90. Sulle equazioni differenziali ordinarie a variabili separabili

di Paolo Bonicatto[1] – Luca Lussardi[2]

1 Introduzione

Un'equazione differenziale ordinaria a variabili separabili è un'equazione del tipo

$$y'(x) = f(x)g(y) \qquad (1)$$

Talvolta si usa dire che un'equazione a variabili separabili è un'equazione che può essere scritta nella forma

$$h(y)dy = f(x)dx \qquad (2)$$

In tale espressione appare di oscuro significato la manipolazione della notazione $\frac{dy}{dx}$ come se si trattasse di una frazione vera e propria. Si procede quindi integrando ambo i membri della (2), rispetto ad y a sinistra e rispetto a x a destra; infine, magicamente, si trovano y ed x legate da una relazione che fornisce le soluzioni dell'equazione differenziale (1) con $g(y) = \frac{1}{h(y)}$.

Il peggior difetto, a nostro modo di vedere, insito in questo metodo alternativo, sta nel fatto che nell'espressione (2) y ed x diventano variabili indipendenti entrambe, quando invece y dovrebbe essere funzione di x. Solo ad integrazione effettuata y *ridiventa* funzione di x e fornisce quindi le soluzioni dell'equazione data.

Questo metodo è assai traballante sotto ogni punto di vista; ma è completamente da buttare, come sembra affermare F. Patrone nel suo scritto[3] o esiste una via d'uscita?

Nella prossima sezione illustriamo anzitutto il metodo classico per risolvere questo tipo di equazioni; dopo aver proposto un esempio di applicazione del metodo classico, diamo alcuni cenni di una teoria che ci permetterà, in un certo senso, di rendere rigoroso il metodo alternativo, che risulta quindi esposto nel paragrafo conclusivo.

2 Metodo classico

In questo paragrafo illustreremo il metodo classico di risoluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili. Il paragrafo contiene alcune parti di carattere teorico, fondamentali per una comprensione totale dell'argomento; in conclusione riportiamo alcuni esempi espliciti di risoluzione.

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y'(x) = f(x)g(y) \qquad (3)$$

dove $f : I \to \mathbf{R}$ è una funzione continua (I è un intervallo non vuoto e aperto di $\mathbf{R}$) mentre $g : J \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 (con J intervallo aperto non vuoto di $\mathbf{R}$).

Tutte le equazioni differenziali che possono essere scritte sotto questa forma si dicono a *variabili separabili*.

Proponiamoci di trovare l'integrale particolare della (3) che soddisfa alla condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0$$

dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. In altre parole, stiamo risolvendo non solo l'equazione differenziale ma il *problema di Cauchy* dato da:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (4)$$

Per risolvere il problema (4), mettiamoci anzitutto nel caso in cui si abbia $g(y_0) = 0$; allora, eviden-

[1] email: sbonica@tin.it

[2] Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Brescia, via Valotti n. 9, 25133, Brescia. email: luca.lussardi@ing.unibs.it

[3] www.diptem.unige.it/patrone/equazioni_differenziali_intro.htm

temente, la funzione costante $y = y_0$ è un integrale della (3): infatti, la derivata di una costante è nulla e, quindi, entrambi i membri dell'equazione si annullano. Il grafico della funzione costante $y = y_0$ è rappresentato da una retta parallela all'asse x.

Consideriamo ora il caso $g(y_0) \neq 0$. Anche in tal caso esiste una ed una sola soluzione locale $y = \phi(x)$ del problema: questo risultato è garantito da un teorema (che non riportiamo) che ci assicura l'*esistenza* e l'*unicità* della soluzione (a livello locale, cioè in un opportuno intervallo) dei problemi di Cauchy.

Da $g(y) \neq 0$ segue che anche $g(\phi(x)) \neq 0$ in un opportuno intervallo $S \subseteq I$. Quindi, sostituendo $y = \phi(x)$ nella (3) e dividendo i membri per $g(\phi(x))$ si trae

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x)$$

A questo punto, possiamo integrare[4] i due membri da x_0 a x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(t)}{g(\phi(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (5)$$

Applicando la regola di *integrazione per sostituzione* (si ricordi che $y = \phi(t)$ e quindi $dy = \phi'(t)dt$) la (5) diventa

$$\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (6)$$

Infine, tenendo conto della condizione iniziale $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (7)$$

Indicando con $G(y)$ e $F(t)$ le generiche primitive di $\dfrac{1}{g(y)}$ e di $f(t)$ la (7) diviene

$$[G(y)]_{y_0}^{\phi(x)} = [F(t)]_{x_0}^{x}$$
$$G(\phi(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

Isolando $G(\phi(x))$ abbiamo

$$G(\phi(x)) = G(y_0) + F(x) - F(x_0)$$

La funzione G è iniettiva, e dunque l'ultima uguaglianza diventa

$$\phi(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0))$$

e fornisce quindi la soluzione in forma esplicita del (4).

ESEMPIO 2.1. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Riscriviamo l'equazione come

$$y' = -2xy^2$$

La funzione $g(y) = y^2$ si annulla evidentemente solo nel punto $y = 0$. Quindi un integrale sarà dato da $y \equiv 0$ che è l'unica soluzione nel caso $y_0 = 0$. Poniamo ora $y_0 \neq 0$ e dunque $y \neq 0$ in tutto un intorno di y_0. Dividiamo ambo i membri per y^2. Si ha

$$\frac{y'}{y^2} = -2x$$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} = -2x$$

Integriamo da x_0 a x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)} dt = \int_{x_0}^{x} -2t dt$$

Integrando sempre per sostituzione si ha

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{dy}{y^2} = \int_{x_0}^{x} -2t dt$$

da cui

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_{y_0}^{\phi(x)} = [-t^2]_{x_0}^{x}$$

[4] Abbiamo cambiato la lettera di integrazione in t per evitare confusione.

cioè

$$-\frac{1}{\phi(x)}+\frac{1}{y_0}=-x^2+x_0^2$$

$$-\frac{1}{\phi(x)}=-x^2+\left(x_0^2-\frac{1}{y_0}\right)$$

$$\frac{1}{\phi(x)}=\frac{x^2y_0-x_0^2y_0+1}{y_0}$$

Invertendo si ricava l'espressione che rappresenta la soluzione del problema con condizione $y_0 \neq 0$:

$$\phi(x)=\frac{y_0}{x^2y_0-x_0^2y_0+1}$$

$$\phi(x)=\frac{y_0}{1+y_0(x^2-x_0^2)}$$

3 Forme differenziali lineari

La teoria delle forme differenziali lineari trova la sua fondamentale applicazione in ambito geometrico-differenziale; lo scopo infatti è quello di generalizzare il calcolo vettoriale anche a spazi che non sono necessariamente immersi in un $\mathbf{R}^n$. In questa sezione ci limitiamo a fornire alcuni cenni sulla teoria delle forme differenziali lineari in $\mathbf{R}^2$, che rappresenta lo strumento adatto che ci consentirà di formalizzare il metodo alternativo accennato nell'Introduzione.

Definiamo le applicazioni dx e dy come funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ ponendo

$$dx(x,y)=x, \qquad dy(x,y)=y$$

Le applicazioni dx e dy sono chiaramente lineari e continue. Sia Ω un aperto in $\mathbf{R}^2$; una *forma differenziale lineare* è una generica combinazione lineare delle applicazioni dx e dy, a coefficienti in $C^0(\Omega)$, ovvero

$$\omega = u(x,y)dx+v(x,y)dy$$

con $u,v:\Omega\to\mathbf{R}$ continue. Dunque ω è definita come un'applicazione che manda il generico *(x,y)* nell'applicazione $u(x,y)dx+v(x,y)dy$. È chiaro che in tale approccio non esiste nessun legame tra *y* ed *x*: esse sono due variabili indipendenti a tutti gli effetti.

ESEMPIO 3.1. Sia $F:\Omega\to\mathbf{R}$ una funzione di classe C^1; allora il differenziale di F è una forma differenziale lineare di classe C^0, dal momento che si ha

$$d\phi=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy$$

L'esempio precedente motiva la seguente definizione: una forma differenziale lineare ω di classe C^0 si dice *esatta* se esiste una funzione $F:\Omega\to\mathbf{R}$ di classe C^1 tale per cui si abbia

$$dF = \omega$$

Se $\omega = u(x,y)dx+v(x,y)dy$ allora ω risulta esatta se e solo esiste $F:\Omega\to\mathbf{R}$ di classe C^1 tale per cui

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx=u(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy=v(x,y)$$

Diciamo che la funzione F è una primitiva della forma ω e ovviamente non è unica, ma è definita a meno di costanti additive. Infatti se F è una primitiva di ω allora $F+c$ è una primitiva per ω, $\forall\ c\in\mathbf{R}$; viceversa se Ω è connesso e F_1 e F_2 sono due primitive di ω allora F_1-F_2 è costante.

4 Formalizzazione del metodo alternativo

In tale sezione conclusiva applichiamo il formalismo esposto nella sezione 3 per cercare di giustificare rigorosamente la risoluzione alternativa di un'equazione differenziale a variabili separabili.

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=-\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{9}$$

con $u,v:\Omega\to\mathbf{R}$ di classe C^1 su Ω aperto contenente $(x_0,\ y_0)$. Supponiamo inoltre che sia $v(x_0,y_0)\neq 0$.

TEOREMA 4.1. *Sia ω la forma differenziale di classe C^1 data da*

$$\omega = u(x, y)dx + v(x,y)dy$$

Supponiamo che ω sia esatta, e sia F una sua primitiva. Allora valgono i seguenti fatti.

i. *Se $y=y(x)$ è soluzione locale del problema (9) allora $F(x,y(x))$ = costante.*
ii. *Sia $c = F(x_0, y_0)$ e sia C la curva di equazione $F(x,y) = c$. Allora C è, localmente, un grafico, e più precisamente il grafico dell'unica soluzione locale del problema (9).*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che se $y(x)$ è soluzione locale del problema (9) allora $F(x,y(x))$ = costante. Infatti, sia $G(x) = F(x,y(x))$; G è quindi di classe C^1, pertanto ammette derivata prima continua e si ha

$$G'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(y, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y(x)) \cdot y'(x) =$$
$$= u(x, y) + v(x, y)\left(-\frac{u(x, y)}{v(x, y)}\right) = 0$$

Ne segue che $G(x)$=costante, da cui $F(x,y(x))$=*costante.*

Resta da dimostrare che $F(x,y) = c$ definisce, localmente attorno al punto (x_0, y_0), in forma implicita l'unica soluzione $y=y(x)$ del problema (9). Infatti, essendo per ipotesi $v(x_0, y_0) \neq 0$, si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

e dunque per il Teorema del Dini[5] esiste un'unica funzione $y=y(x)$ di classe C^1 definita in un intorno di x_0 tale che $F(x,y(x))=c$. Derivando tale espressione si trae che

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(y, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y(x)) \cdot y'(x) =$$
$$= u(x, y) + v(x, y) \cdot y'(x)$$

da cui si può affermare che y risolve il problema (9). ■

Applichiamo a questo punto quanto abbiamo dimostrato per risolvere equazioni differenziali a variabili separabili. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

e supponiamo $g(y_0) \neq 0$. Intanto come sempre $g(y) \neq 0$ anche in un intorno di y_0. In tal caso l'equazione data può essere riscritta come

$$y' = -\frac{f(x)}{-\frac{1}{g(y)}}$$

che è la forma che appare nel problema (9). Sia $\omega = f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy$; tale forma è esatta poiché la funzione

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}ds$$

è una primitiva di ω. Ne segue che, passando all'integrazione indefinita, possiamo scrivere l'integrale generale del problema dato mediante la relazione

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + c, \qquad c \in \mathbf{R} \tag{11}$$

che rappresenta la formula risolutiva *sciaguratamente diffusa* anche sui libri di testo, dedotta da una manipolazione formale delle quantità dx e dy. Osserviamo invece che, seguendo l'approccio sopra esposto, tale formula risolutiva resta giustificata in modo rigoroso, nonostante le variabili x e y siano, a tutti gli effetti, indipendenti tra loro.

ESEMPIO 4.2. Risolviamo ora con tale metodo l'equazione differenziale data da

$$y' + 2xy^2 = 0 \tag{12}$$

Trovato l'integrale singolare $y = 0$, possiamo supporre $y \neq 0$. Applicando direttamente la formula (11) otteniamo

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\int 2x dx + c$$

che porge l'espressione dell'integrale generale:

$$y = \frac{1}{x^2 + C}$$

dove C è un'opportuna costante reale.

[5] Data F di classe C^1 e (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste un'unica funzione $y=g(x)$ di classe C^1 definita in un intorno di x_0 che soddisfa localmente $F(x, g(x)) = c$.