una geodetica.

Definizione 1.7.1. Chiamiamo *campi di Jacobi* lungo γ le soluzioni della (1.7.6).

Indichiamo con $\mathfrak{J}(\gamma)$ l'insieme dei *campi di Jacobi* lungo γ .

2. Sull'esistenza di punti coniugati

2.1 Varietà senza punti coniugati

E' risultato noto (si veda ad esempio il lavoro "On Surface with no conjugate points" di W. Ballmann, M. Brin & K. Burns – J. Differential Geometry 25, 1987, pp. 249-273) che se M è una varietà con curvatura sezionale negativa ovunque, allora M non ammette punti coniugati; l'inverso non è sempre vero per ogni superficie compatta, in quanto potrebbe essere piatta.

Teorema di MENDONÇA-ZHOU Sia $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ una geodetica senza punti coniugati. Allora per ogni campo vettoriale unitario $X(t)$ parallelo lungo γ si ha che:

$$(2.1.1) \quad \eta = \liminf_{v \rightarrow +\infty} \int_u^v (K(X(t), \gamma'(t))) dt \leq 0$$

$$(2.1.2) \quad \mu = \liminf_{v \rightarrow +\infty} \int_u^v (\text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))) dt \leq 0$$

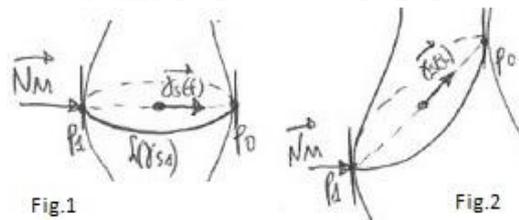
dove $K(X(t), \gamma'(t))$ è la curvatura sezionale.

Se $\eta = 0$ allora $K(X(t), \gamma'(t)) \equiv 0$, se $\mu = 0$, allora per ogni t ed ogni v ortogonali a $\gamma'(t)$, si ha che $K(\gamma'(t), v) = 0$.

2.2 Alcune Applicazioni del Teorema di MENDONÇA-ZHOU

TEOREMA 1 "Sia (M, g) una 2-varietà Riemanniana in \mathbb{R}^3 completa e connessa con curvatura totale (K_{tot}) non negativa e sia p_1 un punto di essa con $T_{p_1}M$ spazio tangente per p_1 .

Sia C una circonferenza passante per p_1 e p_0 punti di (M, g) , parametrizzata da $(\mu(t), \sigma(t))$ tale che per p_1 e p_0 si abbia $d(p_1, p_0) = \text{diam}(S)$, con S la sfera che ha per circonferenza massima C . Prendendo $\overrightarrow{N_M}|_{p_0}$, il versore normale in p_0 , con verso entrante in M , sia $\overrightarrow{\gamma_S}(t) = \frac{(\mu(t), \sigma(t))}{|(\mu(t), \sigma(t))|}$ il vettore con stessa direzione di $\overrightarrow{N_M}|_{p_0}$, ma rivolto dal centro di C verso p_0 .



(Fig.1 OK, mentre Fig.2 NO perché anche se i piani $T_{*}M$ rimangono paralleli, γ_S non ha la stessa direzione di N_M)

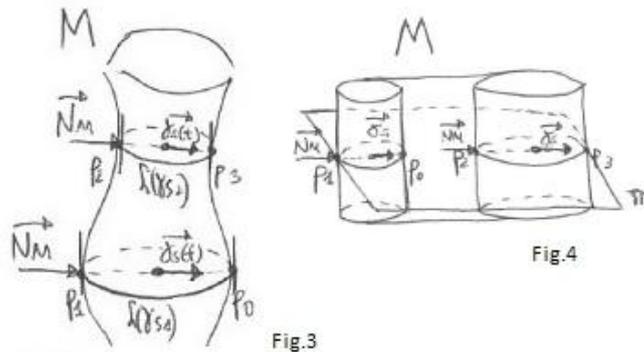
Allora se:

$$(2.2.1) \quad \overrightarrow{N_M}|_{p_1} - \overrightarrow{\gamma_S}(t)|_{p_0} = 0$$

- ha soluzione solo in p_0 , nel senso che solo in p_0 lo spazio tangente è parallelo a $T_{p_1}M$ ed è anche costruibile C , M ammette punti coniugati.
- ha soluzione per più coppie di punti (p_n, p_i) , oltre a (p_1, p_0) , sempre per le quali lo spazio tangente resti parallelo a $T_{p_1}M$, senza che le circonferenze C appartengano allo stesso piano, e se identificando con $\mathcal{L}\gamma_{S_1}(t)$ il $diam(S) = d(p_0, p_1)$, vale anche:

$$(2.2.2) \quad \delta := \mathcal{L}(\gamma_{S_1}) - \mathcal{L}(\gamma_{S_i}) \neq 0$$

M ammette punti coniugati”.



(Fig.3 OK, mentre Fig.4 NO perché anche se soddisfa la (2.3.2) essendoci C_i appartenenti allo stesso piano, non esclude che M sia piatta, come appunto accade in figura).

Dimostrazione

La dimostrazione segue immediata, infatti sia la (2.2.1) che la (2.2.2) implicano la non sviluppabilità sul piano (Proposizione 1.3.3). Quindi M non è piatta e di conseguenza siamo nelle condizioni del teorema II.2 da cui esistenza di punti coniugati.

Corollario “Se la (2.2.1) è soddisfatta per più punti p_i , restando sempre nelle condizioni della II.3, ed è anche soddisfatta la (2.2.2), allora M non è piatta e la sua curvatura K_M non può avere segno costante”.

Dimostrazione

Che M non possa essere piatta è già dimostrato.

Consideriamo ora due curve φ_1 e φ_0 poste su M , le quali congiungano rispettivamente, la prima il punto p_1 ai punti p_n che abbiano spazio tangente $T_{p_n}M$ parallelo a $T_{p_1}M$, e la seconda il punto p_0 ai punti p_i che abbiano lo spazio tangente $T_{p_i}M$ parallelo a $T_{p_0}M$, stessa condizione che si ha in II.3, quindi i punti p_n e p_i soddisfano la (2.2.1) per p_1 fissato.

Ruotiamo ora M in modo che $T_{p_1}M$ risulti parallelo al piano xy . Spostandosi sulle curve φ_1 e φ_0 , lo spazio tangente a M , varierà inclinazione (essendo appunto M non piatta), per tornare parallelo al piano xy nei punti che soddisfano la (2.2.1).

Il fatto che lo spazio tangente ad M assuma inclinazioni diverse per tornare parallelo a xy (e quindi a $T_{p_1}M$) indica che M ammette cambi di curvatura, infatti se ipotizziamo che allontanandoci da p_1 lungo φ_1 , e rispettivamente da p_0 lungo φ_0 , la curvatura di M fosse ovunque positiva (o negativa), lo spazio tangente non potrebbe tornare parallelo al piano xy , perché il suo andamento sarebbe monotono crescente (o decrescente), quindi su M la curvatura K_M non può mantenere costante il segno.

TEOREMA 2 “Sia (M, g) una 2-varietà Riemanniana in \mathbb{R}^3 completa e connessa con curvatura totale (K_{tot}) non negativa e sia p_1 un punto di essa con $T_{p_1}M$ spazio tangente per p_1 .

Supponiamo che per ogni $p \in M$ e per ogni (v_1, v_2) , base in T_pM , si abbia N_{v_1} ed N_{v_2} non nulli, allora M ammette punti coniugati”.

Dimostrazione

Ipotizziamo per assurdo che in M le geodetiche non ammettano punti coniugati (qui una varietà Riemanniana è detta senza punti coniugati se la geodetica non contiene un paio di punti reciprocamente coniugati).

Allora per il Teorema 2 ci aspettiamo che K_{tot} sia negativa oppure $k(t) \equiv 0$ (varietà piatta).

La condizione iniziale, K_{tot} non negativa, implica quindi la sola possibilità che M sia piatta.

Sappiamo che l'operatore di Weingarten e' dato da:

$$(2.2.3) \quad \mathcal{W}_{p_1}(v) = -\frac{\partial N_M}{\partial t}(u(t), v(t))|_{p_1}$$

e che:

$$(2.2.4) \quad \begin{cases} \mathcal{W}(P_u) = -N_u \\ \mathcal{W}(P_v) = -N_v \end{cases}$$

con (N_u, N_v) le derivate parziali di $\overrightarrow{N_M}$ e (P_u, P_v) una base di T_pM .

Essendo che:

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} -N_u = a_{11}P_u + a_{12}P_v \\ -N_v = a_{21}P_u + a_{22}P_v \end{cases}$$

e che la curvatura Gaussiana e' data dal determinante della matrice:

$$(2.2.6) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

proviamo a verificare che qualora il $\det A$ è ovunque nullo (e quindi curvatura zero ovunque) allora N_u , oppure N_v , devono essere nulli.

il $\det A$ si annulla nel seguente caso:

- $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$

In cui si avrebbe che $N_u = \lambda N_v$, oppure $N_v = \lambda N_u$, con λ una costante.

Essendo P_u e P_v linearmente indipendenti, si avrà necessariamente $N_v = 0$, oppure $N_u = 0$, il che contraddice l'ipotesi. Dunque M non è piatta che conclude la dimostrazione.

Si noti anche che essendo $f = P_{uv}N = P_{vu}N = -P_vN_u = -P_uN_v = -P_v\lambda N_v$, questo implica $f = 0$.

Proposizione 2.2.1 “Sia (M, g) una 2-varietà Riemanniana in \mathbb{R}^3 completa e connessa di rotazione e sia p_1 un punto di essa con $T_{p_1}M$ spazio tangente per p_1 .

Supponiamo che per ogni $\mathbf{p} \in M$ e per ogni $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, base in $T_{\mathbf{p}}M$, si abbia $N_{\mathbf{v}_1}$ ed $N_{\mathbf{v}_2}$ non nulli con i rispettivi prodotti scalari, $\mathbf{v}_1 N_{\mathbf{v}_1}$ ed $\mathbf{v}_2 N_{\mathbf{v}_2}$, che non abbiano segni opposti, allora M ammette punti coniugati”.

Dimostrazione

Si consideri la superficie di rotazione M la cui parametrizzazione sia data da:

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} x = \alpha(u)\cos v \\ y = \alpha(u)\sin v \\ z = \beta(u) \end{cases}$$

in cui i meridiani (*mrd*) ed i paralleli (*prl*) sono rispettivamente le linee coordinate $v = \text{costante}$ e $u = \text{costante}$.

Dato che meridiani e paralleli sono ortogonali, segue $F = 0$.

Sia π un piano definito da $v = v_0$ contenente l'asse z e sia $mrd = \pi \cap M$ il meridiano corrispondente.

Se \mathbf{p} è un punto di mrd , il vettore normale $N(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ a M in \mathbf{p} è contenuto in π (infatti P_v vettore tangente al parallelo per \mathbf{p} , è ortogonale a π ; P_u , vettore tangente in \mathbf{p} al meridiano mrd sta su π , quindi $N = P_u \wedge P_v$ sta pure su π). Pertanto anche la derivata parziale $N_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ sta su π .

Da questo si ha $f = -P_v N_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = 0$.

Se $F = f = 0$ si ha

$$(2.2.8) \quad W(P_u) = \frac{e}{E} P_u \quad \text{e} \quad W(P_v) = \frac{g}{G} P_v$$

Da cui

$$(2.2.9) \quad k_1 = \frac{e}{E} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{g}{G}$$

Essendo rispettivamente: $e = -P_u N_u$, $E = P_u P_u$, $g = -P_v N_v$ e $G = P_v P_v$, si conclude la dimostrazione.

Bibliografia

M.do CARMO - Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992

M.NACINOVICH - "Lezioni sulla Teoria delle Connessioni e sulla Geometria Riemanniana", 2013

W.BALLMANN, M.BRIN and K.BURNS - "On Surface with no conjugate points" J. Differential Geometry 25, 1987 (249-273)

S.MENDONÇA and D.ZHOU - "Geodesics without Conjugate Points and Curvatures at Infinity" An. Acad. Bras. Ci., 2000 72 (2)