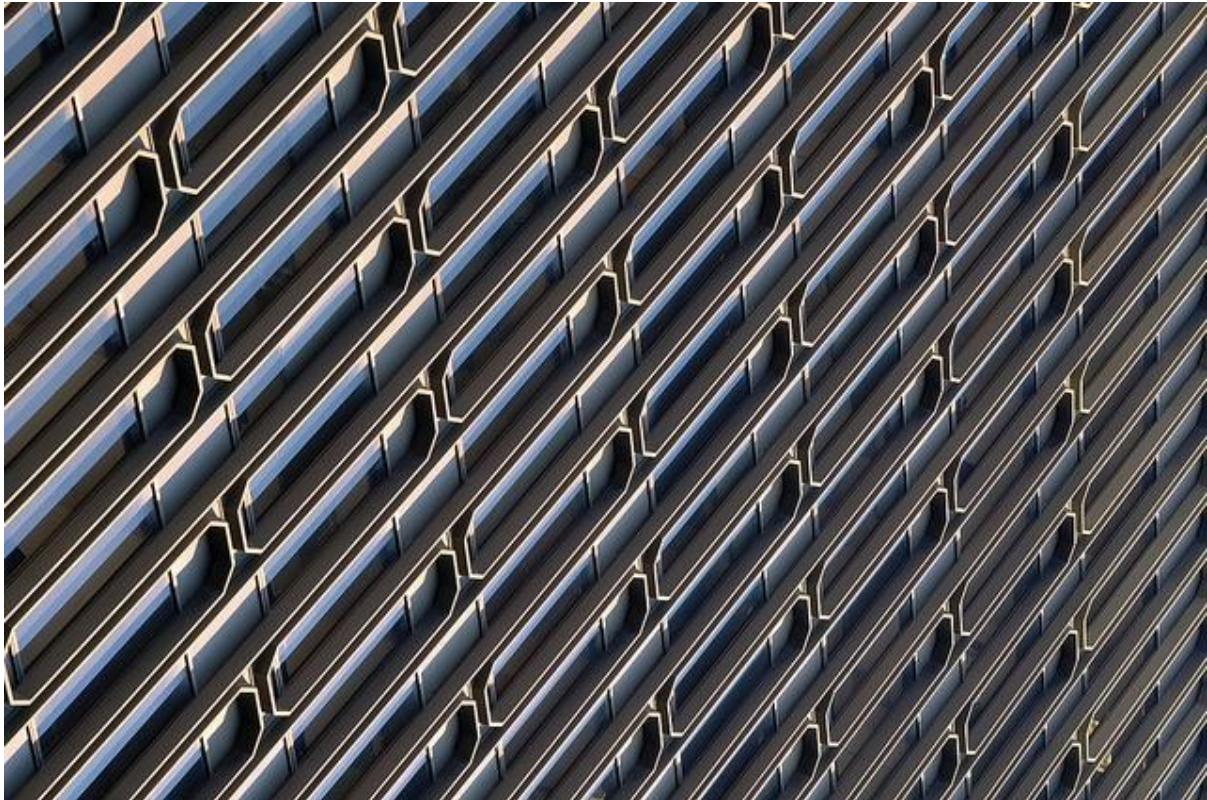


• Numero 25 – Ottobre 2015 •



Daniel Parks, Projective Chirp, Flickr

---

GNOMONE – SCRATCH – PUNTI CONIUGATI – FORMULE MOLODENSKY –PRIMI –  
SCOMPOSIZIONI - LIBRI

---

## Come proporre un contributo

### *Istruzioni per gli autori*

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 3.0: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

### MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito*  
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce  
ISSN 2035-0449

#### *Direttore responsabile*

Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it

#### *Vicedirettore*

Luca Lussardi  
lucalussardi@gmail.com

#### *Redazione*

Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

#### *Hanno collaborato a questo numero*

Domenico Lenzi, Nicola Carichino, Cosimo De Mitri, Rosa Marincola, Alexander Pigazzini, Michele T. Mazzucato, Marco Ripà, Gabriele Tessaro, Andrea Forti, Matteo Veglianti, Grazia Pia Trisolini, Daniela Molinari.

# Sommario

<b>224.</b> Il teorema dello Gnomone e i teoremi di Euclide Domenico Lenzi, Nicola Carichino, Cosimo De Mitri. . . . .	5
<b>225.</b> Proposte per l'inclusione di studenti con BES: le equazioni di I e II grado con Scratch Rosa Marincola . . . . .	11
<b>226.</b> Sull'esistenza di punti coniugati su superfici Alexander Pigazzini . . . . .	19
<b>227.</b> Formule di Molodensky per la trasformazione di datum geodetici Michele T. Mazzucato . . . . .	27
<b>228.</b> Quanti numeri primi in 100 interi consecutivi? Marco Ripà, Gabriele Tessaro, Andrea Forti. . . . .	37
<b>229.</b> La solitudine dei numeri primi (gemelli) Matteo Veglianti . . . . .	41
<b>230.</b> Rubicon River – Svolgo o Scompongo Trisolini Grazia Pia . . . . .	51
<b>231.</b> Lo scaffale dei libri . . . . .	58



# 224. Il teorema dello Gnomone e i teoremi di Euclide

Domenico Lenzi\*  
 Nicola Carichino\*\*  
 Cosimo De Mitri\*\*\*

## Sunto

Uno degli scopi di questo articolo è quello di provare che il I e il II Teorema di Euclide (in breve, Teoremi I;E e II;E) sono facili conseguenze del Teorema dello Gnomone, che è semplicemente la Proposizione 43 del Libro I degli Elementi di Euclide (in seguito, semplicemente *Elementi*).

In particolare, il II Teorema di Euclide deriverà dalla proprietà – che noi chiameremo III Teorema di Euclide (Teorema III;E) – che determina l'altezza del rettangolo costruito su di un cateto di un triangolo rettangolo, in modo tale che quel rettangolo sia equivalente al quadrato costruito sull'altro cateto. Come già per il Teorema I;E, Euclide non enuncia direttamente nemmeno il Teorema III;E, che si ricava riadattando – in un caso particolare – la dimostrazione della Proposizione 44 degli *Elementi* (cf. [5], p. 142).

**Abstract.** In this paper we use the euclidean gnomon theorem (see [5], p. 140, Proposition 43) in order to give very simple proofs of several Euclidean properties; in particular, of the first and of the second Euclidean theorems.

## 1. Considerazioni generali

Generalmente si dà poca importanza alla proposizione euclidea nota come Teorema dello Gnomone. Forse ciò dipende dall'enunciato un po' ermetico che il grande maestro ne diede. Eppure quella proposizione è densa di conseguenze importanti e pressoché immediate. Tra queste citiamo il Teorema I;E, che l'illustre alessandrino riporta nella dimostrazione della Proposizione 47 del Libro I degli *Elementi*.

Il Teorema dello Gnomone noi lo riproponiamo nella proposizione seguente, ricalcando in parte la formulazione che A. Frajese ne ha fatto nella nota 31 a p. 140 di [5].

**Proposizione 1.1.** Dato un parallelogramma, per un punto di una sua diagonale distinto dagli estremi si conducano due rette parallele ai lati. Allora dei quattro parallelogrammi nei quali il parallelogramma dato risulta suddiviso, sono equivalenti i due non attraversati dalla predetta diagonale. ■

La dimostrazione della Proposizione 1.1, che si riferisce ai due parallelogrammi in blu di Fig. 1, scaturisce immediatamente per sottrazione – dai due triangoli uguali  $ABC$  e  $ADC$  – dei triangoli bianchi, a due a due uguali, che risultano dalla suddivisione dei due parallelogrammi bianchi operata dalle rispettive diagonali.

---

\* Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce; domenico.lenzi@unisalento.it  
 \*\* I.I.S. "F. Bottazzi" – Casarano (LE); carichino.nicola@libero.it  
 \*\*\* Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce; cosimo.demitri@unisalento.it



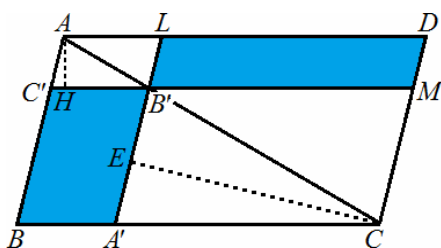


Fig. 1

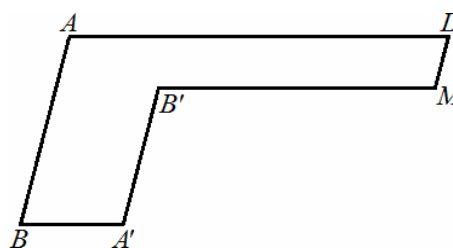
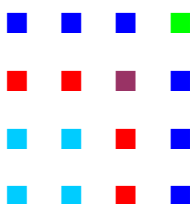


Fig. 2

Col termine geometrico *gnomone* Euclide<sup>1</sup> intende quanto rimane del parallelogramma  $ABCD$  di Fig. 1, quando ne venga cancellato il parallelogramma  $B'A'CM$  (Fig. 2)<sup>2</sup>.

**Nota Storica.** Lo Gnomone – inteso come bordatura – ha avuto un ruolo importante, per la scuola pitagorica, nello studio dell'aritmo geometria. Per esempio, se di un numero quadrato come il 16 consideriamo la rappresentazione tipica attraverso dei quadratini (si veda l'illustrazione sottostante), che sostituiscono i classici sassolini (*calculi*), e dello schieramento conserviamo solo i 6 ( $=3 \cdot 2$ ) quadratini blu e quello verde, si percepisce subito che la differenza tra  $4^2$  e  $3^2$  è  $3 \cdot 2 + 1$ . E cosa analoga si percepisce nel passaggio dallo schieramento di  $2^2$  a quello di  $3^2$  quadratini. Allora – in termini di schieramenti e senza ricorrere al calcolo del binomio  $(n+1)^2$  – si capisce subito che per ottenere il quadrato successivo a  $n^2$ , basta aggiungergli  $2n+1$ , che rappresenta l' $(n+1)$ -mo numero dispari.



## 2. Semplici conseguenze del Teorema dello Gnomone

Ora, dato un triangolo, su due lati distinti si fissino due punti  $B'$  e  $C'$  diversi dai vertici; onde il segmento  $B'C'$  ripartisce il triangolo in un quadrilatero e in un triangolo più piccolo che chiameremo **triangolo minore** (si veda la parte sinistra di Fig. 3). Quindi nel triangolo minore chiameremo **vertice pivot** il vertice distinto da  $C'$  e  $B'$ , e **altezza pivot** l'altezza condotta da quel vertice.



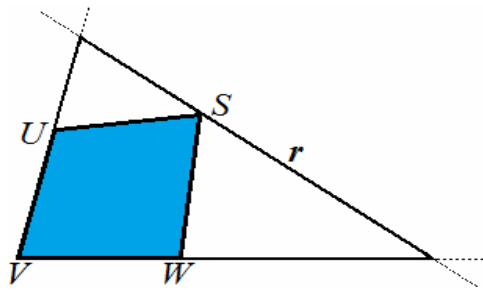
Fig. 3

<sup>1</sup> Euclide introduce il termine gnomone solo nel Libro II degli *Elementi* (si veda [5], p. 157, Def. 2).

<sup>2</sup> In orologeria lo gnomone è l'asta di un orologio solare (o meglio, la sua punta), onde a volte si chiama gnomone anche la parte del quadrante che durante la giornata non è mai in ombra. Nel caso geometrico si immagina che il quadrante solare sia il parallelogramma  $ABCD$  di Fig. 1 e che l'asta sia infissa nel vertice  $C$ , mentre la parte descritta dall'ombra nel corso della giornata si suppone che sia il parallelogramma  $B'A'CM$ . A volte per gnomone si intende una bordatura o qualcosa che viene aggiunto.

Se  $B'$  lo si congiunge anche con un punto  $A'$  del terzo lato, allora si determina, oltre a un altro triangolo minore, un quadrilatero convesso: quello avente come vertici  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e un opportuno vertice del triangolo di partenza (si veda la parte destra di Fig. 3 e il triangolo  $ABC$  in Fig. 1). Quindi in ciascuno dei triangoli minori chiameremo **lato pivot** quello che prolunga un lato del quadrilatero.

Traendo spunto dalla parte destra di Fig. 3, noi diremo che un quadrilatero convesso (in particolare, un parallelogramma) è *inscritto* in un triangolo  $T$  – che diremo *circoscritto* al quadrilatero – quando tre dei suoi vertici sono interni ai tre lati di  $T$ , mentre il quarto vertice coincide con un vertice di  $T$ . Perciò, per circoscrivere un triangolo a un quadrilatero convesso  $K$ , basta prendere una retta  $r$  che intersechi  $K$  esattamente in un vertice – chiamiamolo  $S$ , mentre gli altri li chiamiamo, nell'ordine,  $U$ ,  $V$  e  $W$  – e che intersechi le semirette  $VU$  e  $VW$  (si veda l'illustrazione sottostante).



Un'immediata conseguenza del Teorema dello Gnomone è la seguente Proposizione 2.1, che ne è una riformulazione riferita a un triangolo, per la quale possiamo fare riferimento al triangolo  $ABC$  di Fig. 1. Noi la chiameremo *Proprietà triangolare dello Gnomone*.

**Proposizione 2.1.** Dato un parallelogramma inscritto in un triangolo, esso è equivalente al rettangolo che ha come lati consecutivi l'altezza pivot di uno dei triangoli minori e il lato pivot dell'altro triangolo minore.

*Dimostrazione.* Infatti – facendo riferimento a Fig.1 – si ha che il lato pivot  $A'C$  è uguale a  $B'M$  e l'altezza pivot  $AH$  coincide con l'altezza del parallelogramma  $LB'MD$  condotta sul lato  $B'M$ . Con gli opportuni cambiamenti, analogo discorso può essere fatto rispetto al lato pivot  $AC'$  e all'altezza pivot  $CE$ <sup>3</sup>.

Pertanto il rettangolo dell'enunciato è equivalente al parallelogramma  $LB'MD$ , cosicché la tesi discende dalla Proposizione 1.1. ■

Dalla Proposizione 2.1 discende immediatamente il corollario seguente

**Corollario 2.2.** Dato un parallelogramma inscritto in un triangolo, il lato pivot e l'altezza pivot di ciascuno dei due triangoli minori stanno in un rapporto costante. ■

**Osservazione 2.3.** Si noti che, nella teoria delle similitudini – che Euclide affronta nel Libro VI – il Corollario 2.2 è ovvio. Infatti, in Fig. 1, i triangoli rettangoli  $ACH$  e  $CA'E$  sono simili, poiché l'angolo in  $C$  del primo e l'angolo in  $A'$  del secondo sono uguali, avendo essi lati a due a due paralleli. ■

<sup>3</sup> Se il triangolo  $ABC$  è rettangolo in  $B$  (onde il parallelogramma è un rettangolo), allora  $AH = AC'$  e  $CE = CA'$ .

### 3. La Proprietà triangolare dello Gnomone e i teoremi di Euclide

Come è noto, il Teorema I;E stabilisce che, dato un triangolo rettangolo, sono equivalenti il quadrato costruito su di un cateto e il rettangolo avente come base l'ipotenusa e come altezza la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. Ma è altrettanto interessante l'equivalenza tra quel quadrato e il rettangolo avente come base l'altro cateto e come altezza quella che deriva dalla proposizione seguente (cf. [5], dimostrazione della Proposizione 44 del Libro I, p. 142: caso particolare di un angolo retto).

**Proposizione 3.1.** Dato un rettangolo  $C'BA'B'$ , si prolunghi  $BA'$  di un segmento  $A'C$ . Allora  $C'BA'B'$  è equivalente al rettangolo avente per lati consecutivi  $A'C$  e il segmento  $AC'$ , dove  $A$  è il punto d'incontro delle rette  $BC'$  e  $CB'$ .

*Dimostrazione.* Basta applicare la Proprietà triangolare dello Gnomone al rettangolo  $C'BA'B'$ , che è inscritto nel triangolo  $ABC$ . ■

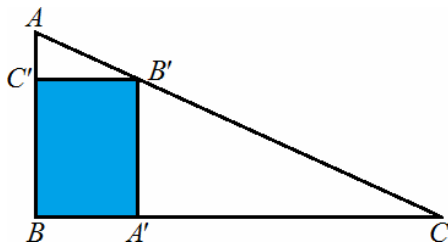


Fig. 4

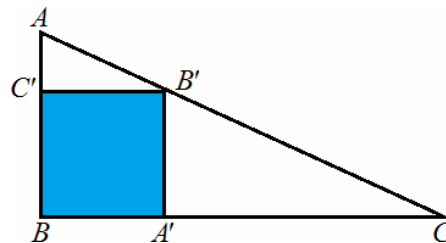


Fig. 5

Nel caso in cui il rettangolo  $C'BA'B'$  sia un quadrato (Fig. 5), noi la Proposizione 3.1 la chiamiamo III Teorema di Euclide (Teorema III;E), in onore del grande maestro, riformulandola nella Proposizione 3.2 seguente.

**Proposizione 3.2.** Dato un triangolo rettangolo  $T$ <sup>4</sup>, si consideri il quadrato  $Q$  costruito su un suo cateto  $c$ . Quindi si inscrivano  $Q$  – prolungando, sino al loro punto d'incontro, l'ipotenusa del triangolo e il lato del quadrato che si oppone a  $c$  – in un nuovo triangolo rettangolo di cui  $T$  è un triangolo minore, ottenendo un secondo triangolo minore  $T'$  (si veda Fig. 5).

Allora  $Q$  è equivalente al rettangolo avente come lati consecutivi l'altro cateto di  $T$  e l'altezza pivot del triangolo minore  $T'$ . ■

Come vedremo, dal Teorema III;E si ricava facilmente il Teorema II;E, il quale afferma che in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati consecutivi le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa. Anche questo teorema negli *Elementi* non compare autonomamente, ma lo si può ricavare applicando la Proposizione 8 del Libro VI (si veda [E], p. 373).

Premesso ciò, vediamo come il Teorema II;E si può ricavare dal Teorema III;E. Ebbene dato il triangolo  $NB'C$  (si veda Fig. 6) – rettangolo in  $B'$  – sull'altezza  $B'A'$  condotta da  $B'$  all'ipotenusa  $NC$ , si costruisca il quadrato  $C'BA'B'$ . Quindi considerando il punto di incontro  $A$  delle rette  $BC'$  e  $CB'$ , si ottiene una figura che amplia quella espressa in Fig. 5. Allora basta verificare che il segmento  $AC'$  è uguale alla proiezione  $NA'$ .

<sup>4</sup> Si faccia riferimento al triangolo  $B'A'C$  di Fig. 5.



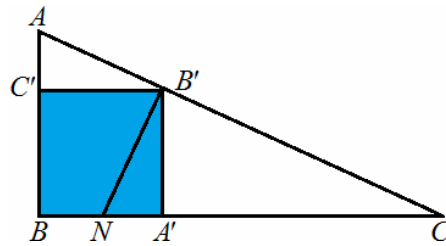


Fig. 6

In vero, i due angoli  $C'AB'$  e  $B'NA'$  – che sono angoli acuti rispettivamente del triangolo rettangolo  $AC'B'$  e del triangolo rettangolo  $NA'B'$  – sono uguali in quanto entrambi complementari dell'angolo  $A'CB'$ . Perciò i suddetti triangoli sono uguali, dato che hanno uguali anche gli altri due angoli acuti e i rispettivi cateti  $C'B'$  e  $B'A'$ . Perciò sono uguali anche gli altri due cateti  $AC'$  ed  $NA'$ .

Ora vedremo che dalla Proprietà triangolare dello Gnomone deriva facilmente anche il I Teorema di Euclide, di cui abbiamo già ricordato l'enunciato. Per la dimostrazione noi facciamo riferimento al triangolo rettangolo  $B'A'C$ , retto in  $A'$ , preso in considerazione nella Proposizione 3.1, costruendo sul cateto  $B'A'$  il quadrato  $C'BA'B'$  riportato in Fig. 5. Ebbene, in Fig. 7 si vede che il parallelogramma  $ASA'B'$  è inscritto nel triangolo  $ABC$  ed è equivalente al quadrato  $C'BA'B'$ .

Quindi si consideri il vertice pivot  $B$  e la corrispondente altezza pivot  $BF$ . Si tratta di provare che  $BF = B'K$ , per poi concludere la dimostrazione applicando la Proprietà triangolare dello Gnomone (Proposizione 2.1).

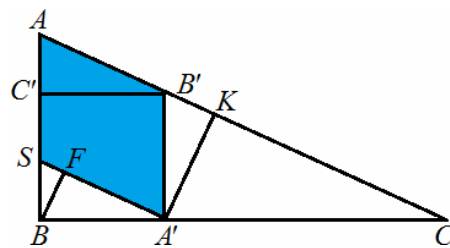


Fig. 7

In vero, i due triangoli rettangoli  $BFA'$  e  $B'KA'$  hanno ipotenuse uguali in quanto lati di uno stesso quadrato; d'altro canto i due angoli acuti  $BA'F$  e  $B'A'K$  sono uguali in quanto complementari dell'angolo  $SA'B'$ , onde sono uguali anche gli altri due angoli acuti. Perciò i triangoli  $BFA'$  e  $B'KA'$  sono uguali; quindi sono uguali anche  $BF$  e  $B'K$ , dato che si oppongono ad angoli uguali in triangoli uguali.

In fine, per evidenziare sinteticamente la semplicità e l'efficacia della Proprietà triangolare dello Gnomone, riportiamo la seguente figura. In essa si possono leggere i vari teoremi di Euclide di cui ci siamo occupati in questo paragrafo, riferendo i Teoremi I;E e III;E al triangolo  $B'A'C$ , e il Teorema II;E al triangolo  $B'NC$ .

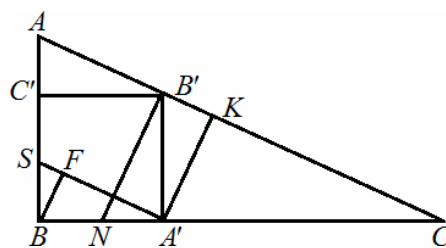


Fig. 8

## Bibliografia

- [1] Amaldi U., Sulla teoria della equivalenza, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*; raccolte e coordinate da F. Enriques, Parte I, Vol. 2°, Zanichelli, BO, 1983.
- [2] Bernardi C., Cateni L., Fortini R., Maracchia S., Olivieri G., Rohr F., *Il pensiero matematico, geometria*, Le Monnier Scuola, 2011.
- [3] Carichino N., De Mitri C., Su alcune dimostrazioni del I e del II teorema di Euclide, *Matematicamente.it. Magazine*, N. 22, pp. 5-10; 2014.
- [http://www.matematicamente.it/magazine/22maggio2014/203Carachino-DeMitri\\_Dimostrazioni-Euclide.pdf](http://www.matematicamente.it/magazine/22maggio2014/203Carachino-DeMitri_Dimostrazioni-Euclide.pdf)
- [4] Enriques F., Amaldi U., *Elementi di geometria, Parte I*, Zanichelli, BO, 1970.
- [5] Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, 1970.
- [6] Euclide, *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Bompiani, 2008.

# 225. Proposte per l'inclusione di studenti con BES: le equazioni di I e II grado con Scratch

Rosa Marincola  
rosamarincola@virgilio.it

## Sunto

In questo contributo presenterò due attività didattiche realizzate con Scratch per la risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado. Esse sono state sperimentate nelle classi del biennio Tecnico Economico dell'I.I.S. "Marconi-Guarasci" con sede a Rogliano (Cs), dove insegno informatica. Le proposte consistono nella stesura di algoritmi e l'implementazione dello script (codice sorgente) dell'ambiente Scratch costituito da una serie di istruzioni organizzate in blocchi in pseudo linguaggio naturale che non richiedono la conoscenza di linguaggi di programmazione. Si vogliono fornire degli spunti di didattica inclusiva che garantiscano l'apprendimento consapevole di tutti gli studenti, dalle eccellenze a quelli con varie forme di Bisogni Educativi Speciali (BES).

## Premessa

Prima di descrivere le attività ritengo utile riassumere i principali riferimenti normativi a livello internazionale e nazionale in tema di Bisogni Educativi Speciali poiché essi devono essere presi in carico dall'intera comunità educante e le sempre più limitate risorse aggiuntive (tra cui i docenti di sostegno) riguardano solo studenti diversabili, certificati in base alla L. 104/92. Per le leggi regionali in tema di inclusione si rimanda ai siti dei vari Uffici Scolastici Regionali.

Il modello italiano di inclusione scolastica è assunto a punto di riferimento in Europa e non solo. L'Italia è stata tra i primi paesi a scegliere la via dell'integrazione degli alunni con disabilità in scuole e classi regolari:

- prima degli anni '60: dall'esclusione si è passati alla medicalizzazione;
- dagli anni '60 a metà anni 70: dalla medicalizzazione, all'inserimento;
- dalla metà degli anni '70 agli anni '90: dall'inserimento, all'integrazione;
- dalla fine degli anni '90 al 2000: dall'integrazione, all'inclusione.

La discriminante tradizionale - alunni con disabilità/alunni senza disabilità - non rispecchia pienamente la complessa realtà delle nostre classi. Ogni alunno, con continuità o per determinati periodi, può manifestare Bisogni Educativi Speciali: per motivi fisici, biologici, fisiologici, per motivi psicologici, sociali, rispetto ai quali è necessario che le scuole offrano adeguata e personalizzata risposta. Tale impostazione rafforza il paradigma inclusivo della nostra scuola e richiede di contestualizzare il modello dell'integrazione scolastica all'interno di uno scenario cambiato, potenziando soprattutto la cultura dell'inclusione.

## Le attività didattiche

Scratch è una risorsa gratuita online [https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip\\_bar=home](https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip_bar=home) o scaricabile dal seguente link: [https://scratch.mit.edu/scratch\\_1.4/](https://scratch.mit.edu/scratch_1.4/).

Fornisce un ambiente di sviluppo basato sulla teoria costruttivista dell'apprendimento e costituisce un valido strumento per avviare alla programmazione gli studenti mediante il trascinamento e l'incastro delle istruzioni rappresentate da blocchi colorati, come avviene con i mattoncini Lego. Oltre ai vari

tutorial e video presenti in rete, per ulteriori informazioni si rimanda anche all'articolo in rete: *Un gioco d'incertezza: "Forse che sì, forse che no"*, Rosa Marincola, Matematicamente.it Magazine n. 20 Settembre 2013 (<http://www.matematicamente.it/magazine/20settembre2013/186.Marincola-Scratch.pdf>)

Le finalità di queste attività sono state essenzialmente quelle di sviluppare il pensiero computazionale attraverso la realizzazione di videogiochi con cui risolvere le equazioni di primo e secondo grado, per un apprendimento consapevole della matematica e dell'informatica, in cui anche le abilità sociali vengano potenziate e la componente ludica sia un elemento essenziale.

Gli algoritmi realizzati e implementati nello script di Scratch costituiscono già il codice eseguibile, per cui non è necessario conoscere altri linguaggi di programmazione (basta cliccare sulla bandierina verde posta in alto a destra). Per la loro stesura è necessario far riflettere gli allievi e discutere con loro affinché vengano individuati i passi da compiere che a partire dai dati in input forniscano le soluzioni delle equazioni date (dati output). Questa fase costituisce un momento di approfondimento utile al coinvolgimento attivo di tutte le componenti della classe, in particolare delle eccellenze, ma anche per il recupero e l'acquisizione di adeguate competenze di base degli allievi con difficoltà di vario genere. I codici, potranno essere personalizzati dagli studenti con registrazioni, suoni, animazioni che potranno aiutarli a memorizzare meglio i vari passaggi. Questa tipologia di approccio tiene conto dei diversi stili di apprendimento degli allievi perché veicola le informazioni attraverso vari canali (lettura, scrittura, suoni, azioni, immagini, manipolazione).

Il lavoro è stato articolato in diverse fasi.

- 1) Una discussione guidata dall'insegnante per recuperare le conoscenze matematiche degli allievi sulle equazioni di primo e secondo grado.
- 2) La stesura di una prima bozza degli algoritmi in linguaggio naturale da parte degli allievi mediante attività di *cooperative learning* (gruppetti di 2-3 persone).
- 3) La presentazione dei lavori di gruppo alla LIM con un'attenta analisi dei casi possibili che si possono presentare al variare dei dati in input.
- 4) Una prima implementazione con Scratch alla LIM e la validazione del codice.
- 5) La personalizzazione da parte degli studenti (a coppie) del videogioco e il suo utilizzo per la verifica della corretta risoluzione di alcuni esercizi da svolgere manualmente.

La stampa dello script realizzato con Scratch può essere utilizzato come misura compensativa per gli alunni con BES perché costituisce una sintesi in pseudolinguaggio naturale, mentre col programma si possono verificare i risultati degli esercizi svolti autonomamente dagli allievi anche a casa.

Il primo programma proposto riguarda la soluzione delle equazioni di primo grado nell'incognita  $x$ , nella forma  $ax+b=0$ .

All'apertura del programma Scratch occorre inserire uno sfondo cliccando sulla scritta Stage nell'area a destra (simile alla finestra dei risultati nell'ambiente di programmazione C). Si possono caricare immagini, disegnare o utilizzarne una prelevandola tra quelle presenti nella libreria (potrà essere modificata anche in seguito).

Successivamente si deve scegliere uno Sprite, ossia il personaggio da utilizzare a cui associare lo script. Di default è un gatto, ma anche qui è preferibile far scegliere agli studenti, tra quelli disponibili con diversi costumi (cioè posizioni del corpo) per poterli poi animare come i cartoon. È anche possibile disegnare un nuovo Sprite o inserire un'immagine ed eventualmente modificarla. Se si vuole cambiare Sprite dopo aver realizzato lo script, è sufficiente cliccare sulla scheda "Costume", importare lo Sprite desiderato con i suoi costumi e cancellare quelli precedenti.

Occorre poi creare le tre variabili (in senso informatico) che utilizza il programma: "a", "b" sono quelle che acquisiscono i dati in input e "x" è l'incognita dell'equazione che fornisce l'output. È certamente utile soffermarsi sulla differenza tra parametro e variabile in senso matematico e sulla definizione di variabile in informatica.



Figura 3: Lo stage e lo Sprite utilizzati

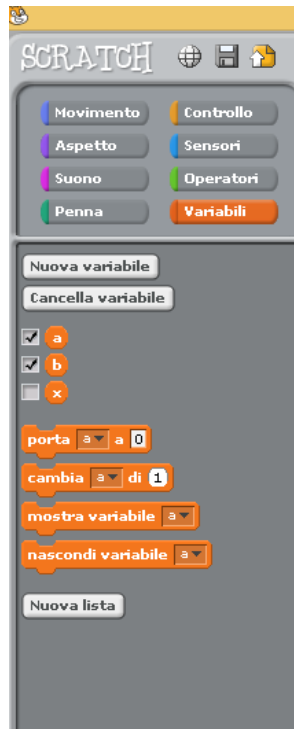


Figura 4: Le tre variabili



Figura 1: I diversi costumi dello Sprite per animarlo

Lo Script dello Sprite 1 è il seguente:

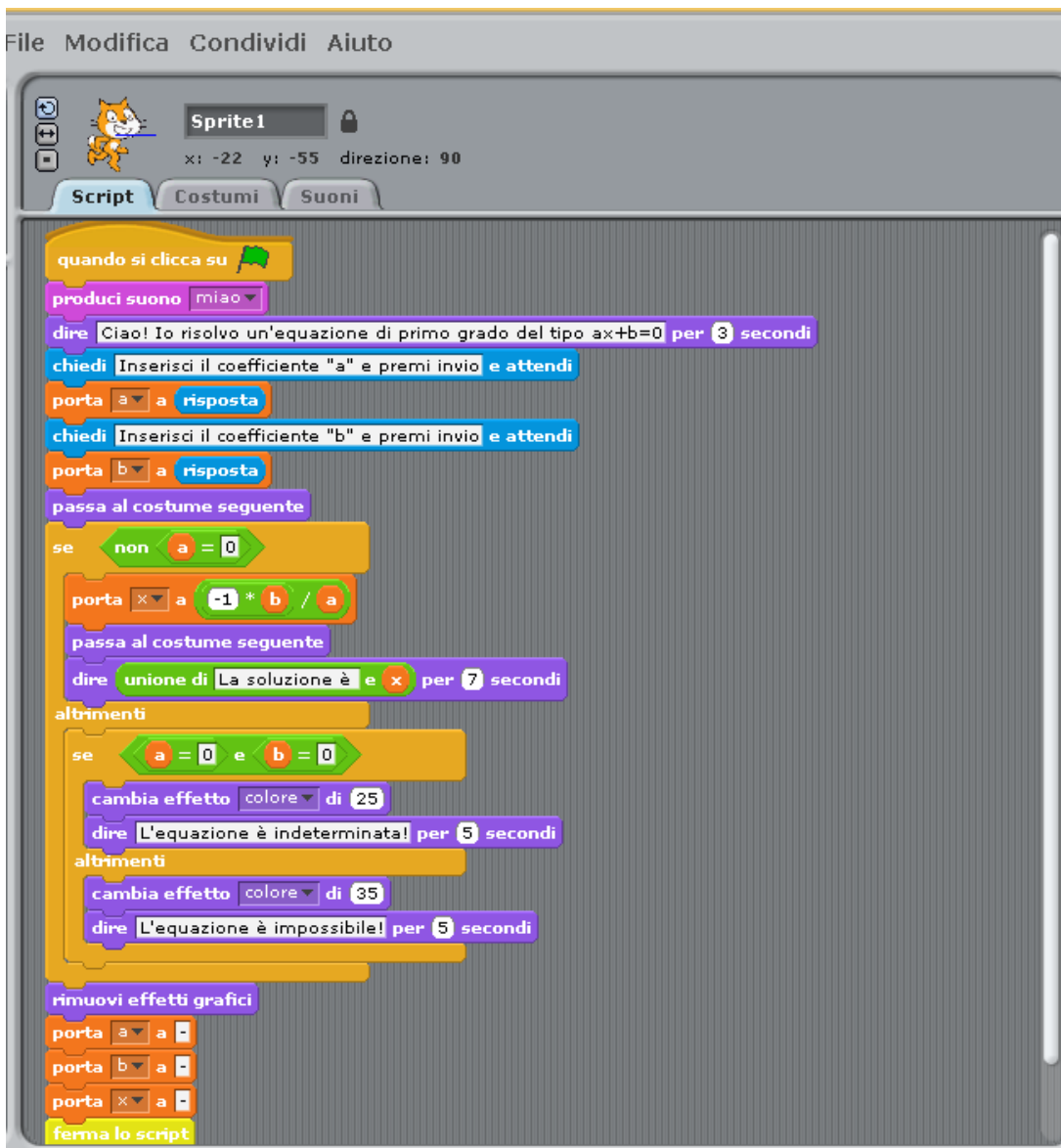


Figura 2: Script per la soluzione delle equazioni di primo grado

Il secondo programma riguarda la soluzione delle equazioni di secondo grado nell'incognita  $x$ , nella forma  $ax^2+bx+c=0$ .

Si procede in modo analogo al programma precedente:

1. si imposta graficamente il videogioco scegliendo lo stage e lo Sprite a cui sarà associato lo script;
2. si aggiungono i vari costumi dello Sprite (varie pose del personaggio) se si vogliono simulare dei movimenti;
3. si aggiungono le variabili necessarie, in questo caso oltre a quelle di input ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) e a quella di output ( $x$ ), è utile definire anche la variabile di lavoro "delta";
4. si crea lo script trascinando e incastrando le varie istruzioni.



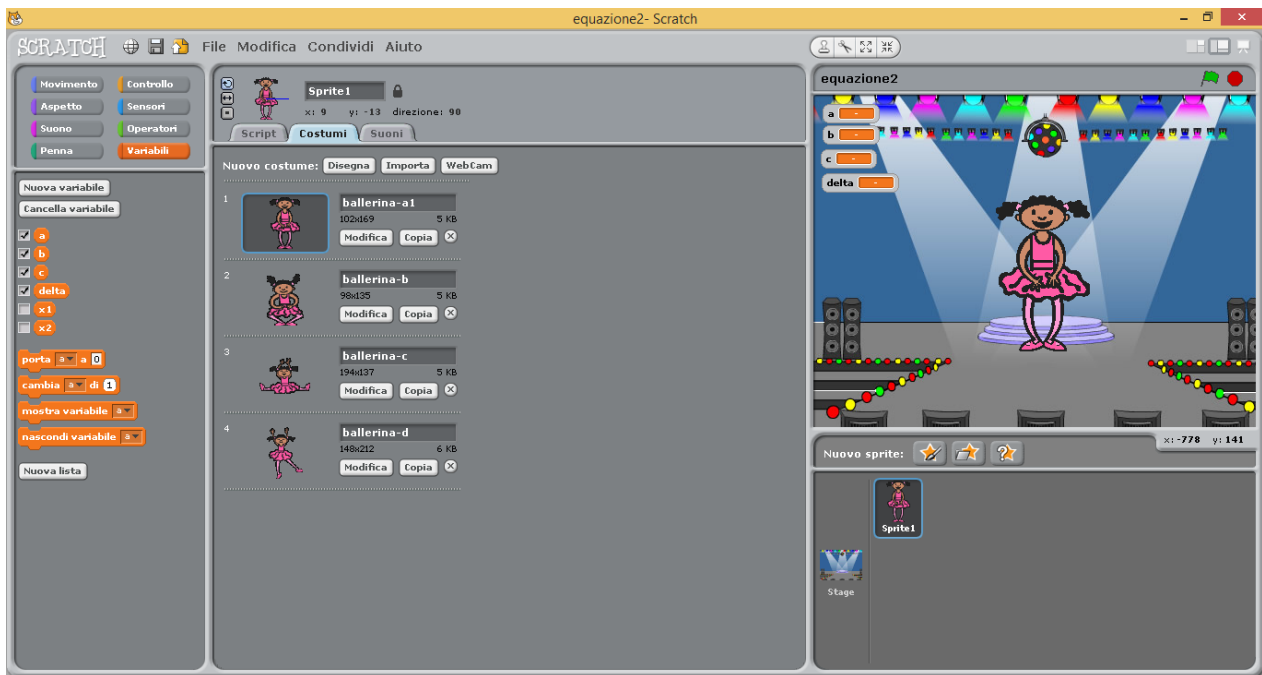


Figura 3: Impostazioni per il videogioco che risolve le equazioni di secondo grado

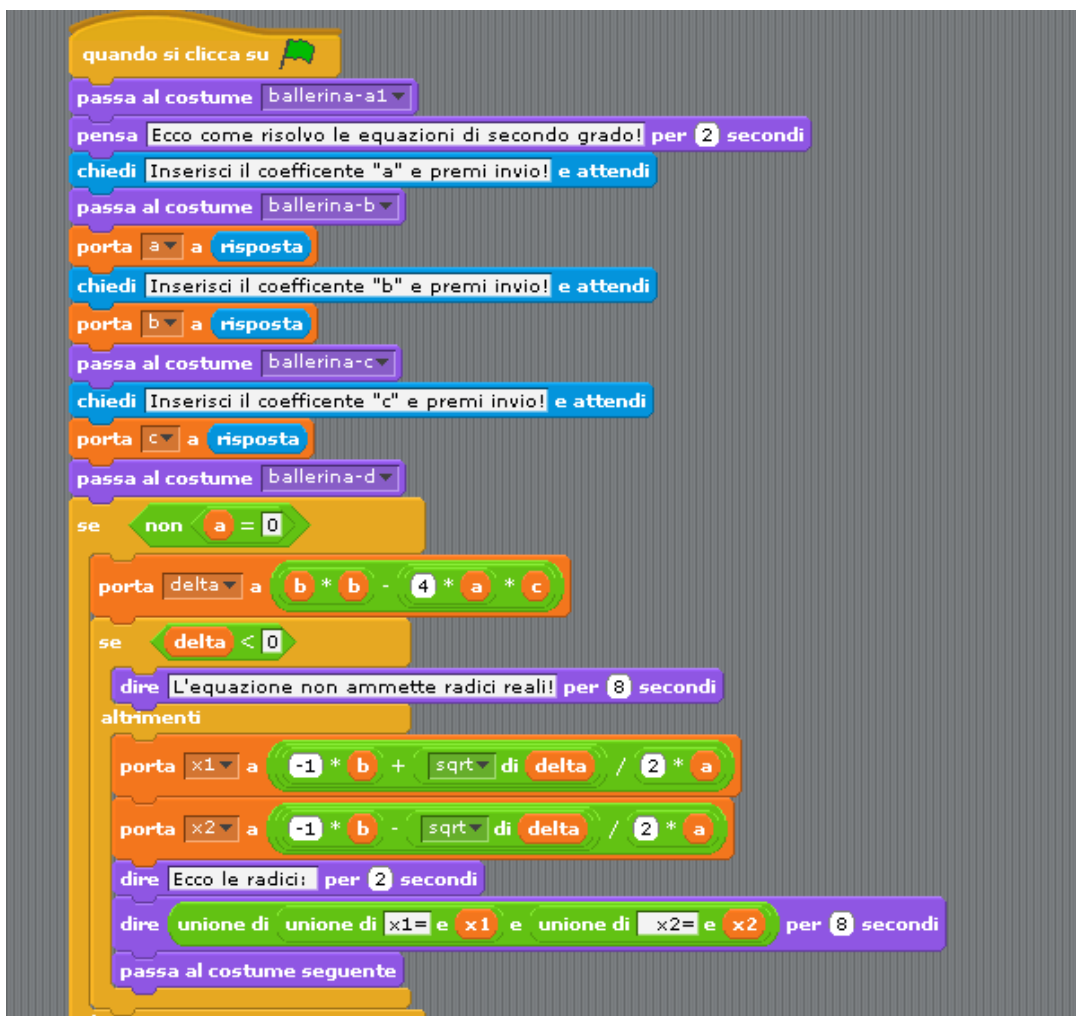




Figura 4: Script per la soluzione delle equazioni di secondo grado

## Conclusioni

Le due attività sono state realizzate e sperimentate per la valorizzazione delle eccellenze e il recupero delle conoscenze e competenze degli allievi con varie forme e gradi di difficoltà. L'utilizzo di Scratch consente all'insegnante di favorire l'accesso degli studenti alle informazioni attraverso vari canali e di attivare adeguate strategie che tengano conto dei differenti stili di apprendimento (visivo-verbale, visivo-non verbale, uditivo, cinestesico). L'interdisciplinarietà mira ad uno studio consapevole e integrato della matematica e dell'informatica con l'uso delle tecnologie e di risorse gratuite presenti in rete. Questo lavoro vuole essere un contributo per l'attuazione di attività didattiche inclusive. Esso è frutto di una rielaborazione personale di quanto appreso durante la frequenza di svariati corsi di formazione e aggiornamento promossi da CTS di Cosenza (<http://www.handitecno.calabria.it/>) e delle attività laboratoriali sui BES realizzate dalla sottoscritta nell'ambito del TFA (Tirocinio Formativo Attivo) nell' a.a. 2014-15 presso l'UNICAL di Cosenza in qualità di tutor coordinatrice e di docente per le c.c. A047 Matematica e A048 Matematica Applicata.

## Appendice

### Principali riferimenti normativi sui BES (Bisogni Educativi Speciali)

#### Normativa internazionale:

- L'ICF: *International Classification of Functioning, Disability and Health*, è la classificazione del funzionamento, disabilità e della salute promossa dall'Organizzazione mondiale della sanità (<http://www.who.int/classifications/icf/en/>).
- La Convenzione delle Nazioni Unite sui diritti delle persone con disabilità (<http://www.lavoro.gov.it/AreaSociale/Disabilita/ConvenzioneONU/Pages/default.aspx>)

- La Strategia europea sulla disabilità 2010-2020 (<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/?uri=URISERV:em0047>), individua otto ambiti d'intervento per l'inclusione: l'accessibilità, la partecipazione, l'uguaglianza, l'occupazione, l'istruzione e la formazione, la protezione sociale, la salute e le azioni esterne.

### Normativa nazionale:

Per la disabilità la normativa italiana di riferimento è:

- Legge 5 febbraio 1992, n. 104: Legge-quadro per l'assistenza, l'integrazione sociale e i diritti delle persone handicappate <http://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/1992/02/17/092G0108/sg>
- Linee Guida M.I.U.R. Prot. n°4274/09 Integrazione scolastica degli alunni con disabilità ([http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/115c59e8-3164-409b-972b-8488ccc0a77b/prot4274\\_09\\_all.pdf](http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/115c59e8-3164-409b-972b-8488ccc0a77b/prot4274_09_all.pdf))

Per i DSA (Disturbi specifici di apprendimento) e successivamente per i BES:

- Legge 170 del 8 ottobre 2010: Norme in materia di disturbi specifici di apprendimento in ambito scolastico ([http://www.istruzione.it/esame\\_di\\_stato/Primo\\_Ciclo/normativa/allegati/legge170\\_10.pdf](http://www.istruzione.it/esame_di_stato/Primo_Ciclo/normativa/allegati/legge170_10.pdf))

La Legge riconosce la dislessia, la disgrafia, la disortografia e la discalculia quali disturbi specifici di apprendimento, che si manifestano in presenza di capacità cognitive adeguate, in assenza di patologie neurologiche e di deficit sensoriali, ma possono costituire una limitazione importante per alcune attività della vita quotidiana. I disturbi vengono così definiti dalla Legge:

- per **dislessia** si intende un disturbo specifico che si manifesta con una difficoltà nell'imparare a leggere, in particolare nella decifrazione dei segni linguistici, ovvero nella correttezza e nella rapidità della lettura;
- per **disgrafia** si intende un disturbo specifico di scrittura che si manifesta in difficoltà nella realizzazione grafica;
- per **disortografia** un disturbo specifico di scrittura che si manifesta in difficoltà nei processi linguistici di transcodifica;
- per **discalculia** si intende un disturbo specifico che si manifesta con una difficoltà negli automatismi del calcolo e dell'elaborazione dei numeri.
- Direttiva Ministeriale n. 5669 del 12 luglio 2011 ([http://www.istruzione.it/esame\\_di\\_stato/Primo\\_Ciclo/normativa/allegati/prot5669\\_11.pdf](http://www.istruzione.it/esame_di_stato/Primo_Ciclo/normativa/allegati/prot5669_11.pdf)) e allegate Linee Guida DSA per il diritto degli alunni e degli studenti con disturbi specifici di apprendimento ([http://www.disabili.unige.it/wp-content/uploads/2011/11/linee\\_guida\\_sui\\_dsa\\_12luglio2011.pdf](http://www.disabili.unige.it/wp-content/uploads/2011/11/linee_guida_sui_dsa_12luglio2011.pdf))
- Direttiva Ministeriale del 27 dicembre 2012: *“strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica”*

La Direttiva ridefinisce e completa il tradizionale approccio all'integrazione scolastica, basato sulla certificazione della disabilità, estendendo il campo di intervento e di responsabilità di tutta la comunità educante all'intera area dei Bisogni Educativi Speciali (BES) (<http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/8d31611f-9d06-47d0-bcb7-3580ea282df1/dir271212.pdf>).

La Direttiva recita: *fermo restando l'obbligo di presentazione delle certificazioni per l'esercizio dei diritti conseguenti alle situazioni di disabilità e di DSA, è compito doveroso dei Consigli di classe o dei team dei docenti indicare in quali altri casi sia opportuna e necessaria l'adozione di una personalizzazione della didattica ed eventualmente di misure compensative o dispensative, nella prospettiva di una presa in carico globale ed inclusiva di tutti gli alunni.*

- Circolare Ministeriale n. 8 del 6 marzo 2013 (<http://www.edscuola.eu/wordpress/?p=18526>): delinea la strategia per realizzare il diritto all'apprendimento degli alunni in situazione di difficoltà, estendendo il campo di intervento all'intera area dei **Bisogni Educativi Speciali (BES)**, comprendente **disabilità**, **DSA (Disturbi Specifici di Apprendimento)** e/o **disturbi evolutivi specifici, svantaggio linguistico, sociale e culturale.**

Nella circolare è evidenziato che lo strumento privilegiato è il Piano Didattico Personalizzato (PDP), che ha lo scopo di definire e documentare, secondo un'elaborazione collegiale, le strategie di intervento ed i criteri di valutazione più idonei. La circolare n. 8 non deve essere letta come sostitutiva della Legge 104/92. Essa dedica ampio spazio ai BES non certificati che dovranno essere individuati sulla base di elementi oggettivi o di ben fondate considerazioni psicopedagogiche e didattiche. Per questi alunni è possibile attivare percorsi individualizzati e personalizzati per il tempo strettamente necessario: a differenza delle situazioni di disturbo documentate da diagnosi, le misure dispensative avranno carattere transitorio. Vengono ridefiniti i compiti del nuovo GLI (Gruppo di Lavoro per l'Inclusione), che tra le altre cose dovrà elaborare una proposta di Piano Annuale per l'Inclusività (PAI) riferito a tutti gli alunni con BES, da redigere al termine di ogni anno scolastico.

**I principali strumenti compensativi previsti dalla normativa vigente includono:**

- L'utilizzo di libri in formato digitale ascoltati per mezzo di sintesi vocale e di programmi che ne consentano la gestione.
- L'utilizzo del computer con programmi di video-scrittura, dotati di correttore e controllo ortografici e grammaticali, nonché di sintesi vocale).
- L'utilizzo del registratore audio.
- L'utilizzo della tavola pitagorica e delle tavole delle addizioni e delle sottrazioni.
- L'utilizzo della calcolatrice (anche nella versione parlante).
- L'utilizzo di tabelle delle regole ortografiche e grammaticali.
- L'utilizzo della tabella delle misure e delle formule geometriche.
- L'utilizzo di schemi (ad es. mappe concettuali, concettuali o libere schematizzazioni) durante le interrogazioni.
- L'utilizzo della tabella dei mesi, dell'alfabeto nei diversi caratteri.
- Lettura di testi da parte dell'insegnante, di un adulto esperto, di un compagno di classe.

**Le principali misure dispensative comprendono:**

- La dispensa dalla lettura ad alta voce (a meno che non espressamente richiesta).
- La dispensa dalla studio mnemonico delle tabelline.
- La dispensa dalla scrittura veloce sotto dettatura.
- La dispensa dall'uso del vocabolario cartaceo.
- La dispensa, ove necessario, dallo studio della lingua straniera in forma scritta.
- Nelle verifiche scritte si dovrà o concedere più tempo per lo svolgimento della prova oppure ridurre il numero di esercizi, senza modificare gli obiettivi; eventualmente, si recupererà oralmente quanto non verificato per iscritto.
- Ricorso a prove scritte nelle materie tradizionalmente orali (storia, geografia, scienze).
- Valutazione delle prove scritte con modalità che tengano conto principalmente del contenuto piuttosto che della forma.
- La valutazione nella lingua straniera dovrebbe privilegiare l'orale rispetto allo scritto (da cui, tuttavia, il bambino non può essere dispensato); nello scritto si privilegeranno esercizi di completamento e/o a risposta multipla.
- L'organizzazione di interrogazioni programmate.

Tra le diverse categorie di bisogni educativi speciali presi in carico dai docenti, uno sguardo attento deve essere rivolto alla cura delle eccellenze, anch'esse necessitano di stimoli e strategie didattiche adeguati alle loro esigenze.

# 226. Sull'esistenza di punti coniugati su superfici

Alexander Pigazzini

*“... siccome non era in grado di rispondere a nessuna delle domande, non dava molto peso alla maniera in cui se le poneva”.*

Le Avventure di Alice nel Paese delle Meraviglie.  
Lewis Carroll 1865

## Introduzione

Partendo da una minimalista introduzione dei concetti di superfici parametriche, campo di vettori, tensore di curvatura e torsione, mappa esponenziale, punti coniugati ed equazione di Jacobi, lo studio di questo breve articolo è quello di mostrare sulle superfici, che rispondano a premesse caratteristiche, la presenza di geodetiche che ammettano punti coniugati ed alcuni risultati dovuti alla “tecnica” utilizzata.

## 1. Richiami preliminari

### 1.1. Superfici parametriche

Sia  $M$  una varietà differenziabile.

**Definizione 1.1.1.** Una superficie parametrica in  $M$  è un'applicazione differenziabile  $f: U \rightarrow M$ , definita su un aperto connesso  $U$  di  $R^2$ .

Siano  $(t, s)$  le coordinate in  $R^2$ . Poniamo

$$\frac{\partial f(t, s)}{\partial t} = f_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,s)}, \text{ e } \frac{\partial f(t, s)}{\partial s} = f_* \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(t,s)}.$$

con  $f_*$  il differenziale di  $f$  in un punto  $p \in M$ .

Definiamo **campo di vettori** su  $f$  l'applicazione differenziabile  $V: U \rightarrow TM$  che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{V} & TM \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Ipotizziamo ora che su  $M$  sia stata assegnata una connessione lineare  $\Gamma$ , così facendo per ogni  $s$  fissato, la  $t \rightarrow f(t, s)$ , e per ogni  $t$  fissato la  $s \rightarrow f(t, s)$ , sono curve differenziabili in  $M$  e possiamo calcolare le derivate covarianti di  $V$  lungo tali curve. Queste le identificheremo con

$$(1.1.1) \quad \frac{DV}{\partial t}(t, s) \text{ e } \frac{DV}{\partial s}(t, s)$$

## 1.2. Richiami a T ed R

In geometria differenziale, la **torsione** è un tensore che misura il grado di torsione degli spazi tangenti lungo una geodetica in una varietà differenziabile dotata di connessione. La nozione è quindi ispirata a quella di torsione di una curva nello spazio usata nella geometria differenziale delle curve.

È bene considerare che in una varietà riemanniana (caso di nostro interesse) la torsione è sempre nulla, infatti la connessione di Levi-Civita usata in geometria riemanniana è precisamente l'unica connessione senza torsione che preserva la metrica.

**Definizione 1.2.1.** Sia  $M$  una varietà differenziabile dotata di una connessione. Il **tensore di torsione** è il campo tensoriale  $T$  di tipo  $(1,2)$  definito dalla relazione:

$$(1.2.1) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

con  $\nabla$  derivata covariante e  $[, ]$  parentesi di *Lie*.

La curvatura o **tensore di Riemann** è un tensore di tipo  $(1,3)$  che codifica nel modo più completo la curvatura di una varietà riemanniana. Prende il nome dal matematico Bernhard Riemann ed è generalmente indicato (nella notazione con indici) tramite il simbolo  $\mathcal{R}_{jkl}^i$ .

Tutte le altre entità che descrivono la curvatura di una varietà possono essere dedotte dal tensore di Riemann, ad esempio il tensore di Ricci, la curvatura scalare e la curvatura sezionale, quest'ultima verrà richiamata più avanti.

**Definizione 1.2.2.** Sia  $M$  una varietà differenziabile dotata di una connessione. Il tensore di Riemann è il campo tensoriale  $R$  di tipo  $(1,3)$  che soddisfa l'uguaglianza:

$$(1.2.2) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

per ogni terna  $X, Y, Z$  di campi vettoriali su  $M$ .

Il teorema di Schwarz asserisce che nello spazio euclideo le derivate parziali commutano: questo fatto non è vero in una varietà con connessione arbitraria; il tensore di Riemann tiene conto in un certo senso di questo fenomeno. I primi due termini della formula sono infatti proprio le derivazioni commutate applicate ad un campo  $Z$ ; la presenza del terzo termine, che fa uso della parentesi di *Lie*  $[, ]$ , è necessaria affinché  $R$  sia effettivamente un tensore.

## 1.3. Superfici Piatte e Superfici Sviluppabili

**Definizione 1.3.1**  $S \subset \mathcal{R}^3$  è detta superficie patta se e solo se la sua curvatura Gaussiana è ovunque nulla.

**Definizione 1.3.2**  $S \subset \mathcal{R}^3$  è detta superficie sviluppabile se e solo se essa è localmente isometrica al piano euclideo.

Intuitivamente le superfici sviluppabili sono quelle superfici che possono essere appiattite su un piano senza “stiramenti” o “strappi”.

**Proposizione 1.3.1** Dato che il piano è banalmente una superficie dove  $K = 0$ , allora le superfici sviluppabili sono superfici in cui la curvatura Gaussiana è nulla.

**Proposizione 1.3.2** Una superficie sviluppabile è anche una superficie rigata.

**Proposizione 1.3.3**  $K = 0 \Leftrightarrow N$  è parallelo lungo le generatrici  $R_p$ .



## 1.4. Mappa Esponenziale e punti coniugati.

**Definizione 1.4.1** Sia  $M \in \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e completa con  $p \in M$ . L'applicazione definita come:

$$(1.4.1) \quad \exp: T_p M \rightarrow M, \quad v \mapsto \exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$$

è detta **mappa esponenziale** ed essa associa ad un vettore fissato  $v \in T_p M$ , un punto di  $M$ , ottenuto valutando la geodetica  $\gamma: I \in \mathbb{R} \rightarrow M$ , dove  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ , con  $t = 1$ ,  $t \in I$ .

La mappa esponenziale è:

- un'applicazione differenziabile,
- un diffeomorfismo se ristretta ad un aperto.

$$(1.4.2) \quad B_\varepsilon(0) = \{v \in T_p M : \|v\| < \varepsilon\} \subset T_p M$$

con  $\varepsilon > 0$ , scelto opportunamente.

Con la definizione appena data di mappa esponenziale, segue logico introdurre il concetto di punti coniugati, che sono il “cardine”, come vedremo in seguito, di questo articolo.

Intuitivamente i punti coniugati sono le coppie di punti  $p, q$  con la proprietà che la geodetica, che parte da  $p$ , smette di essere “minimizzante” a partire da  $q$ . Una definizione più formale è la seguente:

**Definizione 1.4.2** Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una geodetica.  $\gamma(b)$  è *coniugato* di  $\gamma(a)$  lungo  $\gamma$  se esiste un campo di Jacobi (vedi paragrafo I.7) non identicamente nullo tale che  $J(a) = J(b) = 0$ .

Estremamente utile è anche la seguente *caratterizzazione dei punti coniugati*:

Sia  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  una geodetica. Poniamo  $v := \dot{\gamma}(0)$ , per cui  $\gamma$  può essere espressa come  $\exp_p(tv)$ . Allora  $\gamma(0)$  è *coniugato* di  $\gamma(1)$  lungo  $\gamma$  se e solo se  $v$  è un punto critico di  $\exp_p$ , ossia  $(\exp_p)_*$  non è invertibile. Quindi  $\exp_p$  smette di essere invertibile a partire dal valore  $v$  lungo la retta  $t \mapsto tv$ .

**Esempio** Sia  $S^2$  la sfera in  $\mathbb{R}^3$ , è risultato noto che i punti coniugati sono tutti e soli i punti tra loro antipodali.

## 1.5. La Curvatura Sezionale

Intuitivamente, in Geometria Differenziale, la *curvatura sezionale* misura la curvatura di una varietà riemanniana lungo piani dello spazio tangente in un punto della varietà. Di seguito la definizione più rigorosa:

**Definizione 1.5.1.** Sia  $p$  un punto in una varietà riemanniana  $M$  e  $\pi$  un piano nello spazio  $T_p$  in  $p$ .

La mappa esponenziale manda un aperto di  $\pi$ , contenente l'origine, su una superficie  $S$  contenuta in  $M$  e tangente a  $\pi$  in  $p$ . Si tratta della superficie ottenuta prendendo localmente tutte le geodetiche uscenti da  $p$  e tangenti a  $\pi$ , la curvatura sezionale  $K(\pi)$  di  $M$  rispetto a  $\pi$ , è la curvatura gaussiana di  $S$  in  $p$ .

Essa può essere ricavata direttamente dal tensore di Riemann: siano  $u$  e  $v$  due vettori che generano il piano  $\pi$ , allora

$$(1.5.1) \quad K(\pi) = \frac{\langle R(u,v)u,v \rangle}{\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle - \langle u,v \rangle^2}$$

dove  $R$  è il tensore di Riemann ed il prodotto scalare è dato dal tensore metrico.

## 1.6. La Curvatura Totale

La *curvatura totale* ( $K_{TOT}$ ) di una regione  $A$  della superficie  $M$ , è l'integrale di superficie

$$(1.6.1) \quad \int_A K \, dM$$

della curvatura gaussiana  $K$  su  $A$ .

Essa misura quanto si differenzia globalmente la geometria di  $A$  da quella di una regione piatta sul piano.

Un classico esempio è la curvatura totale di un triangolo geodetico  $T$ , che è pari alla differenza fra la somma degli angoli interni (misurati in radianti) e  $\pi$ . In altre parole:

$$(1.6.2) \quad \sum_{i=1}^3 \Theta_i = \int_T K \, dM$$

## 1.7. L'equazione di Jacobi

Fissiamo un punto  $p \in M$  e consideriamo l'applicazione esponenziale  $exp_p$ , definita sull'intorno  $W_p$  di  $0$  in  $T_p M$ . Per calcolarne il differenziale in un punto  $V \in W_p$ , consideriamo una curva  $v(s) \in C^\infty([-\varepsilon, \varepsilon], T_p M)$  con  $v(0) = v$  e  $\dot{v}(0) = w$  e la superficie parametrica

$$(1.7.1) \quad f(t, s) = exp_p(tv(s)),$$

definita su un intorno aperto  $U$  di  $[0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  in  $R^2$ . E'

$$(1.7.2) \quad (exp_p)_*(v)(w) = \frac{\partial f(1, 0)}{\partial s}.$$

Il campo di vettori  $J(t) = \frac{\partial f(t, 0)}{\partial s}$  soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine lungo la geodetica  $\gamma(t) = exp_p(tv)$ . Infatti, poiché per ogni  $s$  la  $t \rightarrow f(t, s) = exp_p(tv(s))$  è una geodetica, abbiamo:

$$(1.7.3) \quad 0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{D}{\partial t} \left( T \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) + R \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}.$$

La (1.7.3) è ricavata considerando le (1.7.4) e (1.7.5) della seguente:

Siano  $f: U \rightarrow M$  una superficie parametrica in  $M$  e  $V$  un campo di vettori su  $f$ . Valgono allora le:

$$(1.7.4) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = T \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$(1.7.5) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

Per la verifica di quest'ultime, occorre tenere a mente che  $f$ , vicino a ciascun punto  $(t, s)$  in cui sia un'immersione ossia  $\frac{\partial f}{\partial t}$  e  $\frac{\partial f}{\partial s}$  siano linearmente indipendenti, è possibile scriverla in un sistema di coordinate locali  $x^1, \dots, x^m$ , come  $(t, s) \rightarrow (t, s, 0, \dots, 0)$ . ■

Dalla (1.7.3) abbiamo quindi ottenuto l'equazione di Jacobi per il campo di vettori  $J(t)$  lungo la geodetica  $\gamma(t) = \text{expp}(tv)$ :

$$(1.7.6) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + \frac{DT(J, \dot{\gamma})}{dt} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

L'equazione di Jacobi per una connessione simmetrica, Levi-Civita, si semplifica poi nella

$$(1.7.7) \quad \ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Sia  $\gamma \in C^\infty(I, M)$  una geodetica.

**Definizione 1.7.1.** Chiamiamo *campi di Jacobi* lungo  $\gamma$  le soluzioni della (1.7.6).

Indichiamo con  $\mathfrak{J}(\gamma)$  l'insieme dei *campi di Jacobi* lungo  $\gamma$ .

## 2. Sull'esistenza di punti coniugati

### 2.1 Varietà senza punti coniugati

E' risultato noto (si veda ad esempio il lavoro "On Surface with no conjugate points" di W. Ballmann, M. Brin & K. Burns – J. Differential Geometry 25, 1987, pp. 249-273) che se  $M$  è una varietà con curvatura sezionale negativa ovunque, allora  $M$  non ammette punti coniugati; l'inverso non è sempre vero per ogni superficie compatta, in quanto potrebbe essere piatta.

**Teorema di MENDONÇA-ZHOU** Sia  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  una geodetica senza punti coniugati. Allora per ogni campo vettoriale unitario  $X(t)$  parallelo lungo  $\gamma$  si ha che:

$$(2.1.1) \quad \eta = \liminf_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow +\infty}} \int_u^v (K(X(t), \gamma'(t))) dt \leq 0$$

$$(2.1.2) \quad \mu = \liminf_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow +\infty}} \int_u^v (\text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))) dt \leq 0$$

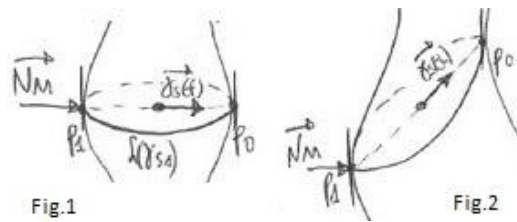
dove  $K(X(t), \gamma'(t))$  è la curvatura sezionale.

Se  $\eta = 0$  allora  $K(X(t), \gamma'(t)) \equiv 0$ , se  $\mu = 0$ , allora per ogni  $t$  ed ogni  $v$  ortogonali a  $\gamma'(t)$ , si ha che  $K(\gamma'(t), v) = 0$ .

### 2.2 Alcune Applicazioni del Teorema di MENDONÇA-ZHOU

**TEOREMA 1** "Sia  $(M, g)$  una 2-varietà Riemanniana in  $\mathbb{R}^3$  completa e connessa con curvatura totale ( $K_{\text{tot}}$ ) non negativa e sia  $p_1$  un punto di essa con  $T_{p_1}M$  spazio tangente per  $p_1$ .

Sia  $C$  una circonferenza passante per  $p_1$  e  $p_0$  punti di  $(M, g)$ , parametrizzata da  $(\mu(t), \sigma(t))$  tale che per  $p_1$  e  $p_0$  si abbia  $d(p_1, p_0) = \text{diam}(S)$ , con  $S$  la sfera che ha per circonferenza massima  $C$ . Prendendo  $\overrightarrow{N}_M|_{p_0}$ , il versore normale in  $p_0$ , con verso entrante in  $M$ , sia  $\overrightarrow{\gamma}_S(t) = \frac{(\mu(t), \sigma(t))}{|(\mu(t), \sigma(t))|}$  il vettore con stessa direzione di  $\overrightarrow{N}_M|_{p_0}$ , ma rivolto dal centro di  $C$  verso  $p_0$ .



(Fig.1 OK, mentre Fig.2 NO perché anche se i piani  $T_{*}M$  rimangono paralleli,  $\gamma_S$  non ha la stessa direzione di  $N_M$ )

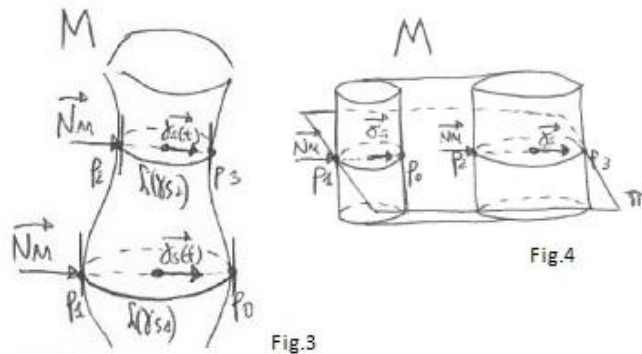
Allora se:

$$(2.2.1) \quad \overrightarrow{N_M}|_{p_1} - \overrightarrow{\gamma_S}(t)|_{p_0} = 0$$

- ha soluzione solo in  $p_0$ , nel senso che solo in  $p_0$  lo spazio tangente è parallelo a  $T_{p_1}M$  ed è anche costruibile  $C$ ,  $M$  ammette punti coniugati.
- ha soluzione per più coppie di punti  $(p_n, p_i)$ , oltre a  $(p_1, p_0)$ , sempre per le quali lo spazio tangente resti parallelo a  $T_{p_1}M$ , senza che le circonferenze  $C$  appartengano allo stesso piano, e se identificando con  $\mathcal{L}\gamma_{S_1}(t)$  il  $diam(S) = d(p_0, p_1)$ , vale anche:

$$(2.2.2) \quad \delta := \mathcal{L}(\gamma_{S_1}) - \mathcal{L}(\gamma_{S_i}) \neq 0$$

$M$  ammette punti coniugati”.



(Fig.3 OK, mentre Fig.4 NO perché anche se soddisfa la (2.3.2) essendoci  $C_i$  appartenenti allo stesso piano, non esclude che  $M$  sia piatta, come appunto accade in figura).

*Dimostrazione*

La dimostrazione segue immediata, infatti sia la (2.2.1) che la (2.2.2) implicano la non sviluppabilità sul piano (Proposizione 1.3.3). Quindi  $M$  non è piatta e di conseguenza siamo nelle condizioni del teorema II.2 da cui esistenza di punti coniugati.

**Corollario** “Se la (2.2.1) è soddisfatta per più punti  $p_i$ , restando sempre nelle condizioni della II.3, ed è anche soddisfatta la (2.2.2), allora  $M$  non è piatta e la sua curvatura  $K_M$  non può avere segno costante”.

*Dimostrazione*

Che  $M$  non possa essere piatta è già dimostrato.

Consideriamo ora due curve  $\varphi_1$  e  $\varphi_0$  poste su  $M$ , le quali congiungano rispettivamente, la prima il punto  $p_1$  ai punti  $p_n$  che abbiano spazio tangente  $T_{p_n}M$  parallelo a  $T_{p_1}M$ , e la seconda il punto  $p_0$  ai punti  $p_i$  che abbiano lo spazio tangente  $T_{p_i}M$  parallelo a  $T_{p_0}M$ , stessa condizione che si ha in II.3, quindi i punti  $p_n$  e  $p_i$  soddisfano la (2.2.1) per  $p_1$  fissato.

Ruotiamo ora  $M$  in modo che  $T_{p_1}M$  risulti parallelo al piano  $xy$ . Spostandosi sulle curve  $\varphi_1$  e  $\varphi_0$ , lo spazio tangente a  $M$ , varierà inclinazione (essendo appunto  $M$  non piatta), per tornare parallelo al piano  $xy$  nei punti che soddisfano la (2.2.1).

Il fatto che lo spazio tangente ad  $M$  assuma inclinazioni diverse per tornare parallelo a  $xy$  (e quindi a  $T_{p_1}M$ ) indica che  $M$  ammette cambi di curvatura, infatti se ipotizziamo che allontanandoci da  $p_1$  lungo  $\varphi_1$ , e rispettivamente da  $p_0$  lungo  $\varphi_0$ , la curvatura di  $M$  fosse ovunque positiva (o negativa), lo spazio tangente non potrebbe tornare parallelo al piano  $xy$ , perché il suo andamento sarebbe monotono crescente (o decrescente), quindi su  $M$  la curvatura  $K_M$  non può mantenere costante il segno.

**TEOREMA 2** “Sia  $(M, g)$  una 2-varietà Riemanniana in  $\mathbb{R}^3$  completa e connessa con curvatura totale  $(K_{tot})$  non negativa e sia  $p_1$  un punto di essa con  $T_{p_1}M$  spazio tangente per  $p_1$ .”

Supponiamo che per ogni  $p \in M$  e per ogni  $(v_1, v_2)$ , base in  $T_pM$ , si abbia  $N_{v_1}$  ed  $N_{v_2}$  non nulli, allora  $M$  ammette punti coniugati”.

*Dimostrazione*

Ipotizziamo per assurdo che in  $M$  le geodetiche non ammettano punti coniugati (qui una varietà Riemanniana è detta senza punti coniugati se la geodetica non contiene un paio di punti reciprocamente coniugati).

Allora per il Teorema 2 ci aspettiamo che  $K_{tot}$  sia negativa oppure  $k(t) \equiv 0$  (varietà piatta).

La condizione iniziale,  $K_{tot}$  non negativa, implica quindi la sola possibilità che  $M$  sia piatta.

Sappiamo che l'operatore di Weingarten e' dato da:

$$(2.2.3) \quad \mathcal{W}_{p_1}(v) = -\frac{\partial N_M}{\partial t}(u(t), v(t))|_{p_1}$$

e che:

$$(2.2.4) \quad \begin{cases} \mathcal{W}(P_u) = -N_u \\ \mathcal{W}(P_v) = -N_v \end{cases}$$

con  $(N_u, N_v)$  le derivate parziali di  $\overrightarrow{N_M}$  e  $(P_u, P_v)$  una base di  $T_pM$ .

Essendo che:

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} -N_u = a_{11}P_u + a_{12}P_v \\ -N_v = a_{21}P_u + a_{22}P_v \end{cases}$$

e che la curvatura Gaussiana e' data dal determinante della matrice:

$$(2.2.6) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

proviamo a verificare che qualora il  $\det A$  è ovunque nullo (e quindi curvatura zero ovunque) allora  $N_u$ , oppure  $N_v$ , devono essere nulli.

il  $\det A$  si annulla nel seguente caso:

- $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$

In cui si avrebbe che  $N_u = \lambda N_v$ , oppure  $N_v = \lambda N_u$ , con  $\lambda$  una costante.

Essendo  $P_u$  e  $P_v$  linearmente indipendenti, si avrà necessariamente  $N_v = 0$ , oppure  $N_u = 0$ , il che contraddice l'ipotesi. Dunque  $M$  non è piatta che conclude la dimostrazione.

Si noti anche che essendo  $f = P_{uv}N = P_{vu}N = -P_vN_u = -P_uN_v = -P_v\lambda N_v$ , questo implica  $f = 0$ .

**Proposizione 2.2.1** “Sia  $(M, g)$  una 2-varietà Riemanniana in  $\mathbb{R}^3$  completa e connessa di rotazione e sia  $p_1$  un punto di essa con  $T_{p_1}M$  spazio tangente per  $p_1$ .”

Supponiamo che per ogni  $\mathbf{p} \in M$  e per ogni  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ , base in  $T_{\mathbf{p}}M$ , si abbia  $N_{\mathbf{v}_1}$  ed  $N_{\mathbf{v}_2}$  non nulli con i rispettivi prodotti scalari,  $\mathbf{v}_1 N_{\mathbf{v}_1}$  ed  $\mathbf{v}_2 N_{\mathbf{v}_2}$ , che non abbiano segni opposti, allora  $M$  ammette punti coniugati”.

*Dimostrazione*

Si consideri la superficie di rotazione  $M$  la cui parametrizzazione sia data da:

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} x = \alpha(u) \cos v \\ y = \alpha(u) \sin v \\ z = \beta(u) \end{cases}$$

in cui i meridiani (*mrd*) ed i paralleli (*prl*) sono rispettivamente le linee coordinate  $v = \text{costante}$  e  $u = \text{costante}$ .

Dato che meridiani e paralleli sono ortogonali, segue  $F = 0$ .

Sia  $\pi$  un piano definito da  $v = v_0$  contenente l'asse  $z$  e sia  $mrd = \pi \cap M$  il meridiano corrispondente.

Se  $\mathbf{p}$  è un punto di  $mrd$ , il vettore normale  $N(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$  a  $M$  in  $\mathbf{p}$  è contenuto in  $\pi$  (infatti  $P_v$  vettore tangente al parallelo per  $\mathbf{p}$ , è ortogonale a  $\pi$ ;  $P_u$ , vettore tangente in  $\mathbf{p}$  al meridiano  $mrd$  sta su  $\pi$ , quindi  $N = P_u \wedge P_v$  sta pure su  $\pi$ ). Pertanto anche la derivata parziale  $N_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$  sta su  $\pi$ .

Da questo si ha  $f = -P_v N_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = 0$ .

Se  $F = f = 0$  si ha

$$(2.2.8) \quad W(P_u) = \frac{e}{E} P_u \quad \text{e} \quad W(P_v) = \frac{g}{G} P_v$$

Da cui

$$(2.2.9) \quad k_1 = \frac{e}{E} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{g}{G}$$

Essendo rispettivamente:  $e = -P_u N_u$ ,  $E = P_u P_u$ ,  $g = -P_v N_v$  e  $G = P_v P_v$ , si conclude la dimostrazione.

## Bibliografia

M.do CARMO - Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992

M.NACINOVICH - "Lezioni sulla Teoria delle Connessioni e sulla Geometria Riemanniana", 2013

W.BALLMANN, M.BRIN and K.BURNS - "On Surface with no conjugate points" J. Differential Geometry 25, 1987 (249-273)

S.MENDONÇA and D.ZHOU - "Geodesics without Conjugate Points and Curvatures at Infinity" An. Acad. Bras. Ci., 2000 72 (2)



## 227. Formule di Molodensky per la trasformazione di datum geodetici

Michele T. Mazzucato

*He is probably the only geodesist who would have deserved a Nobel prize*

Helmut Moritz in

*M. S. Molodensky in Memoriam (2000)*

Il datum geodetico è un sistema di riferimento che permette di esprimere in termini numerici la posizione di punti della superficie fisica della Terra o prossimi ad essa. Per le applicazioni geo-topografiche si impiegano sistemi di riferimento non inerziali solidali con la Terra in cui le coordinate dei punti della superficie terrestre sono, in pratica, invariabili nel tempo.

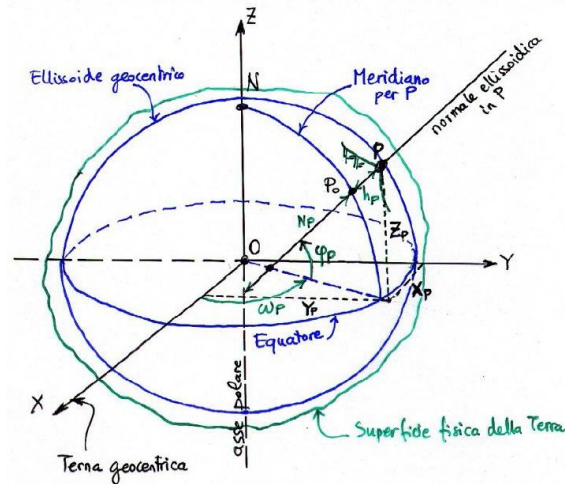
Nella geodesia classica veniva utilizzato un *datum* bidimensionale per la planimetria (*horizontal datum*), basato da un punto di emanazione (vertice trigonometrico fondamentale) e una rete geodetica a cui è associato un modello di ellissoide di riferimento e un datum per l'altimetria (*vertical datum*), basato da un punto a quota zero sul livello medio del mare in un assegnato periodo temporale (caposaldo fondamentale) e una rete di livellazione geometrica di alta precisione a cui è associato un modello di geoide. Per l'Italia continentale il caposaldo fondamentale viene riferito al mareografo di Genova (1942), quello di Catania (1965) per la Sicilia e quello di Cagliari (1956) per la Sardegna.

L'ellissoide di riferimento viene orientato localmente in un particolare punto (punto di emanazione) nel quale vengono imposte le seguenti condizioni geometriche:

- la normale all'ellissoide coincida con la verticale al geoide;
- la direzione del meridiano ellissoidico coincida con la direzione del meridiano astronomico,
- la quota ellissoidica coincida con la quota geoidica.

Pertanto, l'ellissoide orientato localmente, essendo nulle (o convenzionalmente note) sia la deviazione della verticale sia l'ondulazione geoidica, risulta tangente al geoide nel punto di emanazione e, ai fini della planimetria, approssima bene la superficie del geoide nel suo intorno nel quale la deviazione della verticale può essere trascurata per i suoi piccoli valori.

Nella moderna geodesia un datum geodetico globale (tridimensionale planoaltimetrico) è basato su di una terna cartesiana geocentrica ortogonale destrorsa dello spazio X,Y,Z avente origine O nel centro di massa della Terra e solidale ad essa (Earth Centered Earth Fixed ECEF) con l'asse Z coincidente con l'asse polare (asse di rotazione medio della Terra) e orientato verso il punto medio del polo nord, l'asse X (giacente sul piano equatoriale) orientato verso il punto d'intersezione del piano XZ del meridiano fondamentale (Greenwich) con il piano equatoriale medio XY e l'asse Y (giacente sul piano equatoriale) orientato in modo da completare una terna destrorsa a cui viene associato un ellissoide di rotazione oblatto biassiale geocentrico ed equipotenziale (ellissoide di riferimento) avente l'asse Z come asse di simmetria e medesimo geocentro. Il datum geodetico globale viene utilizzato tridimensionalmente mediante coordinate cartesiane geocentriche (X, Y, Z) o coordinate geografiche ellissoidiche associate alla quota ellissoidica ( $\varphi, \lambda, h$ ).



Terna, coordinate ed ellissoide geocentrici [da Racidioni & Stoppini].

Nei sistemi globali convenzionali, come il World Geodetical System WGS, la determinazione della posizione dei punti sulla Terra (posizionamento) avviene mediante l'utilizzo di sistemi satellitari denominati Global Navigation Satellite System GNSS fra i quali abbiamo il NAVigation Satellite Timing And Ranging Global Positioning System NAVSTAR GPS (statunitense, 1978), il GLOBal NAVigation Satellite System (GLOBalnaya NAVigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) GLONASS (russo, 1982) e il GALILEO (europeo, 2011).

Il sistema di riferimento geodetico globale WGS, definito dall'allora Defense Mapping Agency DMA statunitense, è basato su considerazioni geometrico-dinamiche relative al globo terrestre e in particolare sull'assunzione della teoria dell'ellissoide geocentrico equipotenziale esposta, per la prima volta, da Paolo Pizzetti (Parma, 1860 – Pisa, 1918) nel 1894 ed ulteriormente elaborata da Carlo Somigliana (Como, 1860 – Casanova Lanza CO, 1955) nel 1929. L'ellissoide viene completamente definito dalle seguenti quattro fondamentali costanti convenzionali, denominate *elementi di Stokes* dal nome del geodeta George Gabriel Stokes (Skreen, Sligo, 1819 - Cambridge, Cleveland 1903) e dalle quali possono essere derivati tutti i restanti parametri, sia fisici sia geometrici, del globo terrestre:

	denominazione	valore	note
<b>a</b>	raggio equatoriale	$6\,378\,137 \pm 2\text{ m}$	
<b>GM</b>	costante gravitazionale geocentrica	$(3\,986\,005 \pm 0.6) \cdot 10^8\text{ m}^3/\text{s}^2$	M è la massa della Terra inclusa l'atmosfera e G la costante newtoniana di attrazione universale
<b>C<sub>20</sub></b>	coefficiente gravitazionale zonale di secondo grado normalizzato o coefficiente della prima armonica zonale	$(-484.16685 \pm 0.00130) \cdot 10^{-6}$	non tiene conto degli effetti dell'attrazione lunisolare
<b><math>\omega_T</math></b>	velocità angolare terrestre	$(7\,292\,155 \pm 0.1500) \cdot 10^{-11}\text{ rad/s}$	

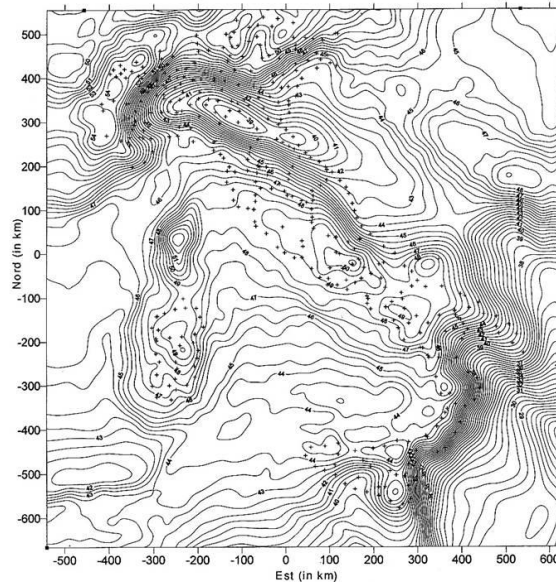
Il coefficiente  $C_{20}$ , strettamente legato a quello dello schiacciamento da un teorema del francese Alexis Claude Clairaut (Parigi, 1713-1765) esposto nell'opera *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique* (1743), si può ricavare dal corrispondente parametro  $J_2$ , denominato fattore di forma dinamico di valore  $(1082.63 \pm 0.3) \cdot 10^{-6}$ , utilizzato per l'ellissoide di riferimento associato al Geodetic Reference System 1980 GRS80 tramite la relazione  $-J_2/5$ .

tab. 1 – Elementi di Stokes

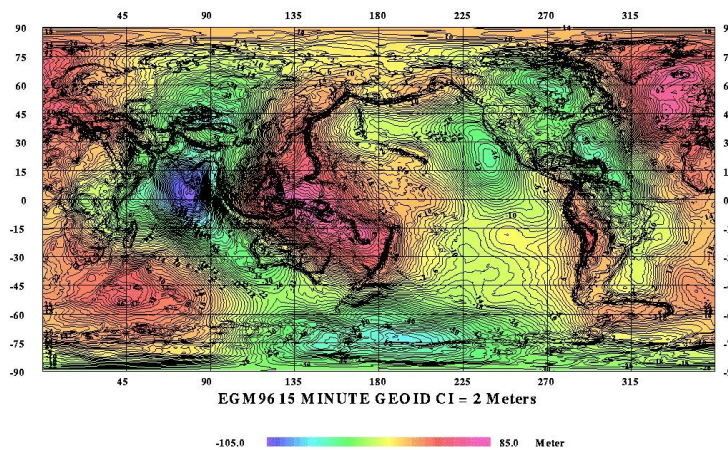
Al sistema globale WGS, che è un sistema terrestre convenzionale (*Conventional Terrestrial System CTS*), è associato un modello di Terra rotante, con velocità angolare media costante, intorno ad un asse passante per il polo medio convenzionale (*Conventional Terrestrial Pole CTP*) (modello Terra standard). In realtà, la Terra, si discosta dal modello standard principalmente per i moti che animano il suo asse di rotazione (nutazione e precessione) e la posizione del polo (polodia). Quest'ultimi, cambiando continuamente di posizione rendono inevitabile che tutte le misure possibili sulla superficie terrestre, siano automaticamente riferite ad una Terra istantanea (modello Terra istantanea). Pertanto, il WGS deve essere analiticamente riferibile a un sistema terrestre istantaneo (*Istantaneous Terrestrial System ITS*) al fine di poter tener conto degli scostamenti del modello standard dalla realtà fisica della Terra, e ad un sistema inerziale convenzionale (*Conventional Inertial System CIS*), definito dal sistema FK5 (Fundamental

Katalog 5 pubblicato dall'Astronomisches Recheninstitut di Heidelberg in Germania) per poter tener conto dei moti perturbativi terrestri.

Lo scostamento altimetrico (espresso in metri e di valore positivo o negativo) tra la quota geoidica od ortometrica  $H$  (sul geoido, che è una superficie di tipo fisico ricavata con misure gravimetriche) e la quota ellissoidica  $h$  (sull'ellissoide, che è una superficie di tipo geometrico) viene denominato ondulazione geoidica  $N$ , da cui la seguente equazione  $h = H + N$  che fornisce la quota sul livello del mare del punto. Per tale determinazione il datum globale WGS84 utilizza lo standard *Earth Geopotential Model* 1996 EGM96 che approssima il geoido nel suo complesso.



Modello italiano del geoido ITALGEO95 (equidistanza di 0.5 metri). Le ondulazioni geoidiche rispetto all'ellissoide WGS84 sono tutte comprese tra i +37 e i +54 metri.



Il modello globale del geoido EGM96 è stato sviluppato da una collaborazione tra la National Imagery and Mapping Agency NIMA, il Goddard Space Flight Center della NASA e l'Ohio State University. Le ondulazioni geoidiche variano da + 75 metri a - 105 metri rispetto all'ellissoide WGS84.



datum	tipo	ellissoide	orientamento (punto di emanazione)	meridiano fondamentale	rete associata (realizzazioni o <i>frame</i> )
Roma 40	locale	IRE 1924 (Hayford)*	Roma - Monte Mario 41° 55' 25.51" N 12° 27' 08.40" E di Gw azimut Monte Soratte 6° 35' 00.88"	Monte Mario	rete geodetica IGM (triangolazione terrestre, 1888-1995)
ED 50	locale	IRE 1924 (Hayford)	Potsdam - Helmertturm (medio europeo) 52° 22' 51.446" N 13° 03' 58.741" E di Gw	Greenwich**	sottoinsieme delle reti geodetiche nazionali europee (triangolazione terrestre, 1950)
WGS 84	globale	WGS 84	geocentrico	Greenwich	satellitare (GPS – USA, 1984) rete EPN (GNSS – Europa, 1989) rete IGM95 (GPS – Italia, 1995))
ITRS	globale	WGS 84	geocentrico	Greenwich	realizzazioni ITRFxx*** dal 1992 (vari ricevitori: GNSS, VLBI, LLR, SLR e DORIS) realizzazioni IGSSxx dal 1992 (solo ricevitori GNSS) rete geodetica dinamica
ETRS	globale	WGS 84	geocentrico	Greenwich	realizzazioni ETRFxx dal 1989 (ricevitori GNSS della rete EPN) rete geodetica dinamica

**Acronimi nella tabella:** DORIS Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite, ED European Datum, EPN EUREF (European Reference Organisation for Quality Assured Breast Screening and Diagnostic Services che la realizza e mantiene) Permanent Network, ETRFxx European Terrestrial Reference Frame (xx indica l'epoca di realizzazione), ETRS European Terrestrial Reference System, IGM Istituto Geografico Militare, IGS International GNSS Service (sottoinsieme della rete ITRF), IRE International Reference Ellipsoid, ITRFxx International Terrestrial Reference Frame (xx indica l'epoca di realizzazione), ITRS International Terrestrial Reference System (realizzato e mantenuto dall'International Earth Rotation Service IERS un'istituzione creata nel 1988), LLR Lunar Laser Ranging, SLR Satellite Laser Ranging, VLBI Very Long Baseline Interferometry, WGS World Geodetical System

\* Nell'Assemblea Generale dell'allora International Union for Geodesy IUG, tenutasi a Madrid (Spagna) nel 1924, venne adottato quale IRE l'ellissoide calcolato dal geodeta statunitense John Fillmore Hayford (Rouse Point, New York 1868 – Evanston, Illinois 1925) che dedusse dagli studi e ricerche sull'isostasia ed espose nell'opera *The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States* (1909).

\*\* Nella Conferenza Internazionale di Cartografia tenutasi a Washington D.C. (USA) nel 1884 venne scelto, quale meridiano di riferimento internazionale origine delle longitudini, quello passante per l'osservatorio di Greenwich a Londra ( $\varphi = 51^\circ 28' 38.2''$  N e  $\lambda = 0^\circ$ ).

\*\*\* Il sistema di riferimento geodetico ITRF viene utilizzato per usi prettamente scientifici (geodetici e geofisici) in cui è richiesta un'accuratezza millimetrica nelle coordinate dei punti.

**tab. 2 -** Caratteristiche di alcuni datum geodetici

datum	coordinate cartografiche	rappresentazione	zone per l'Italia
Roma 40	Gauss-Boaga*	Gauss cilindro secante	Fuso 1 (Ovest), Fuso 2 (Est)**
ED 50	UTM-ED50***	Gauss cilindro secante	Fuso 32, Fuso 33, Fuso 34 (Nord)
WGS 84	UTM-WGS84	Gauss cilindro secante	Fuso 32, Fuso 33, Fuso 34 (Nord)
ETRS 89	UTM-ETRS89	Gauss cilindro secante	Fuso 32, Fuso 33, Fuso 34 (Nord)

\* Proiezione analitica conforme ideata da Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777 – Gottinga, 1855) nel 1821 a cui si associa, dal 1948, il nome del geodeta Giovanni Boaga (Trieste, 1902 – Tripoli, 1961) che ne elaborò le formule originarie per adattare alle necessità dell'area italiana.

\*\* L'ampiezza di ciascun fuso è di 6° con longitudine del meridiano centrale da Roma Monte Mario di -3° 27' 08.400" per il Fuso Ovest e di +2° 32' 51.600" per il Fuso Est.

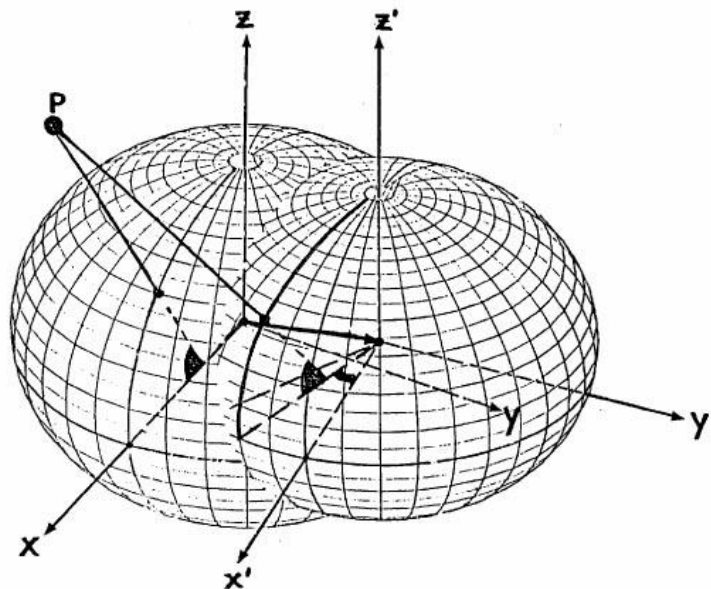
\*\*\* L'Universal Transverse Mercator UTM, viene così chiamata negli USA in onore del cartografo olandese Gerhard Kremer (Mercatore) (Rupelmonde, Fiandra 1512 – Duisburg, 1594) per il suo fondamentale studio delle proiezioni cilindriche (1569).

tab. 3 - Sistemi cartografici associati ai vari datum

Quando si forniscono le coordinate di un punto bisogna sempre specificare il *datum* a cui sono riferite in quanto il medesimo punto riferito a sistemi di riferimento geodetico diversi ha coordinate completamente diverse. Mentre, nel medesimo *datum*, un punto ha coordinate che possono essere espresse in vari tipi.

datum	latitudine $\phi$	longitudine $\lambda$	coordinata X	coordinata Y	coordinata Z
Roma 40	41° 55' 25.510" N	12° 27' 08.400" E di Gw	4641070.779 m	1024850.506 m	4239379.331 m
ED 50	41° 55' 31.487" N	12° 27' 10.933" E di Gw	4640937.874 m	1024880.929 m	4239516.541 m
WGS 84	41° 55' 27.851" N	12° 27' 07.658" E di Gw	4640815.315 m	1024776.585 m	4239360.133 m

tab. 4 – Coordinate geografiche e geocentriche del vertice Monte Mario nei vari datum

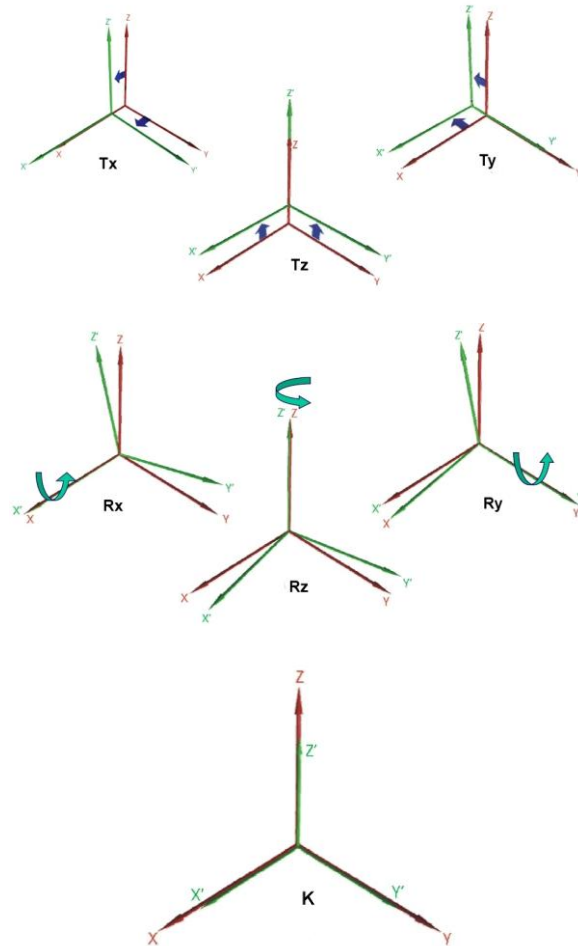


Posizionamento di un medesimo punto in due datum geodetici diversi [da Gerhard Beutler].

La trasformazione di *datum*, in pratica sempre approssimata, viene eseguita operando sulle coordinate cartesiane ellissocentriche X,Y, Z nei due sistemi tenendo conto dei tre parametri di traslazione  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$  lungo gli assi, dei tre parametri di rotazione  $R_x$ ,  $R_y$  e  $R_z$  attorno agli assi e del parametro fattore di scala  $K$ . Il procedimento viene denominato *trasformazione a sette parametri* o *trasformazione di Helmert* (*similarity transformation*) dal nome del geodeta tedesco Friedrich Robert Helmert (Freiberg, Sassonia 1843 – Potsdam, 1917) considerato tra i fondatori della moderna geodesia e autore del famoso trattato *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, mit Untersuchungen ueber die mathematische*

*Erdgestalt auf Grund der Beobachtungen* (2 voll. 1880-1884). La trasformazione a sette parametri, che è una rototraslazione con variazione di scala, viene detta anche conforme in quanto mantiene invariati gli angoli e conseguentemente la forma delle figure costituenti il rilievo originario.

I sette parametri vengono stimati con un procedimento a minimi quadrati (metodo delle osservazioni indirette, Gauss-Markov) conoscendo le coordinate, in entrambi i *datum*, di un certo numero (non inferiore a tre) di punti denominati punti doppi, scelti con una distribuzione uniforme nell'area sulla quale deve essere effettuata la trasformazione.



Visualizzazione dei sette parametri di traslazione  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$ , del fattore di scala  $K$  e di rotazione  $R_x$ ,  $R_y$  e  $R_z$  necessari per la trasformazione tra due datum.

La relazione fra i due sistemi, in forma matriciale, si presenta nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1+K) \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_y & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

che sviluppata fornisce

$$\begin{aligned} X_2 &= T_x + X_1 + Y_1 R_z - Z_1 R_y + X_1 K + Y_1 R_z K - Z_1 R_y K \\ Y_2 &= T_y - X_1 R_z + Y_1 + Z_1 R_x - X_1 R_z K + Y_1 K - Z_1 R_x K \\ Z_2 &= T_z + X_1 R_y - Y_1 R_x + Z_1 + X_1 R_y K - Y_1 R_x K - Z_1 K \end{aligned}$$



nella quale X Y Z sono le coordinate cartesiane geocentriche del punto nei due sistemi individuati dal numero in pedice espresse in metri come i valori delle traslazioni  $T_i$ , mentre, i valori delle rotazioni  $R_i$  sono espressi in secondi d'arco (in radianti nelle formule). Il fattore di scala K viene espresso in ppm (parti per milione: 1 ppm corrisponde a una variazione di 1 millimetro al chilometro).

Una variante della trasformazione di Helmert sono le formule di Molodensky che si basano sempre su di una rototraslazione a sette parametri, in forma linearizzata e operando sulle coordinate geografiche, qui di seguito riportate:

$$D\varphi = \frac{\sin \lambda}{(N+h)\cos\varphi} T_x - \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi} T_y - \frac{(1-f)^2 N+h}{N+h} \operatorname{tg}\varphi(\cos\lambda R_x + \sin\lambda R_y) + R_z$$

$$D\lambda = \frac{\sin\varphi \cos\lambda}{\rho+h} T_x + \frac{\sin\varphi \sin\lambda}{\rho+h} T_y - \frac{\cos\varphi}{\rho+h} + \frac{f^2}{N+h} (\sin\lambda R_x - \cos\lambda R_y) +$$

$$+ \frac{[1-(1-f)^2]N}{\rho+h} \cos\varphi \sin\varphi + \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho+h} \{ [1-(1-f)^2]N \frac{Da}{a} + [\rho + (1-f)^2 N] \frac{Df}{1-f} \}$$

$$Dh = \cos\varphi \cos\lambda T_x - \cos\varphi \sin\lambda T_y - \sin\varphi T_z +$$

$$+ [1-(1-f)^2]N \sin\varphi \cos\varphi (\sin\lambda R_x - \cos\lambda R_y) +$$

$$- \frac{a^2}{N+h} K - \frac{a}{N} - Da + (1-f)^2 N \sin^2 \varphi \frac{Df}{1-f}$$

Il geodeta russo Mikhail Sergeevich Molodensky (Epiphany, 1909 – Mosca, 1991) si laureò a Mosca nel 1931, chiamato da Feodosij Nikolaevic Krasovskiy (Galich, 1878 – Mosca, 1948) padre della rete astrogeodetica sovietica, fece parte dal 1933 al 1960 dello staff del Central Research Institute of Geodesy, Aerophotogrammetry and Cartography (TsNIIIGAiK) e, dal 1946, fu direttore della sezione gravimetria dell'Istituto di Fisica Terrestre dell'Accademia delle Scienze a Mosca. Premio Stalin nel 1946 (per la dissertazione di dottorato *Basic problems of geodetic gravimetry*) e nel 1951 (per la realizzazione del primo gravimetro sovietico) e premio Lenin nel 1963 (per gli studi e ricerche sintetizzate nell'opera *Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth*). Elaborò le seguenti formule, note come *trasformazione standard di Molodensky*, per la trasformazione tra i vari datum geodetici la cui validità esclude le calotte polari a partire da una latitudine uguale o maggiore a 89° e i valori  $D\varphi''$ ,  $D\lambda''$  (espressi in secondi d'arco) e Dh (espresso in metri) si sommano algebricamente a quelli iniziali  $\varphi$ ,  $\lambda$  e h del punto in esame:

$$D\varphi'' = \frac{-T_x \sin\varphi \cos\lambda - T_y \sin\varphi \sin\lambda + T_z \cos\varphi + Da \frac{Ne^2 \sin\varphi \cos\varphi}{a} + Df (\rho \frac{a}{b} + N \frac{b}{a}) \sin\varphi \cos\varphi}{(\rho+h) \sin 1''}$$

$$D\lambda'' = \frac{-T_x \sin\lambda + T_y \cos\lambda}{(N+h) \cos\varphi \sin 1''}$$

$$Dh = T_x \cos\varphi \cos\lambda + T_y \cos\varphi \sin\lambda + T_z \sin\varphi - Da \frac{a}{N} + Df \frac{b}{a} N \sin^2 \varphi$$

dove

$\varphi$  = latitudine  
 $\lambda$  = longitudine  
 $h$  = altezza ellissoidica  
 $D\varphi, D\lambda$  e  $Dh$  = correzioni  
 $Da$  = differenza semiasse maggiore fra ellipsoidi  
 $Df$  = differenza schiacciamento fra ellipsoidi  
 $a$  = semiasse maggiore dell'ellissoide  
 $b$  = semiasse minore dell'ellissoide =  $a(1-e^2)^{0.5}$   
 $e^2$  = eccentricità prima dell'ellissoide =  $(a^2-b^2)/a^2 = 1-(1-f)^2 = 2f-f^2$   
 $N$  = raggio di curvatura in primo verticale =  $a/(1-e^2\sin^2\varphi)^{0.5}$   
 $\rho$  = raggio di curvatura nel meridiano =  $a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2\varphi)^{1.5}$   
 $f$  = schiacciamento geometrico =  $(a-b)/a$   
 $\sin 1'' = 206264.81''$

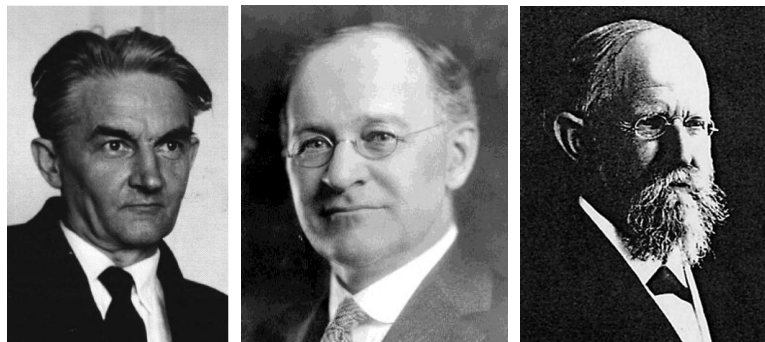
Per le formule di conversione, da coordinate geografiche ellissoidiche ( $\varphi, \lambda, h$ ) a coordinate cartesiane geocentriche ( $X, Y, Z$ ), si utilizzano:  $X=(N+h)\cos\varphi \cdot \cos\lambda$   $Y=(N+h)\cos\varphi \cdot \sin\lambda$   $Z=[N(1-e^2)+h]\sin\varphi$

ellissoide	a	1/f	Da	Df 10 <sup>4</sup>
			WGSS4-ellissoide	WGSS4-ellissoide
Airy (1830)	6 377 563.396 m	299.3249646	573.604 m	0.11960023
Bessel (1841)	6 377 397.155	299.1528128	739.845	0.10037483
Clarke (1880)	6 378 249.145	293.465	-112.145	-0.54750714
Helmert (1906)	6 378 200	298.3	-63	0.00480795
Hayford (1909)	6 378 388	297	-251	-0.14192702
Krasovsky (1940)	6 378 245	298.3	-108	0.00480795
WGS (1972)	6 378 135	298.26	2	0.00031211
GRS (1967)*	6 378 160	298.247167427	-23	-0.00113048
GRS (1980)**	6 378 137	298.257222101	=	-0.00000016
WGS (1984)	6 378 137	298.257223563	=	=

\* Il Geodetic Reference System 1967 GRS67 venne adottato in occasione della XIV Assemblea Generale dell'International Union of Geodesy and Geophysics IUGG tenutasi a Zurigo-Lucerna (Svizzera) nel 1967.

\*\* Il GRS80 venne adottato in occasione della XVII Assemblea Generale dell'IUGG tenutasi a Canberra (Australia) nel 1979.

tab. 5 - Parametri geometrici di alcuni ellipsoidi di riferimento



Da sinistra i geodeti Mikhail Sergeevich Molodensky (1909-1991), John Fillmore Hayford (1868-1925) e Friedrich Robert Helmert (1843-1917).

Infine, si riportano le formule tratte da (Pierozzi, 1989) adottate dall'IGM per il calcolo dei parametri associati a ciascun vertice della rete IGM95 che consentono di determinare le correzioni da apportare alle rispettive coordinate del punto nel sistema globale (WGS84) per passare al sistema locale (Roma 40):

$$D\varphi = \frac{\sin \varphi \cos \lambda}{\rho+h} T_x + \frac{\sin \varphi \sin \lambda}{\rho+h} T_y - \frac{\cos \varphi}{\rho+h} T_z +$$

$$+ \frac{\frac{a^2}{N+h}}{\rho+h} \sin \lambda R_x + \frac{\frac{a^2}{N+h}}{\rho+h} \cos \lambda R_y + \frac{e^2 N}{\rho+h} \cos \varphi \sin \varphi (K + \frac{Da}{a}) +$$

$$+ \frac{\rho+(1-e^2)N}{\rho+h} \cos \varphi \sin \varphi \frac{De^2}{2(1-e^2)}$$

$$D\lambda = \frac{\sin \lambda}{(N+h)\cos \varphi} T_x - \frac{\cos \lambda}{(N+h)\cos \varphi} T_y - \frac{(1-e^2)N+h}{N+h} \operatorname{tg} \varphi \cos \lambda R_x + \frac{(1-e^2)N+h}{N+h} \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda R_y + R_z$$

$$Dh = -\cos \varphi \cos \lambda R_x - \cos \varphi \sin \lambda R_y - \sin \varphi R_z + e^2 N \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda R_x -$$

$$- e^2 N \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda R_y - (\frac{a^2}{N+h})K - \frac{a}{N} Da + (1-e^2)N \sin^2 \varphi \frac{De^2}{2(1-e^2)}$$

dove

$\varphi \lambda h$  coordinate del punto nel sistema globale

$a e^2$  parametri dell'ellissoide globale

$\rho N$  raggi di curvatura dell'ellissoide calcolati nel punto

$Da De^2$  differenze fra i parametri dei due ellissoidi (locale-globale)

da cui

$$\varphi_{\text{locale}} = \varphi_{\text{globale}} + D\varphi'' \quad \lambda_{\text{locale}} = \lambda_{\text{globale}} + D\lambda'' \quad h_{\text{locale}} = h_{\text{globale}} + Dh$$

D-4

World Geodetic System — 1984 (WGS-84) Manual

Table D-1. Datum transformation parameters

Reference datum	Translations (m)			Rotations (")			Scale $\mu$ (ppm)	Comments
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_z$		
WGS-84	0.0	0.0	4.5	0.0	0.0	-0.554	0.22	
WGS-72	-87.0	-98.0	-121.0	.	.	.	.	
ED 50	-96.0	-98.0	-119.0	.	.	.	.	
ED 79	-82.5	-91.7	-117.7	0.1338	-0.0625	-0.047	0.045	
Austria NS	595.6	87.3	473.3	4.7994	0.0671	5.7850	2.555	Via ED 87
Belgium 50	-55.0	49.0	-158.0	.	.	.	.	
Berne 1873	649.0	9.0	376.0	.	.	.	.	
CH-1903	660.1	13.1	369.2	0.8048	0.5777	0.9522	5.660	
Danish GI 1934	662.0	18.0	734.0	.	.	.	.	
Nouvelle Triangulation de France	-168.0	-60.0	320.0	.	.	.	.	Greenwich Zero Meridian
Nouvelle Triangulation de France	-168.0	-60.0	320.0	.	.	8414.03	.	Paris Zero Meridian
Potsdam	587.0	16.0	393.0	.	.	.	.	Via ED 50
GGRS 87	199.6	-75.1	-246.3	0.0202	0.0034	0.0135	-0.015	
55	-73.0	46.0	-86.0	.	.	.	.	
Ireland 65	506.0	-122.0	611.0	.	.	.	.	
Italy 1940	-133.0	-50.0	97.0	.	.	44828.40	.	Via ED 50 Rome Zero Meridian
Nouvelle Triangulation de Luxembourg	-262.0	75.0	25.0	.	.	.	.	Via ED 50
Netherlands 1921	719.0	47.0	640.0	.	.	.	.	Via ED 50
OSGB 36	375.0	-111.0	431.0	.	.	.	.	
Portugal DLX	504.1	-220.9	563.0	.	.	-0.554	0.220	Via WGS-72
Portugal 1973	-227.0	97.5	35.4	.	.	-0.554	0.220	Via WGS-72
RNB 72	-104.0	80.0	-75.0	.	.	.	.	Via ED 50
RT 90	424.3	-80.5	613.1	4.3965	-1.9866	5.1846	0.0	
NAD 27	-8.0	160.0	176.0	.	.	.	.	Mean solution
NAD 83	0.0	0.0	0.0	.	.	.	.	

Note 1.— 1" in the rotation angle is approximately equal to 31 m on the earth's surface.

$$1'' = 6\,400\,000 \text{ m} \times 3.141593 / (180 \times 3600'') = 31.03 \text{ m}$$

$$[1 \text{ NM} = 1\,852 \text{ m (so } 1'' = 30.48 \text{ m)}]$$

Note 2.— 1 ppm = 10<sup>-6</sup>, i.e. 1 ppm is equivalent to approximately 6.4 m on the earth's surface.

Parametri di trasformazione datum [da DOC 9674/AN 946 - WGS84 Manual - ICAO 2a ed. 2002]

## Bibliografia

Mazzucato, M.T., *Globo terrestre*, BIROMA Galliera V.ta, Padova 1996

Mazzucato, M.T., *La Figura della Terra*, Maggioli Editore, Santarcangelo di Romagna RN 2008

Mazzucato, M.T., *Coordinate geografiche e cartesiane. Un metodo di trasformazione*, Matematicamente.it Magazine, n. 21/2014, pp. 28-30

Moritz, H. & Yurkina, M. I. (a cura), *M. S. Molodensky in Memoriam*, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen, Universität Graz, Folge 88, Graz, 2000

Radicioni, F. & Stoppini, A., *Datum e coordinate nella geodesia*, Università di Perugia 2009

Pierozzi, M., *Alcune considerazioni sulla trasformazione dal sistema WGS84 ad un sistema geodetico locale*, Boll. di Geodesia e Scienze Affini n. 1/1989 pp. 45-55

## Sitografia

International Earth Rotation and Reference Systems Service IERS [www.iers.org](http://www.iers.org)

Istituto Geografico Militare [www.igmi.org](http://www.igmi.org)

Rete Mareografica Nazionale dell'ISPRA [www.mareografico.it](http://www.mareografico.it)

WGS84 Manual - NIMA Technical Report TR8350.2 <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>

EGM96 et al. [www.ngs.noaa.gov/GEOID/](http://www.ngs.noaa.gov/GEOID/)

Elenco parametri di Helmert da *locale* a *WGS84* [http://earth-info.nga.mil/GandG/coordsys/datums/NATO\\_DT.pdf](http://earth-info.nga.mil/GandG/coordsys/datums/NATO_DT.pdf)

Software CARTLAB1 [www.anisn.it/geologia2000/Prg/CARTLAB1.zip](http://www.anisn.it/geologia2000/Prg/CARTLAB1.zip)

# 228. Quanti numeri primi in 100 interi consecutivi?

Marco Ripà  
 marcokrt1984@yahoo.it  
 Gabriele Tessaro  
 gabriele.tessaro@email.it  
 Andrea Forti  
 fortiandrea@yahoo.com

## Abstract

In questo articolo si studieranno per quali  $m \in \mathbb{N}_0$  esiste un numero finito di  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  distinti tali che l'intervallo chiuso  $[k, k+99]$  contiene  $m$  primi. Si procederà altresì a provare che tali  $k$  non sono finiti per alcuni particolari  $m$  e che non ne esistono per  $m > 26$ . In conclusione si farà il punto sullo stato attuale della ricerca in questo settore, avanzando altresì alcune congetture concernenti il tema trattato.

*Keywords:* numeri primi, distribuzione, ipotesi di Schinzel, Terence Tao.

*MSC2010:* Primary 11N05; Secondary 11A41, 11N13.

## 1. Introduzione

Com'è noto, non esiste tuttora una dimostrazione che provi l'esistenza di infinite coppie di numeri primi che differiscono tra loro per due sole unità (ad esempio 17 e 19). Ciò è l'oggetto di una delle più famose congetture della teoria dei numeri [11] ed è probabilmente vero che ci sono anche un'infinità di terzine e di quartine di primi (come 11, 13, 17, 19).

Il problema di cui ci occuperemo nell'articolo è quello di dimostrare che esiste solo un numero finito di insiemi di 100 naturali consecutivi tali che l'intervallo chiuso  $[k, k+99]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , contenga  $m \geq 24$  primi (per cui,  $m = \pi(k+99) - \pi(k-1)$ , in quanto  $\pi(k+99) - \pi(k-1)$  conta per definizione i primi nell'intervallo  $(k-1, k+99] = [k, k+99]$ ) [3]); in particolare, esistono 19 siffatti  $k$ .

Nello specifico si proverà che non esistono  $k$  per cui  $m > 26$ , che ce n'è solo uno per cui  $m = 26$ , 6 per  $m = 25$  e 10 per  $m = 24$ . Ci sono invece infinite  $k$ -uple per cui  $1 \leq m \leq 23$ .

## 2. Risultato principale: $m \geq 24$ se e solo se $2 \leq k \leq 17$

**Lemma 1:** Tutti e soli i  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  per cui  $m \geq 24$  sono strettamente minori di 18. In particolare,  $m = 26 \Leftrightarrow k = \{2\}$ ;  $m = 25 \Leftrightarrow k = \{1, 3, 4, 5, 10, 11\}$ ;  $m = 24 \Leftrightarrow k = \{6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$  e  $m > 26 \Leftrightarrow k \in \{\emptyset\}$ .

*Dimostrazione del Lemma 1:* Scrivendo in ordine incrementale i naturali divisibili per i primi  $\leq 17$ , si ottiene una sequenza periodica di periodo  $p_7\# = \prod_{i=1}^7 p_i = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17 = 510510$  [1]. Se un qualsiasi numero composto siffatto  $q \leq 510510$  appartiene a tale sequenza periodica, anche  $q + c \cdot 510510$  ne farà parte e viceversa,  $\forall c \in \mathbb{N}$ .

È sufficiente dunque verificare che gli unici valori di  $k \leq 510510$  tali che l'insieme chiuso  $[k, k+99]$  contenga 24 primi siano anche  $\leq 17$  (e che quelli per cui  $m = 25$  o  $m = 26$  siano  $\leq 13$  e  $\leq 11$ , rispettivamente), giacché in tutti i casi in questione i numeri  $2 + c \cdot 510510$ ,  $3 + c \cdot 510510$ , ...,  $17 + c \cdot 510510$  sono numeri primi (e quindi non composti) se e solo se  $c = 0$ , mentre saranno composti e divisibili per almeno un primo  $\leq 17$   $\forall c \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

Con l'aiuto di un semplice programma (cfr. Appendice), effettuiamo le verifiche del risultato di cui sopra e appuriamo che,  $\forall 18 \leq k \leq 510510, m \leq 23$ . In particolare,  $m < 27 \forall k \in \mathbb{N}, m=26 \Leftrightarrow k \in \{2\}; m=25 \Leftrightarrow k \in \{1,3,4,5,10,11\}; m=24 \Leftrightarrow k \in \{6,7,8,9,12,13,14,15,16,17\}$  ■

**Lemma 2:** Se  $m \leq 25$  per un numero finito di  $k$  distinti, tale numero sarà pari.

*Dimostrazione del Lemma 2:* La prova è immediata, poiché segue dalla constatazione che non esistono numeri primi pari  $> 2$ , quindi se  $m$  assume un certo valore ( $\leq 25$ ) per  $k=2 \cdot c+1$  (con  $c \in \mathbb{N}-\{0\}$ ), allora anche  $[k-1, k+98]$  conterrà  $m$  primi; viceversa, per  $k=2 \cdot c$ ,  $[k+1, k+99]$  conterrà  $m$  primi come  $[k, k+99]$ . Sarà pertanto sufficiente porre  $k' := k-1$  per  $k$  dispari e  $k' := k+1$  per  $k$  pari ■

**Lemma 3:** Se  $m \leq 25$  per  $[k, k+99]$ ,  $m$  non varia considerando il sottoinsieme proprio  $[k, k+98]$  se  $k$  è dispari o  $[k+1, k+99]$  se  $k$  è pari.

*Dimostrazione del Lemma 3:* È sufficiente considerare il risultato della dimostrazione del Lemma 2, posto che  $m \leq 25 \Leftrightarrow k \neq 2$ ; pertanto, essendo i primi restanti tutti dispari, basta constatare che in  $[k, k+99]$  uno dei valori degli estremi è sempre pari e dunque ininfluente ai fini del computo di  $m$  ■

**Lemma 4:** Per  $m=0$  ed  $m=1$  esistono infiniti  $k$ .

*Dimostrazione del Lemma 4:* Per  $m=0$  i valori di  $k$  non costituiscono un insieme finito, giacché è (ad esempio) sufficiente porre  $k := 2 + (101+n)!$ ,  $\forall$  con  $n \in \mathbb{N}_0$ , al fine di individuare un insieme illimitato di sequenze di almeno 100 numeri composti consecutivi; anche se la più piccola di esse si ha in realtà per  $k=370262$ .

Sia invece  $m=1$ ; fu provato dallo stesso Euclide, attorno al 300 a.C., che i primi sono infiniti [4] ed è evidente come basti partire da  $k := 2 + (101+n)!$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ , e procedere con incrementi unitari per incontrare il numero primo  $p_{n+1}$ , il quale ci garantirà dunque che  $m=1 \forall [p_{n+1}-99, p_{n+1}]$  ■

È stato congetturato (T. Tao, J. Maynard et al.) [8] (cfr. <http://math.mit.edu/~primegaps/>) che esistano infinite “ $k$ -uple”  $[k, k+100]$  per  $m=24$  (si veda in proposito anche la sequenza A008407 dell'OEIS [7]). Poiché il minimo gap replicabile infinite volte fra due primi non può che essere  $H(2)=2$ , ci sarebbero almeno  $m-1=23$  primi nell'intervallo chiuso  $[k, k+98]$  che, in virtù del Lemma 3, è per i nostri scopi del tutto equivalente a  $[k, k+99]$ . Giacché il Lemma 1 ci assicura che i  $k$  per cui  $m=24$  sono finiti, potremmo concludere che esistano infiniti valori di  $k$  ( $k$ -uple) per cui  $m=23$ , in maniera conforme a quanto seguirebbe dalla dimostrazione della veridicità dell'ipotesi di Schinzel [6-10].

**Congettura 1:** Esistono infinite  $k$ -uple per cui  $m \in [2, 23]$ .

La Congettura 1 è una versione debole di quelle viste in precedenza, in quanto è evidente che basterebbe dimostrare che esistono infiniti  $k$  per almeno uno degli  $m$  fra 2 e 23 (estremi compresi) per provare l'asserto [5]. Per quanto osservato, la veridicità della congettura dei primi gemelli [11] rappresenta un'altra condizione “sufficiente ma non necessaria” per dimostrare la Congettura 1 e tale celebre problema non è a sua volta che un caso particolare della congettura di Polignac [9]; ai nostri fini, basterebbe provarne la veridicità per uno solo dei “gap”  $\leq 98$  contemplati (2, 4, ..., 98).

### 3. Conclusioni

Da quanto visto nella Sezione 2, si è pertanto appurato come se le congetture implicanti che i  $k$  siano di numerosità finita solo a partire da  $m=24$  fossero verificate, risulterebbe subito che tale numero è strettamente positivo se e solo se  $24 \leq m \leq 26$ .

Queste considerazioni si collocano in un campo che sta stando rinnovato interesse dopo la formulazione del Teorema di Green-Tao [2] e da cui potrebbero nascere interessanti spunti di ricerca futuri nell'ambito del *Polymath8 Project* [8] sponsorizzato dallo stesso professor Tao, vincitore della medaglia Fields nel 2006 (cfr. <http://polymathprojects.org/>).



## 4. Appendice

Per completare la dimostrazione della non esistenza di  $k \in [18, 510510]$  per cui  $m \leq 24$  è sufficiente effettuare uno screening a tappeto di tutti gli intervalli  $[k, k+99]$ , vagliando ogni  $n \in [k, k+99]$  e stabilendo se sia o meno divisibile per (almeno) uno dei primi  $\leq 17$ .

Data la ridotta numerosità dei valori da analizzare, è inutile insistere in ottimizzazioni (che sarebbero indispensabili in presenza di intervalli più grandi); questo algoritmo semplificato verifica infatti 100 volte ciascun numero.

L'algoritmo più semplice, espresso in pseudocodice, è il seguente:

```

numCasesFound ← 0                                # registro il numero di k-uple

for k in {18..510510} do                        # verifico per ogni k nell'intervallo

    cnt ← 0                                       # registro quanti numeri non sono multipli
    for n in {0..99} do                          # nell'intervallo [k,k+99]
        found_divisor ← false                    #
        for p in {2,3,5,7,11,13,17} do          # verifico per i primi p≤17...
            if (n mod p) = 0 then                # ... se n è multiplo di p
                found_divisor ← true             # se sì, segno che esiste un divisore
            end if                                #
        end for p                                #
        if found_divisor = false then            # se non è stato trovato un divisore...
            cnt ← cnt + 1                         # ... allora è un elemento della k-upla
        end if                                    #
    end for n                                    #

    if cnt >= 24 then                            # se la k-upla ha almeno 24 elementi...
        print "case found for k=" + k            # ... allora è una k-upla interessante
        numCasesFound ← numCasesFound + 1       # memorizzo che ho trovato un caso
    end if                                        #

end for k                                       #

if numCasesFound = 0 then                       # segnalo se non trovo soluzioni
    printf "no solutions found"                  # (come effettivamente accade)
end if                                          #

```

## Ringraziamenti

Gli autori ringraziano i colleghi del gruppo *sPIqr Elite* per il contributo e l'interesse dimostrato.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Dubner, H., Factorial and primorial primes, *J. Recl. Math*, 19(1987), 197–203.
- [2] Green, B., Tao, T., The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Annals of Mathematics*, 167-1(2008), 481-547.
- [3] Languasco, A., Zaccagnini, A., *Intervalli fra numeri primi consecutivi*, Sito web Bocconi-Pristem, 11 Mar. 2014, [http://people.math.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/papers/lang\\_zac\\_IV.pdf](http://people.math.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/papers/lang_zac_IV.pdf)
- [4] Leonesi, S., Toffalori, C. (2006), Numeri e Crittografia, *Springer*, pag. 37.
- [5] Maynard, J., Small gaps between primes, *Annals of Mathematics*, 181-1(2015), 383-413.
- [6] Schinzel, A., Sierpinski, W., Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers, *Acta Arithm*, 4(1958), 185-208.
- [7] Sloane, N. J. A., *The Online Encyclopedia of Integer Sequences*, Inc. 15 Mar. 1996. Web. 14 Aug. 2015, [oeis.org/A008407](http://oeis.org/A008407)



- [8] Tao, T., *Polymath8b: Bounded intervals with many primes, after Maynard*, terrytao.wordpress.com, 19 Nov. 2013, <https://terrytao.wordpress.com/2013/11/19/polymath8b-bounded-intervals-with-many-primes-after-maynard/>
- [9] Weisstein, E. W., *de Polignac's Conjecture*, MathWorld, 25 Aug. 2015, <http://mathworld.wolfram.com/dePolignacsConjecture.html>
- [10] Weisstein, E. W., *Schinzel's Hypothesis*, MathWorld, 25 Aug. 2015, <http://mathworld.wolfram.com/SchinzelsHypothesis.html>
- [11] Weisstein, E. W., *Twin Prime Conjecture*, MathWorld, 25 Aug. 2015, <http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimeConjecture.html>

## 229. La solitudine dei numeri primi (gemelli)

Matteo Veglianti

### Sommario

Il seguente articolo parla di famiglie di numeri naturali: dopo aver definito il grado di solitudine di una famiglia di numeri naturali, lo si calcolerà per diverse famiglie, vedendo che alcune sono solitarie, altre no.

Circa i due terzi dei concetti esposti provengono da una conferenza tenuta dal professor Piergiorgio Odifreddi nel 2010 all'Università di Torino e trovabile on line all'indirizzo citato nella sezione riferimenti alla fine del presente articolo.

Il titolo di questo articolo richiama quello del romanzo di Paolo Giordano: "La solitudine dei numeri primi", così come fa pure il professor Odifreddi nella sua conferenza. Si giungerà alla conclusione che il titolo del suddetto romanzo è errato da un punto di vista matematico.

### 1 Famiglie solitarie

Da quanti membri è composta la vostra famiglia? Due, cinque, dieci? Non importa, in ogni caso la vostra è una famiglia solitaria. In effetti nessun membro di alcuna famiglia conosce tutte le persone del pianeta e per questo la famiglia è solitaria.

Anche i numeri naturali si dividono in famiglie, in raggruppamenti, che possono essere solitarie o meno. Ovviamente se una famiglia di numeri è finita non c'è speranza: nell'insieme di tutti i numeri naturali essa è solitaria.

Per una famiglia infinita di numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , si può definire il grado di solitudine come la somma dei reciproci di tutti i membri della famiglia:

$$g := \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

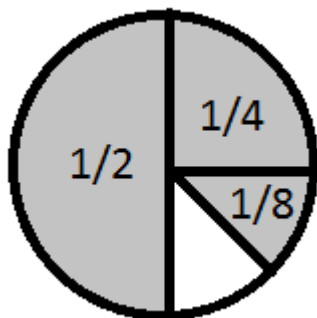
Se il risultato è un numero finito, la famiglia è solitaria, in caso contrario non lo è. Inoltre, più il risultato è piccolo, più la famiglia è solitaria.

### 2 "I numeri tutti"

I numeri naturali, che Galileo chiamava "i numeri tutti", sono infiniti:  $1, 2, 3, \dots$ . Il grado di solitudine dei numeri naturali è:

$$g_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Figura 1:



Per convincerci che questa somma diverge osserviamo che essa è composta da infiniti termini che possiamo raggruppare a piacimento. Allora i primi due termini sono  $1$  e  $\frac{1}{2}$ ; i successivi due sono  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ , la cui somma è maggiore di  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . I successivi quattro termini sono  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{8}$ , la cui somma è maggiore di  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ; e così via. La somma di partenza quindi è composta da infiniti termini ognuno maggiore di  $\frac{1}{2}$  (in altre parole, la serie data si può minorare con la serie:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ ) e quindi diverge.

I numeri naturali, dunque, non sono solitari: cosa abbastanza ovvia!

### 3 La famiglia $2^n$

Vediamo ora due famiglie di numeri che sono solitarie.

La prima è la famiglia composta dalle potenze di due:  $2, 4, 8, \dots$

Ogni membro di questa famiglia è del tipo  $2^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Il grado di solitudine di questa famiglia è:

$$g_{2^n} := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

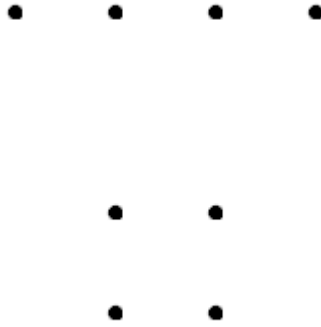
Ci si può convincere del risultato notando che nella somma ogni termine è la metà di quello precedente; cosicchè se immaginassimo per semplicità una pizza di cui ne mangiamo prima la metà, poi un quarto, poi un ottavo, e così via, alla fine avremmo mangiato tutta la pizza (si veda figura 1).

Per cui tutte le potenze di 2 formano una famiglia solitaria.

### 4 I numeri quadrati

La seconda famiglia di numeri solitaria è quella formata dai numeri quadrati. I numeri quadrati sono quelli che si possono rappresentare con delle biglie disposte a formare un quadrato. Per esempio il numero 4 si può rappresentare con quattro biglie poste una accanto all'altra, cioè allineate tra loro, oppure disponendo le biglie in due file parallele ciascuna formata da due biglie, cioè formando un quadrato di lato due (si veda figura 2). Sicchè il numero 4 è un numero quadrato.

Figura 2: Il numero quattro rappresentato in maniera lineare(in alto) o in maniera quadrata (in basso)



Altri numeri quadrati sono 1, 9, 16, ...; ossia sono della forma  $n^2$  con  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Il grado di solitudine dei numeri quadrati è:

$$g_{n^2} := 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.64$$

Calcolare il valore di questa somma infinita è molto più complicato rispetto a quello della famiglia  $2^n$ . In effetti il problema, noto come "problema di Basilea", rimase aperto per circa un secolo e fu risolto dal grande Eulero.

In effetti si può dimostrare che la serie converge maggiorandola con una serie convergente. Consideriamo infatti la serie data:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Ora, guardando l'ultima serie possiamo accorgerci che essa può essere maggiorata sfruttando lo stesso trucco utilizzato nel paragrafo: il primo termine della serie rimane inalterato, i due termini successivi  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$  sono minori di  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$ , i quattro termini successivi  $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$  sono minori di  $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}$ , e così via.

Vale quindi la maggiorazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Ma l'ultima serie scritta è la serie delle potenze di  $\frac{1}{2}$  e, come abbiamo già dimostrato nel paragrafo, essa converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Dunque la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  è minore di una serie convergente e di conseguenza converge anch'essa, ad un numero minore di due.

Ovviamente questo basta ad affermare che la famiglia dei numeri quadrati è solitaria. Come abbiamo già detto il grado di solitudine è  $g_{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . L'idea che ebbe Eulero per arrivare a questo risultato è semplice e, in un certo senso, anche azzardata: egli suppose che le regole dei polinomi finiti fossero valide anche per le serie infinite.

Partendo dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione seno centrato in 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e dividendo per  $x$  entrambi i termini, si arriva al polinomio:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Ora, secondo l'ipotesi fatta da Eulero, si può ignorare il fatto che il polinomio sia infinito e trattarlo come un polinomio finito, sicché le sue radici sono tutti i multipli interi di  $\pi$ :  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Ponendo infine  $x^2 = y$ , il polinomio diventa:

$$\frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots$$

le cui soluzioni sono, per la sostituzione effettuata:  $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots$ . Ora, per le formule di Viète, se un polinomio ha il termine costante uguale a 1, la somma dei reciproci delle sue radici è uguale al coefficiente del termine lineare cambiato di segno. Questo, sempre secondo l'ipotesi di Eulero, è vero anche nel nostro caso e di conseguenza:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots$$

Infine, moltiplicando entrambi i membri per  $\pi^2$ , otteniamo:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Non solo quindi abbiamo dimostrato che i numeri quadrati formano una famiglia solitaria, ma ne abbiamo anche calcolato il grado di solitudine.

## 5 I numeri primi

Vediamo ora una famiglia particolarissima di numeri: i numeri primi. Un numero si dice primo quando è divisibile solo per uno e per se stesso:  $2, 3, 5, 7, \dots$

Ovviamente essi sono infiniti; in effetti questo è un risultato molto antico che risale ad Euclide, III secolo a.C.

Vediamo il ragionamento di Euclide. Innanzitutto egli definisce i numeri primi e i numeri composti, nel modo seguente:

**Def. 1:** numero primo è quello che ha per divisore soltanto l'unità;

**Def. 2:** numero composto è quello che ha per divisore un qualche numero.

Dopodichè, nella proposizione 31 del VII libro egli dimostra il seguente:

**Teorema 1.** *Ogni numero composto ha per divisore un numero primo*

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un numero composto. Allora, per definizione sarà diviso da un altro numero,  $B$ . Ora, se  $B$  è primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto; se  $B$  è composto sarà diviso da un altro numero,  $C$ . Ma poichè  $C$  divide  $B$  e  $B$  divide  $A$ , allora  $C$  divide anche  $A$ . Ora, se  $C$  è primo, si sarebbe conseguito quanto proposto; se  $C$  è composto sarà diviso da un altro numero. Procedendo in questo modo si finirà per trovare un numero primo che divide  $A$ . Infatti se non lo si trovasse, infiniti numeri dividerebbero  $A$ , il che è impossibile.  $\square$

Armato di questo risultato, Euclide, nella proposizione 20 del IX libro dimostra il

**Teorema 2.** *Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.*

*Dimostrazione.* Siano dati i numeri primi  $a, b, c$ . Dico che esiste almeno un quarto numero primo.

Si moltiplichino, infatti, i tre numeri dati e si aggiunga una unità, si ottiene il numero  $d = abc + 1$ .

Se  $d$  è primo è stata dimostrata l'esistenza di un quarto numero primo. Se  $d$  non è primo, per il teorema testè dimostrato, ammette un divisore primo, sia esso  $h$ . Dico che  $h$  è diverso da  $a, b, c$  e quindi che costituisce il quarto numero primo del quale si voleva appunto dimostrare l'esistenza.

Se, infatti,  $h$  fosse uguale ad uno dei tre numeri  $a, b, c$ , esso dividerebbe il prodotto  $abc$ . Ma s'è supposto che  $h$  divida anche  $d = abc + 1$ , quindi  $h$  dividerebbe anche la differenza tra  $d$  e  $abc$ , ossia l'unità, il che è assurdo.  $\square$

Ancora oggi, dopo 23 secoli, questa dimostrazione è in voga, anche se qualche secolo fa (circa 3) un altro grande matematico, il già citato Eulero, cimentandosi nei numeri primi, diede una dimostrazione alternativa della loro infinità.

Prima di vedere la dimostrazione di Eulero ricordiamo come è fatta una serie geometrica, cioè una serie tale per cui il rapporto tra due termini adiacenti è costante:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$$

Ogni serie geometrica converge quando  $|a| < 1$ .

Per dimostrare ciò, ricordiamo innanzitutto che una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

si dice convergente ad un numero  $S$ , quando la successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ha limite  $S$  per  $n$  che tende all'infinito.

Nel caso di una serie geometrica, la somma parziale  $n$ -esima è:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $1 - a$ , si ha:

$$(1 - a)S_n = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n)(1 - a)$$

Svolgendo le moltiplicazioni:

$$(1 - a)S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n - a - a^2 - a^3 - \dots - a^n - a^{n+1}$$

Da cui, annullando i termini opposti, si ha:

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}$$

Infine, dividendo tutto per  $1 - a$ , si ottiene:

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Ora, passando al limite per  $n$  che tende all'infinito:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a},$$

se  $|a| < 1$ , poichè, in tal caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0.$$

Armati di questo risultato, vediamo ora come Eulero ha dimostrato che i numeri primi sono infiniti.

Supponiamo che ci sia un solo numero primo:  $p$ . Allora i numeri naturali, per il teorema di fattorizzazione unica, saranno:

$$1, p, p^2, p^3, p^4, \dots$$

e di conseguenza il grado di solitudine dei numeri naturali risulta:

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p - 1}$$

questo risultato è assurdo in quanto è un numero finito, mentre abbiamo visto nel paragrafo che il grado di solitudine dei numeri naturali è infinito. Non è vero quindi che esiste un solo numero primo.



Ci siano allora due numeri primi:  $p$  e  $q$ . Di conseguenza i numeri naturali sono della forma  $p^n q^m$ , ossia:

$$(1, p, p^2, p^3, \dots)(1, q, q^2, q^3, \dots)$$

Il grado di solitudine dei numeri naturali sarà allora:

$$\sum_{n,m} \frac{1}{p^n q^m} = \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots\right)$$

Ora, entrambi i fattori che compaiono nel termine di destra dell'ultima espressione sono finiti poichè sono delle serie geometriche e quindi sarà finito anche il loro prodotto. Anche il caso in cui consideriamo due soli numeri primi conduce dunque ad un assurdo. Il discorso a questo punto è facilmente generalizzabile ad un qualsiasi numero finito di numeri primi, con la conseguente dimostrazione della loro infinità.

Il risultato ottenuto da Eulero di per sè non è molto interessante poichè l'infinità dei numeri primi, come abbiamo già detto, fu dimostrata duemila anni prima di lui. I metodi utilizzati del matematico svizzero, però, sono molto innovativi, molto profondi e tutt'oggi ancora non del tutto compresi. Infatti se osserviamo attentamente abbiamo trasformato la somma dei reciproci dei numeri naturali nel prodotto tra le somme dei reciproci di tutti numeri primi elevati ad un qualsiasi numero naturale:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

Utilizzando una notazione più compatta:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \left(\frac{p}{p-1}\right)$$

Questo diede inizio alla teoria analitica dei numeri, ossia allo studio dei numeri primi utilizzando metodi e strumenti dell'analisi.

Nel 1859 il matematico tedesco Bernhard Riemann ebbe la brillante idea di elevare ad un esponente complesso l'espressione precedente, introducendo così la famosa funzione zeta, tutt'oggi oggetto di studio:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(\frac{p}{p-1}\right)^s$$

Ma Eulero non si fermò qui. Egli calcolò il grado di solitudine dei numeri primi:

$$g_p := \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

I numeri primi non sono solitari!

Per dimostrarlo Eulero mostra che la somma dei reciproci dei numeri primi è legata logaritmicamente alla somma dei reciproci dei numeri naturali, che diverge. L'espressione

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \left(\frac{p}{p-1}\right)$$

si può riscrivere, in virtù delle proprietà dei logaritmi, come:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \exp\left(\ln \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right) = \exp\left(-\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$$

Ora, ricordando lo sviluppo in serie del logaritmo centrato in 0:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \\ \ln(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} x^{-k} \end{aligned}$$

Ovviamente questi sviluppi hanno senso quando  $|x| < 1$ , condizione che nel nostro caso è verificata.

Possiamo quindi scrivere:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \exp\left(-\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} p^{-k}\right)$$

Passando ai logaritmi:

$$\ln\left(\sum_n \frac{1}{n}\right) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} p^{-k}$$

Separando il termine con  $k = 1$ :

$$\ln\left(\sum_n \frac{1}{n}\right) - \sum_p \frac{1}{p} = \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} p^{-k}$$

Ora, con un po' di fatica, si può maggiorare la serie doppia con una serie convergente\*, per cui, a meno di costanti:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \ln\left(\sum_n \frac{1}{n}\right)$$

Per cui la somma degli inversi dei numeri primi è infinitamente grande (ma infinitamente più piccola della somma degli inversi dei numeri naturali).

## 6 I numeri primi gemelli

Abbiamo quindi visto che la famiglia dei numeri primi non è solitaria. Legata ad essa c'è un'altra famiglia di numeri: i numeri primi gemelli. Si definiscono

---

\*si veda [2]

numeri primi gemelli due numeri primi che differiscono tra loro di due unità: 5 e 7, 11 e 13, 821 e 823, per esempio.

Nasce spontanea una domanda: quante sono le coppie di numeri primi gemelli? Purtroppo non lo sappiamo! La congettura dei numeri primi gemelli, infatti, che ne afferma l'esistenza di infinite coppie, non è stata ancora dimostrata. Ciò però non ha impedito ai matematici di studiare questa famiglia di numeri. In particolare, nel 1919 Viggo Brun ha mostrato che la somma dei reciproci dei numeri primi gemelli (cioè il loro grado di solitudine) converge a una costante matematica ora chiamata costante di Brun:  $B_2^\dagger$ .

$$g_{p_2} := \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \dots = \sum \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) = B_2 \simeq 1.90$$

I numeri primi gemelli sono solitari!

Ovviamente esistono molte altre famiglie di numeri oltre a quelle descritte, alcune delle quali saranno solitarie, altre no. Legate alle famiglie dei numeri primi e dei numeri primi gemelli ce ne sono almeno altre due che vorrei citare per curiosità. Esse sono la famiglia dei numeri primi cugini, ossia numeri primi che differiscono tra loro di quattro unità (per esempio 3 e 7) e la famiglia dei numeri primi sexy, cioè quelli che differiscono tra loro di sei unità (per esempio 5 e 11). Entrambe queste famiglie sono solitarie.

## Conclusione

Abbiamo dunque visto che i numeri si possono raggruppare in famiglie, alcune delle quali sono solitarie, altre no. La tabella sottostante riassume i risultati ottenuti, ordinando le famiglie dalla meno solitaria alla più solitaria.

Famiglia di numeri	Grado di solitudine
numeri naturali : $n \in \mathbb{N}$	$g_n = \infty$
numeri primi : $p \in \mathbb{P}$	$g_p = \infty$
numeri primi gemelli : $p, p+2 \in \mathbb{P}$	$g_{p,p+2} = B_2 \simeq 1.90$
numeri quadrati : $n^2, n \in \mathbb{N}$	$g_{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.64$
potenze di due : $2^n, n \in \mathbb{N}$	$g_{2^n} = 1$

In particolare vediamo che i numeri primi non sono solitari, per cui il titolo del romanzo di Paolo Giordano: "La solitudine dei numeri primi", è matematicamente errato. L'errore però, come possiamo vedere, non sussisterebbe dal punto di vista matematico qualora si aggiungesse al titolo il sostantivo "gemelli".

## Bibliografia

### Riferimenti bibliografici

- [1] Odifreddi, Piergiorgio, *La solitudine dei numeri primi*, conferenza, Università di Torino - dipartimento di informatica, 2010, <https://www.youtube.com/watch?v=FCSaXPYJ1zk>

<sup>†</sup>si veda [3]

- [2] Colzani, Leonardo, *Eulero ed i numeri primi*, Università degli studi di Milano Bicocca - dipartimento di matematica, <http://www.matapp.unimib.it/leonardo/Eulero/Eulero.pdf>
  
- [3] Languasco, Alessandro e Zaccagnini, Alessandro, *Intervalli fra numeri primi consecutivi*, <http://www.math.unipd.it/languasc/lavoripdf/R22.pdf>
  
- [4] Wikipedia, *Problema di Basilea*, [https://it.wikipedia.org/wiki/Problema di Basilea](https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Basilea)
  
- [5] Euclide, *Elementi*, traduzione italiana a cura di Acerbi, Fabio, <http://www.scienzaatscuola.it/euclide/index.html>

# 230. Rubicon River – Svolgo o Scompongo

Trisolini Grazia Pia

## Idea di fondo del progetto

*“Se ascolto dimentico,  
se vedo ricordo,  
se faccio capisco”  
Confucio 541-479 a. c.*

“Fatto così, non è difficile!” Sono queste le prime parole che si sentono nell’ora di matematica quando gli allievi cominciano a giocare. Il gioco denominato “Rubicon River” è uno strumento didattico facilitatore messo a punto all’IISS “C. E. Gadda” di Paderno Dugnano, dalla prof.ssa Grazia Trisolini in collaborazione con i propri allievi e con il prezioso contributo delle colleghe prof.sse Patrizia La Grassa e Cecilia Cornali che lo hanno testato nelle loro classi. Il *kit* permette agli allievi, che giocano in piena autonomia, di acquisire competenze sui prodotti notevoli e sulle scomposizioni in fattori dei polinomi, senza ricadere in apprendimenti di tipo mnemonico, come spesso accade col percorso tradizionale.

Per esempio, nel gioco, l’espressione  $(X+A)(X+B)$  ha per modello un rettangolo di lati  $X+A$  e  $X+B$  mentre l’espressione:  $X^2 + (A+B)X + AB$  è una figura composta dalla somma di un quadrato di lato  $X$ , un rettangolo di lati  $A+B$  e  $X$  e un rettangolo di lati  $A$  e  $B$ .

L’allievo constata che il quadrato e la figura composta sono equivalenti e deduce che le due espressioni algebriche sono uguali, cioè costituiscono un’unica formula:

$$(X+A)(X+B) = X^2 + (A+B)X + AB$$

## Gli obiettivi del progetto

Promuovere negli studenti un approccio creativo allo studio e alla comprensione della matematica.

Favorire un approccio alla matematica come attività del pensiero e non come un complesso astratto di regole, formule e risultati.

Studiare la matematica sviluppando le capacità di intuire, progettare, ipotizzare, dedurre, controllare e verificare i fenomeni della realtà.

Guidare gli allievi alla scoperta delle regole del calcolo polinomiale attraverso il disegno e la costruzione di modelli geometrici.

Contribuire a creare un modello riproducibile di metodologia di insegnamento.

Con riguardo agli obiettivi previsti dalla programmazione d’Istituto:

COMPETENZE	ABILITA'	CONOSCENZE
<p><b>ALGEBRA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Trasformare le procedure del calcolo algebrico in procedure geometriche</li> </ul> <p><b>GEOMETRIA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Confrontare e analizzare figure geometriche.</li> <li>· Ragionare correttamente e sviluppare semplici dimostrazioni.</li> <li>· Individuare invarianti e relazioni di figure geometriche</li> </ul> <p><b>INGLESE</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Comprendere l'essenziale di testi scritti di uso corrente legati alla sfera matematica.</li> </ul>	<p><b>ALGEBRA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Padroneggiare l'uso delle lettere come costanti, come variabili e come strumento per scrivere formule e rappresentare relazioni.</li> <li>· Riconoscere e saper calcolare i diversi prodotti notevoli.</li> <li>· Saper fattorizzare un polinomio.</li> </ul> <p><b>GEOMETRIA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Eseguire semplici costruzioni geometriche.</li> </ul> <p><b>INGLESE</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Leggere e comprendere semplici testi attinenti ad argomento matematico.</li> </ul>	<p><b>ALGEBRA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· I polinomi</li> <li>· I prodotti tra i polinomi e le scomposizioni di polinomi.</li> </ul> <p><b>GEOMETRIA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Congruenza di superfici e di volumi</li> </ul> <p><b>INGLESE</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· Lessicali: vocaboli ed espressioni legate ad argomento matematico.</li> </ul>

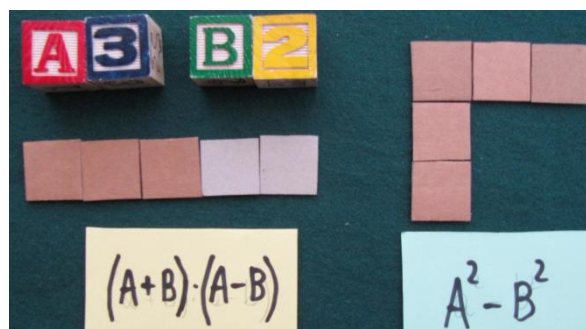
### Metodologia utilizzata

Brevi lezioni frontali; metodo induttivo e logico deduttivo; esercitazioni guidate. Per migliorare il metodo di studio e le capacità di deduzione logica, si è insistito sull'uso del linguaggio logico-matematico, lavori di gruppo, scoperta delle regole attraverso il disegno e la costruzione di modelli geometrici; sessioni di gioco.

Il docente di madre lingua inglese, prof.ssa Joanne De Sensi, ha curato la parte in inglese per mettere in grado gli allievi di acquisire la terminologia specifica, anche in lingua straniera.

### Descrizione del percorso didattico

QUANDO	CHI	COSA	COME
Gennaio-marzo 2013	Docente: Trisolini; classi: 1 <sup>^</sup> H-2 <sup>^</sup> H Inguistico; 1 <sup>^</sup> S e 2 <sup>^</sup> S Scientifico	<b>Costruzione modelli</b>	Utilizzando materiali vari, anche di recupero



Aprile 2013	Docente: Trisolini; classi: 2^H Linguistico 2^S scientifico	Messa a punto delle regole del gioco	Attraverso vari <i>brain storming</i>
-------------	----------------------------------------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------

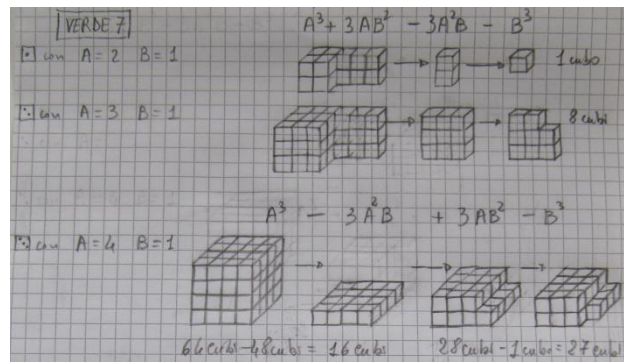
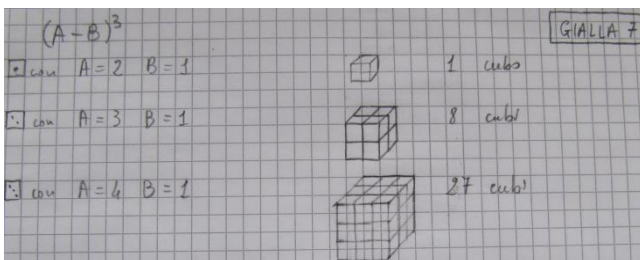
## SVOLGOSCOMPONGO

**Origini:** è un gioco per comprendere e memorizzare, ridendo e scherzando, le regole base delle scomposizioni in fattori dei polinomi. Particolarmente indicato dai 10 ai 15 anni.

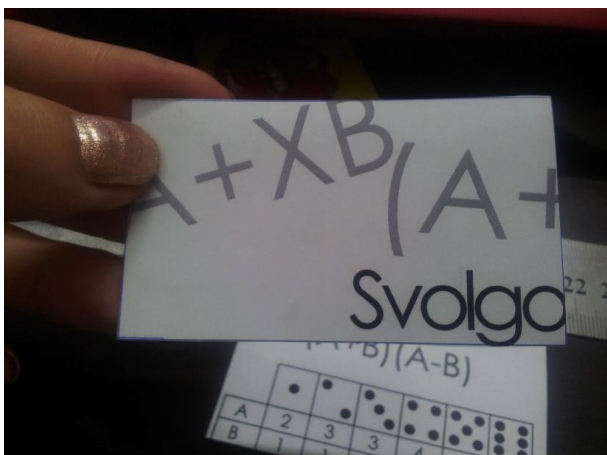
**In quanti si gioca:** in tre, a turno due giocano e uno svolge il ruolo di arbitro.  
**Con quali oggetti:** 25 quadrati, 64 cubi uno dei quali funge anche da dado, 10 schede gialle (scomposizioni), 10 schede verdi (sviluppi), una clessidra da 5 minuti, un libretto delle soluzioni

scompongo	volgo
$X(A+B)$	$AX+BX$
$(A+B)(X+Y)$	$AX+AY+BX+BY$
$(A+B)(A-B)$	$A^2-B^2$
$(A+B)^2$	$A^2+2AB+B^2$
$(A-B)^2$	$A^2+B^2-2AB$
$(A+B)^3$	$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
$(A-B)^3$	$A^3+3AB^2-3A^2B-B^3$
$(A+B)(A^2+B^2-AB)$	$A^3+B^3$
$(A-B)(A^2+B^2+AB)$	$A^3-B^3$
$(X+A)(X+B)$	$X^2+(A+B)x+AB$

Maggio 2013	Docente Trisolini; classi 1^H-2^H Linguistico; 1^S e 2^S Scientifico	Tutte le soluzioni del gioco	Disegnando in classe
-------------	----------------------------------------------------------------------------	------------------------------	----------------------



Settembre 2013	Hellatron spa	Produzione prototipo	Fabbricato in Cina
----------------	---------------	----------------------	--------------------





Gennaio 2014	La giornalista Silvia Gissi de "Il Notiziario"	Articolo su "Il Notiziario"	Osservazione diretta e interviste di docente e allievi
--------------	------------------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------------------------

**52 Il notiziario | PADERNO DUGNANO | 17 gennaio 2014**

## Gadda, con Rubicon River la matematica diventa realtà

**PADERNO DUGNANO-** "Fatto così non è difficile!", sono queste le prime parole che si sentono nell'ora di matematica di una seconda liceo scientifico dell'istituto Gadda. L'argomento, ostico ai più, sono i monomi e polinomi. Comporre e scomporre, più facile a dirsi che a farsi: formule da memorizzare e concetti astratti da rendere concreti. In seconda S però, da qualche tempo, circolano dei simpatici cubetti: Rubicon River, svolgo e scompongo, è un gioco ideato dalla docente Grazia Trisolini che rende realtà cubi e quadrati di monomi e polinomi. Grazie all'azienda Hellatron spa, che ha costruito il prototipo, ora tutti gli alunni potranno apprendere facilmente un argomento che rappresenta un grosso scoglio.

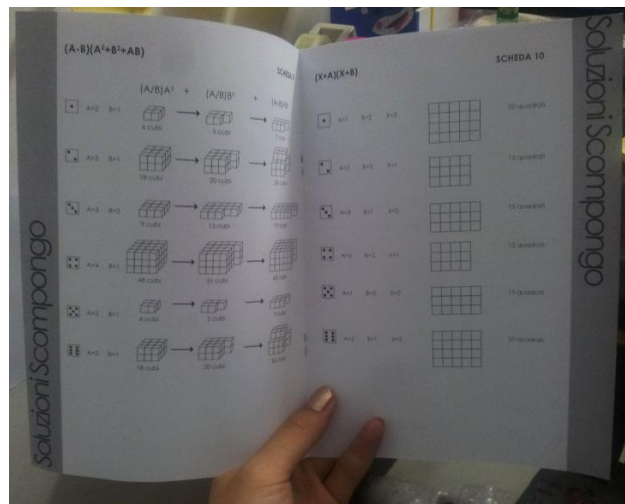
Davanti ai nostri occhi, quattro volontari creano in poco tempo formule matematiche con enorme semplicità e scioltezza. "Il gioco serve a consolidare le conoscenze e legarle al significato" dice la docente. "l'algebra geometrica, un metodo francese, è l'unica possibilità per capire, per apprendere competenze e non conoscenze, per imparare a tradurre in termini grafici i concetti astratti". Il gioco sarà disponibile, per chi lo desidera, da fine gennaio, chiedendo direttamente alla professoressa. Un utile strumento per gli insegnanti che si scontrano con le difficoltà degli alunni quotidianamente.

**Silvia Gissi**





Febbraio 2014	Hellatron spa	<b>Consegna Kit</b>	Tramite corriere
Marzo 2014	I docenti di Matematica: Trisolini, Cornali e La Grassa e le loro rispettive 7 classi	<b>Utilizzo in classe del kit</b>	Sessioni di gioco
Aprile 2014	1^H-2^H Linguistico; 1^S e 2^S Scientifico; 1^M-1^L Grafica e Comunicazione; 1^A Amministrazione e Marketing	<b>Individuazione degli errori di stampa nel manuale</b>	Prove di gioco
Aprile-maggio 2014	Hellatron spa	<b>Manuale corretto</b>	Recapito via mail



3-14 Giugno 2014	Il prof Trisolini e il Madre Lingua Inglese De Sensi; le classi 3 <sup>H</sup> Linguistico; 3 <sup>M</sup> e 3 <sup>L</sup> Grafica e Comunicazione	<b>Realizzazione dei video tutorial in Italiano e in Inglese</b>	Durante la Learning Week – Playing Maths del giugno 2014
Settembre-ottobre 2014	docente	<b>Divulgazione in altre scuole</b>	Contatti diretti o via mail con docenti di altre scuole
Novembre 2014	Docente di Matematica Trisolini, docente di Madre Lingua Inglese De Sensi, allievi del Linguistico e dello Scientifico	<b>Messa a punto del Quaderno Operativo Bilingue per guidare gli allievi alla scoperta dei modelli geometrici dei prodotti notevoli e delle scomposizioni in fattori dei polinomi</b>	Collaborazione tra il docente di Matematica e il docente di Madre Lingua Inglese fuori dall'orario di lezione. Raccolta e selezione dei lavori svolti dagli allievi lo scorso anno scolastico.

### Ricaduta sugli alunni nel processo di apprendimento

Durante l'anno scolastico 2013-2014, le classi coinvolte dalla ricaduta del progetto sono state dieci: 1<sup>H</sup>-2<sup>H</sup>-3<sup>H</sup> Liceo Linguistico; 1<sup>S</sup>-2<sup>S</sup> Liceo Scientifico; 1<sup>A</sup> Tecnico Amministrazione Finanza e Marketing; 1<sup>M</sup>-1<sup>L</sup>-3<sup>M</sup>-3<sup>L</sup> Tecnico Grafica e Comunicazione.

**Considerazioni della prof.ssa Cecilia Cornali** docente nelle classi 1<sup>M</sup> e 1<sup>L</sup> del Gadda:

“Nelle prime dell'Istituto Tecnico Grafica e Comunicazione si è utilizzato il kit Rubicon River per presentare i prodotti notevoli e le scomposizioni in modo meno manualistico, ma più concreto. Dopo la prima fase "di gioco", i risultati sono stati incoraggianti e indubbiamente positivi. Il docente ha potuto osservare che gli alunni cambiano il modo di affrontare questa parte di programma, lavorano con oggetti bi- e tri-dimensionali e aumentano la loro capacità di visualizzare oggetti nello spazio. Per esempio,  $(A+B)^2$  non è più solo un numero elevato alla seconda, ma un quadrato di lato  $A+B$ . Naturalmente ci sono alunni con difficoltà pratiche che faticano a costruire i modelli, ma ho notato che alcuni studenti con grosse difficoltà di calcolo sono riusciti ad affrontare comunque gli argomenti in modo proficuo.”

**Considerazioni della prof.ssa Patrizia La Grassa** docente nella classe 1<sup>A</sup> del Gadda:

“Nella prima dell'Istituto Tecnico Amministrazione e Marketing, gli allievi hanno guardato con diffidenza il materiale contenuto nella scatola del 'Rubicon River', ma dopo aver preso visione del manuale e seguito con scrupolo le regole del gioco, hanno potuto constatare come le regole sulle scomposizioni e sullo sviluppo dei polinomi hanno uno stretto legame con la costruzione di modelli geometrici, nel piano e nello spazio. E' noto quanto sia ostico l'argomento ma il passaggio dalla teoria all'applicazione pratica con oggetti semplici: quadrati e cubi, hanno reso concreto e divertente il loro sapere sull'algebra letterale e numerica. Tanta fatica ma anche grande soddisfazione!”

**Considerazioni della prof.ssa Grazia Trisolini** docente in 1<sup>S</sup>, 1<sup>H</sup>, 2<sup>H</sup>, 3<sup>H</sup> del Gadda:

“Come sanno tutti i docenti di matematica e tutti coloro che hanno frequentato una scuola superiore, l'argomento “prodotti notevoli e scomposizioni in fattori dei polinomi” è davvero ostico. A tale proposito, la mia esperienza d'insegnante in classi sia liceali che tecniche è stata per anni molto deludente. Gli allievi non riescono a memorizzare tutte le 20 formule; le confondono una con

l'altra e non riescono ad abbinarle correttamente; appena ne imparano una nuova, dimenticano quella già appresa; spesso il massimo che riescono a fare è applicare, a semplici esercizi, la singola regola oggetto di studio. Chiedere loro di risolvere esercizi che prevedano l'uso di più formule, è fallimentare. Fatta eccezione per alcuni allievi di Liceo Scientifico, dopo qualche mese nessuno ricorda più nulla dell'argomento, come se non fosse mai stato trattato. Negli anni seguenti gli allievi ricadono in false idee preconette continuando imperterriti a credere e a scrivere che il quadrato di un binomio sia uguale alla somma dei quadrati di due monomi  $(A + B)^2 = A^2 + B^2$  e che il cubo sia uguale alla somma di due cubi  $(A + B)^3 = A^3 + B^3$ , continuano a non ricordare, né tanto meno a credere che le formule corrette siano invece:

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$$

L'uso dei modelli geometrici ha operato un cambiamento radicale.

Gli allievi coinvolti nel presente progetto durante l'anno scolastico 2013/2014, appartenevano alle classi 1<sup>^</sup>S del Liceo Scientifico e 1<sup>^</sup>H, 2<sup>^</sup>H, 3<sup>^</sup>H del Liceo Linguistico, per un totale di 103 allievi.

Tutti hanno memorizzato le 20 formule e sono stati in grado di enunciarle e abbinarle correttamente. In caso di errore è stato più facile farlo loro notare, attraverso i modelli geometrici, che hanno permesso di eradicare le false convinzioni.

L'anno scolastico successivo, tutti gli allievi ricordano ancora le formule e non hanno perso le competenze acquisite. Inoltre ricordano volentieri e con piacere il percorso didattico affrontato, considerandolo gratificante ed efficace.”

## Commenti degli allievi sull'uso del Quaderno Operativo per disegnare

### Prima liceo scientifico

*Mauro:* Grazie a questo progetto, ho potuto apprendere più facilmente l'argomento riguardante lo studio dei prodotti notevoli e le relative scomposizioni in fattori primi. Inoltre con l'aiuto della costruzione dei modelli geometrici disegnati sul quaderno, è stato più facile imparare questo argomento, che in un primo momento può risultare difficile; e sono stati anche di aiuto nel capire quale fosse la soluzione geometrica del prodotto notevole in caso di difficoltà.

*Lenarduzzi:* I disegni rappresentanti i polinomi mi sono stati d'aiuto perché hanno permesso di trovare un nesso tra l'algebra e la geometria, in quanto con la rappresentazione grafica, si riescono a memorizzare meglio le formule di prodotti notevoli e scomposizioni.

*Giorgia:* Il mio apprendimento sull'argomento 'prodotti notevoli e scomposizioni in fattori dei polinomi' è stato favorito dal fatto che non ho solo ascoltato le spiegazioni date dalla professoressa e svolto i compiti assegnati, ma ho anche potuto aiutarmi rappresentando i monomi e i polinomi usando figure geometriche di una, due e tre dimensioni. Inoltre, non assistendo solo passivamente alla lezione, ho imparato a rappresentare binomi e trinomi attraverso alcune figure geometriche.

*Riccardo:* Questo lavoro mi è stato utile perché mi ha permesso di capire meglio l'argomento che stavamo svolgendo grazie al disegno associato alle varie formule. Inoltre mi ha permesso di non svolgere in modo passivo la lezione che poteva diventare noiosa. A mio parere questo metodo ha reso più semplice la comprensione di un argomento molto complicato in matematica.

*Roberto:* Lo scoprire un legame tra l'algebra e la geometria mi ha reso l'apprendimento delle scomposizioni in fattori dei polinomi molto più semplice e rapido, poichè trovandomi d'avanti a scomposizioni scritte in maniera algebrica sono riuscito a farmi un rapido modello mentale e a scomporre con successo. Inoltre penso che dando ad uno studente uno strumento che lo coinvolga molto di più rispetto a una lezione "classica" gli renda più facile capire con cosa sta lavorando.

*Chiara:* L'apprendimento dell'argomento dei prodotti notevoli e le scomposizioni in fattori dei polinomi è stato favorito dal constatare una correlazione tra l'algebra e la geometria e in particolare poterla capire attraverso i disegni svolti sul quaderno che col tempo ho memorizzato e che hanno reso più concreto e semplice il ragionamento che porta alla soluzione dei prodotti notevoli e di conseguenza l'apprendimento di questo argomento.

*Sabrina:* L'apprendimento dei prodotti notevoli sotto forma di gioco è stato agevolato da un buon lavoro di gruppo, infatti il coinvolgimento tra noi coetanei è stato d'aiuto per memorizzare le formule in maniera più divertente perché, per vincere, si era più motivati a ricordare il maggior numero di scomposizioni. Non avrei mai pensato di poter imparare così facilmente alcuni aspetti della matematica.

*Riccardo:* A me è stato utile perché una normale lezione dell'argomento sarebbe stata certamente più noiosa che giocare. Giocando secondo me ho tenuto un livello di concentrazione più alto poiché il gioco prevedeva una competizione tra tre alunni e quindi gli alunni hanno imparato più velocemente e divertendosi.

*Marianna:* Un mio punto di forza sono state le scomposizioni in fattori dei polinomi; oltre ad averle capite, le ho trovate molto piacevoli e allo stesso tempo divertenti.

### **Prima Liceo Linguistico**

*Giorgia:* Un punto di forza è stato il gioco dei cubetti per quanto riguarda la memorizzazione e la costruzione dei modelli.

*Alessandra:* Mi è piaciuto l'uso dei cubetti poiché ho imparato e capito l'argomento più velocemente.

*Naresb:* Il metodo dei cubetti è stato interessante, difficile a volte, ma anche divertente.

*Sara:* Mi è piaciuto molto il gioco dei cubetti che mi ha fatto capire meglio le espressioni ed è stato allo stesso tempo divertente.

*Sara:* Mi sono trovata bene con l'uso dei cubetti e li trovo utili.

*Leonardo:* Ho trovato utile il gioco Rubicon River e non ho usufruito dello sportello help.

*Daniel:* Ho trovato molto interessanti i monomi e i polinomi perché mi veniva molto più facile imparare usando il Rubicon River.

### **Terza Liceo Linguistico**

*Manuela:* Lo scorso anno scolastico abbiamo adottato un metodo un po' particolare a parer mio; abbiamo utilizzato dei cubetti in legno per comprendere meglio la matematica. Li usavamo per capire approfonditamente in cosa consisteva l'argomento trattato. Spero di riutilizzare i cubetti perché mi sono trovata molto bene e sono stata in grado di capire veramente.

*Chiara:* Il gioco Rubicon River mi ha aiutato molto a capire l'argomento riguardante monomi-binomi-trinomi e soprattutto mi ha aiutato a memorizzare le formule e ad abbinare gli svolgimenti e le scomposizioni.

*Federica:* I prodotti notevoli sono uno dei miei lavori meglio riusciti.

*Roberta:* Mi sento abbastanza sicura sull'algebra e penso che sia dovuto anche all'uso di Rubicon River durante le lezioni.

*Riccardo:* L'anno scorso ho trovato molto interesse nello svolgimento del lavoro con il kit Rubicon River perché era un modo interessante e divertente per imparare la matematica, senza troppe complicazioni o difficoltà.

*Greta:* Secondo me hanno agevolato l'interesse alla lezione gli esercizi con il Rubicon River che servivano ad apprendere l'argomento, ma con un metodo anticonvenzionale quindi a mio parere più leggero e meno noioso.

*Nicolò:* Uno dei miei punti di forza dell'anno scorso riguarda i prodotti notevoli.



## 223. Lo scaffale dei libri

### “Il museo dei numeri” di Piergiorgio Odifreddi

Ancora una volta Piergiorgio Odifreddi riorganizza per noi il sapere matematico, e non solo, ponendo l'accento sui numeri, le curiosità ad essi legate, la loro storia, partendo dal presupposto che “I numeri sono le vocali della matematica”, come dice Novalis, uno dei più importanti rappresentanti del romanticismo tedesco.

Il fatto stesso che, in apertura, ci siano citazioni prese da tutti gli ambiti del sapere ci dice che questo libro non parla solo di matematica, ma, innanzi tutto, del sapere scientifico, letterario, religioso, musicale, artistico.

Il viaggio che Odifreddi ha organizzato per noi inizia con un racconto di Cesare Zavattini, «La gara di matematica», perché “costituisce una metafora di questo libro”: comincia lentamente nell'elenco dei numeri e poi salta fino ad arrivare alle superpotenze di dieci, come il Googolplex, perché “la corsa dell'umanità verso i grandi numeri non procede a velocità costante, ma accelerata”.

Il viaggio nel quale ci guida Odifreddi è composto da sette escursioni che ci portano sempre più in alto: “Le albe del numero” è dedicato alla storia della matematica, a partire dalle tacche intagliate sugli ossi o sui bastoni, fino ad arrivare al sistema di numerazione decimale posizionale, con la città di Firenze che nel 1299, all'indomani del Liber abaci di Fibonacci, proibiva con un'ordinanza l'uso delle cifre indoarabiche, più facilmente falsificabili rispetto a quelle romane.

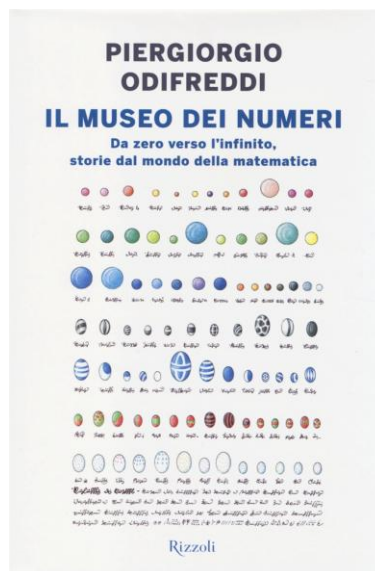
“Unità” è dedicato ai numeri da 0 a 9 e Odifreddi si addentra nel mondo della teologia (ma senza l'ironia che di solito contraddistingue la trattazione di questi argomenti), della filosofia, della pittura, della musica, della fisica, dell'aritmetica e della geometria, della letteratura, della biologia... fino ad arrivare al linguaggio (chi sapeva che il termine tribù è legato al numero tre?).

“Cifre” illustra alcune curiosità a partire dalla poesia “Nummeri” di Trilussa da «L'avventura dello zero» di Gianni Rodari, citando i repunit, la base binaria e tutti i “giochi” aritmetici che si possono fare con le quattro operazioni, ad esempio “sommando fra loro le cifre da 1 a 9 dispiegate nelle due direzioni”.

In “Decine e centinaia” il passo si allunga: 10, 11, 12, 14, 41, 42, 64, 100, 153 e per concludere 666 e continua ad allungarsi in “Migliaia, milioni e miliardi”, visto che si riparte da 1000 e si arriva a 4.294.967.297, passando attraverso 17.152, il numero di modi in cui è possibile disporre i quattordici pezzi dello Stomachion di Archimede.

Il libro si conclude con due itinerari tra le potenze e le superpotenze di dieci, passando attraverso gli scacchi, gli atomi dell'universo, le mandrie del Sole e la biblioteca di Babele.

Ad ogni itinerario sono dedicati dieci piccoli paragrafi: ogni paragrafo è ricco dal punto di vista dei contenuti, ma, visto il contenuto numero di pagine dedicato al singolo argomento, si può leggere rapidamente e senza grande impegno, magari centellinando la lettura, invece di affrontare il percorso in fretta.



Numerosissime sono le illustrazioni, scelte tra immagini curiose e opere d'arte e anche questo contribuisce a rendere meno impegnativo il percorso. Attraverso questo libro, Odifreddi comunica con il grande pubblico, che può rendersi conto di quanto i numeri invadano ogni aspetto della nostra vita, non appartenendo solo alla matematica. Nel percorso non mancano i riferimenti ai grandi matematici e alle proprietà dei numeri, che si distinguono in numeri primi, perfetti, amichevoli...

Il libro è rivolto innanzi tutto a coloro che magari hanno conosciuto la matematica solo sui banchi di scuola ma non hanno avuto l'occasione di amarla. I numeri, le "vocali della matematica", possono essere una facile via d'accesso, un modo per cominciare ad appassionarsi e, magari, lasciarsi prendere dalla tentazione di scoprire qualcosa di più.

Daniela Molinari

### "Tutti in cerchio" di Anna Cerasoli

Questo libro è il terzo volume della trilogia che la Cerasoli ha dedicato alla scuola primaria: è dedicato alla geometria, il protagonista è sempre lo stesso, ma fa la sua comparsa anche Nuvola, il cagnolino compagno di avventure, che dovrebbe conoscere meglio la geometria per fare entrare con più facilità l'osso nella sua cuccia..

I due volumetti precedenti, "Sono il numero 1" e "Io conto", sono dedicati all'aritmetica, con i numeri e le quattro operazioni, le frazioni e il calcolo della probabilità.

Come in ogni libro della Cerasoli, non mancano i riferimenti alla storia della matematica: si comincia con antichi Egizi, che erano costretti a ricostruire i confini dopo ogni piena del Nilo, si procede con i Babilonesi, inventori del grado sessagesimale per la misura degli angoli e si passa poi a Euclide, che risponde al faraone che non esistono percorsi facilitati per imparare la matematica.

Tutto ha inizio con i tenditori di corde che lavoravano in Egitto dopo le piene del Nilo e il percorso della geometria, alla primaria, comincia proprio con le linee: "la linea curva è la linea degli indecisi, invece quella retta è delle persone decise" o "dei frettolosi, perché è la più corta per andare da un punto a un altro". Eppure questa geometria ci mette alla prova fin dalla scuola primaria, con la noia di dover imparare i nomi di tutti gli enti coinvolti.

Quando si passa alle figure geometriche, il percorso si fa più divertente: si possono verificare praticamente le disuguaglianze triangolari o la somma degli angoli interni di un triangolo, si può toccare con mano che il quadrato è il rettangolo con l'area massima a parità di perimetro... La geometria pian piano mostra di essere parte della realtà: per costruire la libreria è necessario mettere un'asta in diagonale, per garantirle stabilità, riducendola a due triangoli, mentre per costruire la cuccia di Nuvola bastano triangoli, rettangoli e quadrati.

Dai triangoli ai quadrilateri il passo è breve e si passa poi all'equivalenza tra le figure piane per determinarne le aree, alle simmetrie per riconoscerne le proprietà fondamentali, fino ad arrivare alla tassellatura del piano. In questa impegnativa passeggiata in mezzo alla geometria, prima di concludere il percorso con i solidi e la misura dei volumi, non manca il gioco: compare così il geopiano, inventato a metà del secolo scorso da un matematico e pedagogista





egiziano. Si tratta di una tavoletta ricoperta da un reticolo regolare di pioli attorno ai quali si possono far passare elastici o cordicelle per formare poligoni e segmenti, in modo da determinare l'area di figure geometriche complesse contando i pioli e applicando il teorema di Pick.

Lungo il percorso, ci sono dei riquadri – indicati come cartelloni – che servono in genere per sottolineare o riassumere dei concetti importanti, oppure per fare piccole attività, che vengono lasciate al lettore.

Come al solito, la Cerasoli propone ai ragazzini della primaria un ripasso della geometria veicolato dal gioco, con numerose illustrazioni colorate e tante curiosità che, attraverso le applicazioni alla realtà di tutti i giorni, non fanno che semplificare l'approccio e stimolare il ragionamento.

Daniela Molinari

### “Il prisma e il pendolo” di Robert P. Crease

«Il prisma e il pendolo»: il titolo, traduzione letterale di quello originale, indica due semplici strumenti che sono serviti per fare esperimenti importanti, come introduzione all'idea di bellezza che l'autore ci vuole trasmettere.

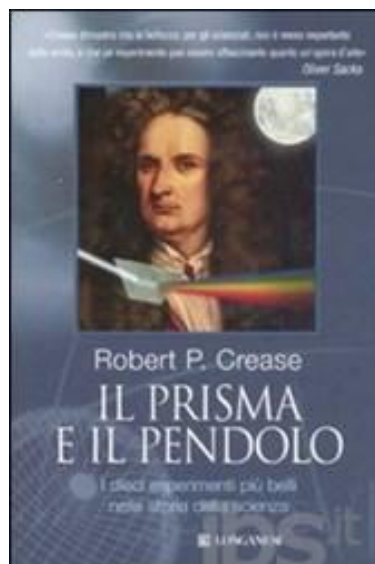
Insegnante di filosofia presso la Stony Brook University di New York, Crease, dopo una chiacchierata con il premio Nobel per la fisica Glashow, si rende conto che alcuni esperimenti possono essere considerati belli: ma quali sono gli esperimenti davvero belli? E cosa significa bellezza?

Il libro è un tentativo di dare una risposta ad entrambe le domande: per scegliere «i dieci esperimenti più belli nella storia della scienza», nel 2002 Crease lanciò un sondaggio per i lettori della rivista internazionale *Physics World*, sulla quale l'autore tiene una rubrica. La risposta fu sorprendente, visto che sono stati nominati più di trecento esperimenti, che coprivano ogni campo scientifico. Inoltre, il sondaggio venne ripreso anche da altri gruppi di discussione su Internet e questo fornì ulteriori candidati.

L'autore scelse allora gli esperimenti nominati più spesso.

Per rispondere, invece alla seconda domanda, ha proposto una decina di piccoli saggi: dopo aver descritto ogni esperimento, partendo dal contesto storico, soffermandosi sulla vicenda umana del protagonista e spiegando le implicazioni scientifiche generate poi dalla scoperta, l'autore dedica una manciata di pagine agli “interludi”, che descrivono l'idea di bellezza sottesa dall'esperimento.

La bellezza della scienza ha un ruolo da protagonista, ma non manca il risvolto della passione: spesso, nelle storie dei protagonisti della fisica, possiamo leggere di accese dispute e contrasti, dimostrazione della passione che ogni scienziato regala al proprio lavoro. I ricercatori ci sembrano a volte freddi e asettici studiosi della natura, alla ricerca di ciò che è funzionale, come se la scienza fosse una «semplice manipolazione di un insieme di strumenti che produrrebbero quasi automaticamente dati corretti», ma spesso è la ricerca della bellezza che guida la scoperta scientifica, tanto che «in momenti di spontaneità e di assenza di vigilanza, gli scienziati applicano la parola “bello” a risultati, tecniche, strumenti, equazioni, teorie e, cosa forse più interessante, a quei motori del progresso scientifico che sono gli esperimenti». Un esperimento, anche se rozzo, è bello se «rivela qualcosa di profondo sul mondo, se lo mostra in un modo semplice e diretto», un esperimento è bello



quando «altera la comprensione» che abbiamo del mondo ed ancora, è bello se riesce ad essere definitivo, rispondendo a tutte le nostre domande al riguardo.

In ogni caso, la bellezza è quanto di più lontano ci possa essere dall'utilità: Crease ruba le parole a Henri Poincaré per chiudere la sua trattazione: «Lo scienziato non studia la natura perché sia utile farlo. La studia perché ne ricava piacere: e ne ricava piacere perché è bella. Se la natura non fosse bella, non varrebbe la pena di conoscerla e la vita non sarebbe degna di essere vissuta.»

I dieci esperimenti sono presentati secondo una progressione cronologica che implica anche una progressione di difficoltà: si comincia con Eratostene che misura, grazie alla geometria, la circonferenza terrestre e si conclude con l'esperimento dell'interferenza quantistica degli elettroni singoli. La disposizione cronologica, nell'intenzione dell'autore, «dà un forte senso della vastità del cammino compiuto dalla scienza nel corso di quasi 2500 anni».

L'autore si destreggia bene nelle spiegazioni: sa descrivere adeguatamente tutti gli esperimenti e, per questo motivo, il libro può rappresentare non solo un approfondimento personale, un viaggio guidato nel mondo della fisica, ma anche un ottimo strumento per gli insegnanti di fisica, che possono servirsene per introdurre gli argomenti o per approfondire le descrizioni degli esperimenti, regalando un tocco di umanità ai protagonisti della fisica.

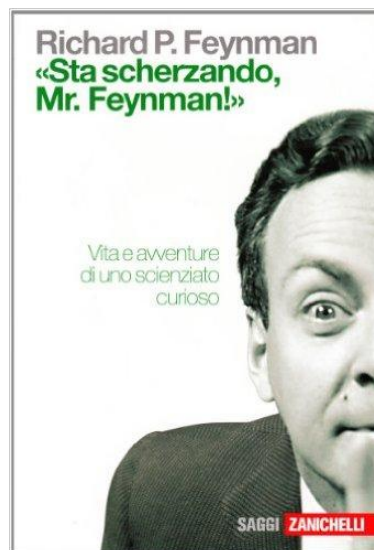
Daniela Molinari

### “Sta scherzando, Mr. Feynman!” di R. P. Feynman

Il titolo racchiude quaranta avventure che sono state raccontate a Ralph Leighton, musicista con il quale Feynman suonava nel gruppo “I Tre Quark”, nel corso di sette anni.

I racconti sono suddivisi in cinque parti e sono disposti più o meno cronologicamente: la prima parte, “Da Far Rockaway al MIT” riguarda gli anni dell'infanzia e della formazione di Feynman; la seconda parte riguarda gli anni del dottorato a Princeton; la terza parte è ambientata, principalmente, a Los Alamos, negli anni della partecipazione del fisico al Progetto Manhattan; la quarta parte riguarda la seconda fase della sua vita, con l'insegnamento al Caltech; l'ultima parte, “Il mondo di un fisico”, sono racconti sparsi e riguardano tutti gli altri aspetti della sua vita, in alcuni casi lontani dalla fisica. Alcuni racconti sono proprio esilaranti, tanto da far pensare, davvero: «Sta scherzando, Mr. Feynman!», esattamente come gli veniva detto ogni volta che, a Princeton, non si comportava in modo adeguato alle formalità dell'Università.

In questo libro, ci viene raccontata tutta la semplicità di Feynman: la sua volontà di dialogare e confrontarsi anche con persone estranee al mondo della fisica, la sua modestia nel misurarsi con i grandi fisici suoi contemporanei, il suo entusiasmo nell'imparare cose nuove, dalle vernici da miscelare, fino alle nuove lingue ed infine la sua capacità di vivere problemi apparentemente insignificanti come una sfida continua. Interessanti sono i racconti riguardanti gli anni trascorsi a Los Alamos: il difficile confronto con la malattia della prima moglie, la sfida continua nei confronti della censura, la capacità di risolvere problemi – dalla riparazione dei guasti delle calcolatrici all'abilità nell'aprire le casseforti che custodivano i segreti del Progetto – e la conclusione inaspettata del suo lavoro alle dipendenze dello Stato.



Spesso Feynman ci viene presentato come un fisico originale e bislacco, ma la sua originalità non è una posa, dipende interamente dalla sua incapacità di nascondersi dietro l'ipocrisia o la convenienza.

Il mondo di un fisico non si riduce, in ogni caso, alla fisica: Feynman è un uomo che vuole scoprire e confrontarsi con il mondo e che vuole sfruttare tutti i suoi talenti ed ecco che riesce a realizzare una mostra dei suoi disegni, che ha realizzato con lo pseudonimo di Ofey, o che fa parte del gruppo "I Tre Quark" una volta tornato al Caltech, dopo aver precedentemente suonato in Brasile. E il premio Nobel? Talvolta una seccatura, perché dal momento del conferimento dell'onorificenza, Feynman non si sente più accolto per quello che è, ma in quanto fisico vincitore del Nobel.

Un libro leggero come stile, ma profondo come contenuti: nel leggere gli aneddoti di Feynman sembra di sentire le sue parole e di cogliere la nota divertita nel renderci partecipi di alcuni episodi che l'hanno visto come protagonista. Una lettura consigliata a tutti, soprattutto a coloro che sono convinti che l'immagine stereotipata del fisico con la testa tra le nuvole propinata dai mass media corrisponda a verità.

Daniela Molinari

**MAGAZINE**  
**MATEMATICAMENTE.IT** *Rivista trimestrale di matematica,  
per curiosi e appassionati  
distribuita gratuitamente sul sito*

**Anno 9 Numero 25 Ottobre 2015**

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it