MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito

• Numero 7 – Agosto 2008 •

Prgibbs, *Oceanside* - http://flickr.com/photos/philipgibbs/2623281711/in/photostream/

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI E METODO URANG-UTANG © - PROJECT MANAGEMENT E PROBLEM SOLVING - PROVA MATEMATICA DELL'ESISTENZA DI DIO - EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES – ENNIO PERES

Come proporre un contributo
Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.
Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.
Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.
In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche sostanziali che devono essere fatte dall'autore.
I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.
Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .rtf o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.
Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail, CV sintetico (100-200 parole).
L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.
I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo [3].
Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.
I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.
Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione. La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli.
Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE
Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006
al n.953 del Tribunale di Lecce

Hanno collaborato a questo numero
Luca Barletta, Antonio Bernardo, Paolo Bonicatto, Roberto Chiappi, Flavio Cimolin, Luca Lussardi, Fioravante Patrone, Alexander Pigazzini, Luciano Sarra, Gabriella Zammillo.

Progetto grafico
Anna Gangale

SOMMARIO

EDITORIALE

Questo numero si apre con un dibattito sulla rigorosità di un metodo usato 'alla buona' per risolvere alcune equazioni differenziali: Paolo, Luca e Fioravante ne discutono mettendo in evidenza limiti e possibili interpretazioni di quello che Fioravante Patrone ha battezzato metodo "Urang-Utang". L'articolo di Roberto sui rapporti tra matematica e filosofia nel problem solving avvia una collaborazione con Matematicamente.it su questi temi. Roberto ha da poco scritto due interessanti libri che abbiamo recensito: "Il problem solving nelle organizzazioni" e "Il foglio elettronico come strumento per il problem solving". In questo articolo riporta qualche osservazione sull'intreccio di queste tematiche. Speriamo di poter avviare sul sito una sezione che tratti questi temi in maniera continuativa. Alexander ci parla di un tema affascinante e che appassiona un po' tutti: la prova matematica dell'esistenza di Dio. E' possibile trovare questa dimostrazione? Alexander ci mostra il tentativo di Kurt Goedel, un matematico diviso tra genio e follia. La cosiddetta prova ontologica Goedel l'ha data ma è tutta da interpretare. Flavio continua il suo viaggio tra le equazioni più famose della matematica. In questo numero ci parla delle equazioni di Navier-Stokes, fondamentali per la comprensione dei fenomeni che hanno a che fare con i movimenti dei fluidi, dal volo degli aerei, all'aerodinamica di auto, moto, caschi. Gabriella ha intervistato per noi il 'giocologo' Ennio Peres uno dei pochi in Italia che ha preso il gioco matematico sul serio e ne ha fatto una professione, realizzando tante idee divertenti che la matematica è in grado di svelare. Non mancano poi un po' di consigli per buone letture e qualche sfida matematica ai lettori.

Antonio Bernardo

90. Sulle equazioni differenziali ordinarie a variabili separabili

di Paolo Bonicatto[1] – Luca Lussardi[2]

1 Introduzione

Un'equazione differenziale ordinaria a variabili separabili è un'equazione del tipo

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{1}$$

Talvolta si usa dire che un'equazione a variabili separabili è un'equazione che può essere scritta nella forma

$$h(y)dy = f(x)dx \tag{2}$$

In tale espressione appare di oscuro significato la manipolazione della notazione $\frac{dy}{dx}$ come se si trattasse di una frazione vera e propria. Si procede quindi integrando ambo i membri della (2), rispetto ad y a sinistra e rispetto a x a destra; infine, magicamente, si trovano y ed x legate da una relazione che fornisce le soluzioni dell'equazione differenziale (1) con $g(y) = \frac{1}{h(y)}$.

Il peggior difetto, a nostro modo di vedere, insito in questo metodo alternativo, sta nel fatto che nell'espressione (2) y ed x diventano variabili indipendenti entrambe, quando invece y dovrebbe essere funzione di x. Solo ad integrazione effettuata y *ridiventa* funzione di x e fornisce quindi le soluzioni dell'equazione data.

Questo metodo è assai traballante sotto ogni punto di vista; ma è completamente da buttare, come sembra affermare F. Patrone nel suo scritto[3] o esiste una via d'uscita?

Nella prossima sezione illustriamo anzitutto il metodo classico per risolvere questo tipo di equazioni; dopo aver proposto un esempio di applicazione del metodo classico, diamo alcuni cenni di una teoria che ci permetterà, in un certo senso, di rendere rigoroso il metodo alternativo, che risulta quindi esposto nel paragrafo conclusivo.

2 Metodo classico

In questo paragrafo illustreremo il metodo classico di risoluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili. Il paragrafo contiene alcune parti di carattere teorico, fondamentali per una comprensione totale dell'argomento; in conclusione riportiamo alcuni esempi espliciti di risoluzione.

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{3}$$

dove $f : I \to \mathbf{R}$ è una funzione continua (I è un intervallo non vuoto e aperto di $\mathbf{R}$) mentre $g : J \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 (con J intervallo aperto non vuoto di $\mathbf{R}$).

Tutte le equazioni differenziali che possono essere scritte sotto questa forma si dicono a *variabili separabili*.

Proponiamoci di trovare l'integrale particolare della (3) che soddisfa alla condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0$$

dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. In altre parole, stiamo risolvendo non solo l'equazione differenziale ma il *problema di Cauchy* dato da:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Per risolvere il problema (4), mettiamoci anzitutto nel caso in cui si abbia $g(y_0) = 0$; allora, eviden-

---

[1] email: sbonica@tin.it

[2] Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Brescia, via Valotti n. 9, 25133, Brescia. email: luca.lussardi@ing.unibs.it

[3] www.diptem.unige.it/patrone/equazioni_differenziali_intro.htm

temente, la funzione costante $y = y_0$ è un integrale della (3): infatti, la derivata di una costante è nulla e, quindi, entrambi i membri dell'equazione si annullano. Il grafico della funzione costante $y = y_0$ è rappresentato da una retta parallela all'asse x.
Consideriamo ora il caso $g(y_0) \neq 0$. Anche in tal caso esiste una ed una sola soluzione locale $y = \phi(x)$ del problema: questo risultato è garantito da un teorema (che non riportiamo) che ci assicura l'*esistenza* e l'*unicità* della soluzione (a livello locale, cioè in un opportuno intervallo) dei problemi di Cauchy.
Da $g(y) \neq 0$ segue che anche $g(\phi(x)) \neq 0$ in un opportuno intervallo $S \subseteq I$. Quindi, sostituendo $y = \phi(x)$ nella (3) e dividendo i membri per $g(\phi(x))$ si trae

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x)$$

A questo punto, possiamo integrare[4] i due membri da x_0 a x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(t)}{g(\phi(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (5)$$

Applicando la regola di *integrazione per sostituzione* (si ricordi che $y = \phi(t)$ e quindi $dy = \phi'(t)dt$) la (5) diventa

$$\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (6)$$

Infine, tenendo conto della condizione iniziale $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (7)$$

Indicando con $G(y)$ e $F(t)$ le generiche primitive di $\frac{1}{g(y)}$ e di $f(t)$ la (7) diviene

$$[G(y)]_{y_0}^{\phi(x)} = [F(t)]_{x_0}^{x}$$
$$G(\phi(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

Isolando $G(\phi(x))$ abbiamo

$$G(\phi(x)) = G(y_0) + F(x) - F(x_0)$$

La funzione G è iniettiva, e dunque l'ultima uguaglianza diventa

$$\phi(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0))$$

e fornisce quindi la soluzione in forma esplicita del (4).

ESEMPIO 2.1. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Riscriviamo l'equazione come

$$y' = -2xy^2$$

La funzione $g(y) = y^2$ si annulla evidentemente solo nel punto $y = 0$. Quindi un integrale sarà dato da $y \equiv 0$ che è l'unica soluzione nel caso $y_0 = 0$. Poniamo ora $y_0 \neq 0$ e dunque $y \neq 0$ in tutto un intorno di y_0. Dividiamo ambo i membri per y^2. Si ha

$$\frac{y'}{y^2} = -2x$$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} = -2x$$

Integriamo da x_0 a x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)} dt = \int_{x_0}^{x} -2t dt$$

Integrando sempre per sostituzione si ha

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{dy}{y^2} = \int_{x_0}^{x} -2t dt$$

da cui

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_{y_0}^{\phi(x)} = [-t^2]_{x_0}^{x}$$

[4] Abbiamo cambiato la lettera di integrazione in t per evitare confusione.

cioè

$$-\frac{1}{\phi(x)}+\frac{1}{y_0}=-x^2+x_0^2$$

$$-\frac{1}{\phi(x)}=-x^2+\left(x_0^2-\frac{1}{y_0}\right)$$

$$\frac{1}{\phi(x)}=\frac{x^2y_0-x_0^2y_0+1}{y_0}$$

Invertendo si ricava l'espressione che rappresenta la soluzione del problema con condizione $y_0 \neq 0$:

$$\phi(x)=\frac{y_0}{x^2y_0-x_0^2y_0+1}$$

$$\phi(x)=\frac{y_0}{1+y_0(x^2-x_0^2)}$$

3 Forme differenziali lineari

La teoria delle forme differenziali lineari trova la sua fondamentale applicazione in ambito geometrico-differenziale; lo scopo infatti è quello di generalizzare il calcolo vettoriale anche a spazi che non sono necessariamente immersi in un $\mathbf{R}^n$. In questa sezione ci limitiamo a fornire alcuni cenni sulla teoria delle forme differenziali lineari in $\mathbf{R}^2$, che rappresenta lo strumento adatto che ci consentirà di formalizzare il metodo alternativo accennato nell'Introduzione.

Definiamo le applicazioni dx e dy come funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ ponendo

$$dx(x,y)=x, \qquad dy(x,y)=y$$

Le applicazioni dx e dy sono chiaramente lineari e continue. Sia Ω un aperto in $\mathbf{R}^2$; una *forma differenziale lineare* è una generica combinazione lineare delle applicazioni dx e dy, a coefficienti in $C^0(\Omega)$, ovvero

$$\omega=u(x,y)dx+v(x,y)dy$$

con $u,v:\Omega\to\mathbf{R}$ continue. Dunque ω è definita come un'applicazione che manda il generico *(x,y)* nell'applicazione $u(x,y)dx+v(x,y)dy$. È chiaro che in tale approccio non esiste nessun legame tra *y* ed *x*: esse sono due variabili indipendenti a tutti gli effetti.

ESEMPIO 3.1. Sia $F:\Omega\to\mathbf{R}$ una funzione di classe C^1; allora il differenziale di F è una forma differenziale lineare di classe C^0, dal momento che si ha

$$d\phi=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy$$

L'esempio precedente motiva la seguente definizione: una forma differenziale lineare ω di classe C^0 si dice *esatta* se esiste una funzione $F:\Omega\to\mathbf{R}$ di classe C^1 tale per cui si abbia

$$dF=\omega$$

Se $\omega=u(x,y)dx+v(x,y)dy$ allora ω risulta esatta se e solo esiste $F:\Omega\to\mathbf{R}$ di classe C^1 tale per cui

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx=u(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy=v(x,y)$$

Diciamo che la funzione F è una primitiva della forma ω e ovviamente non è unica, ma è definita a meno di costanti additive. Infatti se F è una primitiva di ω allora $F+c$ è una primitiva per ω, $\forall\ c\in\mathbf{R}$; viceversa se Ω è connesso e F_1 e F_2 sono due primitive di ω allora F_1-F_2 è costante.

4 Formalizzazione del metodo alternativo

In tale sezione conclusiva applichiamo il formalismo esposto nella sezione 3 per cercare di giustificare rigorosamente la risoluzione alternativa di un'equazione differenziale a variabili separabili.

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=-\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{9}$$

con $u,v:\Omega\to\mathbf{R}$ di classe C^1 su Ω aperto contenente $(x_0,\ y_0)$. Supponiamo inoltre che sia $v(x_0,y_0)\neq 0$.

TEOREMA 4.1. *Sia ω la forma differenziale di classe C^1 data da*

$$\omega = u(x,y)dx + v(x,y)dy$$

Supponiamo che ω sia esatta, e sia F una sua primitiva. Allora valgono i seguenti fatti.

i. *Se $y=y(x)$ è soluzione locale del problema (9) allora $F(x,y(x)) =$ costante.*

ii. *Sia $c = F(x_0, y_0)$ e sia C la curva di equazione $F(x,y) = c$. Allora C è, localmente, un grafico, e più precisamente il grafico dell'unica soluzione locale del problema (9).*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che se $y(x)$ è soluzione locale del problema (9) allora $F(x,y(x))$ = costante. Infatti, sia $G(x) = F(x,y(x))$; G è quindi di classe C^1, pertanto ammette derivata prima continua e si ha

$$G'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(y, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y(x)) \cdot y'(x) =$$

$$= u(x,y) + v(x,y)\left(-\frac{u(x,y)}{v(x,y)}\right) = 0$$

Ne segue che $G(x)$=costante, da cui $F(x,y(x))$=*costante.*

Resta da dimostrare che $F(x,y) = c$ definisce, localmente attorno al punto (x_0, y_0), in forma implicita l'unica soluzione $y=y(x)$ del problema (9). Infatti, essendo per ipotesi $v(x_0, y_0) \neq 0$, si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

e dunque per il Teorema del Dini[5] esiste un'unica funzione $y=y(x)$ di classe C^1 definita in un intorno di x_0 tale che $F(x,y(x))=c$. Derivando tale espressione si trae che

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(y, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y(x)) \cdot y'(x) =$$

$$= u(x,y) + v(x,y) \cdot y'(x)$$

da cui si può affermare che y risolve il problema (9). ■

Applichiamo a questo punto quanto abbiamo dimostrato per risolvere equazioni differenziali a variabili separabili. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

e supponiamo $g(y_0) \neq 0$. Intanto come sempre $g(y) \neq 0$ anche in un intorno di y_0. In tal caso l'equazione data può essere riscritta come

$$y' = -\frac{f(x)}{-\frac{1}{g(y)}}$$

che è la forma che appare nel problema (9). Sia $\omega = f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy$; tale forma è esatta poiché la funzione

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}ds$$

è una primitiva di ω. Ne segue che, passando all'integrazione indefinita, possiamo scrivere l'integrale generale del problema dato mediante la relazione

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + c, \qquad c \in \mathbf{R} \tag{11}$$

che rappresenta la formula risolutiva *sciaguratamente diffusa* anche sui libri di testo, dedotta da una manipolazione formale delle quantità dx e dy. Osserviamo invece che, seguendo l'approccio sopra esposto, tale formula risolutiva resta giustificata in modo rigoroso, nonostante le variabili x e y siano, a tutti gli effetti, indipendenti tra loro.

ESEMPIO 4.2. Risolviamo ora con tale metodo l'equazione differenziale data da

$$y' + 2xy^2 = 0 \tag{12}$$

Trovato l'integrale singolare $y = 0$, possiamo supporre $y \neq 0$. Applicando direttamente la formula (11) otteniamo

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\int 2x dx + c$$

che porge l'espressione dell'integrale generale:

$$y = \frac{1}{x^2 + C}$$

dove C è un'opportuna costante reale.

[5] Data F di classe C^1 e (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste un'unica funzione $y=g(x)$ di classe C^1 definita in un intorno di x_0 che soddisfa localmente $F(x, g(x)) = c$.

91. Un commento all'articolo di Lussardi-Bonicatto

*di Fioravante Patrone**

Interessante l'approccio di Bonicatto e Lussardi. Certo non nuovo come metodo risolutivo per equazioni differenziali: lo si ritrova in molti libri e va al di là del caso delle equazioni a variabili separabili (pfaffiano è la parola magica).

L'interesse sta nello scopo "giustificazionista" del metodo urang-utang©. Direi che la logica retrostante l'approccio di L&B è quella di trovare un metodo corretto che si avvicini il più possibile, dal punto di vista dei passaggi risolutivi, alla strada seguita col metodo urang-utang©.

Basta riflettere un poco e si comprende quali sono le principali[1] mascalzonate compiute col metodo urang-utang©:

– fare finta che y', ovvero $\dfrac{dy}{dx}$, sia un **quoziente** di due quantità *aventi senso indipendentemente*

– nascondere che y è funzione della x o usare questo fatto, a seconda di cosa faccia comodo.

Indubbiamente il metodo illustrato da B&L evita queste due mascalzonate. La seconda, senz'altro. La prima? Beh, sì. Come ho detto sopra, il metodo seguito è corretto[2]. Però un lettore che non sia sufficientemente robusto in Analisi Matematica può avere l'impressione che qualcuno abbia fatto sparire il coniglio nel cappello, per poi tirarne fuori due bianche colombe. In effetti, la funzione lineare che loro (mica solo loro! Anch'io[3]) chiamano dx non è altro che la funzione $(x,y) \mapsto x$ che *tutti* chiamano x o, se proprio vogliono fare i saputelli, Proj_1 (proiezione di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sulla "prima coordinata"). Ecco dove uno può avere la legittima sensazione di essere preso in giro, se non addirittura temere di essere ingannato. Ovviamente non c'è nessun inganno, solo che probabilmente resta un po' oscura la logica che porta non tanto alla procedura seguita quanto alla introduzione di quella specifica, nuova, notazione. In sintesi, osservo che sarebbe forse stato opportuno dilungarsi un po' di più sui preliminari, per tranquillizzare chi legge. Non ho invece nessuna obiezione sulla procedura seguita.

Si può fare di meglio? Più che altro, vorrei osservare che c'è un'altra strada percorribile, per provare a capire come mai un metodo come quello urang-utang© stia in piedi, nel senso di offrire una procedura sbagliata che però dà tipicamente risultati corretti. La strada cui faccio riferimento è quella di approssimare la derivata col rapporto incrementale, seguendo quindi l'idea di una risoluzione approssimata. Si tratta di sostituire y' con $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, dove $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$. Se qualcuno ha voglia di provarci, è benvenuto.

Chiosa finale. La mia **indignazione** nei confronti del metodo urang-utang© non è dovuta al fatto che venga proposta una strada risolutiva traballante (a voler essere *molto* buoni!!). Ma è il fatto che questa strada, infarcita di erroracci da fare accapponare la pelle, venga sbattuta in faccia al lettore, al discente, **come se fosse corretta**! Questo porta a corrompere un sano spirito critico, scientifico. E, come tale, l'ho denunciata e va denunciata.

* DIPTEM, Università di Genova, P.le Kennedy, Pad. D, 16129 Genova. http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

[1] Ce ne sono altre, di marachelle, che assumono il ruolo di "damigelle d'onore": dividere un po' sportivamente per quantità di cui non si è certissimi che siano diverse da zero; integrare alla sperandio, senza preoccuparsi di sapere su quale intervallo si stia integrando; trattare i valori assoluti in modi arditi (eufemismo); etc.

[2] Secondo la liturgia in uso nella chiesa cui appartengono i matematici d'oggi.

[3] Magari qualcuno tra i lettori ha in casa degli appunti ciclostilati, ed ormai ingialliti, ricavati da un mio manoscritto intitolato "Chi è *dx*?", nel quale dico praticamente le stesse cose a proposito di questo elusivo *dx*.

92. Filosofia e Matematica per il Project Management ed il Problem Solving[1]

Roberto Chiappi
Ricerca sulle tecniche di Project management e Problem solving

Sommario

L'articolo presenta nell'introduzione i legami esistenti tra filosofia, matematica e management soffermandosi principalmente sulla circolarità bi-direzionale esistente tra *project management*, *change management* e *problem solving*. Le schede degli autori citati, che vanno da Mosè a Mintzberg, sono riassunte nel corpo dell'articolo e cercano di mostrare le radici filosofiche e matematiche di alcune idee, metodi e strumenti che hanno consentito di sviluppare modelli e prototipi efficaci per risolvere i problemi delle organizzazioni. In conclusione si riportano alcune esperienze, vissute direttamente dall'autore, che possono riportarsi alla metafora *della cassetta degli attrezzi* e a quella *dell'amplificatore dell'intelligenza umana.*

Philosophy and Mathematics for Project Management and Problem Solving

In its introduction the article points to the connections between philosophy, mathematics and management focussing on the network of relationships occurring between project management, change management and problem solving. The essay also picks up, and briefly outlines, some of the significant philosophical or mathematical ideas which have proved to be influential and effective in solving the problems of organizations. On the grounds of both philosophical/ mathematical knowledge and of personal experience the author argues finally that the methods involved in problem solving should not be idealized or mythologized. On the contrary they should simply be taken as *tools in the box* of Management and as *amplifiers of human intelligence*.

[1] La prima versione di questo articolo è comparso sul numero di gennaio-febbraio 2006 della rivista impiantistica italiana.

Introduzione

Oggi molti, tra cui alcuni filosofi di professione, ritengono che la filosofia non abbia alcuna applicazione pratica e ne fanno questione di merito perché essa, dicono, si occupa di temi più elevati come quelli dell'essere e del sapere. La scienza poi, e la matematica in particolare, non sono generalmente considerate dagli intellettuali parte integrante della cultura che sarebbe sempre e solo quella umanistica. In Italia questo stato di cose si può far risalire alla disputa, avvenuta nella prima metà del novecento, tra il matematico ed epistemologo Federico Enriques ed il filosofo idealista Benedetto Croce; questa disputa ebbe negli anni successivi grande peso sullo sviluppo della cultura del nostro paese (1) ed ancora oggi il sistema della formazione e quello della ricerca ne sono segnati pesantemente. Come noto all'epoca vinse la disputa Croce sostenendo che solo le grandi menti hanno accesso ai grandi problemi mentre agli "ingegni minuti" è solo consentito di interessarsi di botanica e di aritmetica. Mostrare che filosofia e matematica sono congiunte, e che tra esse è sempre esistita una fertilizzazione incrociata è compito facile basta pensare alle rispettive storie e ad esempio a personaggi come Talete, Pitagora e in tempi moderni a Bertrand Russel e, in Italia, Bruno De Finetti. Più difficile è mostrare i legami esistenti tra matematica e filosofia da una parte e management dall'altra (Fig. 1) per

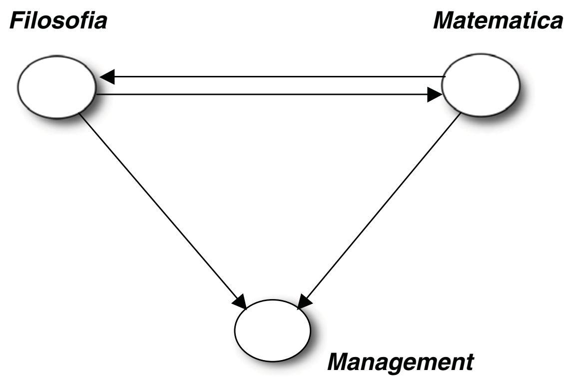


Fig.1. Filosofia, Matematica e Management

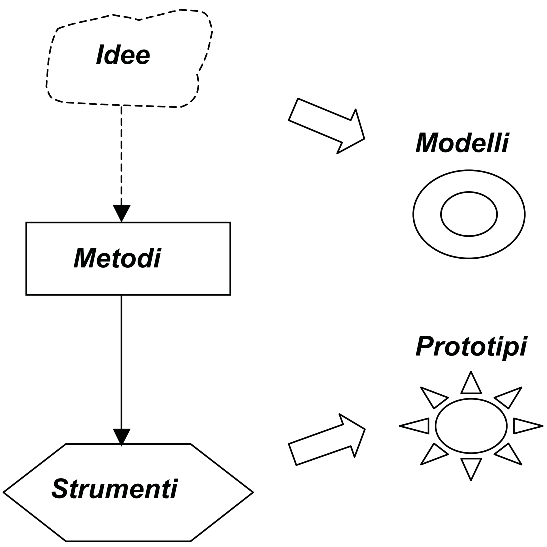


Fig.2 Idee, Metodi e strumenti

questo motivo è venuta l'idea scrivere il libro "*Problem solving nelle organizzazioni: idee metodi e strumenti da Mosè a Mintzberg*" (2). Il volume riporta oltre 100 schede nominative di pensatori e oltre 300 argomenti che si riferiscono alle idee, i metodi e gli strumenti utilizzati per sviluppare modelli (eventualmente su computer) e prototipi utili per risolvere i molteplici problemi delle organizzazioni (Fig. 2). Il principale stimolo all'approntamento di questo volume deriva dalla consapevolezza che problematiche tradizionalmente considerate separate come il Project Management, il Problem Solving e il Change Management sono in realtà collegate da una solida circolarità bidirezionale: si può, ad esempio, partire con un problema e sviluppare dei progetti per risolverlo, si può partire invece con un progetto di cambiamento e avere, per realizzarlo, moltecipli problemi da risolvere (Fig. 3). Nel seguito sono riassunte alcune schede del volume che possono dare una idea dei molteplici contributi pratici che il *problem solving* ed il *decision making* delle organizzazioni possono trarre dalla filosofia e dalla matematica.

Le schede

La Bibbia, nell' Esodo, racconta che Mosè impiegava tutto il suo tempo ad ascoltare le persone del suo popolo che gli proponevano i più svariati problemi in modo tale che lui, che ben conosceva la legge di Dio, li aiutasse a risolverli. Il suocero, vedendo che Mosè stava da mane a sera ad ascoltare le persone e a risolvere problemi, anche i più minuti gli disse che quel modo di fare non andava bene e che lui gli avrebbe suggerito come procedere. Devi individuare, disse il suocero a Mosè, delle persone giuste e competenti e farne i capi di decine, di cinquantine, di centinaia e di migliaia; ciascuno risponderà al suo superiore e solo i capi di migliaia risponderanno direttamente a te. Ciascuno risolverà tutti i problemi compatibili con le sue capacità e tu avrai finalmente il tempo necessario per concentrarti sui problemi più complessi e per affinare la conoscenza della legge di Dio. Si ha, in questo racconto, la prima descrizione pratica dell'utilità della struttura gerarchica e del principio di delega nell'affrontare e risolvere efficientemente i molti problemi di una organizzazione.

La leggenda racconta che Talete, filosofo di Mileto, si pose, durante un suo viaggio in Egitto il problema di calcolare l'altezza delle piramidi; naturalmente all'epoca non esistevano strumenti di misurazione a distanza. Talete osservò che le piramidi, come tutte le costruzioni, generavano in presenza del sole un ombra tanto più lunga quanto maggiore era l'altezza della costruzione. Osservò pure che piantando un asta di uno o due metri nel terreno l'ombra cresceva con l'altezza dell'asta. Infine osservò che esisteva un' ora del giorno in cui la lunghezza delle ombre di tutte le aste piantate nel terreno coincideva esattamente con la loro altezza; bastò allora misurare a quell'ora l'ombra della piramide per conoscerne immediatamente l'altezza (Fig.4). Il primo insegnamento che si può trarre da Talete e che quando, per risolvere un problema, non si può misurare una certa grandezza si può sempre tentare di misurar-

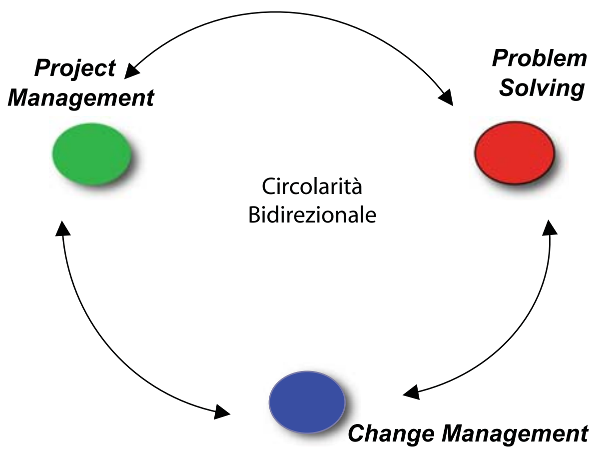


Fig. 3. Project Management, Problem Solving, Change Management

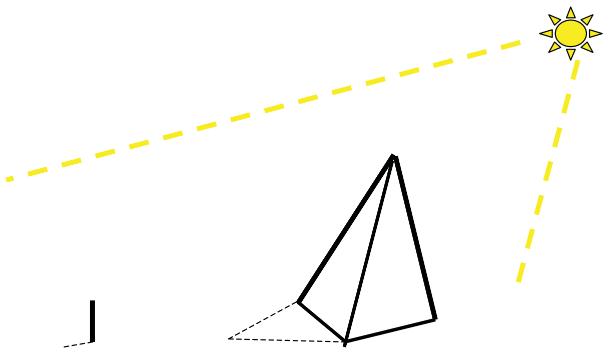


Fig. 4. Proporzioni (Talete)

ne un'altra correlata più facilmente accessibile. Nel controllo dell'avanzamento fisico delle attività di un progetto, ad esempio, non sempre si può misurare il lavoro prodotto ed allora ci si accontenta di misurare lo sforzo effettuato valutando le ore*uomo spese o i costi sostenuti. Il secondo insegnamento è l'importanza delle proporzioni ben noto a chi deve risolvere qualunque problema di stima ad esempio nei preventivi, nella stesura del budget o nell'analisi dei progetti d'investimento. Il terzo e forse più importante punto è l'uso delle aste come modelli in scala ridotta delle piramidi. Un buon modello deve rappresentare le caratteristiche principali del sistema in studio (nel caso deve essere dotato di altezza e deve generare un ombra), deve essere piuttosto semplice e maneggevole (e le aste lo sono), deve consentire facilmente l'esecuzione di misure e di simulazioni correlate (nello specifico attraverso delle proporzioni) con il più complesso e meno accessibile sistema oggetto di studio (l'altezza delle piramidi). A Pitagora è attribuita la frase *"Tutte le cose che si conoscono hanno numero; senza quello nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere"*. Dunque il numero (noi più in generale pensiamo alla matematica) è visto come base del pensiero e della conoscenza e quindi, è da supporre, anche come base per la risoluzione dei problemi. Si consideri quello che è forse il più celebre teorema di tutti i tempi e che viene attribuito a Pitagora anche se è noto che molte terne pitagoriche (ad esempio 3,4,5) erano già conosciute dai babilonesi. In uno spazio bidimensionale la distanza tra due punti (in Fig. 5 la distanza tra "a" e "ideale" è pari a 5) si può agevolmente calcolare con il teorema di Pitagora. Il concetto di "distanza" è forse il concetto matematico più utilizzato, esplicitamente o implicitamente, nel mondo delle organizzazioni dopo quello di "proporzione" attribuito a Talete. Nel problem solving qualunque procedura adottata deve tendere a ridurre quanto più possibile la distanza tra la situazione problematica rilevata e la soluzione del problema. Per uscire dalle generalità si consideri la situazione problematica di un *main contractor* che deve acquistare dei motori e scegliere tra quattro possibili fornitori (a,b,c,d); i motori dei fornitori potranno essere valutati su diversi criteri, ad esempio: il minor costo, la maggior potenza, la maggior qualità/affidabilità, i minori tempi di consegna, il minor impatto ambientale, i condizionamenti politici locali, etc. Se

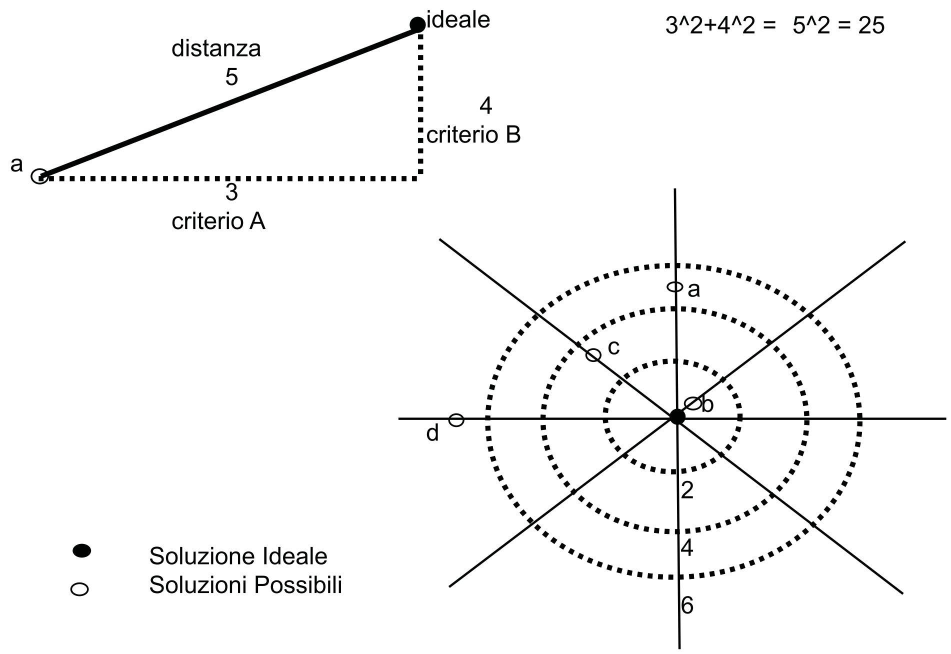


Fig. 5. Distanza (Pitagora)

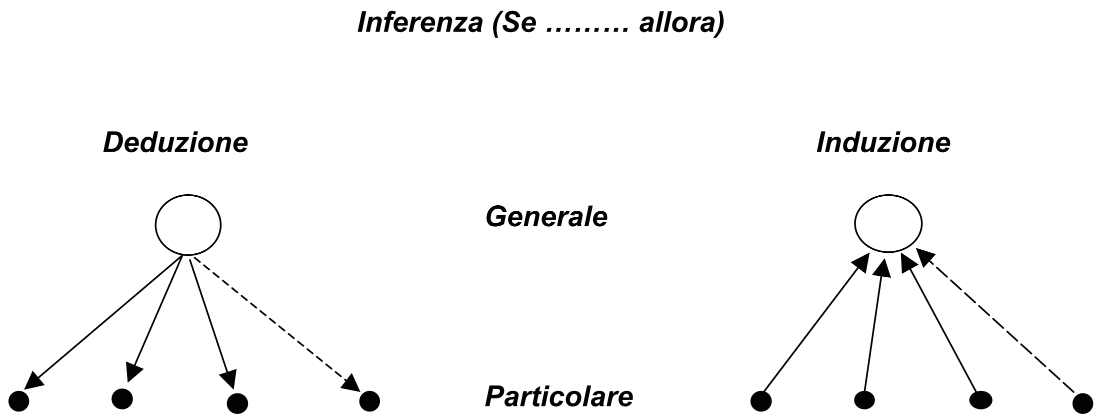


Fig. 6. Logica (Aristotele)

un fornitore risultasse migliore su tutti i possibili criteri il problema sarebbe risolto, ma il più delle volte non è così: un fornitore è migliore per uno specifico criterio, uno è migliore per un altro etc.. Siamo in presenza di un problema di scelta multicriteri. Il primo passo per risolvere il problema è definire un fornitore ideale (non esistente nella realtà) che è dotato di tutte le caratteristiche migliori dei fornitori reali. Il secondo passo consiste nel calcolare (in uno spazio n-dimensionale denominato spazio dei criteri) la distanza di ciascun fornitore reale da quello ideale. Infine si può scegliere quel fornitore (in Fig. 5, "b") che dista meno dalla soluzione "ideale".

La metafisica e la fisica di Aristotele sono rimaste basilari nel pensiero Occidentale per secoli (3) e sono state confutate solo con la nascita della scienza moderna (Bacone, Galilei, Newton). La logica, che peraltro Aristotele riteneva fosse parte secondaria del suo pensiero, continua invece a svolgere un ruolo importante anche nella logica moderna sviluppata a partire da Leibniz, Eulero e Boole. Nelle moderne organizzazioni le persone per discutere dei loro problemi e per tentare di risolverli ricorrono consciamente e più spesso inconsciamente alla logica di Aristotele. Ad esempio sono largamente utilizzati il principio d'identità, quello di non contraddizione e quello del terzo escluso (*tertium non datur*). Solo in tempi recenti sono state sviluppate delle logiche polivalenti in cui oltre a proposizioni vere o false si possono avere proposizioni indecidibili o proposizioni con grado di verità sfumato. La logica di Aristotele è largamente basata sull'uso del sillogismo, ad esempio: "Se tutti gli uomini sono mortali e se Socrate è un uomo allora Socrate è mortale" e le inferenze di tipo "*if…… then*" sono oggi alla base di qualunque programma di computer, inoltre i sistemi esperti, tra i pochi successi concreti dell'intelligenza artificiale, sono fondati su regole di produzione molto simili ai sillogismi di Aristotele. L'inferenza (vedi Fig. 6) induttiva procede dal particolare al generale come nelle aziende moderne si fa nelle ricerche di mercato e nel controllo della qualità mentre l'inferenza deduttiva procede al contrario dal generale al particolare come quando da proposizioni generali del tipo "scopo dell'organizzazione è massimizzare il valore per gli azionisti" si deducono politiche, strategie e tattiche operative.

Guglielmo d'Occam è un filosofo e teologo britannico nato nel 1290 ed esponente della scuola di pensiero scolastica. Riflettendo su questioni di metafisica giunse a formulare un principio metodologico di efficienza che è anche prezioso per qualunque tipo di organizzazione: "*entia non sunt multiplicanda praeter necessitate*", in parole povere "non bisogna mai cercare di complicare le cose più di quanto sia necessario per comprenderle e farle funzionare" (Fig. 7). Il principio di economia di Occam è quanto mai attuale oggi in tempi di economia globalizzata e scienza della complessità: le organizzazioni, pubbliche o private,

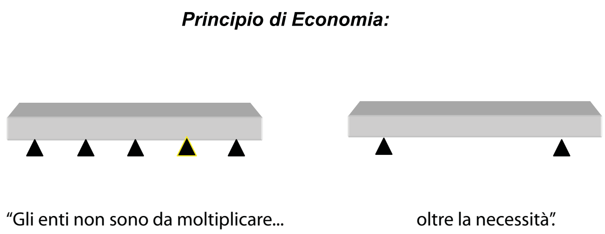


Fig. 7. Efficienza (Guglielmo d'Occam)

Tabelle delle presenze, delle assenze e delle correlazioni

Fenomeno	Presenza	Grado	Correlazione
A	○	20	C
B B B	○ ○ ○	30	A
C C	○ ○	10	B

Fig. 8. Osservazione e sperimentazione (Francesco Bacone)

potrebbero trarre grande giovamento dallo snellimento delle strutture e dalla riduzione della burocrazia, vedi in proposito il recente lavoro di Luca Ricolfi (6); le metodologie di soluzione dei problemi potrebbero partire dalla considerazione dei percorsi più semplici e diretti, i nuovi prodotti (ed in particolare quelli high tech) potrebbero essere sviluppati tenendo sempre presenti le effettive esigenze dell'utente finale e meno quelle di differenziazione dai concorrenti, realizzate spesso con l'invenzione di bisogni non richiesti. Forse accanto al paradigma, oggi dominante, della complessità dei problemi bisognerebbe svilupparne uno della semplicità delle soluzioni proposte.
Per Bacone, a differenza di Aristotele, il processo induttivo dal particolare al generale era necessariamente basato sulla osservazione sperimentale e sulla precisa registrazione e tabulazione dei fatti osservati; si poteva così registrare presenza o assenza dei fenomeni e loro eventuale correlazione (Fig. 8). Oggi il controllo statistico della qualità procede all'incirca nello stesso modo basandosi sull'osservazione di presenza o assenza di difetti tra vari campioni dei pezzi prodotti e sull'analisi di correlazione statistica che può portare alla scoperta delle cause dei fenomeni osservati. Oltre a suggerire queste metodologie, che possono essere utili per migliorare il funzionamento di una organizzazione (*pars adstruens*), Bacone individua stereotipi da cui ci si dovrebbe guardare e che dovrebbero essere rimossi (*pars destruens*): consuetudini e luoghi comuni (*idola tribus*), mitizzazione estrema dei bei tempi andati o del cambiamento a tutti i costi (*idola specus*), comunicazione scadente e trappole del linguaggio (*idola fori*), enfatizzazione di miti, riti, visione e missione aziendale (*idola theatri*).
Cartesio è stato forse il primo filosofo ad occuparsi esplicitamente di metodologie volte alla ricerca di soluzione dei problemi ed a questo tema è dedicato il celebre volume: "*Discorsi sul metodo*". Uno dei fondamentali precetti di Cartesio è quello di scomporre i problemi (Fig. 9) in sottoproblemi più semplici per poterli meglio risolvere. Questa filosofia è quella che, nel Project management, si chiamerà *Work Breakdown Structure (WBS)*, cioè metodologia di disaggregazione del progetto per poterlo gestire al meglio. Un altro precetto di Cartesio e quello di affrontare prima i problemi più semplici e poi, con la base di queste soluzioni salire man mano ad affrontare quelli più complessi; in questa indicazione si può trovare un interessante anticipo della tecnica del prototipo che nelle organizzazioni suggerisce, quando si vuole cambiare, di partire sempre con pro-

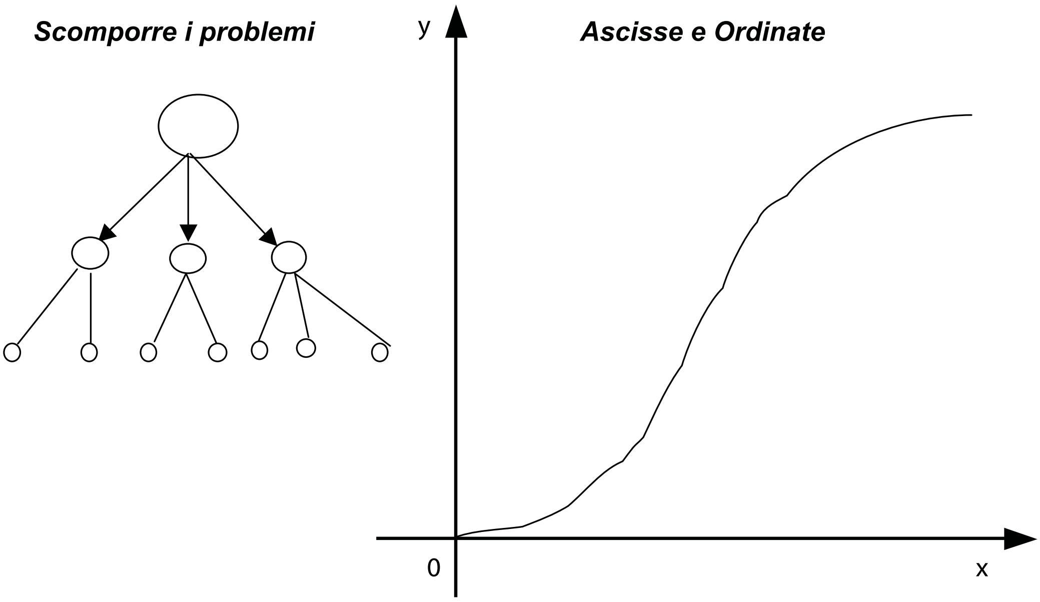


Fig. 9. Il Metodo. La geometria analitica (Renato Cartesio).

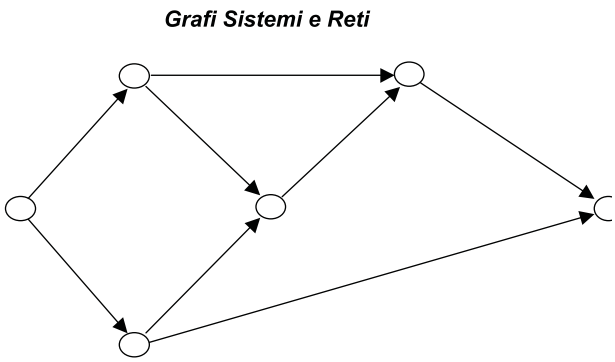


Fig.10. Teoria dei grafi (Leonardo Eulero).

getti/problemi reali, ma semplici in modo di aver garantito un successo che abbia effetto trainante sulla cultura aziendale. Nelle aziende è diffuso un detto che recita: "è spesso più comprensibile un grafico che cento tabelle" ed a Cartesio si attribuisce l'invenzione della geometria analitica e dei grafici ad ascisse e ordinate (Fig. 9). Ad esempio l'andamento di un progetto nel tempo potrà essere rappresentato da un grafico che sulle ascisse riporta il tempo trascorso dall'inizio e sulle ordinate l'avanzamento fisico, le ore*uomo spese o i costi sostenuti: si tratta della curva ad "S" ben nota a tutti coloro che hanno lavorato per progetti.
Se Cartesio può considerarsi il padre delle strutture gerarchiche ad albero circa un secolo dopo Eulero lo è stato delle strutture reticolari. La leggenda racconta che nella cittadina prussiana di Koenisberg ci si chiedeva se fosse possibile programmare una passeggiata che attraversasse una ed una sola volta i sette ponti della città sul fiume Pregel. Eulero dimostrò che tale passeggiata non era possibile, ma nel frattempo aveva posto le basi matematiche della teoria dei grafi (Fig. 10), dei sistemi e delle reti (4). Negli anni 50 dello scorso secolo i lavori di Eulero furono la base per sviluppare le tecniche reticolari che sono una potente metodologia di Problem Solving nell'ambito della pianificazione e controllo dei progetti. Se Cartesio aveva permesso di scomporre problemi e progetti nelle loro componenti elementari, la teoria dei grafi di Eulero consentiva di ricostituirne la trama attraverso la considerazione delle interdipendenze tra i vari elementi costituenti. Ad Eulero, forse il più grande matematico di tutti i tempi assieme a Gauss, è anche attribuita la formulazione moderna degli algoritmi ricorsivi per la soluzione dei problemi non risolvibili in forma esatta (ad esempio le equazioni algebriche di grado superiore al 3°). Il ricorso alla potenza degli algoritmi, cioè all'idea di dividere i problemi aritmetici in sottoproblemi analoghi di dimensione più piccola, divenne fondamentale per lo sviluppo degli elaboratori a partire dalla "macchina alle differenze" e "dalla macchina analitica" di Charles Babbage (7) Anche in questo caso le applicazioni pratiche sono molteplici, ad esempio se si desidera calcolare il tasso di rendimento interno di un progetto d'investimento è necessario risolvere una equazione di grado ennesimo, in cui "n" rappresenta il numero di anni di vita presunta della iniziativa, e l'unico modo per farlo è ricorrere ad un algoritmo ricorsivo che, implementato su computer, permette di risolvere il problema in poche frazioni di secondo.
Durante la prima guerra mondiale Henry Gantt, un ingegnere americano, lavorava all'ufficio ordinazioni dei materiali e delle munizioni dell'esercito statunitense. Avendo collaborato con Taylor conosceva bene i principi dello *Scientific Management* ed era particolarmente attento a fornire rappresentazioni grafiche e modellizzazioni che po-

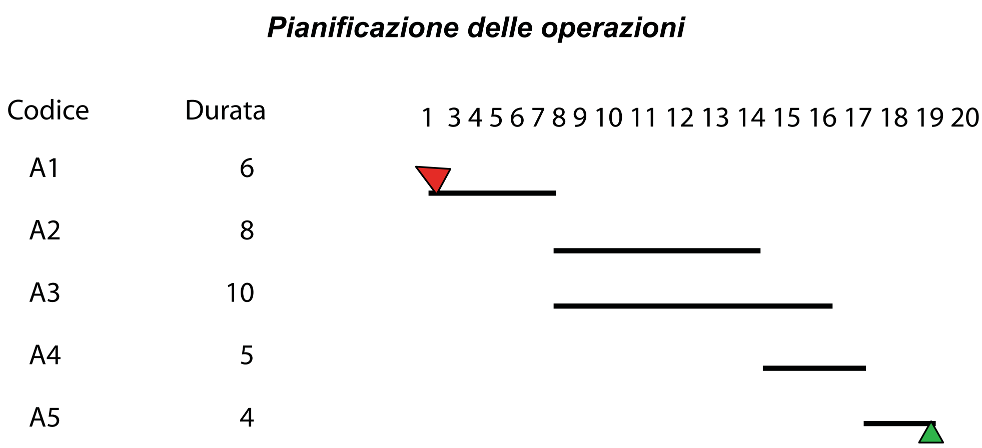


Fig. 11. Diagrammi a Barre (Henry Gantt).

tessero aiutare chi doveva prendere le decisioni ed attuare le scelte. Gantt voleva trovare una forma grafica chiara ed evidente che potesse raccordare l'approvvigionamento delle munizioni (*procurement*) con le operazioni militari sul campo (*construction*) e per questo pensò che doveva rappresentare efficacemente il tempo che è la variabile principale che raccorda le due fasi di una campagna di guerra. I diagrammi di Gantt (Fig. 11) riportano sulla prima colonna a sinistra l'elenco delle attività costituenti il progetto sulla prima riga in alto il tempo espresso in ore, giorni, settimane o mesi e al centro, nel corpo del grafico, una barra di lunghezza proporzionale alla durata di ciascuna attività. Questo tipo di rappresentazione è ancora oggi quella preferita dai project manager e construction manager e per questo motivo tutti i principali softwares commerciali di project planning (Winproject, Artemis, Primavera, Open Plan, etc.) prevedono degli output grafici in forma di diagramma di Gantt anche quando vengono utilizzate le più potenti tecniche reticolari.

Karl Popper è uno dei pochi filosofi che si sia occupato esplicitamente di problem solving facendone uno dei capisaldi della sua filosofia. Il suo metodo si distingue perchè è basato sulla *falsificazione* (Fig. 12) delle affermazioni invece che sulla *verifica* delle stesse. Per *verificare* l'affermazione "tutti i cigni sono bianchi" non basta controllare che lo siano quelli che incontriamo o altre decine o centinaia, mentre per *falsificare* la stessa affermazione è sufficiente incontrare un solo cigno

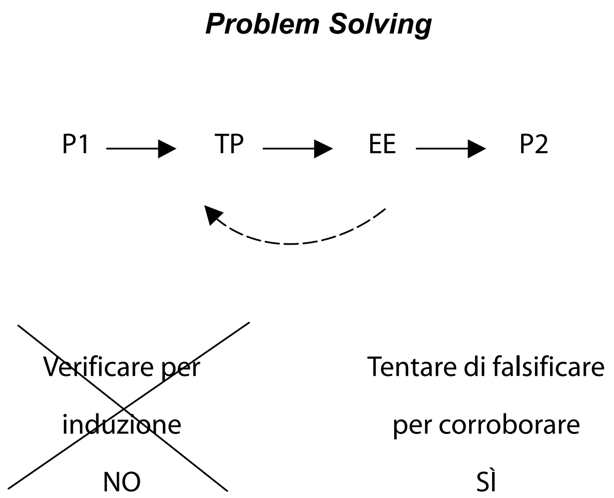


Fig. 12. Falsificazione e Corroborazione delle Teorie (Karl Popper).

nero (come quelli visti da Popper in Australia). Molto spesso anche nelle organizzazioni ci si ostina a voler verificare e confermare delle idee e delle teorie che si ritiene debbano essere vere e valide. Sarebbe meglio, sostiene Popper, cercare di falsificarle perché se si riuscirà a farlo esse dovranno essere abbandonate, altrimenti saranno corroborate e potranno essere assunte come valide (anche se provvisoriamente) sino a prova contraria. Per Popper il processo di miglioramento della conoscenza e anche della sopravvivenza degli individui e delle organizzazioni passa per continui processi di problem solving basati sulla tetrade (*P1—->TP—->EE—->P2)*. P1 rappresenta il problema iniziale che dobbiamo risolvere TP rappresenta la teoria provvisoria che formuliamo per risolvere o spiegare il problema, a questo punto (EE) è necessario eliminare gli errori presenti nella nostra teoria o nel modello della realtà che abbiamo costruito, questo processo può richiedere diversi tentativi successivi di eliminazione degli errori e riformulazione della teoria sino quando, giunti ad una soluzione soddisfacente la ricerca si chiude, ma di solito nuovi problemi (P2) si aprono. Per Popper dunque qualunque ricerca si apre e si chiude con dei problemi così come succede mese dopo mese nella vita delle organizzazioni (*la ricerca non ha fine*).

H.Mintzberg, Ingegnere canadese nato nel 1939, è assieme a Drucker e Peters uno dei massimi Guru del management contemporaneo. Nei suoi lavori ha esplicitato meglio di ogni altro la natura del lavoro manageriale e i meccanismi attraverso cui i top managers prendono le decisioni e risolvono i problemi all'interno delle aziende. La maggior parte di loro impiega il proprio tempo nel disbrigo delle e-mail, nelle telefonate, in riunioni, viaggi, incontri formali e informali; quasi nessuno usa metodi strutturati per prendere le decisioni, preferiscono invece decidere rapidamente in base ad intuizioni, sensazioni o contatti avuti con amici e colleghi. I managers di alto livello non prediligono le relazioni scritte, danno una occhiata alle riviste e passano in rassegna solo la corrispondenza, amano fare tutto precipitosamente e con frequenti interruzioni in modo da poter affrontare contemporaneamente più problemi e solo una o due volte alla settimana si dedicano ad una stessa questione per più di due ore

consecutive. Preferiscono occuparsi di problemi concreti e rifuggono da questioni astratte, ma sembrano privilegiare la parte destra del cervello, quella che presiede l'arte e l'intuizione, rispetto alla parte sinistra che governa la razionalità la logica e le analisi quantitative. Per quanto riguarda le strutture e le capacità complessive di una organizzazione di risolvere i propri problemi e portare a buon fine i propri progetti Mintzberg nel 1983 scriveva: *"Se la struttura semplice e la burocrazia delle macchine erano le strutture di ieri e la burocrazia professionale e la forma divisionale sono la struttura di oggi, allora è evidente che l'adhocrazia* (Management by Projects) *è la struttura del domani".*
Tom Peters, in Italia per un convegno dell'ottobre 2004, così concludeva il suo intervento: *"….se è vero che le organizzazioni e l'economia del futuro saranno meno burocratizzate e gerarchiche, i futuri leader dovranno essere bravi a tirar fuori il meglio dalle persone con le quali lavorano. Questa è una cosa che le donne fanno da sempre molto meglio degli uomini"*

Conclusioni

Particolare attenzione al Problem Solving dovrebbe essere posta nella nuova didattica della filosofia e della matematica (9). Bisogna evitare che i risultati ottenuti da una calcolatrice o da un computer siano accettati acriticamente come risultati corretti senza pensare che dietro di essi esistono dei meccanismi di calcolo che dovrebbero essere conosciuti e compresi da chi li utilizza. Ricordo il caso di un giovane *planning engineer* , bravissimo nell'uso del software aziendale, a cui fu richiesto, nell'ambito dell'uso di una tecnica reticolare, come mai una specifica attività di un progetto fosse posizionata proprio in quelle date. La risposta fu "non lo so, il risultato è stabilito dal computer".
Due metafore, sembra a chi scrive, debbono essere tenute presenti per meglio risolvere i problemi delle organizzazioni e per gestirne efficacemente i progetti: la prima è quella della *cassetta degli attrezzi disponibili* e la seconda è quella dello *amplificatore dell'intelligenza umana* (Fig. 13).
Gli attrezzi disponibili sono quelli della matematica, della statistica, dell'informatica, della logica, della filosofia, dell'intuizione, della creatività e del buon senso; i primi sono di solito chiamati metodi e attrezzi *hard* mentre gli ultimi sono considerati metodi *soft* o, se si preferisce, i primi sono quelli pertinenti alla parte sinistra del cervello gli ultimi quelli pertinenti alla parte destra (8).

Metodi, come cassetta degli attrezzi disponibili

Modelli e Computer, come amplificatori dell'intelligenza umana

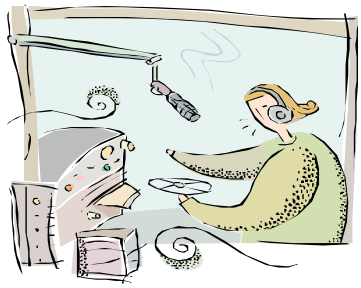


Fig. 13. Modelli e Metodi per il Problem Solving.

L'importante, per una organizzazione, è saper gestire queste conoscenze e saper individuare quale attrezzo usare ed in quale momento, attivando, ove possibile, il talento dei singoli, la comunicazione, l'entusiasmo ed il lavoro di gruppo (5); certo è che nessuno dovrebbe usare il martello per inserire una vite o il cacciavite per piantare un chiodo. Naturalmente non è affatto detto che utilizzando le tecniche di ricerca operativa o di *brainstorming* si possa sempre arrivare a costruire dei modelli efficaci della realtà perché un modello deve sempre essere una rappresentazione semplificata della realtà, ma anche sufficientemente complessa da rappresentare compiutamente i fenomeni che si vogliono studiare. Talora i tecnici e coloro che sviluppano i modelli finiscono per innamorarsi dei prodotti del loro lavoro arrivando anche a confonderli con realtà. Magritte, pittore belga considerato surrealista, pensava lucidamente e concretamente che la rappresentazione di un oggetto non deve essere confusa con l'oggetto stesso e se qualcuno gli chiedeva perché sotto il suo bel quadro rappresentante una pipa avesse scritto *questa non è una pipa* rispondeva: perché nel quadro non posso metterci il tabacco e neanche posso fumarlo.
I modelli della realtà e i metodi sviluppati per realizzarli debbono essere intesi unicamente e solo

come utili strumenti o meglio come *amplificatori dell'intelligenza umana* per comprendere le situazioni e risolvere i problemi (10). Modelli, metodi e computer si comportano proprio come amplificatori nel senso che se sono alimentati con buone idee e buoni dati forniscono soluzioni interessanti ed armoniche, altrimenti generano solo un fastidioso ed incomprensibile rumore di fondo.

Bibliografia

(1) E. Bellone "La scienza negata: il caso italiano", Codice, Torino 2005.

(2) R. Chiappi "Problem solving nelle organizzazioni:idee, metodi e strumenti da Mosè a Mintzberg. Piccola antologia filosofica per manager e project manager", Springer, Milano 2006.

(3) J.Gaarder "Il mondo di Sofia: Romanzo sulla storia della filosofia", Longanesi, Milano 1994.

(4) Gritzmann, Brandenberg, "Alla ricerca della via più breve. Un avventura matematica", Springer, Milano 2005.

(5) R.Chiappi "Innovazione, cambiamento e lavoro di gruppo" in Tecniche di Project Management di Amato, Chiappi; F. Angeli, Milano 2007.

(6) L.Ricolfi "Ostaggi dello Stato", Guerini, Milano 2008.

(7) C. Babbage "Passaggi dalla vita di uno scienziato", Utet, Torino 2008.

(8) R. Chiappi "Matematica e neuroeconomia nel problem solving" Impiantistica italiana, marzo-aprile, 2007.

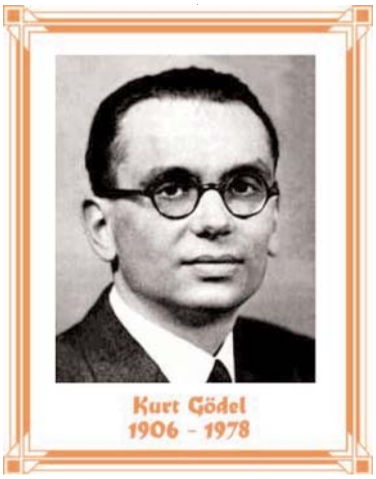
(9) Bindo, Cerasoli, Costabile, "Per una nuova didattica della matematica", Magazine Matematicamente.it, N° 2 Aprile 2007.

(10)R.Chiappi "Il foglio elettronico come strumento per il problem solving: metodi e modelli per le organizzazioni", F. Angeli, Milano 2008.

93. La prova matematica dell'esistenza di Dio

di Alexander Pigazzini

SUNTO. Questo articolo intende esporre in modo molto breve ed essenziale, senza scendere nei rigori della logica, la prova ontologica di Kurt Gödel (Brno,1906-Princeton, 1978).
La speranza è infatti quella di stimolare, in poche righe, la curiosità dei lettori su questa chicca matematica del secolo scorso, ma soprattutto di ricordare il grande matematico a trent'anni dalla sua scomparsa.



Kurt Gödel, una vita tra genio e follia: breve biografia

(a cura di Luca Lussardi)

Trent'anni fa, Princeton (USA), 14 Gennaio 1978, a 72 anni di età muore, per denutrizione, uno dei più grandi geni che la Logica, e forse l'intera Matematica, abbiano mai avuto.
Kurt Gödel nasce a Brno, in Moravia, il 28 Aprile 1906. Gödel fin da bambino dimostra di essere una persona estremamente seria, riservata e al limite della paranoia circa le proprie condizioni di salute. E' pur vero che Gödel ha dei problemi di salute durante la sua vita, ma non tali da giustificare l'ossessione verso la malattia.
Nel 1924 comincia a studiare Fisica all'Università di Vienna, anche se certe lezioni di Teoria dei numeri di Philip Furtwangler lo affascinano troppo. Dopo due anni comincia a frequentare il Circolo di Vienna, ovvero un gruppo costituito per lo più da filosofi che discutono di Logica e questioni di linguaggio. Un anno più tardi conosce Adele Porkert, ballerina più vecchia di lui che lo sposerà nel 1938. Gödel prende nel 1929 la cittadinanza austriaca e l'anno seguente si laurea in Matematica discutendo una tesi davanti ad Hahn e Furtwangler nella quale dimostra la completezza della Logica del primo ordine; la tesi di Gödel viene pubblicata nel 1931. Solamente un anno più tardi ottiene la libera docenza (Privatdozent). Finalmente nel 1933 ha inizio la sua carriera all'Insitute of Advanced Study di Princeton; prima su invito di Von Neumann; dopo vari rientri a Vienna e dopo vari problemi di depressione riesce a ottenere la cittadinanza americana nel 1948, diventa professore all'I.A.S. nel 1953. L'ultima parte della vita di Gödel è segnata da un rapporto totalmente squilibrato con il cibo: Gödel soffre di ulcera duodenale, di depressione e teme continuamente di essere avvelenato; nel gennaio del 1978 viene lasciato solo a casa dalla moglie che rientra in Europa, e si lascia morire probabilmente di denutrizione.
La vita di Gödel ci mostra un chiaro esempio di come una persona geniale si possa trovare in seria difficoltà di fronte ai problemi della vita quotidiana. Dal punto di vista scientifico Gödel è passato alla storia grazie ai suoi fondamentali risultati nel campo della logica matematica. La dimostrazione della completezza della logica del primo ordine è solo il primo grande risultato che Gödel ottiene; Gödel chiarisce bene la differenza tra verità e dimostrabilità.
Ma i risultati più significativi devono ancora arrivare: i Teoremi di incompletezza. Se un sistema assiomatico è coerente, ovvero da esso non si possono dedurre un'affermazione e la sua negazione contemporaneamente, allora, sotto certe condizioni, il sistema è incompleto, ovvero esistono affermazioni che non sono né dimostrabili né confutabili; questo è il primo Teorema di Gödel. Se uno pensa che il primo Teorema di Gödel sia un risultato negativo per i fondamenti della Matematica allora si deve preparare a leggere il secondo Teorema di incompletezza:

se un sistema assiomatico è coerente allora la coerenza del sistema non è dimostrabile all'interno del sistema stesso. Sostanzialmente non è possibile dimostrare l'assenza di contraddizioni logiche restando all'interno del sistema assiomatico.
Gödel si occupa anche di Teoria degli insiemi, e dello studio del rapporto tra mente e macchina (Turing). Nell'ultima parte della sua vita si interessa anche di Relatività, diventando amico di Albert Einstein.

LA PROVA ONTOLOGICA

di Alexander Pigazzini

Uno dei punti più affascinanti della vita scientifica di Gödel sta nel suo tentativo di dimostrare l'esistenza di Dio. Vari logici atei si erano cimentati nel problema, ma Gödel non era ateo, ed egli stesso afferma che il suo interesse per la prova dell'esistenza di Dio è solamente logico. Gödel fornisce una dimostrazione puramente logica, detta anche *prova ontologica*, prima nel 1941, poi rivista e conclusa nel 1970.
Per introdurre questo notevole lavoro, anche se non il più brillante della sua carriera, vorrei innanzitutto spendere due parole sul concetto di prova ontologica.
Per prova ontologica (dal greco *òntos*, genitivo di *òn*, participio presente di *eimì*, essere) si intende una dimostrazione logica dell'esistenza dell'essere, solo per mano della scolastica divenne la dimostrazione a priori dell'esistenza di Dio.
Partendo dalle origini, fu per opera di Anselmo d'Aosta che, con il suo *"credo ut intelligam"* del *Proslogion* e con quattro prove ontologiche a posteriori nel suo *Monologion*, prese il via la vera ricerca di una prova ontologica riuscendo, nei rispettivi periodi, a coinvolgere menti straordinarie quali Cartesio, Leibniz, Kant, e per l'appunto Gödel.
Si presume che quest'ultimo iniziò a lavorarci nei primi anni quaranta, ma solo nel febbraio del 1970, venne allo scoperto parlandone e mostrando lo scritto a Dana Scott, forse perché in quel periodo si dice che fosse molto preoccupato per la sua salute e temeva che morendo, la dimostrazione svanisse con lui.
A distanza di diciassette anni, nel 1987, la sua *"Ontologisches Beweis"* venne finalmente pubblicata negli Stati Uniti, all'interno di un volume che raccoglieva diversi suoi lavori.
Prima di iniziare un'analisi punto per punto della prova, ne riporto una sintesi[1].

$$P(\varphi) \quad \varphi \text{ è positivo (o } \varphi \in P)$$

ASSIOMA 1. $P(\varphi) \,.\, P(\psi) \supset P(\varphi \,.\, \psi)$
ASSIOMA 2. $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$ (Disgiunzione esclusiva)

DEFINIZIONE 1. $G(x) \equiv (\varphi)\ [\ P(\varphi) \supset \varphi(x)\ ]$ (Dio)
DEFINIZIONE 2. $\varphi \text{ Ess.}x \equiv (\psi)\ [\ \psi(x) \supset N(y)\ [\ \varphi(y) \supset \psi(y)\ ]]$ (Essenza di x)

$$p \supset Nq = N(p \supset q) \quad \text{(Necessità)}$$

ASSIOMA 3. $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$
$\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$
Poiché ciò segue dalla natura della proprietà.

TEOREMA. $G(x) \supset G \text{ Ess.}x$

DEFINIZIONE 3. $E(x) = (\varphi)\ [\varphi \text{ Ess. } x \supset N\ (\exists x)\ \varphi(x)\ ]$ (Esistenza necessaria)

ASSIOMA 4. $P(E)$

TEOREMA. $G(x) \supset N(\exists y)\ G(y)$
quindi $(\exists x)\ G(x) \supset N(\exists y)\ G(y)$
quindi $M(\exists x)\ G(x) \supset MN(\exists y)\ G(y)$ (M = possibilità)

$M(\exists x)\ G(x)$ significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile.
Ciò è reso grazie a:

ASSIOMA 5. $P(\varphi) \,.\, \varphi \supset N\psi :\supset P(\psi)$ che implica
$x = x$ è positivo
$x \neq x$ è negativo

[1] Tratta interamente dal libro "la prova matematica dell'esistenza di Dio" a cura di G. Lolli e P. Odifreddi, Bollati Boringhieri Editore.

Ripartendo dall'inizio, Gödel introduce come prima cosa il concetto di proprietà positiva, evidenziandone i caratteri più importanti con una serie di assiomi.

Primo Assioma: la composizione tra due proprietà positive ci rende una proprietà positiva, per capirci meglio se "*essere bello*" è una proprietà positiva e lo è anche "*essere alto*", allora di conseguenza lo sarà anche "*essere bello e alto*".

Secondo Assioma: è una disgiunzione esclusiva, una proprietà è positiva oppure lo è il suo contrario, ma entrambe non possono essere positive o non positive.

Prima Definizione: introduce il concetto di Dio; un ente è di natura divina se e solo se possiede tutte e sole le proprietà positive.

Seconda Definizione: φ è un'essenza di x se e soltanto se per ogni proprietà ψ, x include ψ necessariamente se φ implica ψ.
Qui Gödel introduce il concetto di necessità, ossia se "p" implica necessariamente "q" allora è necessario che "p" implichi "q" .

Terzo Assioma: se una proprietà è positiva allora è necessariamente positiva e di conseguenza se una proprietà non è positiva, allora è necessariamente non positiva. Una proprietà è necessaria se e solo se è vera in tutti i mondi possibili, mentre è possibile se è vera solo in alcuni di questi mondi.

Primo Teorema: se un ente è di natura divina, allora la proprietà dell'esistenza gli appartiene per essenza.

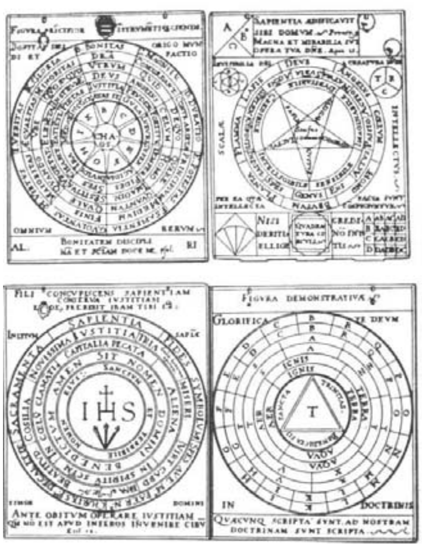
Terza Definizione: x esiste necessariamente se e soltanto se la sua essenza (o ogni suo elemento essenziale) esiste necessariamente.

Quarto Assioma: l'esistenza necessaria è una proprietà positiva.

Secondo Teorema: se Dio esiste, allora esiste necessariamente; quindi se è possibile che Dio esiste di conseguenza è possibile che Dio esiste necessariamente, dunque Dio esiste necessariamente.

Quinto Assioma: se una proprietà positiva ne implica necessariamente un'altra, allora di conseguenza anche quest'ultima è positiva.

Dopo aver svolto la "traduzione" in ogni sua parte, ricapitolo il tutto dandone una mia interpretazione.
Inutile dire che questa prova è valida solo se è possibile che Dio esista, cioè se è possibile combinare tra loro tutte le proprietà positive esistenti.
Come abbiamo visto, un ente per essere Dio deve possedere tutte e sole le proprietà positive; una proprietà positiva è necessariamente positiva, ossia è positiva in tutti i mondi possibili e l'intersezione delle proprietà positive ci restituisce ancora una proprietà positiva.
Detto questo si deduce che "Essere Dio" è una proprietà positiva e grazie al quarto assioma sappiamo che anche l'esistenza necessaria lo è.
Tirando le somme, il tutto porta a dire che esisterà necessariamente un ente che tra tutte le varie proprietà positive possiederà anche la proprietà "Essere Dio".
Quanto esposto ha ovviamente la limitazione di esistere solo in un universo che ammettere un finito numero di proprietà positive e Gödel infatti, per ovviare a questa costrizione, aggiunge un ultimo assioma (il quinto), il quale prevede che se una proprietà positiva ne implica necessariamente una seconda, allora anche quest'ultima è una proprietà positiva.



Raimondo Lullo (1232-1316),
Prova logica dell'esistenza di Dio

Questa "clausola" finale riesce a raggirare brillantemente il "blocco" della finitezza, permettendo l'esito sperato alla prova.
L'autore avvertì sempre l'urgenza di trovare un ordine logico-matematico da porre a fondamento dell'esistenza dell'universo e forse un tale ordine gli sembrava fosse garantito solo dalla necessità logica dell'esistenza di Dio.
Nonostante furono anche esigenze di carattere esistenziale e religioso a spingere il compimento di questa prova, è giusto specificare che essa derivi dal concetto di ultrafiltro (teoria degli insiemi) e non ha molto da spartire con la teologia tradizionale, d'altro canto lo stesso Gödel, a scanso d'equivoci, ci tenne a precisare in più occasioni che questo suo lavoro fu concepito solo come un esercizio di pura logica.
In conclusione, visto che troppe cose ci sarebbero da aggiungere sulla vita e sulle opere di questo grande e controverso genio del '900, vorrei limitarmi semplicemente nel ricordare che i suoi studi hanno segnato una svolta fondamentale nella storia della logica, condizionando ogni successiva ricerca e determinando la nascita di nuove e importanti discipline logiche.

BIBLIOGRAFIA

"Gödel", Lettera matematica Pristem n.62/63, Aprile 2007, Springer.
Kurt Gödel, La prova matematica dell'esistenza di Dio. A cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Bollati Boringhieri, Torino, 2006.
C. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori Editore, 1990.

94. Le equazioni di Navier-Stokes

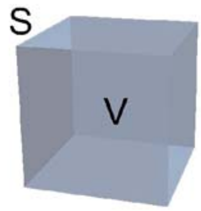
di Flavio Cimolin

Chi di noi, guardando un'onda infrangersi sul bagnasciuga di una bella spiaggia, non si è soffermato a constatare l'inconcepibile complessità del movimento dell'acqua, che a tratti sembra regolare, quando l'onda si avvicina alla riva, ma pochi istanti dopo diventa immediatamente imprevedibile, quando l'onda si infrange suddividendosi in migliaia di correnti e bolle mentre supera l'onda precedente che nel frattempo si sta ritirando.
Possiamo constatare la complessità del moto dei fluidi in ogni momento della nostra vita, da quando apriamo il rubinetto del lavandino o versiamo l'acqua in un bicchiere a quando, uscendo con il vento, veniamo investiti da raffiche incostanti e provenienti da tutte le direzioni. L'aria e l'acqua, i due fluidi fondamentali per la nostra stessa esistenza, hanno comportamenti incredibilmente difficili da descrivere, e per questo costituiscono una delle sfide più interessanti della matematica applicata, che ha appunto il compito di trovare dei modelli in grado di spiegare i fenomeni reali al fine di poterli prevedere.
A confronto, il comportamento dei corpi solidi è decisamente più semplice da descrivere: la meccanica razionale è una stupenda costruzione concettuale che consente di risolvere elegantemente qualsiasi problema che coinvolge il movimento di corpi rigidi soggetti a forze collegati fra loro tramite vincoli di diverso genere. Anche quando si passa da un numero finito di gradi di libertà ad un numero infinito, considerando cioè i "corpi deformabili", gli strumenti di indagine risultano ancora in grado di modellare con discreta accuratezza i fenomeni che accadono all'interno dei materiali soggetti a tensioni e di conseguenza deformazioni. Basti pensare a quanto stanno diventando importanti ai fini della prototipazione virtuale le simulazioni di crash test, grazie alle quali le nostre autovetture diventano ogni giorno più sicure. Quando si abbandonano i corpi solidi per passare a studiare il comportamento di liquidi o gas, ecco che immediatamente la complessità balza a un livello decisamente più alto.
Un'intuizione del motivo per cui questo accade si può cercare direttamente dall'interpretazione molecolare dei materiali. I solidi sono costituiti da molecole ben ordinate (quando la struttura è perfettamente uniforme e regolare si parla di "cristalli"), che possono muoversi dalla loro posizione, ma solo di poco. Per descrivere la deformazione di un solido, si può quindi utilizzare quello che viene chiamato un approccio "lagrangiano": ci si concentra su di una particella del solido e si guarda dove essa si sposta a seguito del campo di forze a cui la si sottopone. Quando invece si ha a che fare con dei fluidi, che possono essere liquidi o gassosi, le molecole, pur interagendo fra loro, non sono più legate indissolubilmente, bensì libere di muoversi ovunque all'interno del recipiente che le contiene. Proprio per questo bisogna passare a quello che viene detto approccio "euleriano": ci si concentra su di un volume ben fissato nello spazio e si analizzano le sue proprietà mano a mano che il fluido gli circola all'interno.
La meccanica dei continui è quella disciplina matematica che si occupa di descrivere per mezzo di equazioni il comportamento dei corpi continui, con formulazioni che possono basarsi su uno dei due approcci lagrangiano o euleriano descritti in precedenza. Il "corpo continuo" non è altro che l'astrazione del concetto che tutti noi abbiamo in mente quando immaginiamo un materiale che sia distribuito uniformemente nello spazio e lo occupi in maniera omogenea. Per intenderci, riferendoci ad un corpo continuo possiamo immaginare un blocco di marmo o un secchio pieno d'acqua, ma non un mattone o un pezzo di groviera: questi ultimi sono infatti caratterizzati da "buchi",

cioè da parti non occupate dal materiale che consideriamo. Ai fini della modellazione è importante avere a che fare con corpi continui perché solo in questo modo si possono definire quantità come la densità, la velocità o la temperatura in modo "puntuale", come se fossero applicabili a qualsiasi punto geometrico dell'oggetto che si vuole analizzare. L'ipotesi di corpo continuo è a tutti gli effetti la chiave di volta della meccanica dei continui, senza la quale non sarebbe possibile darne una formulazione elegante e potente con cui descrivere il comportamento dei corpi deformabili.
Nonostante possa apparire come la cosa più naturale del mondo, l'ipotesi di corpo continuo non è ovvia nel mondo in cui viviamo e può essere giustificata pienamente solo con avanzati calcoli di meccanica statistica. Tutto dipende infatti da quale punto di vista ci poniamo per osservare il fenomeno a cui siamo interessati.

Proviamo ad esempio a immaginare di volere studiare cosa accade all'acqua contenuta in una pentola messa sul gas nel momento in cui essa si scalda. L'acqua vicina alla base della pentola si scalderà per prima e inizierà a muoversi, creando un ricircolo: l'acqua calda si muoverà verso l'alto e quella fredda verso il basso.

Per analizzare questo fenomeno, non possiamo considerare tutta l'acqua nel suo insieme, ponendoci cioè su una scala macroscopica diciamo dei decimetri, perché in questo modo considereremmo uguale dappertutto la temperatura dell'acqua facendone una media, e quindi non vedremmo nulla. D'altro canto, non possiamo neanche concentrare la nostra attenzione sulla scala microscopica, diciamo dei nanometri (10^{-9} m), laddove si distinguono tutti gli atomi e tutte le molecole dell'acqua, perché avremmo un numero esagerato di particelle da seguire, che singolarmente non darebbero alcuna informazione sul fenomeno che vogliamo comprendere. La scelta giusta è quella di metterci su di una scala intermedia, diciamo fra i 10^{-7} m e i 10^{-3} m, in modo da poter definire un piccolo volumetto che, dal punto di vista macroscopico, possa essere considerato un'unica "particella fluida" caratterizzata da ben definite proprietà fisiche come la velocità e la temperatura, ma che, dal punto di vista microscopico, contenga un numero molto elevato di molecole elementari. Il fatto che le molecole all'interno del volume siano tante consente di fare la media di tutte le loro velocità e quindi di fare in modo che le proprietà fisiche cambino in modo continuo fra questo volumetto e qualsiasi altro volumetto ad esso adiacente. Ecco che, per mezzo del concetto di "particella fluida" così definito, in meccanica dei continui si è in grado di definire "puntualmente" una quantità fisica come ad esempio la temperatura, che nella nostra pentola non è certo uguale dappertutto, ma neanche differente fra una molecola e un'altra immediatamente adiacente.



Siamo finalmente giunti al punto in cui sfruttare questo approccio per realizzare dei modelli matematici in grado di rispecchiare la realtà, partendo da quelle che vengono dette "equazioni di bilancio". Consideriamo un volume di materia V e una quantità fisica Q, ad esempio la massa, la quantità di moto o l'energia. Fare un bilancio significa fornire una relazione fra quello che della quantità considerata Q entra, esce, viene prodotto o distrutto all'interno del volume V considerato.
Ad esempio possiamo dire che la variazione di Q nel tempo (cioè la sua derivata) è uguale al flusso F che entra nel volume più un termine di sorgente corrispondente a ciò che viene prodotto al suo interno:

$$\frac{dQ}{dt} = F + P$$

Supponendo valida l'ipotesi del continuo, si può ora pensare alla quantità Q come distribuita uniformemente su tutto il volume V considerato, e questo consente di riferirci ad una "quantità per unità di volume" q che, integrata su tutto il volume, dia esattamente Q. Ad esempio, se considerassimo la massa ($Q = M$), allora q sarebbe la densità (massa per unità di volume). Riscrivendo l'equazione di bilancio in termini di quantità definite per unità di volume o di superficie, otteniamo la seguente equazione di bilancio in forma integrale:

$$\frac{d}{dt}\int_V q dv = -\int_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n} ds + \int_V s dv$$

Dove **f·n** è il flusso per unità di superficie della quantità q che attraversa verso l'esterno il bordo S del volume V (dato che per convenzione lo si pone verso l'esterno c'è il segno meno meno), e s è la sorgente per unità di volume della quantità considerata.
Abbiamo fin qui scritto un'equazione di bilancio per la generica quantità q in termini di integrali di superficie e di volume, ma dove ci può condurre questo? Ebbene, si può dimostrare, facendo ricorso a teoremi di calcolo differenziale su più variabili, che la relazione precedente può essere riscritta in termini di soli integrali di volume e con la derivata temporale spostata sotto il segno di integrale. In particolare il ruolo fondamentale è giocato dal teorema di Gauss, che consente di riscrivere un integrale sulla superficie esterna S di un volume chiuso in termini di un integrale sul volume stesso V, facendo comparire l'operatore differenziale di divergenza ($\nabla\cdot$) e la velocità del fluido **v**:

$$\int_V\left(\frac{\partial q}{\partial t}+\nabla\cdot(q\mathbf{v})\right)dv=\int_V\left(-\nabla\cdot\mathbf{f}+s\right)dv$$

Non bisogna lasciarsi spaventare dai simboli complicati che compaiono, perché essi servono solo a rendere più compatta la scrittura matematica delle formule. Ad esempio l'operatore di divergenza significa:

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Il bello del passaggio che abbiamo fatto è che adesso abbiamo a che fare con un'uguaglianza fra due integrali di volume che deve valere per qualsiasi volume V considerato. Questo significa che possiamo trasformare l'equazione di bilancio sulla quantità Q "integrale" in un'equazione di bilancio sulla quantità q espressa in forma differenziale, eliminando in questo modo il volume V di controllo da cui eravamo partiti:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\nabla\cdot(q\mathbf{v}+\mathbf{f})-s=0$$

Il passaggio che è stato fatto è notevole, infatti ora abbiamo un'equazione che vale localmente in tutto il corpo che vogliamo analizzare (ad esempio l'acqua contenuta nella pentola di cui parlavamo prima) e che esprime in modo continuo come varia la generica quantità per unità di volume q.
Il discorso fino a qui è stato completamente astratto (oltre che sicuramente difficile da seguire per chi non abbia solide conoscenze di calcolo differenziale in più variabili), dunque è ora di concretizzarlo sostituendo alla generica quantità q qualcosa che diventi effettivamente interessante al fine di illustrare il comportamento fisico del mezzo considerato. Proviamo a sostituire a q il valore della densità, solitamente indicata con la lettera greca ρ, cioè il rapporto fra la massa e il volume. Ovviamente non esistono "sorgenti di massa", e quindi $s = 0$, e non esiste neppure un "flusso di massa" attraverso un volume ben definito, cioè $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. L'equazione che deriva dal bilancio locale della massa è quindi la seguente:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0$$

Nel caso in cui si consideri la densità costante in tutto il fluido, si può operare una ulteriore semplificazione, arrivando alla semplice equazione:

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0$$

Questa equazione di "divergenza nulla" può essere pensata a tutti gli effetti come un "vincolo", che corrisponde proprio al fatto che la densità è costante: il flusso che entra in qualsiasi volumetto deve essere esattamente uguale a quello che ne esce!
Per determinare l'evoluzione di un corpo in meccanica si deve scrivere un'equazione di conservazione per la massa e una per la quantità di moto, quindi anche noi dovremo ora scegliere la quantità di moto per unità di volume $q = \rho\mathbf{v}$. Tralasciamo i passaggi matematici, che questa volta sono più complicati che nel caso precedente e richiedono anche la modellazione delle "tensioni" sul bordo del dominio V, passiamo direttamente al risultato che si ottiene unendo l'equazione di conservazione della massa a quella della quantità di moto: un sistema di due equazioni differenziali vettoriali che valgono localmente in tutto il corpo e che definiscono univocamente il modo in cui esso si comporta. Tali equazioni vengono det-

te "Equazioni di Navier-Stokes", dal nome dell'ingegnere e matematico francese Claude-Louis Navier (1785-1836), che per primo diede una descrizione differenziale del moto dei fluidi incomprimibili, e del fisico irlandese George Gabriel Stokes (1819-1903), che ne derivò la formulazione matematica:

$$\boxed{\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{b} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \end{cases}}$$

Si tratta di due equazioni (in realtà considerando che la prima è vettoriale per le tre componenti della velocità, abbiamo in totale quattro equazioni scalari) tutt'altro che banali da risolvere dal punto di vista matematico, soprattutto a causa della presenza del termine non lineare $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$, che è considerato una delle più forti sorgenti di non-linearità che appaiono in fisica. Abbiamo visto spuntare nel membro di destra della prima equazione due nuove quantità: una è la pressione p e l'altra è la viscosità μ. Esse vengono introdotte nel momento in cui si cerca di dare una modellazione delle forze di interazione che ci sono fra due volumetti fluidi adiacenti: sicuramente è presente uno sforzo isotropo (cioè uguale in tutte le direzioni), a cui è associata la pressione, ma è anche presente uno sforzo "di taglio" associato allo strisciamento fra i due volumi, che risulta tanto maggiore quanto più viscoso è il fluido (basti pensare alla differenza di comportamento fra l'aria, l'acqua e l'olio) a cui è associata appunto la viscosità.

Come mai si usano tutti quei triangolini, cioè gli operatori differenziali di gradiente, divergenza e laplaciano e la notazione vettoriale? Beh, perché altrimenti la scrittura delle stesse quattro equazioni diventerebbe questo bel guazzabuglio di derivate:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + b_x \\ \rho\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 vy}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + b_y \\ \rho\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + b_z \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ritorniamo un momento sul concetto di non-lineatà, per approfondire meglio il suo significato e le conseguenze che ne derivano. Quando un fenomeno è lineare il suo comportamento è, sotto un certo punto di vista, relativamente semplice da prevedere: se sappiamo che riscaldando un corpo con 10 J innalziamo la sua temperatura di 10 °C, allora ci aspettiamo che scaldandolo con 20 J ne innalzeremo la temperatura di 20 °C, e così via… Vale cioè quello che viene chiamato "principio di sovrapposizione degli effetti". In un comportamento di tipo non-lineare non valgono invece regole di questo genere, ma sono invece sempre in agguato degli "imprevisti" che rendono difficile, e in alcuni casi impossibile, predire esattamente l'evoluzione del fenomeno. Quando la non-linearità è particolarmente significativa, come ad esempio nelle equazioni di Navier-Stokes, si genera quello che in matematica è noto come "caos": l'evoluzione di due configurazioni che inizialmente differiscono di poco conduce in breve termine a due configurazioni lontane fra loro che non hanno più niente a che vedere l'una con l'altra. Il grado di predizione a lungo termine di un sistema caotico è zero: non c'è alcuna speranza di conoscere con precisione che cosa accadrà, indipendentemente dal grado di accuratezza che si sceglie di usare nei calcoli: tutti gli errori vengono inesorabilmente amplificati con il tempo.

Quanto detto riguardo alla non-linearità e al caos in fluidodinamica è ben lungi dall'essere un'astrazione matematica, e per accorgersene basta tornare con la mente agli esempi con cui abbiamo esordito. Qualcuno

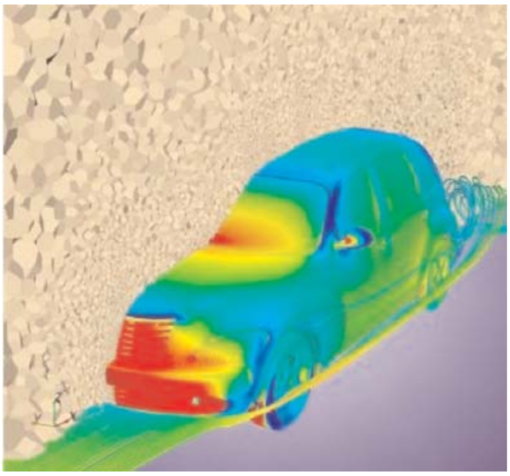
crede forse di essere in grado di predire con accuratezza dove andrà a finire una determinata “particella fluida” (nel senso dell’ipotesi del continuo) che appartiene a un’onda che si infrange sul bagnasciuga, o con quale intensità e distribuzione ci colpirà la prossima raffica di vento durante un temporale? Anche disponendo dei computer più potenti del mondo e dei migliori algoritmi numerici, vi assicuro che avrete ben poche speranze di farlo, semplicemente perché è eccessivamente complicato!
I fisici del XX secolo hanno iniziato a parlare di “flussi turbolenti” in relazione a quei flussi in cui le fluttuazioni locali sono troppo complicate per essere prevedibili. Essi si generano quando le velocità in gioco sono tali per cui le forze di inerzia del fluido superano quelle viscose, che tenderebbero invece a mantenere regolare il flusso. Facciamo un esperimento mentale per comprendere bene cosa significhi questo: immaginiamo dapprima di versare dell’olio in un canale largo pochi centimetri che degrada con una pendenza molto dolce, e poi di guardare un fiume in piena largo una decina di metri in cui l’acqua scorre veloce. Nel primo caso il flusso sarà “laminare”, ovvero uniforme in tutto il canale, perché le velocità in gioco sono basse e le forze viscose mantengono compatto il fluido costringendolo a muoversi ordinatamente. Tutto il contrario accade nel caso del fiume in piena: la bassa viscosità dell’acqua, unita alla grande larghezza del fiume e alla velocità dell’acqua, fanno sì che si creino migliaia di vortici, correnti secondarie, onde e increspature che rendono irregolare il flusso. L’aggettivo “turbolento” associato a quest’ultimo tipo di flusso è quanto mai appropriato!
Non tutti i flussi sono turbolenti, ma buona parte di quelli con cui conviviamo quotidianamente lo sono. I fisici hanno individuato un parametro, il cosiddetto “numero di Reynolds”, dal nome del fisico e ingegnere inglese Osborne Reynolds (1842-1912), grazie al quale si può stabilire, in maniera approssimativa, se un certo tipo di flusso è laminare oppure turbolento. Esso si calcola nel modo seguente:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v L}{\mu}$$

È cioè dato dal prodotto della densità ρ del fluido moltiplicato per una velocità caratteristica v e per una lunghezza caratteristica L (ad esempio la larghezza del fiume, o il diametro di un ostacolo che ostruisca il flusso) diviso per la viscosità μ. Si tratta come già detto di una definizione approssimativa, che serve a descrivere “qualitativamente” il flusso. Si osserva che per numeri di Reynolds inferiori al migliaio il flusso è laminare, mentre per numeri maggiori diventa sempre più turbolento. Per esempio, se calcoliamo il numero di Reynolds di un fiume in piena, assumendo una velocità dell’acqua di v = 2 m/s e una larghezza del fiume di L = 10 m, con le proprietà dell’acqua ρ = 1000 kg/m^3 e μ = 0.001 Pa·s, troviamo Re = 20 milioni, cioè un numero di Reynolds enorme! Succede ancora di peggio quando si vuole cercare di dare una descrizione dei flussi meteorologici che attraversano intere zone geografiche e vengono influenzati dalla presenza di mari, laghi o montagne, senza i quali non potremmo pensare di fare le previsioni del tempo.
Se dunque abbiamo ora trovato un modello, quello delle equazioni di Navier-Stokes, con cui siamo in grado di modellare i flussi di tipo laminare, dobbiamo davvero perdere ogni speranza di modellare tutta la categoria dei flussi turbolenti, che così spesso appaiono in natura? Per fortuna no, qualcosa lo possiamo fare, ricorrendo a quella che è la modellazione statistica della turbolenza. Si tratta di determinare dei modelli con i quali “filtrare” tutte le fluttuazioni imprevedibili, oltre che sostanzialmente poco interessanti, del flusso attorno al suo “andamento medio”, su cui invece ci si deve concentrare. Sarebbe sovrabbondante conoscere punto per punto la velocità dell’aria sopra il nostro paese quando ai fini delle previsioni del tempo è sufficiente conoscerne solo la direzione e l’intensità media, in modo da sapere da dove arriveranno le eventuali perturbazioni.
La prima formulazione statistica della turbolenza risale al matematico russo Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987), che nel 1941 delineò la sua teoria della “cascata energetica”, in base alla quale la turbolenza va pensata come un trasferimento di energia attraverso varie scale di dimensione e tempo. Si tratta di un elegante modello matematico in grado di fornire una soluzione al problema; proviamo a darne brevemente un accenno. A livello macroscopico, la turbolenza sul

flusso medio si manifesta tramite la generazione di grandi vortici: le forze inerziali sono dominanti e la viscosità non riesce a regolarizzare il flusso. I grandi vortici si suddividono poi in cascata in vortici sempre più piccoli, fino a quando la scala (ricordiamo la L che compare nel numero di Reynolds) non diventa sufficientemente piccola affinché le forze di viscosità diventino dominanti.
Leonardo da Vinci, nel suo storico disegno rappresentato in figura, fu il primo ad intuire il processo di generazione dei vortici nella turbolentissima zona in cui ristagna l'acqua che cade da una cascata. A tutti gli effetti quello che si ha è un trasferimento di energia dalla scala macroscopica a quella microscopica: viene sottratta energia dal flusso medio alle scale più grandi, poi viene trasferita da vortici grandi a vortici sempre più piccoli, fino a venire dissipata per via della viscosità alle scale più piccole, laddove essa diventa preponderante.

La matematica che sta dietro alla modellazione della turbolenza è complicata e artificiosa, oltre che piena di piccole correzioni *ad hoc* ottenute tramite riscontri con i dati sperimentali. Grazie ad essa, però, si riesce a modellare la turbolenza con discreta accuratezza, non facendo altro che inserire un altro termine di viscosità nelle equazioni di Navier-Stokes proprio come se questo trasferimento di energia corrispondesse, dal punto di vista del flusso medio, ad un comportamento più viscoso del flusso.
Per concludere vale la pena di fare un accenno alle tecniche numeriche che si utilizzano per simulare i fluidi, grazie alle quali oggi, sfruttando la potenza dei computer, siamo in grado di simulare, con un livello di precisione accettabile, il comportamento di buona parte dei fluidi con cui abbiamo a che fare nel nostro mondo. L'idea di base è di tornare al punto di partenza nella definizione del modello, quando avevamo scritto le equazioni di conservazione su di un generico volumetto V. Il metodo dei volumi finiti, di gran lunga il più diffuso algoritmo per la simulazione del moto dei fluidi, si basa sulla semplice ma efficace idea di suddividere tutto il dominio del fluido che si vuole simulare, ad esempio una stanza, un fiume o l'atmosfera intorno a una città, in tantissime piccole celle, scrivendo all'interno di ognuna di esse le equazioni di bilancio che abbiamo visto in precedenza. Quello che ne deriva è un sistema di equazioni di dimensioni enormi, che tuttavia si può risolvere in maniera iterativa con sofisticati metodi numerici che possono essere implementati anche in modo da distribuire il calcolo su tanti processori diversi.

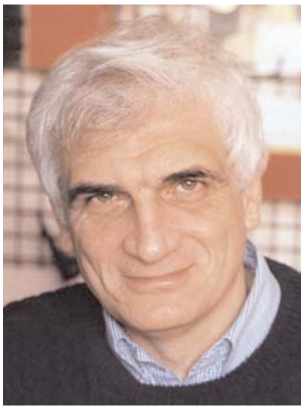


Per avere un'idea di quanto si riesce a fare allo stato dell'arte, pensate che per simulare il flusso attorno ad un'autovettura o a un aereo, il dominio fluido viene suddiviso in decine o centinaia di milioni di piccole celle, e il calcolo viene svolto nel giro di alcuni giorni su enormi cluster di centinaia di processori connessi fra loro! L'immagine qui sotto rende un'idea della complessa mesh che può essere utilizzata ad esempio per simulare con un software commerciale il flusso attorno ad un'autovettura (in modo da ottenere il campo di pressione sulla stessa).

Fonti delle immagini:
1) Onda: http://www.coolchaser.com/themes/keywords/crime+wave
2) Pentola: http://www.physics.arizona.edu/~thews/reu/the_science_behind_it_all.html
3) Simulazione CFD: http://it.wikipedia.org/wiki/Immagine:CFD.jpg

95. La Matematica è un gioco, intervista a Ennio Peres

di Gabriella Zammillo



Ennio Peres, giornalista e matematico, dalla fine degli anni '70 svolge la professione di "giocologo" con l'obiettivo di diffondere tra la gente il piacere creativo di giocare con la mente. Autore di libri di argomento ludico, ideatore di giochi in scatola e di giochi radiofonici e televisivi, collabora a varie testate giornalistiche nazionali e del Canton Ticino. Suo il premio "Ludo Award 2006" per il libro L'elmo della mente (Salani ed), scritto con Susanna Serafini; il premio "Personalità ludica 2005" e il premio "Internazionale Pitagora sulla Matematica" per il migliore lavoro multimediale.
Lo abbiamo incontrato dal vivo in diverse occasioni… Festival della Matematica di Roma, Notte dei Ricercatori a Lecce, siamo riusciti però ad intervistarlo solo via e-mail.

Carroll, Hamilton, Eulero, Cartesio, Fibonacci, Einstein… sono solo alcune famose grandi menti per i quali il rompicapo matematico non ha rappresentato solo svago, bensì una fonte di ispirazione. Che cosa è un gioco matematico?
Se si considera che la Matematica stessa è un gioco, o più precisamente, come afferma Thomas Mann: «è un gioco nell'aria… o addirittura fuori dell'aria, in regioni senza polvere», il termine *gioco matematico* assume il sapore di una tautologia. In pratica, in ogni aspetto della matematica, è possibile cogliere dei risvolti ludici. Attraverso i giochi matematici (enigmi, problemi, test, trucchi di magia, ecc.), per loro natura accattivanti e coinvolgenti, è possibile dimostrare la verità di una tale affermazione anche alle persone non esperte in materia.

La regina delle scienze è riconosciuta da molti come una disciplina arida e noiosa, solo pochi, come Mister Aster, sostengono invece che *"la matematica è un gioco e comunica totale magia"*. Non a caso abbiamo scelto come affermazione un anagramma. Può farci un esempio a dimostrazione del fatto che sotto i più comuni ragionamenti matematici di uso quotidiano "si nascondono proprietà dalle implicazioni sorprendenti"?
Uno dei più semplici e sorprendenti giochi di magia matematica può essere effettuato con le seguenti modalità.

1. Si sceglie un numero intero di due cifre (ad esempio: 85).
2. Si esegue la somma delle due cifre (nel nostro caso: 8+5 = 13).
3. Si sottrae il numero così ottenuto da quello scelto prima (nel nostro caso: 85-13 = 72).
4. Si esegue la somma delle cifre del valore ottenuto (nel nostro caso: 7+2 = 9).
5. Se il risultato ottenuto è composto da una sola cifra (come nel nostro caso), il procedimento termina; altrimenti, si esegue anche la somma delle due cifre del nuovo valore ottenuto.
6. A questo punto, indipendentemente dal numero scelto all'inizio, il risultato finale sarà (sorprendentemente…), comunque: 9.

Per capire come mai questo gioco funziona sempre, è necessario riflettere sul meccanismo di rappresentazione dei numeri che siamo abituati ad adottare in maniera acritica…

Lei è un matematico ed ex professore, ora è un giocologo di professione. Cosa l'ha spinta a cambiare "mestiere"?
In realtà, non ho cambiato mestiere: io sono un giocologo, praticamente da sempre… Fin da bambino, infatti, ho nutrito un profondo interesse per i giochi di ragionamento (matematici, logici, linguistici, enigmistici, ecc.), provando l'im-

pulso di sviscerare i meccanismi che sono alla loro base. Quando ho cominciato a diventare adulto (almeno per l'anagrafe…), ho usato l'accortezza di svolgere dei lavori che non *adulterassero* la mia grande passione. Col tempo, però (dopo averne cambiati tanti…), mi sono reso conto che ciò non era sempre possibile e, quindi, ho deciso di fare il giocologo a tempo pieno.

Lucio Lombardo Radice (matematico e pedagogista) era un convinto sostenitore delle valenze del gioco come strumento di motivazione allo studio della matematica. Il gioco consente infatti di stimolare curiosità, interesse, logica, fantasia… tant'è che lei, condividendo appieno la tesi di Lombardo Radice, ha fatto del "diffondere il piacere creativo di giocare", la sua missione. Alla luce dei recenti ed allarmanti dati OCSE, perché pare sia ancora così difficile riconoscere all'introduzione del gioco nell'insegnamento a scuola, il ruolo di antidoto contro il disamore e il rifiuto dello studio della matematica?

È ovvio che, per poter cominciare ad apprezzare i pregi della Matematica, bisogna possedere almeno le basi più elementari del linguaggio con cui viene abitualmente esposta. Così come si verifica, del resto, in ogni altro campo del pensiero umano. Se mi leggessero una splendida poesia in cinese, non sarei in grado di goderla, non perché io sia insensibile al fascino della poesia, ma semplicemente perché non conosco la lingua cinese…

L'insegnamento tradizionale della Matematica fa ricorso a un preciso formalismo, già dal primo momento in cui introduce la rappresentazione dei numeri, mediante le cifre decimali. Di conseguenza, per sapere quanto fa, ad esempio: 3x5, un bambino deve compiere uno sforzo di memoria; ma se questa lo tradisce, il risultato di tale operazione, per lui, può corrispondere a un numero qualsiasi. Se, invece, avesse la possibilità di disporre sul proprio banco tre gruppetti di cinque oggetti ciascuno, per ricavare il risultato gli basterebbe contare quanti oggetti ci sono, in tutto, davanti a lui. Per questo motivo, i bambini tendono a eseguire le operazioni aritmetiche, aiutandosi con le dita (si costruiscono, istintivamente, uno strumento di calcolo più comodo e attendibile); in genere, però, il ricorso a tali *mezzucci* viene loro drasticamente proibito.

E così, viene reciso sul nascere un collegamento tra un procedimento puramente astratto e la realtà concreta che questo dovrebbe servire a rappresentare.

Professore, è ovviamente fuori discussione che una mente aperta, soggetta a continui stimoli che la sappiano emozionare ed educare al ragionamento porti notevoli benefici nella società in cui vive. "*L'anno duemilaotto è arrivato*"… anche se già da qualche mese, cosa si aspetta per il futuro?

L'anno duemilaotto è arrivato (*)

L'ora è data! Entra il nuovo mito:
urta il mondo alienato e trova
l'uomo e la donna, tra vita e rito;
a loro muta doti e l'età rinnova.
È nata l'era molto nuova? Ti dirò…
amore e lavoro, non a tutti li dà;
là, tanto ideale umano ritrovò
ma, notando rivolte, lo aiuterà?
Tanto male radunato io rilevo:
o l'odio eruttante va in malora,
o andrà a rotoli il mutante evo…
E non udrà il motto: «La vita è ora!».

(7 marzo 2008)

(*) Ogni riga di questa composizione è un anagramma della frase: «L'anno duemilaotto è arrivato».

96. Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo

Giorgio Israel, *Chi sono i nemici della scienza? Riflessioni su un disastro educativo e culturale e documenti di malascienza*, Lindau, 2008

Giorgio Israel, per chi non lo conoscesse, è professore ordinario di Matematiche complementari presso l'Università di Roma "La Sapienza", autore di centinaia di articoli scientifici e decine di libri, si occupa principalmente di storia della matematica ed epistemologia. In questo libro attacca, senza esclusione di colpi, tutti quelli che, a suo avviso, stanno distruggendo la scienza. Ma chi sono i nemici della scienza? Quelli dell'altra cultura? Della cosiddetta cultura umanistica? Purtroppo no. A suo modo di vedere, molti nemici della scienza sono tanti suoi colleghi, di formazione scientifica come lui, matematici anche loro. Un libro fortemente polemico insomma – già dal titolo – principalmente contro chi in Italia sembra avere il controllo dell'informazione scientifica, un saggio contro la cosiddetta 'cultura militante', più di sinistra che di destra.
Il libro ci ha interessato principalmente per la sua analisi spietata del sistema della formazione italiano, che viene definito 'disastro educativo'. La crisi della scuola italiana, e in particolar modo dell'insegnamento della matematica, è un dato di fatto ormai condiviso da tutti: qualsiasi indagine e confronto si faccia, nazionale o internazione, sia che si tratti di un semplice confronto tra gli studenti di oggi e quelli di qualche decennio fa, sia che si contino gli iscritti alle facoltà scientifiche, il quadro che ne viene fuori è sempre quello di una crisi profonda che non si riesce a frenare e per la quale i rimedi stentano ad arrivare. Come ricorda lo stesso autore di questo saggio, la scuola italiana era una delle migliori del mondo; il liceo classico ha formato, sebbene di indirizzo prettamente umanistico, generazioni di eccellenti studiosi anche nel campo delle scienze naturali e matematiche. Un laureato italiano in fisica o in matematica (secondo il vecchio ordinamento universitario) si trovava sempre in ottima posizione nel concorrere alle prove d'ingresso per un dottorato (PhD) negli Stati Uniti, in quanto possedeva un'ottima preparazione di base. La riforma Gentile, sostiene Israel, è stata una delle più intelligenti, organiche ed efficaci riorganizzazioni della struttura educativa che abbia prodotto la cultura europea del '900; dopo mezzo secolo di ottime prove richiedeva delle correzioni per dare maggiore spazio alla componente scientifica e tecnologica dell'istruzione, si è invece avuta una sua sistematica demolizione su diversi livelli.
Stiamo diffondendo, scrive l'epistemologo romano, un'immagine della scienza che incoraggia a interessarsi alle applicazioni e alla tecnologia, mentre scoraggia coloro che sono interessati alla scienza come impresa conoscitiva, conseguentemente stiamo distruggendo ogni visione umanistica della scienza: "La cultura e la divulgazione scientifica che ci vengono propinate quotidianamente sono quasi sempre orientate a diffondere un'ontologia materialista. […] Sembra che parlare delle nuove acquisizioni della scienza sia soltanto un pretesto per dimostra-

re che tutto è materiale, che tutto si riduce a neuroni, geni e particelle elementari, in sostanza cattiva filosofia passata come scienza e rivestita di tecnologia."
A questo panorama di fondo si è aggiunto uno smantellamento dei programmi scolastici, che, sebbene antiquati, avevano una loro coerenza e una provata utilità. La causa principale è da attribuire, secondo Israel, al prevalere di gruppi di pedagogisti che sono riusciti ad attribuirsi il ruolo di stabilire contenuti e metodi per l'insegnamento di tutte le altre discipline. Così la storia non è più narrazione di fatti ma una specie di filosofia della storia e la geografia è divenuta un deposito teorico sulle forme della spazialità. Nel contesto di questa matematizzazione della storia e della geografia, la matematica, paradossalmente, è divenuta una disciplina empirica e pratica. Più precisamente, è stato rovesciato il percorso di apprendimento: nell'insegnamento della storia e della geografia si parte dall'astratto per arrivare al concreto, nell'insegnamento della matematica si parte dalla pratica per arrivare ai concetti e all'astrazione.
Il 'disastro educativo' è iniziato con i nuovi programmi della scuola primaria introdotti nel 1985, nei quali l'approccio pedagogico-didattico cominciò a prevalere rispetto ai veri e propri contenuti disciplinari. In quei programmi si sosteneva che: "la vasta esperienza compiuta ha dimostrato che non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione. La più recente ricerca didattica, attraverso un'attenta analisi dei processi cognitivi in cui si articola l'apprendimento della matematica, ne ha rivelato la grande complessità, la gradualità di crescita e linee di sviluppo non univoche". Si dà per scontato, commenta lo storico della matematica, che il percorso cognitivo segua la complessità, la gradualità e non univocità individuata dai didatti-pedagogisti; viene operato lo scambio fra la storia reale e i processi cognitivi del soggetto; si confonde il percorso lento, complesso, non univoco fatto dalla matematica, che da disciplina pratica è divenuta - già nell'antichità - astrazione matematica, con il percorso che segue la mente di una singola persona. I percorsi di apprendimento, sostiene invece Israel, debbono prendere come punto di partenza lo stato presente della scienza e non riproporre il suo percorso storico. Inoltre, quando nei programmi della scuola primaria si afferma che la matematica consiste nell' "osservare oggetti e fenomeni e individuare grandezze misurabili, effettuare misure con strumenti elementari e classificare oggetti in base a una proprietà, raccogliere dati e informazioni e saperli organizzare", si sta definendo, commenta Israel, una scienza di tipo sperimentale che con la matematica ha poco a che vedere.
Già nel quadro della riforma Gentile la matematica veniva insegnata con un approccio eccessivamente da *problem solving* e poco concettuale; la tendenza attuale a far emergere la matematica come una sorta di prodotto dei problemi pratici anziché come applicazione di schemi e metodi concettuali ne costituisce una prosecuzione nella direzione sbagliata. Occorreva integrare le materie scientifiche in modo che stessero sullo stesso piano delle materie letterarie e storico-filosofiche, occorreva valorizzare il significato culturale della fisica, della matematica, della chimica, della biologia, evitando ogni approccio che le riducesse a meri saperi tecnici e ne esaltasse al contrario la portata conoscitiva e anche filosofica.
È paradossale, scrive l'autore di questo saggio-denuncia, che la demolizione sistematica di una delle migliori scuole statali del mondo sia stata compiuta soprattutto da governi di centrosinistra, ovvero da governi che dovevano avere a

cuore più di altri la difesa della scuola pubblica. A onor del vero, continua lo storico della matematica, la più rilevante picconata vibrata alla scuola italiana fu data dal Ministro della Pubblica Istruzione Francesco D'Onofrio che nel primo governo Berlusconi - era il 1994 - abolì gli esami di riparazione introducendo i cosiddetti 'debiti formativi'. Questo provvedimento fu visto come necessario per eliminare il mercato delle ripetizioni private ma comportò un crollo del livello di preparazione degli studenti e contestualmente la demolizione di uno dei pilastri della disciplina scolastica, poiché la minaccia degli esami di riparazione era uno degli strumenti più efficaci dell'insegnante per suscitare il senso del dovere.
Proprio su questo senso del dovere si innesta un'ulteriore critica a una delle recenti convinzioni pedagogiche: la teoria dell'allievo al centro del sistema, che deve costruire da se stesso i propri saperi mentre il docente deve limitarsi esclusivamente ad aiutarlo nel processo di apprendimento autonomo. L'immagine di docente che ne viene fuori, ironizza Israel, è quella di un animatore culturale, "una figura analoga a quegli animatori delle feste di compleanno dei bambini che facilitano la socializzazione e il divertimento proponendo giochi e guidando la festa nel modo più gradevole possibile". Per consolidare comportamenti etici spontanei sono necessari strumenti costrittivi e gli esami di riparazione costringevano gli studenti a non trascurare nessuna materia. Ancora più critico contro i ministri Berlinguer e De Mauro che hanno introdotto il '6 con asterisco' e la conseguente promozione anche con insufficienze gravi, seguendo appunto l'idea che gli studenti siano in grado di costruire in autonomia il proprio percorso formativo, le proprie aspirazioni culturali. Tutto ciò, invece, ha indotto moltissimi studenti a decidere preventivamente di non studiare le materie più ostiche e impegnative, tra le quali quasi sempre la matematica.
Un altro dei pilastri sui quali si fonda la nuova idea di scuola è la concezione dello studente-utente e della scuola-impresa. Secondo questa ormai diffusa concezione, la scuola non assolve tanto a una funzione educativa, bensì a una funzione di erogazione di servizi che deve essere svolta con il massimo di soddisfazione dell'utente, in modo da aumentare il numero dei clienti. La via più semplice per ottenere questo risultato è stata purtroppo quella di offrire promozioni con il minimo sforzo. Di per sé, l'esigenza di introdurre criteri di efficienza e di tenere conto delle opinioni di tutti i soggetti implicati nel processo dell'istruzione è perfettamente comprensibile e giustificata, riconosce Israel, tuttavia, in senso generale, il sistema dell'istruzione fornisce cultura, e la cultura non è un prodotto al pari di un'automobile o una scatola di tonno, né il lavoro di un docente equivale alla prestazione di un servizio, come quello di un impiegato allo sportello: "Un voto insufficiente in una materia è come una scatola di pomodori avariata: l'utente protesta con il venditore." Questo modo di concepire la scuola comporta di fatto una riduzione delle responsabilità dello studente: le bocciature e le valutazioni troppo basse vengono a ricadere sulla scuola e sui docenti che nella logica della scuola-impresa risultano i maggiori responsabili dei 'prodotti' mal riusciti.
Infine, l'ossessione di sottoporre la cultura, la ricerca scientifica e l'istruzione a una misurazione quantitativa oggettiva e a processi di standardizzazione, aspetti che erano estranei al sistema scolastico italiano, sono la conseguenza di una profonda sfiducia nell'uomo e portano a eliminare la sua visibilità e le sue tracce. Ma così facendo si elimina anche la creatività dell'uomo: "il docente della scuola standardizzata secondo i metodi di tipo docimologico-didattichese non è più un uomo di

cultura che, sia pure entro certe finalità, programmi e metodologie, trasmette le sue conoscenze e la sua esperienza per formare persone, ma un 'operatore', un funzionario scolastico, un burocrate dell'istruzione che è tanto più apprezzato quanto più cancella la sua soggettività, quanto più elimina le tracce della sua presenza".
Quale può essere allora il corretto ruolo dell'insegnante? Israel condivide il pensiero di Hannah Arendt: "L'insegnate è una persona che si qualifica per conoscere il mondo e per essere in grado di istruire altri in proposito, mentre è autorevole in quanto, di quel mondo, si assume la responsabilità. Di fronte al ragazzo è una sorta di rappresentante di tutti i cittadini della terra che indica i particolari dicendo: ecco il nostro mondo."

Antonio Bernardo

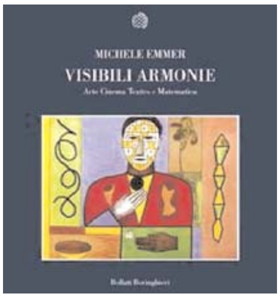
Daniele Funaro, *Clara e l'Aeroplano. Divagazioni sulla Matematica e le altre Scienze*, Pitagora, 2007

Avevamo lasciato Clara qualche anno fa (*Clara e il baricentro*, Pitagora, 2003) in vacanza in Umbria con un gruppo di amici a discutere, in una calda estate, di baricentro e questioni affini. Clara ora è cresciuta, così come la sua passione per la fisica e la matematica. La incontriamo mentre tenta di sfuggire da Franco, giocatore incallito di Lotto, Superenalotto e Roulette. Per ciascuno di questi giochi Franco ha trovato dei 'sistemi' infallibili per vincere, sistemi dei quali ogni volta Clara ne mette a nudo l'inutilità e l'infondatezza con argomentazioni semplici da poter sconvolgere ogni volta le false certezze di Franco. Ma la partita più difficile è quella da giocare durante un viaggio negli Stati Uniti. Un viaggio offerto dal suo datore di lavoro occasionale, Hans, verso il quale Clara ha un certo interesse affettivo o di amicizia non ancora ben definito, fino ad allora limitato a qualche film visto insieme, qualche sortita in pizzeria. La proposta di Hans è veramente allettante: un viaggio in America, per motivi di lavoro, tutto gratuito. Ma tra i due c'è una segretaria di troppo, Irene, truccata in maniera provocante, che passa la maggior parte del tempo a curare il suo aspetto fisico: ciglia, unghia, trucco e abiti da sfilate di moda. Clara invece è una ragazza semplice: un maglione, un jeans sdrucito, scarpe da tennis e l'immancabile blocco di carta per gli appunti, il tutto in un borsone rappezzato. Già in aeroporto, in attesa dell'imbarco, la conversazione tra Hans e Clara è dedicata ai misteri affascinanti della fisica e della tecnologia. Ogni volta che prendo un aereo mi domando come fa a volare, dice Hans; se non ci fosse l'aria a fare da resistenza si potrebbe andare anche più veloci, continua. Clara non può trattenersi di fronte a una simile idiozia e gli spiega il ruolo che l'aria gioca nel volo dell'aereo: il lift e il drag, l'angolo di attacco tra ala dell'aereo e l'aria, fino a penetrare i segreti della dinamica dei fluidi. Durante il lungo volo Clara si addentra sempre di più nei misteri dei modelli matematici, delle cosiddette 'formule' ed 'equazioni'. Hans sembra interessato e Clara continua vorticosamente nel suo viaggio matematico tra equazioni differenziali, matrici, autovalori, distribuzioni di probabilità. All'arrivo a New Haven Clara deve occuparsi ancora di modelli matematici: la fabbrica del loro ospite produce detersivi di tre tipi, quello plain, quello medio e quello extra, come decidere quale e in quale quantità produrre i diversi tipi di detersivo? Per Clara è tutto semplice, non è più la ragazzina di qualche anno fa, è in

grado di dominare e di spiegare con semplicità tecniche sofisticate di modellistica matematica, è ormai una matematica esperta, … ma per affrontare le delusioni non si è mai esperti abbastanza.
Un libro dalla lettura piacevole che tratta questioni anche complesse di fluidodinamica e calcolo matriciale in modo semplice indicandone i concetti chiave, può essere particolarmente utile per chi vuole avventurarsi negli studi universitari di matematica, fisica o ingegneria.

a. b.

Michele Emmer, *Visibili Armonie, Arte Cinema teatro e Matematica*, Bollati Boringheri, 2006, pp.430, euro 60,00



Michele Emmer, professore ordinario di Matematica presso l'Università La Sapienza di Roma, si è occupato di calcolo delle variazioni ed è noto al grande pubblico per aver realizzato numerosi film sulla matematica: Bolle di sapone, Flatland, il fantastico mondo di Escher e altri. A Venezia organizza ogni anno il convegno "Matematica e cultura". Questo libro è una specie di racconto, di viaggio quasi autobiografico lungo il confine tra matematica e arte. In parte si presenta come una enciclopedia ragionata di tutto ciò che la matematica sembra avere in comune con forme d'arte quali cinema, teatro e arte visiva in senso stretto (sono oltre 600 gli autori citati, tra matematici e artisti) ma data la vastità del tema l'autore ha scelto di seguire un percorso narrativo molto prossimo al suo percorso di uomo di cultura. Non ha voluto impegnarsi in analisi storico-filosofiche sul senso della bellezza, non si è fatto contagiare dall'ambizione tipicamente matematica di catalogare il fenomeno osservato (in questo caso il rapporto tra matematica e arte), ha preferito scegliere una forma di racconto più sfilacciato, più libero, più vicino al sogno, più vicino allo stile narrativo di un film. Egli stesso presenta il tema del libro come "Un legame sognante tra due mondi che sembrano così lontani e irraggiungibili". Il saggio-racconto comincia addentrandosi nel labirinto dei rapporti tra matematica e arte, seguendo forse il labirinto dei ricordi dell'autore: dal film "Bianca" di Nanni Moretti si passa alla Melanconia di Dürer, si riprende con un altro film italiano poco noto "Dopo mezzanotte" per arrivare a Fibonacci e con un ulteriore salto nel tempo tornare a Mario Merz e la sua installazione sulla Mole Antonelliana di neon luminosi con i primi numeri della famosissima successione. Si parla di Paperino e della sezione aurea, del Partenone ma soprattutto di Le Corbusier. Si riprende con il film "Il senso di Smilla per la neve" per parlare di numeri, del contare, dell'aritmetica. Si comincia insomma con un racconto ingarbugliato, con improvvisi salti nel tempo e salti tematici: letteratura, arte, cinema, numeri, forme, architettura, immaginazione, spazio. Sono questi i 'fili di Arianna' che il lettore dovrà seguire nel libro per non perdersi in questo percorso dal contorno incerto, dai confini non delineati e non delineabili.
Da appassionato di cinema, Emmer ha voluto usare lo stile narrativo del sogno, del labirinto, dell'inseguire l'immaginazione a qualsiasi costo, dovunque essa porti. Un libro ricco di immagini ma anche un libro eccessivamente costoso, cosa che non ne facilita la diffusione e rischia di relegarlo nelle biblioteche e tra i collezionisti di libri.

a. b.

Maurizio Mariani, *Storia della scienza moderna*, Laterza, 2002

La scienza moderna si fa iniziare solitamente intorno al 1600, con Copernico e Galileo, e da quel punto inizia un processo di sviluppo inarrestabile: non solo nuovi fatti, ma nuovi modi di pensarli, come afferma Giulio Giorello nella presentazione del libro. Dopo una interessante e curiosa parte introduttiva sull'eredità antico-medioevale, sulle cui radici affondano appunto le basi la nuova scienza, l'autore passa ad una dettagliata descrizione di quei decenni fra la fine del 1500 e la metà del 1600 in cui si ebbero i maggiori sviluppi concettuali nell'approccio allo studio della natura. I capitoli sono suddivisi su macrotemi che consentono una lettura "trasversale" non necessariamente dall'inizio alla fine: il cielo, il mondo sublunare, la luce e i colori, la terra e gli altri elementi, i viventi. Ciascuno di essi è suddiviso in una parte descrittiva, *L'ordine degli eventi*, in cui si delineano i fatti salienti con le loro interpretazioni in successione cronologica, e una più riflessiva, *L'ordine delle idee e l'ordine delle cose*, in cui l'autore approfondisce le procedure scientifiche descritte e aggiunge la sua personale riflessione epistemologica su controversie e scelte concettuali. La parte finale del libro è dedicata alla descrizione della filosofia sperimentale e della filosofia meccanica, che pervadono la scienza dalla metà del XVII secolo ai primi anni del XVIII, terminando con degli accenni alle scienze più recenti come lo studio dell'elettricità, della biologia e della chimica. Il libro di Mamiani non è certo di stampo divulgativo né tanto meno di semplice lettura, bensì un manuale di riferimento per appassionati e studiosi di storia della scienza, su cui trovare, anche grazie ai suoi ben strutturati indici e collegamenti interni, tutte le informazioni necessarie ad effettuare una dettagliata analisi storica, filosofica ed epistemologica.

f. c.

97. Enigmista e giochi matematici

CRUCIVERBA CRITTOGRAFATO

di Luciano Sarra

4	22	28	10	15	6	15	8	19	15	5	28	14	4	22
5	5	5	14	28		10	19	5	15	22	19		28	13
4	28	8	28		5	28	13	22	13	15		6	10	10
8	22	28		10	28	14	15	10	28		8	19	28	14
22	28		10	5	4	22	13	15		10	28	14	14	28
19		2	28	14	15	13	19		5	19	10	28	22	13
8	19	15	13	22	4	28		6	19	14	22	13	15	5
6	5	14	28	8	19		2	28	10	22	13	15		22
15	1	22	4	22		5	22	10	15	13	22		28	4
10	19	10	28		10	19	13	19	14	22		5	10	19
19	6	15		6	22	14	28	14	19		13	19	15	13
8	22		10	19	28	10	14	22		1	28	4	5	1
8	28	5	19	10	10	1	22	28	14	28	5	22	10	28

In questo cruciverba non ci sono definizioni. Le parole da inserire sono crittografate secondo una precisa chiave: ad ogni numero corrisponde una lettera dell'alfabeto. Da notare che a numero uguale possono corrispondere più lettere diverse.

Inviare la chiave della soluzione a luciano@sarra.org

CRITTONUMERO

di Luca Barletta

A lettera uguale corrisponde cifra uguale, e bisogna rispettare tutte le definizioni date dalle frasi

"DUE è un numero di Fibonacci"
"SETTE è un numero primo"
"OTTO è un cubo"

Inviare la risposta a luca.barletta@tele2.it

QUANDO LE MONETE FANNO LE CURVE

di Luca Barletta

Si affianchino due monete da 1 € in modo tale da farle toccare in un punto A. Tenendo ferma una moneta si faccia ruotare l'altra attorno alla prima, senza strisciarla. Immaginando che il punto A sia solidale alla moneta mobile, dopo un giro completo della moneta il punto A avrà tracciato una linea chiusa. Qual è la lunghezza della linea e l'area racchiusa da questa? Nota: il diametro della moneta da 1 € è di 23,25 mm.

Inviare la risposta a luca.barletta@tele2.it

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito

Anno 2 Numero 7 – Agosto 2008
Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce
Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it