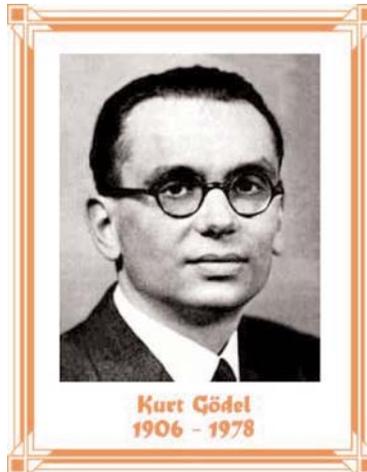


# 93. La prova matematica dell'esistenza di Dio

di Alexander Pigazzini

**SUNTO.** Questo articolo intende esporre in modo molto breve ed essenziale, senza scendere nei rigori della logica, la prova ontologica di Kurt Gödel (Brno, 1906-Princeton, 1978).

La speranza è infatti quella di stimolare, in poche righe, la curiosità dei lettori su questa chicca matematica del secolo scorso, ma soprattutto di ricordare il grande matematico a trent'anni dalla sua scomparsa.



no seguente si laurea in Matematica discutendo una tesi davanti ad Hahn e Furtwangler nella quale dimostra la completezza della Logica del primo ordine; la tesi di Gödel viene pubblicata nel 1931. Solamente un anno più tardi ottiene la libera docenza (Privatdozent). Finalmente nel 1933 ha inizio la sua carriera all'Insitute of Advanced Study di Princeton; prima su invito di Von Neumann; dopo vari rientri a Vienna e dopo vari problemi di depressione riesce a ottenere la

cittadinanza americana nel 1948, diventa professore all'I.A.S. nel 1953. L'ultima parte della vita di Gödel è segnata da un rapporto totalmente squilibrato con il cibo: Gödel soffre di ulcera duodenale, di depressione e teme continuamente di essere avvelenato; nel gennaio del 1978 viene lasciato solo a casa dalla moglie che rientra in Europa, e si lascia morire probabilmente di denutrizione.

La vita di Gödel ci mostra un chiaro esempio di come una persona geniale si possa trovare in seria difficoltà di fronte ai problemi della vita quotidiana. Dal punto di vista scientifico Gödel è passato alla storia grazie ai suoi fondamentali risultati nel campo della logica matematica. La dimostrazione della completezza della logica del primo ordine è solo il primo grande risultato che Gödel ottiene; Gödel chiarisce bene la differenza tra verità e dimostrabilità.

Ma i risultati più significativi devono ancora arrivare: i Teoremi di incompletezza. Se un sistema assiomatico è coerente, ovvero da esso non si possono dedurre un'affermazione e la sua negazione contemporaneamente, allora, sotto certe condizioni, il sistema è incompleto, ovvero esistono affermazioni che non sono né dimostrabili né confutabili; questo è il primo Teorema di Gödel. Se uno pensa che il primo Teorema di Gödel sia un risultato negativo per i fondamenti della Matematica allora si deve preparare a leggere il secondo Teorema di incompletezza:

[Kurt Gödel, una vita tra genio e follia: breve biografia](#)

(a cura di Luca Lussardi)

*Trent'anni fa, Princeton (USA), 14 Gennaio 1978, a 72 anni di età muore, per denutrizione, uno dei più grandi geni che la Logica, e forse l'intera Matematica, abbiano mai avuto.*

*Kurt Gödel nasce a Brno, in Moravia, il 28 Aprile 1906. Gödel fin da bambino dimostra di essere una persona estremamente seria, riservata e al limite della paranoia circa le proprie condizioni di salute. E' pur vero che Gödel ha dei problemi di salute durante la sua vita, ma non tali da giustificare l'ossessione verso la malattia.*

*Nel 1924 comincia a studiare Fisica all'Università di Vienna, anche se certe lezioni di Teoria dei numeri di Philip Furtwangler lo affasciano troppo. Dopo due anni comincia a frequentare il Circolo di Vienna, ovvero un gruppo costituito per lo più da filosofi che discutono di Logica e questioni di linguaggio. Un anno più tardi conosce Adele Porkert, ballerina più vecchia di lui che lo sposerà nel 1938. Gödel prende nel 1929 la cittadinanza austriaca e l'an-*

se un sistema assiomatico è coerente allora la coerenza del sistema non è dimostrabile all'interno del sistema stesso. Sostanzialmente non è possibile dimostrare l'assenza di contraddizioni logiche restando all'interno del sistema assiomatico.

Gödel si occupa anche di Teoria degli insiemi, e dello studio del rapporto tra mente e macchina (Turing). Nell'ultima parte della sua vita si interessa anche di Relatività, diventando amico di Albert Einstein.

## LA PROVA ONTOLOGICA

di Alexander Pigazzini

Uno dei punti più affascinanti della vita scientifica di Gödel sta nel suo tentativo di dimostrare l'esistenza di Dio. Vari logici atei si erano cimentati nel problema, ma Gödel non era ateo, ed egli stesso afferma che il suo interesse per la prova dell'esistenza di Dio è solamente logico. Gödel fornisce una dimostrazione puramente logica, detta anche *prova ontologica*, prima nel 1941, poi rivista e conclusa nel 1970.

Per introdurre questo notevole lavoro, anche se non il più brillante della sua carriera, vorrei innanzitutto spendere due parole sul concetto di prova ontologica.

Per prova ontologica (dal greco *òntos*, genitivo di *òn*, participio presente di *eimì*, essere) si intende una dimostrazione logica dell'esistenza dell'essere, solo per mano della scolastica divenne la dimostrazione a priori dell'esistenza di Dio.

Partendo dalle origini, fu per opera di Anselmo d'Aosta che, con il suo "*credo ut intelligam*" del *Proslogion* e con quattro prove ontologiche a posteriori nel suo *Monologion*, prese il via la vera ricerca di una prova ontologica riuscendo, nei rispettivi periodi, a coinvolgere menti straordinarie quali Cartesio, Leibniz, Kant, e per l'appunto Gödel.

Si presume che quest'ultimo iniziò a lavorarci nei primi anni quaranta, ma solo nel febbraio del

1970, venne allo scoperto parlandone e mostrandolo lo scritto a Dana Scott, forse perché in quel periodo si dice che fosse molto preoccupato per la sua salute e temeva che morendo, la dimostrazione svanisse con lui.

A distanza di diciassette anni, nel 1987, la sua "*Ontologisches Beweis*" venne finalmente pubblicata negli Stati Uniti, all'interno di un volume che raccoglieva diversi suoi lavori.

Prima di iniziare un'analisi punto per punto della prova, ne riporto una sintesi<sup>1</sup>.

$P(\varphi)$   $\varphi$  è positivo (o  $\varphi \in P$ )

**ASSIOMA 1.**  $P(\varphi) \cdot P(\psi) \supset P(\varphi \cdot \psi)$

**ASSIOMA 2.**  $P(\varphi) \vee P(\neg\varphi)$  (Disgiunzione esclusiva)

**DEFINIZIONE 1.**  $G(x) \equiv (\varphi) [ P(\varphi) \supset \varphi(x) ]$  (Dio)

**DEFINIZIONE 2.**  $\varphi \text{ Ess. } x \equiv (\psi) [ \psi(x) \supset N(y) [ \varphi(y) \supset \psi(y) ] ]$  (Essenza di x)

$p \supset Nq = N(p \supset q)$  (Necessità)

**ASSIOMA 3.**  $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$   
 $\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$

Poiché ciò segue dalla natura della proprietà.

**TEOREMA.**  $G(x) \supset G \text{ Ess. } x$

**DEFINIZIONE 3.**  $E(x) = (\varphi) [ \varphi \text{ Ess. } x \supset N(\exists x) \varphi(x) ]$   
 (Esistenza necessaria)

**ASSIOMA 4.**  $P(E)$

**TEOREMA.**  $G(x) \supset N(\exists y) G(y)$   
 quindi  $(\exists x) G(x) \supset N(\exists y) G(y)$   
 quindi  $M(\exists x) G(x) \supset MN(\exists y) G(y)$  (M = possibilità)

$M(\exists x) G(x)$  significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile.

Ciò è reso grazie a:

**ASSIOMA 5.**  $P(\varphi) \cdot \varphi \supset N\psi : \supset P(\psi)$  che implica  
 $x = x$  è positivo  
 $x \neq x$  è negativo

<sup>1</sup> Tratta interamente dal libro "la prova matematica dell'esistenza di Dio" a cura di G. Lolli e P. Odifreddi, Bollati Boringhieri Editore.

Ripartendo dall'inizio, Gödel introduce come prima cosa il concetto di proprietà positiva, evidenziandone i caratteri più importanti con una serie di assiomi.

*Primo Assioma:* la composizione tra due proprietà positive ci rende una proprietà positiva, per capirci meglio se “essere bello” è una proprietà positiva e lo è anche “essere alto”, allora di conseguenza lo sarà anche “essere bello e alto”.

*Secondo Assioma:* è una disgiunzione esclusiva, una proprietà è positiva oppure lo è il suo contrario, ma entrambe non possono essere positive o non positive.

*Prima Definizione:* introduce il concetto di Dio; un ente è di natura divina se e solo se possiede tutte e sole le proprietà positive.

*Seconda Definizione:*  $\phi$  è un'essenza di  $x$  se e soltanto se per ogni proprietà  $\psi$ ,  $x$  include  $\psi$  necessariamente se  $\phi$  implica  $\psi$ .

Qui Gödel introduce il concetto di necessità, ossia se “ $p$ ” implica necessariamente “ $q$ ” allora è necessario che “ $p$ ” implichi “ $q$ ”.

*Terzo Assioma:* se una proprietà è positiva allora è necessariamente positiva e di conseguenza se una proprietà non è positiva, allora è necessariamente non positiva. Una proprietà è necessaria se e solo se è vera in tutti i mondi possibili, mentre è possibile se è vera solo in alcuni di questi mondi.

*Primo Teorema:* se un ente è di natura divina, allora la proprietà dell'esistenza gli appartiene per essenza.

*Terza Definizione:*  $x$  esiste necessariamente se e soltanto se la sua essenza (o ogni suo elemento essenziale) esiste necessariamente.

*Quarto Assioma:* l'esistenza necessaria è una proprietà positiva.

*Secondo Teorema:* se Dio esiste, allora esiste necessariamente; quindi se è possibile che Dio esiste di conseguenza è possibile che Dio esiste necessariamente, dunque Dio esiste necessariamente.

*Quinto Assioma:* se una proprietà positiva ne implica necessariamente un'altra, allora di conseguenza anche quest'ultima è positiva.

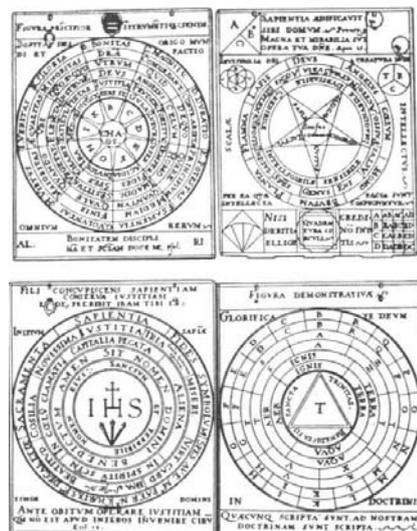
Dopo aver svolto la “traduzione” in ogni sua parte, ricapitolo il tutto dandone una mia interpretazione.

Inutile dire che questa prova è valida solo se è possibile che Dio esista, cioè se è possibile combinare tra loro tutte le proprietà positive esistenti. Come abbiamo visto, un ente per essere Dio deve possedere tutte e sole le proprietà positive; una proprietà positiva è necessariamente positiva, ossia è positiva in tutti i mondi possibili e l'intersezione delle proprietà positive ci restituisce ancora una proprietà positiva.

Detto questo si deduce che “Essere Dio” è una proprietà positiva e grazie al quarto assioma sappiamo che anche l'esistenza necessaria lo è.

Tirando le somme, il tutto porta a dire che esisterà necessariamente un ente che tra tutte le varie proprietà positive possiederà anche la proprietà “Essere Dio”.

Quanto esposto ha ovviamente la limitazione di esistere solo in un universo che ammettere un finito numero di proprietà positive e Gödel infatti, per ovviare a questa costrizione, aggiunge un ultimo assioma (il quinto), il quale prevede che se una proprietà positiva ne implica necessariamente una seconda, allora anche quest'ultima è una proprietà positiva.



Raimondo Lullo (1232-1316),  
*Prova logica dell'esistenza di Dio*

Questa “clausola” finale riesce a aggirare brillantemente il “blocco” della finitezza, permettendo l’esito sperato alla prova.

L’autore avvertì sempre l’urgenza di trovare un ordine logico-matematico da porre a fondamento dell’esistenza dell’universo e forse un tale ordine gli sembrava fosse garantito solo dalla necessità logica dell’esistenza di Dio.

Nonostante furono anche esigenze di carattere esistenziale e religioso a spingere il compimento di questa prova, è giusto specificare che essa derivi dal concetto di ultrafiltro (teoria degli insiemi) e non ha molto da spartire con la teologia tradizionale, d’altro canto lo stesso Gödel, a scanso d’equivoci, ci tenne a precisare in più occasioni che questo suo lavoro fu concepito solo come un esercizio di pura logica.

In conclusione, visto che troppe cose ci sarebbero da aggiungere sulla vita e sulle opere di questo

grande e controverso genio del ’900, vorrei limitarmi semplicemente nel ricordare che i suoi studi hanno segnato una svolta fondamentale nella storia della logica, condizionando ogni successiva ricerca e determinando la nascita di nuove e importanti discipline logiche.

#### BIBLIOGRAFIA

- “Gödel”, Lettera matematica Pristem n.62/63, Aprile 2007, Springer.
- Kurt Gödel, La prova matematica dell’esistenza di Dio. A cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Bollati Boringhieri, Torino, 2006.
- C. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori Editore, 1990.