137. QUADRATI MAGICI

Stefano Borgogni
stfbrg@rocketmail.com

Sunto

Questo articolo è dedicato ai quadrati magici.
Si tratta di un argomento che è stato trattato in lungo e in largo da generazioni di matematici (e non), e su cui esiste un'ampia letteratura.
L'intenzione del presente testo è, per l'appunto, quella di raggruppare e sintetizzare i principali dati e informazioni disponibili sui quadrati magici (comprese una serie di varianti al tema principale) per offrire in poche pagine una panoramica complessiva e, si spera, sufficientemente esauriente.
Per maggiori approfondimenti si rimanda alla bibliografia e all'ampia documentazione disponibile in rete.

Quadrati magici "normali"

Com'è noto, i quadrati magici di ordine N sono matrici quadrate NxN di numeri interi consecutivi (da 1 a N^2) costruite in modo tale che rimanga sempre costante la somma di ogni riga, colonna o diagonale principale. Tale somma, detta anche "costante magica", è facilmente ricavabile; la formula è: $(N^3+N) / 2$.

N	*Costante magica*
1	1
2	impossibile
3	15
4	34
5	65
6	111
7	175
8	260
9	369
10	505

I quadrati magici sono noti fin dai tempi più antichi: basti citare il seguente quadrato 3x3, noto come "Lo Shu", di origine cinese e con costante magica 15:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il Lo Shu è legato a una leggenda che parla di una disastrosa piena del fiume Lo. La gente offriva, invano, sacrifici al dio del fiume; dopo ogni sacrificio compariva una tartaruga.
Finalmente un bambino si accorse che essa portava raffigurato sul guscio un quadrato magico 3x3, a indicare che il dio voleva un sacrificio di 15 (costante magica) animali. La richiesta fu accolta e la piena del fiume cessò.
Il Lo Shu è stato interpretato anche come simbolo dell'armonia universale, poiché comprende i numeri da 1 (inizio di tutte le cose) a 9 (completamento).

I quadrati magici rimangono tali anche operando alcune trasformazioni; ad esempio:

- simmetria rispetto alla mediana (orizzontale o verticale);
- simmetria rispetto a una diagonale;
- sostituzione di ogni numero col suo complementare rispetto a N^2+1.

Il quadrato magico di ordine 1 è banale. E' facile verificare che quello di ordine 2 non è possibile, mentre per tutti gli altri ordini vi sono quadrati magici in un numero che cresce al crescere di N, diventando ben presto esorbitante. E' stato calcolato, infatti, che - senza contare rotazioni e riflessioni - esistono:

- 1 quadrato magico di ordine 3;
- 880 quadrati magici di ordine 4;
- 275.305.224 quadrati magici di ordine 5.

I quadrati magici di ordine 6 dovrebbero essere circa 17 miliardi di miliardi.
Resta da risolvere il problema più generale: qual è la regola per determinare il numero di quadrati magici per un dato ordine N?

I quadrati magici sono citati anche nell'arte e nella letteratura: l'esempio più famoso è quello del dipinto di Durer "*Melancolia I*", in cui è raffigurato il seguente quadrato magico:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Le celle centrali dell'ultima riga indicano la data di composizione dell'opera, il 1514.

Quadrati diabolici

I *quadrati diabolici* sono quadrati magici che, oltre a righe, colonne e diagonali principali, mantengono la somma costante anche sulle diagonali "spezzate". Di fatto, i quadrati diabolici forniscono lo stesso risultato anche se si opera in altri modi (ad esempio, spostando una riga dalla posizione più alta a quella più bassa o una colonna da un lato all'altro).
Il loro nome deriva proprio dal fatto che la costante magica sembra avere la capacità diabolica di saltar fuori comunque si rigiri il quadrato iniziale.
Esistono quadrati diabolici per qualsiasi ordine N > 3 con:
- N dispari;
- N pari ma divisibile per 4.

Non è possibile, ad esempio, costruire i quadrati diabolici 6x6 o 10x10.

Un celebre quadrato diabolico è quello trovato in un'iscrizione del XII secolo in India, denominato "Quadrato di Nasik", dal nome della località in cui venne scoperto:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

In questo quadrato la costante magica 34 si può ottenere in ben 86 modi diversi; tra questi ne indichiamo alcuni:
- somma dei 4 numeri centrali;
- somma dei 4 numeri d'angolo;
- somma dei numeri centrali di prima e ultima riga;
- somma dei numeri centrali di prima e ultima colonna;
- somma dei numeri dei 4 quadrati 2x2 ottenuti tagliando a metà la figura in verticale e in orizzontale.

Quadrati antimagici ed eteromagici

I *quadrati eteromagici* si comportano esattamente al contrario rispetto a quelli magici: la somma di righe, colonne e diagonali deve essere sempre diversa.
Esistono quadrati eteromagici per ogni ordine N > 2.
Più interessanti sono i *quadrati antimagici*, che rispetto ai precedenti hanno un importante vincolo in più: la somma costruita su righe, colonne e diagonali deve dare una sequenza di numeri consecutivi.
Ecco un esempio di quadrato antimagico:

	2	15	5	13	*35*
	16	3	7	12	*38*
	9	8	14	1	*32*
	6	4	11	10	*31*
34	*33*	*30*	*37*	*36*	*29*

I più piccoli quadrati antimagici sono di ordine 4 e, come nell'esempio appena visto, le diverse somme danno i numeri da 29 a 38.
Non si sa se esistano quadrati antimagici per ogni ordine N > 3.

Costruzione di quadrati magici

A prima vista costruire un quadrato magico potrebbe sembrare complicato. In realtà non è così, anzi in alcuni casi il procedimento è ridicolmente semplice.
Per ogni ordine N con N pari e divisibile per 4, basta scrivere i numeri in ordine da 1 a N^2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

poi invertire la prima diagonale

16	2	3	4
5	11	7	8
9	10	6	12
13	14	15	1

poi invertire la seconda diagonale

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12

4	14	15	1

et voilà, il gioco è fatto.
Vi è anche un procedimento, leggermente più complicato, per costruire un quadrato magico di ordine dispari.
Si comincia scrivendo 1 nella cella centrale della prima riga.

		1		

Si prosegue nella colonna seguente salendo di una fila. Se si è nella 1° fila, si riparte da quella più bassa; se si è nell'ultima colonna, si riparte dalla 1° a sinistra.

		1		
	5			
4				
				3
			2	

Se il posto è già occupato, si scrive il numero immediatamente sotto all'ultimo immesso

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

e così via fino a completare il quadro:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Anche la costruzione di quadrati eteromagici è estremamente semplice.
Per quadrati di ordine dispari basta scrivere i numeri a spirale partendo dalla prima cella:

	1	2	3	*6*
	8	9	4	*21*
	7	6	5	*18*
19	*16*	*17*	*12*	*15*

Per quadrati di ordine pari, il procedimento è ancora più banale: basta scrivere in sequenza, a partire dalla cella in alto a sinistra, tutti i numeri da 1 a N^2 e poi cambiare di posto l'1 e il 2:

	2	1	3	4	*10*
	5	6	7	8	*26*
	9	10	11	12	*42*
	13	14	15	16	*58*
34	*29*	*31*	*36*	*40*	*35*

I quadrati diabolici e quelli antimagici sono molto più complessi; non si conosce un procedimento semplice per costruirli.

Altre varianti sul tema

Eliminando il vincolo che i numeri contenuti nel quadrato siano consecutivi e partano da 1, si possono elaborare diverse varianti sul tema dei quadrati magici. Eccone alcune.

A - Quadrati magici moltiplicativi

Come è facile intuire, questi quadrati sono magici rispetto alla moltiplicazione anziché rispetto all'addizione. Il più piccolo quadrato moltiplicativo è di ordine 3 e ha costante magica 216:

12	1	18
9	6	4
2	36	3

B - Quadrati magici additivi-moltiplicativi

Esistono anche quadrati che sono magici sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione. Il più piccolo ha ordine 8, la costante additiva è 600 e quella moltiplicativa addirittura 67.463.283.888.000 (poco meno di 70.000 miliardi!).

C - Quadrati bimagici e trimagici

La fantasia non ha limiti: si è pensato anche a quadrati magici che rimangono tali se tutti i numeri che li compongono vengono elevati alla seconda. Si tratta, per l'appunto, dei *quadrati bimagici*.
Il più piccolo ha ordine 8 e somme magiche 260 e 11.180, rispettivamente per i numeri e per la loro seconda potenza:

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

Per completezza d'informazione, aggiungiamo che qualcuno si è preso la briga di lavorare anche sui *quadrati trimagici* (quadrati che rimangono magici se i numeri vengono elevati alla seconda e alla terza potenza).
Il più piccolo di questi quadrati ha ordine 12 e costanti magiche rispettivamente di 870, di 83.810 e di 9.082.800.

D - Quadrati magici di numeri primi

Sono stati studiati anche quadrati magici composti esclusivamente da numeri primi; il più piccolo, di ordine 3 e somma magica 111**,** è il seguente:

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Il quadrato magico del "Sator"

Non si può concludere la trattazione sui quadrati magici senza accennare a un altro tipo di quadrato, questa volta di tipo letterale.
Si tratta del celeberrimo quadrato detto "*del Sator*", che riporta una scritta doppiamente palindroma, ossia leggibile indifferentemente da sinistra, da destra, dall'alto e dal basso:

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Questo quadrato è visibile su un numero sorprendentemente vasto di monumenti sparsi in tutta Europa, dalle rovine di Cirencester (Inghilterra) a Oppède (Francia) a Santiago di Compostela (Spagna).
In Italia il quadrato "del Sator" si trova, tra le altre località, su un lato del Duomo di Siena e nella Certosa di Trisulti (FR). Ma quello più celebre (e più antico) fu rivenuto nel 1925, inciso su una colonna degli scavi di Pompei; da qui il nome di "*latercolo pompeaiano*" con cui spesso è citato.
La frase riportata dal quadrato è di dubbia interpretazione, anche perché non si tratta di latino "puro". Qualcuno ha proposto una interpretazione letterale del tipo "il seminatore Arepo (nome proprio) tiene con cura le ruote".
Ma pare molto più probabile che il seminatore di cui si parla sia un riferimento religioso al Creatore; segnaliamo solo due tra le numerose traduzioni che sono state elaborate:
"Il seminatore, sul suo carro (*arepo*) tiene le opere del creato" oppure "Il seminatore con il suo carro dirige con cura le ruote (nel senso di sfere celesti)".
Ancora, è stata suggerita l'ipotesi di un riferimento all'Apocalisse, osservando che le lettere del quadrato possono comporre una croce con la scritta "PATERNOSTER" che si incrocia sulla lettera N. Avanzano 2 "A" e 2 "O" che, messe ai quattro estremi della croce, indicherebbero l'alfa e l'omega, ossia il principio e la fine.
In questo caso, il quadrato sarebbe in realtà una croce dissimulata, un sigillo nascosto in uso tra i primi cristiani ai tempi delle persecuzioni.

Cubi magici

Tornando ai quadrati numerici, è naturale chiedersi cosa succede passando dal piano allo spazio tridimensionale. Sono stati così analizzati i *cubi magici*, cubi NxNxN con somma costante per tutte le righe, le colonne e le diagonali (sia quelle sul piano, sia quelle spaziali).
Ovviamente, i cubi magici costituiscono un problema assai più complesso rispetto ai quadrati, tanto che solo nel 2003 - dopo oltre un secolo di vane ricerche da parte dei matematici - è stato dimostrato che il più piccolo cubo magico possibile è di ordine 5 e ha costante magica 315.
Per N > 5 è sempre possibile costruire cubi magici e la costante magica è data da una formula assai simile a quella dei quadrati: $(N^4+N) / 2$.
Ma non basta: c'è anche qualcuno che, per complicarsi un po' la vita, ha provato a salire ancora, dalla terza alla quarta dimensione, alla ricerca del più piccolo ipercubo magico.
E' stato dimostrato che si tratta di un ipercubo di ordine 16 e con somma magica 524.296.

Altre figure magiche

Sulla falsariga di quanto appena visto per i quadrati, è possibile costruire altre figure geometriche variamente "magiche".
In particolare, il ben noto giornalista e matematico Martin Gardner, riferimento obbligato per tutti gli appassionati di matematica ricreativa, trattò nei suoi articoli su "*Scientific American*" il caso degli esagoni magici e delle stelle magiche.
Per brevità, si ritiene opportuno non affrontare questo argomento nel presente testo e riservarlo, eventualmente, per successivi articoli.

Bibliografia

Quadrati magici in generale

GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici (vol. 2)*, Sansoni 1968

DANESI M., *Labirinti, quadrati magici e paradossi logici*, Dedalo 2006

PEIRETTI F., *La grande avventura matematica dei quadrati e dei cubi magici* su Polimath, progetto del Politecnico di Torino
http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/

CIPRIANI M., *Quadrati magici* in Antiqua historia
http://www.antiqua.altervista.org/quadrati.html

Quadrato "del Sator"

CAMMILLERI R., *Il quadrato magico*, Rizzoli, 1999

Lopardi M., *Il quadrato magico del Sator*, Hoepli, 2006

Cubi magici

TRUMP W., *The Successful Search for the Smallest Perfect Magic Cube*

http://www.trump.de/magic-squares/magic-cubes/cubes-1.html

Esagoni magici

GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici (vol. 5)*, Sansoni 1976