

94. Le equazioni di Navier-Stokes

di Flavio Cimolin



Chi di noi, guardando un'onda infrangersi sul bagnasciuga di una bella spiaggia, non si è soffermato a constatare l'inconcepibile complessità del movimento dell'acqua, che a tratti sembra regola-

re, quando l'onda si avvicina alla riva, ma pochi istanti dopo diventa immediatamente imprevedibile, quando l'onda si infrange suddividendosi in migliaia di correnti e bolle mentre supera l'onda precedente che nel frattempo si sta ritirando.

Possiamo constatare la complessità del moto dei fluidi in ogni momento della nostra vita, da quando apriamo il rubinetto del lavandino o versiamo l'acqua in un bicchiere a quando, uscendo con il vento, veniamo investiti da raffiche incoerenti e provenienti da tutte le direzioni. L'aria e l'acqua, i due fluidi fondamentali per la nostra stessa esistenza, hanno comportamenti incredibilmente difficili da descrivere, e per questo costituiscono una delle sfide più interessanti della matematica applicata, che ha appunto il compito di trovare dei modelli in grado di spiegare i fenomeni reali al fine di poterli prevedere.

A confronto, il comportamento dei corpi solidi è decisamente più semplice da descrivere: la meccanica razionale è una stupenda costruzione concettuale che consente di risolvere elegantemente qualsiasi problema che coinvolge il movimento di corpi rigidi soggetti a forze collegati fra loro tramite vincoli di diverso genere. Anche quando si passa da un numero finito di gradi di libertà ad un numero infinito, considerando cioè i "corpi deformabili", gli strumenti di indagine risultano ancora in grado di modellare con discreta accuratezza i fenomeni che accadono all'interno dei materiali soggetti a tensioni e di conseguenza deformazioni. Basti pensare a quanto stanno diventando importanti ai fini della prototipazione virtua-

le le simulazioni di crash test, grazie alle quali le nostre autovetture diventano ogni giorno più sicure. Quando si abbandonano i corpi solidi per passare a studiare il comportamento di liquidi o gas, ecco che immediatamente la complessità balza a un livello decisamente più alto.

Un'intuizione del motivo per cui questo accade si può cercare direttamente dall'interpretazione molecolare dei materiali. I solidi sono costituiti da molecole ben ordinate (quando la struttura è perfettamente uniforme e regolare si parla di "cristalli"), che possono muoversi dalla loro posizione, ma solo di poco. Per descrivere la deformazione di un solido, si può quindi utilizzare quello che viene chiamato un approccio "lagrangiano": ci si concentra su di una particella del solido e si guarda dove essa si sposta a seguito del campo di forze a cui la si sottopone. Quando invece si ha a che fare con dei fluidi, che possono essere liquidi o gassosi, le molecole, pur interagendo fra loro, non sono più legate indissolubilmente, bensì libere di muoversi ovunque all'interno del recipiente che le contiene. Proprio per questo bisogna passare a quello che viene detto approccio "euleriano": ci si concentra su di un volume ben fissato nello spazio e si analizzano le sue proprietà mano a mano che il fluido gli circola all'interno.

La meccanica dei continui è quella disciplina matematica che si occupa di descrivere per mezzo di equazioni il comportamento dei corpi continui, con formulazioni che possono basarsi su uno dei due approcci lagrangiano o euleriano descritti in precedenza. Il "corpo continuo" non è altro che l'astrazione del concetto che tutti noi abbiamo in mente quando immaginiamo un materiale che sia distribuito uniformemente nello spazio e lo occupi in maniera omogenea. Per intenderci, riferendoci ad un corpo continuo possiamo immaginare un blocco di marmo o un secchio pieno d'acqua, ma non un mattone o un pezzo di groviera: questi ultimi sono infatti caratterizzati da "buchi",

cioè da parti non occupate dal materiale che consideriamo. Ai fini della modellazione è importante avere a che fare con corpi continui perché solo in questo modo si possono definire quantità come la densità, la velocità o la temperatura in modo “puntuale”, come se fossero applicabili a qualsiasi punto geometrico dell’oggetto che si vuole analizzare. L’ipotesi di corpo continuo è a tutti gli effetti la chiave di volta della meccanica dei continui, senza la quale non sarebbe possibile darne una formulazione elegante e potente con cui descrivere il comportamento dei corpi deformabili.

Nonostante possa apparire come la cosa più naturale del mondo, l’ipotesi di corpo continuo non è ovvia nel mondo in cui viviamo e può essere giustificata pienamente solo con avanzati calcoli di meccanica statistica. Tutto dipende infatti da quale punto di vista ci poniamo per osservare il fenomeno a cui siamo interessati.

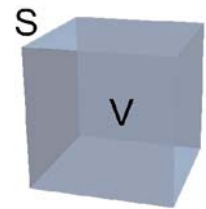
Proviamo ad esempio a immaginare di volere studiare cosa accade all’acqua contenuta in una pentola messa sul gas nel momento in cui essa si scalda. L’acqua vicina alla base della pentola si scalderebbe per prima e inizierebbe a muoversi, creando un ricircolo: l’acqua calda si muoverebbe verso l’alto e quella fredda verso il basso.



Per analizzare questo fenomeno, non possiamo considerare tutta l’acqua nel suo insieme, ponendoci cioè su una scala macroscopica diciamo dei decimetri, perché in questo modo considereremmo uguale dappertutto la temperatura dell’acqua facendone una media, e quindi non vedremmo nulla. D’altro canto, non possiamo neanche concentrare la nostra attenzione sulla scala microscopica, diciamo dei nanometri (10^{-9} m), laddove si distinguono tutti gli atomi e tutte le molecole dell’acqua, perché avremmo un numero esagerato di particelle da seguire, che singolarmente non darebbero alcuna informazione sul fenomeno che vogliamo comprendere. La scelta giusta è quella di metterci su di una scala intermedia, diciamo fra i 10^{-7} m e i 10^{-3} m, in modo da poter definire un piccolo volumetto che, dal punto di vista macroscopico, possa essere considerato un’unica “particella fluida” caratterizzata da ben

definite proprietà fisiche come la velocità e la temperatura, ma che, dal punto di vista microscopico, contenga un numero molto elevato di molecole elementari. Il fatto che le molecole all’interno del volume siano tante consente di fare la media di tutte le loro velocità e quindi di fare in modo che le proprietà fisiche cambino in modo continuo fra questo volumetto e qualsiasi altro volumetto ad esso adiacente. Ecco che, per mezzo del concetto di “particella fluida” così definito, in meccanica dei continui si è in grado di definire “puntualmente” una quantità fisica come ad esempio la temperatura, che nella nostra pentola non è certo uguale dappertutto, ma neanche differente fra una molecola e un’altra immediatamente adiacente.

Siamo finalmente giunti al punto in cui sfruttare questo approccio per realizzare dei modelli matematici in grado di rispecchiare la realtà, partendo da quelle che vengono dette “equazioni di bilancio”. Consideriamo un volume di materia V e una quantità fisica Q , ad esempio la massa, la quantità di moto o l’energia. Fare un bilancio significa fornire una relazione fra quello che della quantità considerata Q entra, esce, viene prodotto o distrutto all’interno del volume V considerato. Ad esempio possiamo dire che la variazione di Q nel tempo (cioè la sua derivata) è uguale al flusso F che entra nel volume più un termine di sorgente corrispondente a ciò che viene prodotto al suo interno:



$$\frac{dQ}{dt} = F + P$$

Supponendo valida l’ipotesi del continuo, si può ora pensare alla quantità Q come distribuita uniformemente su tutto il volume V considerato, e questo consente di riferirci ad una “quantità per unità di volume” q che, integrata su tutto il volume, dia esattamente Q . Ad esempio, se considerassimo la massa ($Q = M$), allora q sarebbe la densità (massa per unità di volume). Riscrivendo l’equazione di bilancio in termini di quantità definite per unità di volume o di superficie, otteniamo la seguente equazione di bilancio in forma integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_V q dv = - \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds + \int_V s dv$$

Dove $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ è il flusso per unità di superficie della quantità q che attraversa verso l'esterno il bordo S del volume V (dato che per convenzione lo si pone verso l'esterno c'è il segno meno meno), e s è la sorgente per unità di volume della quantità considerata.

Abbiamo fin qui scritto un'equazione di bilancio per la generica quantità q in termini di integrali di superficie e di volume, ma dove ci può condurre questo? Ebbene, si può dimostrare, facendo ricorso a teoremi di calcolo differenziale su più variabili, che la relazione precedente può essere riscritta in termini di soli integrali di volume e con la derivata temporale spostata sotto il segno di integrale. In particolare il ruolo fondamentale è giocato dal teorema di Gauss, che consente di riscrivere un integrale sulla superficie esterna S di un volume chiuso in termini di un integrale sul volume stesso V , facendo comparire l'operatore differenziale di divergenza ($\nabla \cdot$) e la velocità del fluido \mathbf{v} :

$$\int_V \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\mathbf{v}) \right) dv = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{f} + s) dv$$

Non bisogna lasciarsi spaventare dai simboli complicati che compaiono, perché essi servono solo a rendere più compatta la scrittura matematica delle formule. Ad esempio l'operatore di divergenza significa:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Il bello del passaggio che abbiamo fatto è che adesso abbiamo a che fare con un'uguaglianza fra due integrali di volume che deve valere per qualsiasi volume V considerato. Questo significa che possiamo trasformare l'equazione di bilancio sulla quantità Q "integrale" in un'equazione di bilancio sulla quantità q espressa in forma differenziale, eliminando in questo modo il volume V di controllo da cui eravamo partiti:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\mathbf{v} + \mathbf{f}) - s = 0$$

Il passaggio che è stato fatto è notevole, infatti ora abbiamo un'equazione che vale localmente in tut-

to il corpo che vogliamo analizzare (ad esempio l'acqua contenuta nella pentola di cui parlavamo prima) e che esprime in modo continuo come varia la generica quantità per unità di volume q .

Il discorso fino a qui è stato completamente astratto (oltre che sicuramente difficile da seguire per chi non abbia solide conoscenze di calcolo differenziale in più variabili), dunque è ora di concretizzarlo sostituendo alla generica quantità q qualcosa che diventi effettivamente interessante al fine di illustrare il comportamento fisico del mezzo considerato. Proviamo a sostituire a q il valore della densità, solitamente indicata con la lettera greca ρ , cioè il rapporto fra la massa e il volume. Ovviamente non esistono "sorgenti di massa", e quindi $s = 0$, e non esiste neppure un "flusso di massa" attraverso un volume ben definito, cioè $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. L'equazione che deriva dal bilancio locale della massa è quindi la seguente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$$

Nel caso in cui si consideri la densità costante in tutto il fluido, si può operare una ulteriore semplificazione, arrivando alla semplice equazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Questa equazione di "divergenza nulla" può essere pensata a tutti gli effetti come un "vincolo", che corrisponde proprio al fatto che la densità è costante: il flusso che entra in qualsiasi volumetto deve essere esattamente uguale a quello che ne esce! Per determinare l'evoluzione di un corpo in meccanica si deve scrivere un'equazione di conservazione per la massa e una per la quantità di moto, quindi anche noi dovremo ora scegliere la quantità di moto per unità di volume $q = \rho\mathbf{v}$. Tralasciamo i passaggi matematici, che questa volta sono più complicati che nel caso precedente e richiedono anche la modellazione delle "tensioni" sul bordo del dominio V , passiamo direttamente al risultato che si ottiene unendo l'equazione di conservazione della massa a quella della quantità di moto: un sistema di due equazioni differenziali vettoriali che valgono localmente in tutto il corpo e che definiscono univocamente il modo in cui esso si comporta. Tali equazioni vengono det-

te “Equazioni di Navier-Stokes”, dal nome dell’ingegnere e matematico francese Claude-Louis Navier (1785-1836), che per primo diede una descrizione differenziale del moto dei fluidi incomprimibili, e del fisico irlandese George Gabriel Stokes (1819-1903), che ne derivò la formulazione matematica:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Si tratta di due equazioni (in realtà considerando che la prima è vettoriale per le tre componenti della velocità, abbiamo in totale quattro equazioni scalari) tutt’altro che banali da risolvere dal punto di vista matematico, soprattutto a causa della presenza del termine non lineare $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, che è

considerato una delle più forti sorgenti di non-linearità che appaiono in fisica. Abbiamo visto spuntare nel membro di destra della prima equazione due nuove quantità: una è la pressione p e l’altra è la viscosità μ . Esse vengono introdotte nel momento in cui si cerca di dare una modellazione delle forze di interazione che ci sono fra due volumetti fluidi adiacenti: sicuramente è presente uno sforzo isotropo (cioè uguale in tutte le direzioni), a cui è associata la pressione, ma è anche presente uno sforzo “di taglio” associato allo strisciamento fra i due volumi, che risulta tanto maggiore quanto più viscoso è il fluido (basti pensare alla differenza di comportamento fra l’aria, l’acqua e l’olio) a cui è associata appunto la viscosità.

Come mai si usano tutti quei triangolini, cioè gli operatori differenziali di gradiente, divergenza e laplaciano e la notazione vettoriale? Beh, perché altrimenti la scrittura delle stesse quattro equazioni diventerebbe questo bel guazzabuglio di derivate:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + b_x \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + b_y \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + b_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ritorniamo un momento sul concetto di non-linearità, per approfondire meglio il suo significato e le conseguenze che ne derivano. Quando un fenomeno è lineare il suo comportamento è, sotto un certo punto di vista, relativamente semplice da prevedere: se sappiamo che riscaldando un corpo con 10 J innalziamo la sua temperatura di 10 °C, allora ci aspettiamo che scaldandolo con 20 J ne innalzeremo la temperatura di 20 °C, e così via... Vale cioè quello che viene chiamato “principio di sovrapposizione degli effetti”. In un comportamento di tipo non-lineare non valgono invece regole di questo genere, ma sono invece sempre in agguato degli “imprevisti” che rendono difficile, e in alcuni casi impossibile, predire esattamente l’evoluzione del fenomeno. Quando la non-linearità è particolarmente significativa, come ad esempio nelle equazioni di Navier-Stokes, si genera quello che in matematica è noto come “caos”: l’evoluzione di due configurazioni che inizialmente differiscono di poco conduce in breve termine a due configurazioni lontane fra loro che non hanno più niente a che vedere l’una con l’altra. Il grado di predizione a lungo termine di un sistema caotico è zero: non c’è alcuna speranza di conoscere con precisione che cosa accadrà, indipendentemente dal grado di accuratezza che si sceglie di usare nei calcoli: tutti gli errori vengono inesorabilmente amplificati con il tempo.

Quanto detto riguardo alla non-linearità e al caos in fluidodinamica è ben lungi dall’essere un’astrazione matematica, e per accorgersene basta tornare con la mente agli esempi con cui abbiamo esordito. Qualcuno

crede forse di essere in grado di predire con accuratezza dove andrà a finire una determinata “particella fluida” (nel senso dell’ipotesi del continuo) che appartiene a un’onda che si infrange sul bagnasciuga, o con quale intensità e distribuzione ci colpirà la prossima raffica di vento durante un temporale? Anche disponendo dei computer più potenti del mondo e dei migliori algoritmi numerici, vi assicuro che avrete ben poche speranze di farlo, semplicemente perché è eccessivamente complicato!

I fisici del XX secolo hanno iniziato a parlare di “flussi turbolenti” in relazione a quei flussi in cui le fluttuazioni locali sono troppo complicate per essere prevedibili. Essi si generano quando le velocità in gioco sono tali per cui le forze di inerzia del fluido superano quelle viscosi, che tenderebbero invece a mantenere regolare il flusso. Facciamo un esperimento mentale per comprendere bene cosa significhi questo: immaginiamo dapprima di versare dell’olio in un canale largo pochi centimetri che degrada con una pendenza molto dolce, e poi di guardare un fiume in piena largo una decina di metri in cui l’acqua scorre veloce. Nel primo caso il flusso sarà “laminare”, ovvero uniforme in tutto il canale, perché le velocità in gioco sono basse e le forze viscosi mantengono compatto il fluido costringendolo a muoversi ordinatamente. Tutto il contrario accade nel caso del fiume in piena: la bassa viscosità dell’acqua, unita alla grande larghezza del fiume e alla velocità dell’acqua, fanno sì che si creino migliaia di vortici, correnti secondarie, onde e increspature che rendono irregolare il flusso. L’aggettivo “turbolento” associato a quest’ultimo tipo di flusso è quanto mai appropriato!

Non tutti i flussi sono turbolenti, ma buona parte di quelli con cui conviviamo quotidianamente lo sono. I fisici hanno individuato un parametro, il cosiddetto “numero di Reynolds”, dal nome del fisico e ingegnere inglese Osborne Reynolds (1842-1912), grazie al quale si può stabilire, in maniera approssimativa, se un certo tipo di flusso è laminare oppure turbolento. Esso si calcola nel modo seguente:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu}$$

È cioè dato dal prodotto della densità ρ del fluido moltiplicato per una velocità caratteristica v e

per una lunghezza caratteristica L (ad esempio la larghezza del fiume, o il diametro di un ostacolo che ostruisca il flusso) diviso per la viscosità μ . Si tratta come già detto di una definizione approssimativa, che serve a descrivere “qualitativamente” il flusso. Si osserva che per numeri di Reynolds inferiori al migliaio il flusso è laminare, mentre per numeri maggiori diventa sempre più turbolento. Per esempio, se calcoliamo il numero di Reynolds di un fiume in piena, assumendo una velocità dell’acqua di $v = 2$ m/s e una larghezza del fiume di $L = 10$ m, con le proprietà dell’acqua $\rho = 1000$ kg/m³ e $\mu = 0.001$ Pa·s, troviamo $Re = 20$ milioni, cioè un numero di Reynolds enorme! Succede ancora di peggio quando si vuole cercare di dare una descrizione dei flussi meteorologici che attraversano intere zone geografiche e vengono influenzati dalla presenza di mari, laghi o montagne, senza i quali non potremmo pensare di fare le previsioni del tempo.

Se dunque abbiamo ora trovato un modello, quello delle equazioni di Navier-Stokes, con cui siamo in grado di modellare i flussi di tipo laminare, dobbiamo davvero perdere ogni speranza di modellare tutta la categoria dei flussi turbolenti, che così spesso appaiono in natura? Per fortuna no, qualcosa lo possiamo fare, ricorrendo a quella che è la modellazione statistica della turbolenza. Si tratta di determinare dei modelli con i quali “filtrare” tutte le fluttuazioni imprevedibili, oltre che sostanzialmente poco interessanti, del flusso attorno al suo “andamento medio”, su cui invece ci si deve concentrare. Sarebbe sovrabbondante conoscere punto per punto la velocità dell’aria sopra il nostro paese quando ai fini delle previsioni del tempo è sufficiente conoscerne solo la direzione e l’intensità media, in modo da sapere da dove arriveranno le eventuali perturbazioni.

La prima formulazione statistica della turbolenza risale al matematico russo Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987), che nel 1941 delineò la sua teoria della “cascata energetica”, in base alla quale la turbolenza va pensata come un trasferimento di energia attraverso varie scale di dimensione e tempo. Si tratta di un elegante modello matematico in grado di fornire una soluzione al problema; proviamo a darne brevemente un accenno. A livello macroscopico, la turbolenza sul

flusso medio si manifesta tramite la generazione di grandi vortici: le forze inerziali sono dominanti e la viscosità non riesce a regolarizzare il flusso. I grandi vortici si suddividono poi in cascata in vortici sempre più piccoli, fino a quando la scala (ricordiamo la L che compare nel numero di Reynolds) non diventa sufficientemente piccola affinché le forze di viscosità diventino dominanti.

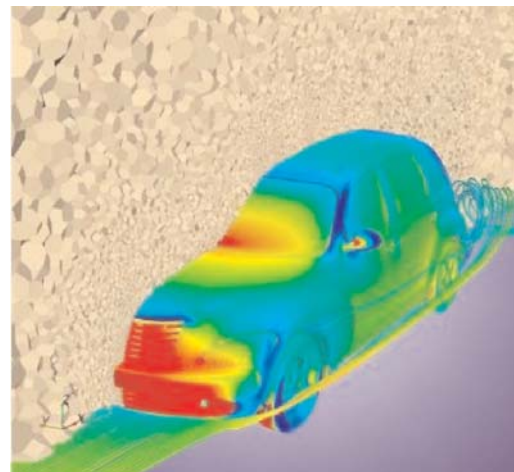
Leonardo da Vinci, nel suo storico disegno rappresentato in figura, fu il primo ad intuire il processo di generazione dei vortici nella turbolentissima zona in cui ristagna l'acqua che cade da una cascata. A tutti gli effetti quello che si ha è un trasferimento di energia dalla scala macroscopica a quella microscopica: viene sottratta energia dal flusso medio alle scale più grandi, poi viene trasferita da vortici grandi a vortici sempre più piccoli, fino a venire dissipata per via della viscosità alle scale più piccole, laddove essa diventa preponderante.



La matematica che sta dietro alla modellazione della turbolenza è complicata e artificiosa, oltre che piena di piccole correzioni *ad hoc* ottenute tramite riscontri con i dati sperimentali. Grazie ad essa, però, si riesce a modellare la turbolenza con discreta accuratezza, non facendo altro che inserire un altro termine di viscosità nelle equazioni di Navier-Stokes proprio come se questo trasferimento di energia corrispondesse, dal punto di vista del flusso medio, ad un comportamento più viscoso del flusso.

Per concludere vale la pena di fare un accenno alle tecniche numeriche che si utilizzano per simulare i fluidi, grazie alle quali oggi, sfruttando la potenza dei computer, siamo in grado di simulare, con un livello di precisione accettabile, il comportamento di buona parte dei fluidi con cui abbiamo a che fare nel nostro mondo. L'idea di base è di tornare al punto di partenza nella defini-

zione del modello, quando avevamo scritto le equazioni di conservazione su di un generico volumetto V . Il metodo dei volumi finiti, di gran lunga il più diffuso algoritmo per la simulazione del moto dei fluidi, si basa sulla semplice ma efficace idea di suddividere tutto il dominio del fluido che si vuole simulare, ad esempio una stanza, un fiume o l'atmosfera intorno a una città, in tantissime piccole celle, scrivendo all'interno di ognuna di esse le equazioni di bilancio che abbiamo visto in precedenza. Quello che ne deriva è un sistema di equazioni di dimensioni enormi, che tuttavia si può risolvere in maniera iterativa con sofisticati metodi numerici che possono essere implementati anche in modo da distribuire il calcolo su tanti processori diversi.



Per avere un'idea di quanto si riesce a fare allo stato dell'arte, pensate che per simulare il flusso attorno ad un'autovettura o a un aereo, il dominio fluido viene suddiviso in decine o centinaia di milioni di piccole celle, e il calcolo viene svolto nel giro di alcuni giorni su enormi cluster di centinaia di processori connessi fra loro! L'immagine qui sotto rende un'idea della complessa mesh che può essere utilizzata ad esempio per simulare con un software commerciale il flusso attorno ad un'autovettura (in modo da ottenere il campo di pressione sulla stessa).

Fonti delle immagini:

- 1) Onda: <http://www.coolchaser.com/themes/keywords/crime+wave>
- 2) Pentola: http://www.physics.arizona.edu/~thews/reu/the_science_behind_it_all.html
- 3) Simulazione CFD: <http://it.wikipedia.org/wiki/Immagine:CFD.jpg>