

## 229. La solitudine dei numeri primi (gemelli)

Matteo Veglianti

### Sommario

Il seguente articolo parla di famiglie di numeri naturali: dopo aver definito il grado di solitudine di una famiglia di numeri naturali, lo si calcolerà per diverse famiglie, vedendo che alcune sono solitarie, altre no.

Circa i due terzi dei concetti esposti provengono da una conferenza tenuta dal professor Piergiorgio Odifreddi nel 2010 all'Università di Torino e trovabile on line all'indirizzo citato nella sezione riferimenti alla fine del presente articolo.

Il titolo di questo articolo richiama quello del romanzo di Paolo Giordano: "La solitudine dei numeri primi", così come fa pure il professor Odifreddi nella sua conferenza. Si giungerà alla conclusione che il titolo del suddetto romanzo è errato da un punto di vista matematico.

### 1 Famiglie solitarie

Da quanti membri è composta la vostra famiglia? Due, cinque, dieci? Non importa, in ogni caso la vostra è una famiglia solitaria. In effetti nessun membro di alcuna famiglia conosce tutte le persone del pianeta e per questo la famiglia è solitaria.

Anche i numeri naturali si dividono in famiglie, in raggruppamenti, che possono essere solitarie o meno. Ovviamente se una famiglia di numeri è finita non c'è speranza: nell'insieme di tutti i numeri naturali essa è solitaria.

Per una famiglia infinita di numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , si può definire il grado di solitudine come la somma dei reciproci di tutti i membri della famiglia:

$$g := \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

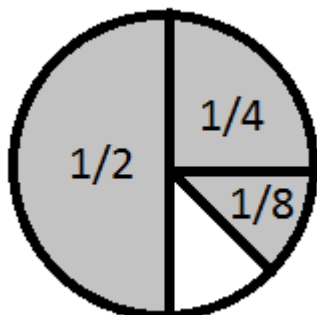
Se il risultato è un numero finito, la famiglia è solitaria, in caso contrario non lo è. Inoltre, più il risultato è piccolo, più la famiglia è solitaria.

### 2 "I numeri tutti"

I numeri naturali, che Galileo chiamava "i numeri tutti", sono infiniti:  $1, 2, 3, \dots$ . Il grado di solitudine dei numeri naturali è:

$$g_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Figura 1:



Per convincerci che questa somma diverge osserviamo che essa è composta da infiniti termini che possiamo raggruppare a piacimento. Allora i primi due termini sono  $1$  e  $\frac{1}{2}$ ; i successivi due sono  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ , la cui somma è maggiore di  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . I successivi quattro termini sono  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{8}$ , la cui somma è maggiore di  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ; e così via. La somma di partenza quindi è composta da infiniti termini ognuno maggiore di  $\frac{1}{2}$  (in altre parole, la serie data si può minorare con la serie:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ ) e quindi diverge.

I numeri naturali, dunque, non sono solitari: cosa abbastanza ovvia!

### 3 La famiglia $2^n$

Vediamo ora due famiglie di numeri che sono solitarie.

La prima è la famiglia composta dalle potenze di due:  $2, 4, 8, \dots$

Ogni membro di questa famiglia è del tipo  $2^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Il grado di solitudine di questa famiglia è:

$$g_{2^n} := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

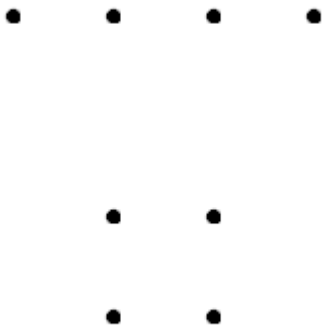
Ci si può convincere del risultato notando che nella somma ogni termine è la metà di quello precedente; cosicchè se immaginassimo per semplicità una pizza di cui ne mangiamo prima la metà, poi un quarto, poi un ottavo, e così via, alla fine avremmo mangiato tutta la pizza (si veda figura 1).

Per cui tutte le potenze di 2 formano una famiglia solitaria.

### 4 I numeri quadrati

La seconda famiglia di numeri solitaria è quella formata dai numeri quadrati. I numeri quadrati sono quelli che si possono rappresentare con delle biglie disposte a formare un quadrato. Per esempio il numero 4 si può rappresentare con quattro biglie poste una accanto all'altra, cioè allineate tra loro, oppure disponendo le biglie in due file parallele ciascuna formata da due biglie, cioè formando un quadrato di lato due (si veda figura 2). Sicchè il numero 4 è un numero quadrato.

Figura 2: Il numero quattro rappresentato in maniera lineare(in alto) o in maniera quadrata (in basso)



Altri numeri quadrati sono 1, 9, 16, ...; ossia sono della forma  $n^2$  con  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Il grado di solitudine dei numeri quadrati è:

$$g_{n^2} := 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.64$$

Calcolare il valore di questa somma infinita è molto più complicato rispetto a quello della famiglia  $2^n$ . In effetti il problema, noto come "problema di Basilea", rimase aperto per circa un secolo e fu risolto dal grande Eulero.

In effetti si può dimostrare che la serie converge maggiorandola con una serie convergente. Consideriamo infatti la serie data:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Ora, guardando l'ultima serie possiamo accorgerci che essa può essere maggiorata sfruttando lo stesso trucco utilizzato nel paragrafo: il primo termine della serie rimane inalterato, i due termini successivi  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$  sono minori di  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$ , i quattro termini successivi  $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$  sono minori di  $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}$ , e così via.

Vale quindi la maggiorazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Ma l'ultima serie scritta è la serie delle potenze di  $\frac{1}{2}$  e, come abbiamo già dimostrato nel paragrafo, essa converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Dunque la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  è minore di una serie convergente e di conseguenza converge anch'essa, ad un numero minore di due.

Ovviamente questo basta ad affermare che la famiglia dei numeri quadrati è solitaria. Come abbiamo già detto il grado di solitudine è  $g_{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . L'idea che ebbe Eulero per arrivare a questo risultato è semplice e, in un certo senso, anche azzardata: egli suppose che le regole dei polinomi finiti fossero valide anche per le serie infinite.

Partendo dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione seno centrato in 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e dividendo per  $x$  entrambi i termini, si arriva al polinomio:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Ora, secondo l'ipotesi fatta da Eulero, si può ignorare il fatto che il polinomio sia infinito e trattarlo come un polinomio finito, sicché le sue radici sono tutti i multipli interi di  $\pi$ :  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Ponendo infine  $x^2 = y$ , il polinomio diventa:

$$\frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots$$

le cui soluzioni sono, per la sostituzione effettuata:  $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots$ . Ora, per le formule di Viète, se un polinomio ha il termine costante uguale a 1, la somma dei reciproci delle sue radici è uguale al coefficiente del termine lineare cambiato di segno. Questo, sempre secondo l'ipotesi di Eulero, è vero anche nel nostro caso e di conseguenza:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots$$

Infine, moltiplicando entrambi i membri per  $\pi^2$ , otteniamo:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Non solo quindi abbiamo dimostrato che i numeri quadrati formano una famiglia solitaria, ma ne abbiamo anche calcolato il grado di solitudine.

## 5 I numeri primi

Vediamo ora una famiglia particolarissima di numeri: i numeri primi. Un numero si dice primo quando è divisibile solo per uno e per se stesso:  $2, 3, 5, 7, \dots$

Ovviamente essi sono infiniti; in effetti questo è un risultato molto antico che risale ad Euclide, III secolo a.C.

Vediamo il ragionamento di Euclide. Innanzitutto egli definisce i numeri primi e i numeri composti, nel modo seguente:

**Def. 1:** numero primo è quello che ha per divisore soltanto l'unità;

**Def. 2:** numero composto è quello che ha per divisore un qualche numero.

Dopodichè, nella proposizione 31 del VII libro egli dimostra il seguente:

**Teorema 1.** *Ogni numero composto ha per divisore un numero primo*

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un numero composto. Allora, per definizione sarà diviso da un altro numero,  $B$ . Ora, se  $B$  è primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto; se  $B$  è composto sarà diviso da un altro numero,  $C$ . Ma poichè  $C$  divide  $B$  e  $B$  divide  $A$ , allora  $C$  divide anche  $A$ . Ora, se  $C$  è primo, si sarebbe conseguito quanto proposto; se  $C$  è composto sarà diviso da un altro numero. Procedendo in questo modo si finirà per trovare un numero primo che divide  $A$ . Infatti se non lo si trovasse, infiniti numeri dividerebbero  $A$ , il che è impossibile.  $\square$

Armato di questo risultato, Euclide, nella proposizione 20 del IX libro dimostra il

**Teorema 2.** *Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.*

*Dimostrazione.* Siano dati i numeri primi  $a, b, c$ . Dico che esiste almeno un quarto numero primo.

Si moltiplichino, infatti, i tre numeri dati e si aggiunga una unità, si ottiene il numero  $d = abc + 1$ .

Se  $d$  è primo è stata dimostrata l'esistenza di un quarto numero primo. Se  $d$  non è primo, per il teorema testè dimostrato, ammette un divisore primo, sia esso  $h$ . Dico che  $h$  è diverso da  $a, b, c$  e quindi che costituisce il quarto numero primo del quale si voleva appunto dimostrare l'esistenza.

Se, infatti,  $h$  fosse uguale ad uno dei tre numeri  $a, b, c$ , esso dividerebbe il prodotto  $abc$ . Ma s'è supposto che  $h$  divida anche  $d = abc + 1$ , quindi  $h$  dividerebbe anche la differenza tra  $d$  e  $abc$ , ossia l'unità, il che è assurdo.  $\square$

Ancora oggi, dopo 23 secoli, questa dimostrazione è in voga, anche se qualche secolo fa (circa 3) un altro grande matematico, il già citato Eulero, cimentandosi nei numeri primi, diede una dimostrazione alternativa della loro infinità.

Prima di vedere la dimostrazione di Eulero ricordiamo come è fatta una serie geometrica, cioè una serie tale per cui il rapporto tra due termini adiacenti è costante:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$$

Ogni serie geometrica converge quando  $|a| < 1$ .

Per dimostrare ciò, ricordiamo innanzitutto che una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

si dice convergente ad un numero  $S$ , quando la successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ha limite  $S$  per  $n$  che tende all'infinito.

Nel caso di una serie geometrica, la somma parziale  $n$ -esima è:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $1 - a$ , si ha:

$$(1 - a)S_n = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n)(1 - a)$$

Svolgendo le moltiplicazioni:

$$(1 - a)S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n - a - a^2 - a^3 - \dots - a^n - a^{n+1}$$

Da cui, annullando i termini opposti, si ha:

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}$$

Infine, dividendo tutto per  $1 - a$ , si ottiene:

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Ora, passando al limite per  $n$  che tende all'infinito:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a},$$

se  $|a| < 1$ , poichè, in tal caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0.$$

Armati di questo risultato, vediamo ora come Eulero ha dimostrato che i numeri primi sono infiniti.

Supponiamo che ci sia un solo numero primo:  $p$ . Allora i numeri naturali, per il teorema di fattorizzazione unica, saranno:

$$1, p, p^2, p^3, p^4, \dots$$

e di conseguenza il grado di solitudine dei numeri naturali risulta:

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p - 1}$$

questo risultato è assurdo in quanto è un numero finito, mentre abbiamo visto nel paragrafo che il grado di solitudine dei numeri naturali è infinito. Non è vero quindi che esiste un solo numero primo.

Ci siano allora due numeri primi:  $p$  e  $q$ . Di conseguenza i numeri naturali sono della forma  $p^n q^m$ , ossia:

$$(1, p, p^2, p^3, \dots)(1, q, q^2, q^3, \dots)$$

Il grado di solitudine dei numeri naturali sarà allora:

$$\sum_{n,m} \frac{1}{p^n q^m} = \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots\right)$$

Ora, entrambi i fattori che compaiono nel termine di destra dell'ultima espressione sono finiti poichè sono delle serie geometriche e quindi sarà finito anche il loro prodotto. Anche il caso in cui consideriamo due soli numeri primi conduce dunque ad un assurdo. Il discorso a questo punto è facilmente generalizzabile ad un qualsiasi numero finito di numeri primi, con la conseguente dimostrazione della loro infinità.

Il risultato ottenuto da Eulero di per sè non è molto interessante poichè l'infinità dei numeri primi, come abbiamo già detto, fu dimostrata duemila anni prima di lui. I metodi utilizzati del matematico svizzero, però, sono molto innovativi, molto profondi e tutt'oggi ancora non del tutto compresi. Infatti se osserviamo attentamente abbiamo trasformato la somma dei reciproci dei numeri naturali nel prodotto tra le somme dei reciproci di tutti numeri primi elevati ad un qualsiasi numero naturale:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

Utilizzando una notazione più compatta:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \left(\frac{p}{p-1}\right)$$

Questo diede inizio alla teoria analitica dei numeri, ossia allo studio dei numeri primi utilizzando metodi e strumenti dell'analisi.

Nel 1859 il matematico tedesco Bernhard Riemann ebbe la brillante idea di elevare ad un esponente complesso l'espressione precedente, introducendo così la famosa funzione zeta, tutt'oggi oggetto di studio:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(\frac{p}{p-1}\right)^s$$

Ma Eulero non si fermò qui. Egli calcolò il grado di solitudine dei numeri primi:

$$g_p := \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

I numeri primi non sono solitari!

Per dimostrarlo Eulero mostra che la somma dei reciproci dei numeri primi è legata logaritmicamente alla somma dei reciproci dei numeri naturali, che diverge. L'espressione

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \left(\frac{p}{p-1}\right)$$

si può riscrivere, in virtù delle proprietà dei logaritmi, come:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \exp\left(\ln \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right) = \exp\left(-\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$$

Ora, ricordando lo sviluppo in serie del logaritmo centrato in 0:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \\ \ln(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} x^{-k} \end{aligned}$$

Ovviamente questi sviluppi hanno senso quando  $|x| < 1$ , condizione che nel nostro caso è verificata.

Possiamo quindi scrivere:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \exp\left(-\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} p^{-k}\right)$$

Passando ai logaritmi:

$$\ln\left(\sum_n \frac{1}{n}\right) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} p^{-k}$$

Separando il termine con  $k = 1$ :

$$\ln\left(\sum_n \frac{1}{n}\right) - \sum_p \frac{1}{p} = \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} p^{-k}$$

Ora, con un po' di fatica, si può maggiorare la serie doppia con una serie convergente\*, per cui, a meno di costanti:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \ln\left(\sum_n \frac{1}{n}\right)$$

Per cui la somma degli inversi dei numeri primi è infinitamente grande (ma infinitamente più piccola della somma degli inversi dei numeri naturali).

## 6 I numeri primi gemelli

Abbiamo quindi visto che la famiglia dei numeri primi non è solitaria. Legata ad essa c'è un'altra famiglia di numeri: i numeri primi gemelli. Si definiscono

---

\*si veda [2]



numeri primi gemelli due numeri primi che differiscono tra loro di due unità: 5 e 7, 11 e 13, 821 e 823, per esempio.

Nasce spontanea una domanda: quante sono le coppie di numeri primi gemelli? Purtroppo non lo sappiamo! La congettura dei numeri primi gemelli, infatti, che ne afferma l'esistenza di infinite coppie, non è stata ancora dimostrata. Ciò però non ha impedito ai matematici di studiare questa famiglia di numeri. In particolare, nel 1919 Viggo Brun ha mostrato che la somma dei reciproci dei numeri primi gemelli (cioè il loro grado di solitudine) converge a una costante matematica ora chiamata costante di Brun:  $B_2^\dagger$ .

$$g_{p_2} := \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \dots = \sum \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) = B_2 \simeq 1.90$$

I numeri primi gemelli sono solitari!

Ovviamente esistono molte altre famiglie di numeri oltre a quelle descritte, alcune delle quali saranno solitarie, altre no. Legate alle famiglie dei numeri primi e dei numeri primi gemelli ce ne sono almeno altre due che vorrei citare per curiosità. Esse sono la famiglia dei numeri primi cugini, ossia numeri primi che differiscono tra loro di quattro unità (per esempio 3 e 7) e la famiglia dei numeri primi sexy, cioè quelli che differiscono tra loro di sei unità (per esempio 5 e 11). Entrambe queste famiglie sono solitarie.

## Conclusione

Abbiamo dunque visto che i numeri si possono raggruppare in famiglie, alcune delle quali sono solitarie, altre no. La tabella sottostante riassume i risultati ottenuti, ordinando le famiglie dalla meno solitaria alla più solitaria.

Famiglia di numeri	Grado di solitudine
numeri naturali : $n \in \mathbb{N}$	$g_n = \infty$
numeri primi : $p \in \mathbb{P}$	$g_p = \infty$
numeri primi gemelli : $p, p+2 \in \mathbb{P}$	$g_{p,p+2} = B_2 \simeq 1.90$
numeri quadrati : $n^2, n \in \mathbb{N}$	$g_{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.64$
potenze di due : $2^n, n \in \mathbb{N}$	$g_{2^n} = 1$

In particolare vediamo che i numeri primi non sono solitari, per cui il titolo del romanzo di Paolo Giordano: "La solitudine dei numeri primi", è matematicamente errato. L'errore però, come possiamo vedere, non sussisterebbe dal punto di vista matematico qualora si aggiungesse al titolo il sostantivo "gemelli".

## Bibliografia

### Riferimenti bibliografici

- [1] Odifreddi, Piergiorgio, *La solitudine dei numeri primi*, conferenza, Università di Torino - dipartimento di informatica, 2010, <https://www.youtube.com/watch?v=FCSaXPYJ1zk>

<sup>†</sup>si veda [3]

- [2] Colzani, Leonardo, *Eulero ed i numeri primi*, Università degli studi di Milano Bicocca - dipartimento di matematica, <http://www.matapp.unimib.it/leonardo/Eulero/Eulero.pdf>
  
- [3] Languasco, Alessandro e Zaccagnini, Alessandro, *Intervalli fra numeri primi consecutivi*, <http://www.math.unipd.it/languasc/lavoripdf/R22.pdf>
  
- [4] Wikipedia, *Problema di Basilea*, [https://it.wikipedia.org/wiki/Problema di Basilea](https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Basilea)
  
- [5] Euclide, *Elementi*, traduzione italiana a cura di Acerbi, Fabio, <http://www.scienzaatscuola.it/euclide/index.html>