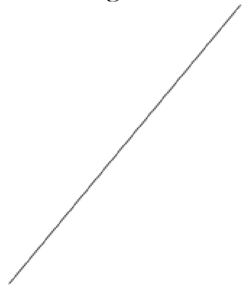
138. MOLTIPLICARE I NUMERI CON LA GEOMETRIA

Luca Lussardi
Technische Universität Dortmund,
Vogelpothsweg 87 44227, Dortmund (Germania)

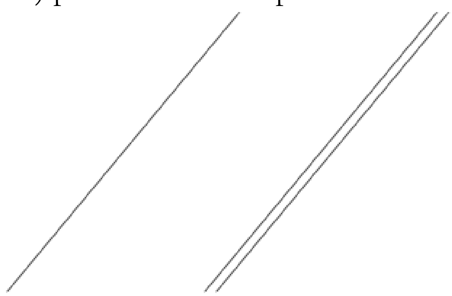
Non c'è certo da stupirsi se oggi troviamo relazioni tra operazioni matematiche e costruzioni geometriche; men che meno lo stupore potrebbe arrivare quando si riscontrano relazioni tra aritmetica e geometria negli antichi, poiché, come è ben noto, già negli antichi greci aritmetica e geometria viaggiavano su binari paralleli, e l'una serviva all'altra, anche se la geometria restava il sapere principale.
Ma qui non parliamo dei soliti greci, bensì dei cinesi. Già, perché pare che proprio agli antichi cinesi venga attribuito il cosiddetto metodo della *moltiplicazione grafica*, il quale è sostanzialmente un algoritmo di natura geometrica che permette di moltiplicare due interi assegnati, dei quali almeno uno è maggiore o uguale a 10, costruendo opportuni fasci di rette parallele. Il metodo di per sé funzionerebbe anche con fattori entrambi minori di 10 come si vedrà, ma il procedimento, in tal caso, richiede, per costruzione, di saper già il risultato della moltiplicazione, per cui appare inutile.

Esempi

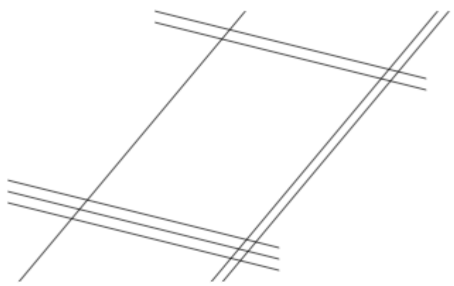
Esempio 1.1. Supponiamo di dover effettuare la moltiplicazione 12×32. Cominciamo col primo fattore: 12. Le sue due cifre sono 1 e 2. Allora disegniamo una retta (cifra 1 di 12):



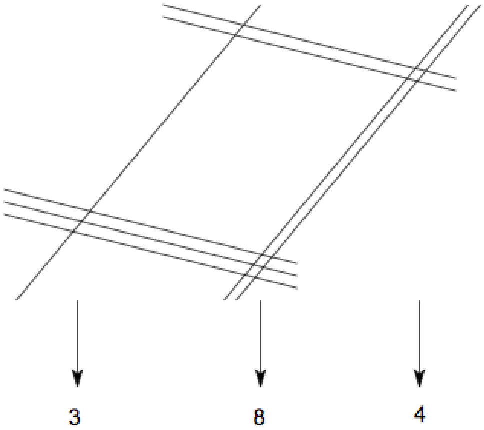
Ora disegniamo 2 rette (cifra 2 di 12) parallele alla retta precedentemente disegnata:



Costruiamo ora un sistema di rette parallele analogo a quello precedente, ma considerando il secondo fattore (32) e posizionandole trasversali rispetto al sistema precedente; precisamente:

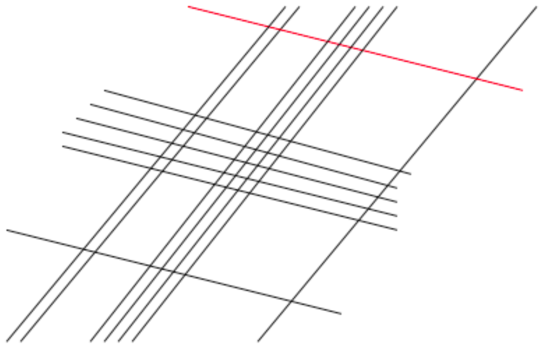


Ora contiamo in modo opportuno i punti di intersezione come la prossima figura mostra:

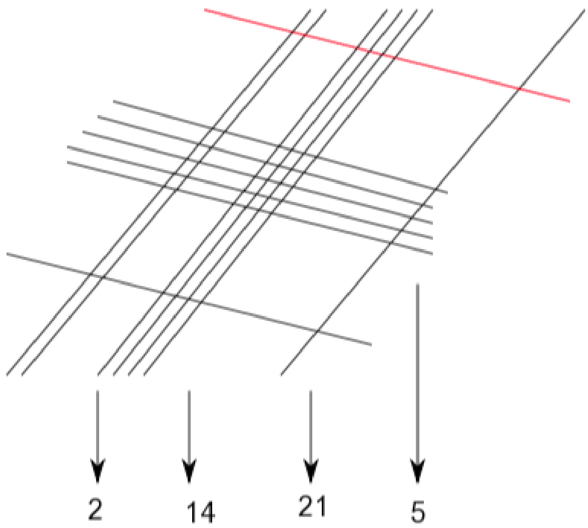


Leggiamo quindi il risultato: 12 × 32 = 384.

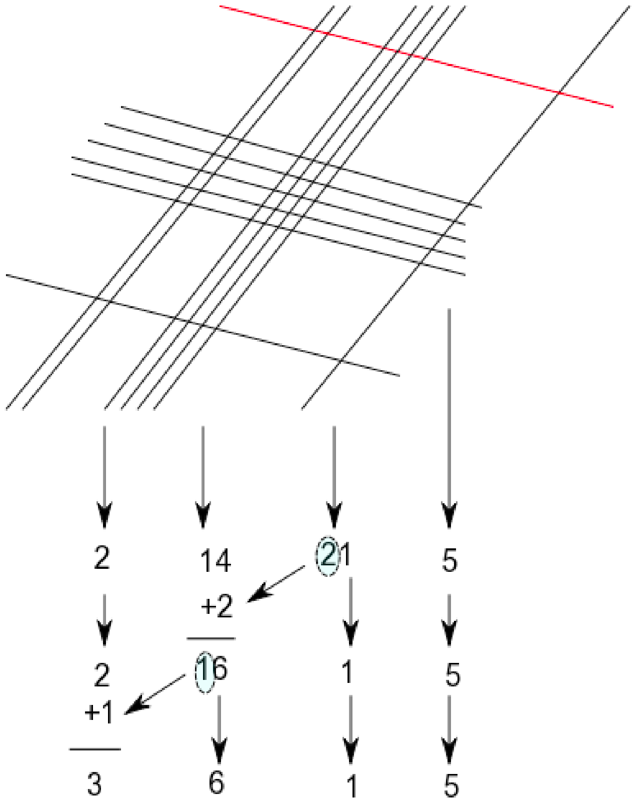
Esempio 1.2. Facciamo un secondo esempio nel quale i due fattori non hanno lo stesso numero di cifre; ad esempio calcoliamo 241 × 15. Procediamo come nell'esempio precedente considerando il primo fattore, 241, e disegnando quindi tre gruppi di rette parallele, rispettivamente 2 rette, 4 rette e 1 retta. Disegniamo poi il secondo gruppo di rette tra loro parallele ma trasversali rispetto alle precedenti, relative al secondo fattore, 15. Per dare alla figura la stessa simmetria come nell'esempio precedente, aggiungiamo una terza retta parallela alle ultime rette considerate; la coloriamo in rosso per ricordarci che non va contata. Otteniamo la seguente figura:



Procediamo quindi come nell'esempio precedente contando le intersezioni e sommandole per colonne, ricordando che la retta rossa in realtà non esiste. Otteniamo:

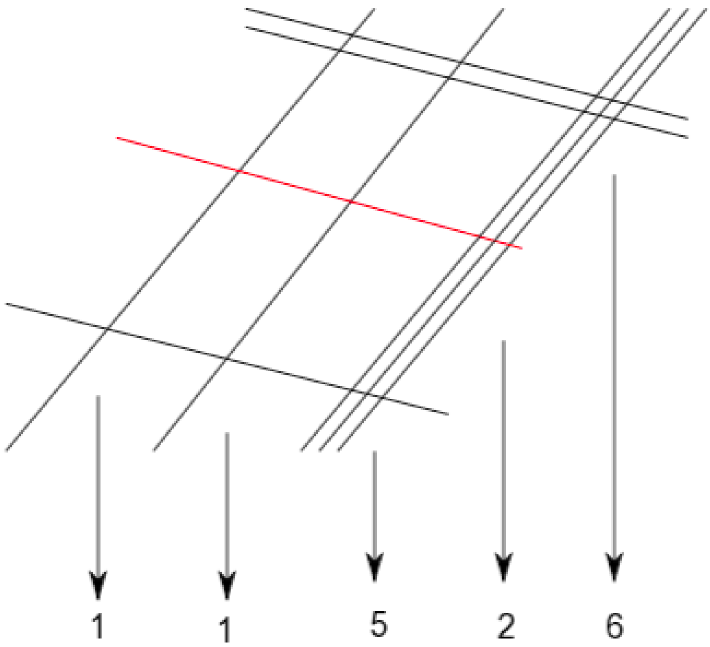


Ora si tratta di spostare le decine man mano verso sinistra; la figura si completa come segue:



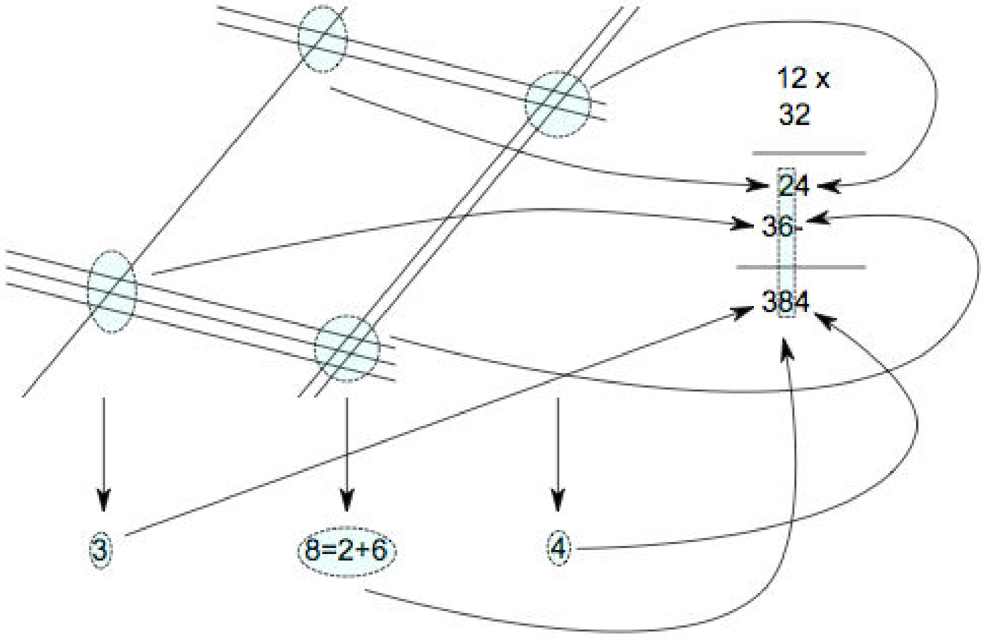
Si ha dunque 241 × 15 = 3615.

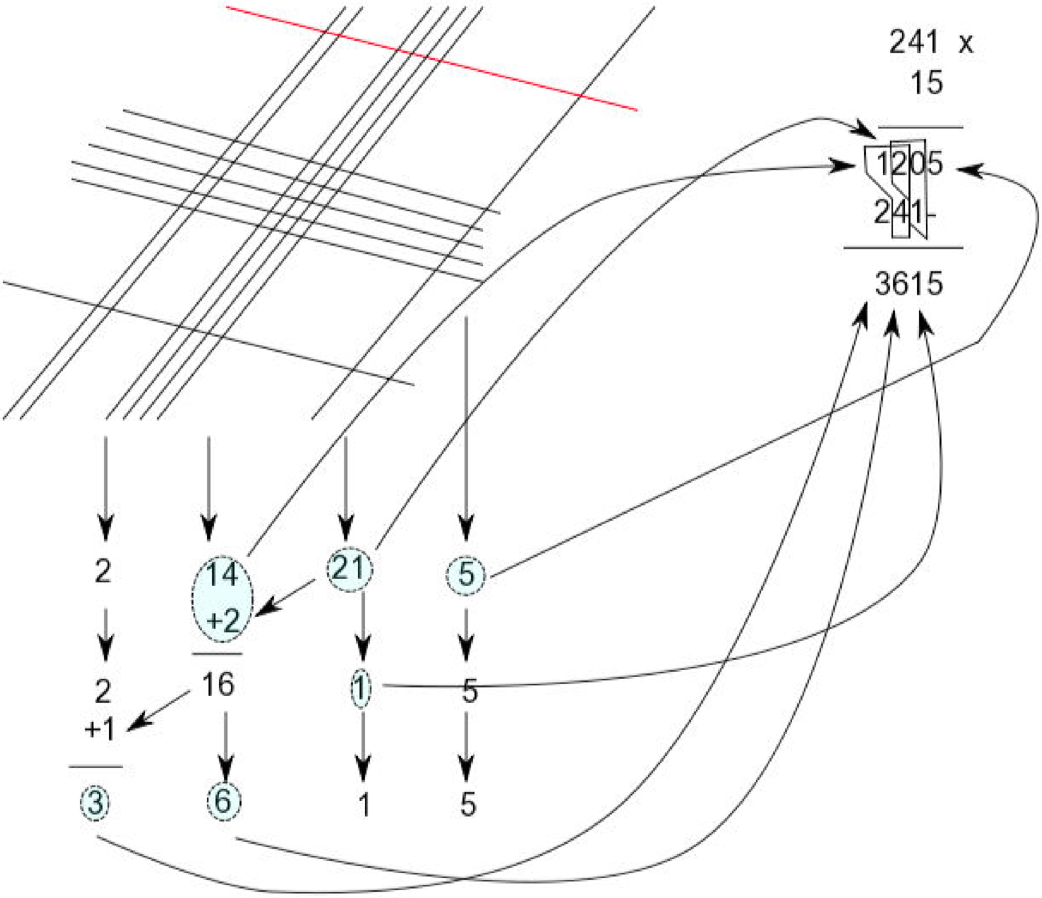
Esempio 1.3. Come ultimo esempio riportiamo il caso di due numeri che contengono almeno uno zero; in tal caso coloriamo di rosso la retta corrispondente in modo tale da ricordarci che non vanno contate intersezioni, ma stavolta, al contrario delle rette fittizie del caso precedente, lo zero derivante dalla retta di colore rosso va considerato. Mostriamo quindi che 113 × 102 = 11526.



Confronto con l'usuale regola in colonna

E' giunta l'ora delle spiegazioni. Questo curioso metodo ha in realtà una spiegazione precisa molto semplice, cosa che posticipiamo alla prossima sezione. Per non appesantire la trattazione diamo in questa sezione una dimostrazione intuitiva confrontando alcune delle figure precedentemente con l'usuale algoritmo della moltiplicazione in colonna.





Una dimostrazione rigorosa

Diamo, per concludere, una motivazione rigorosa della regola grafica illustrata per esempi (vedi [1]). Siano da moltiplicare due numeri interi x e y. Sviluppiamo x e y in base 10 ponendo

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i 10^i, \quad y = \sum_{j=0}^{m} \beta_j 10^j$$

con $\alpha_i, \beta_j \in \{0,1,\ldots,9\}$. A meno di scegliere qualche coefficiente nullo, possiamo supporre che sia m=n, e che quindi sia

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i 10^i, \quad y = \sum_{j=0}^{n} \beta_j 10^j.$$

In tali condizioni si ha facilmente l'espressione del prodotto xy dato da:

$$xy = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i} 10^k.$$

Osserviamo che la scrittura precedente non è la rappresentazione in base 10 del numero xy; infatti non è detto che le quantità

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i} 10^k$$

siano tra 0 e 9. Tali quantità sono esattamente le somme che, nella regola grafica illustrata, si effettuano lungo le colonne della figura costruita. Tali valori vanno quindi semplicemente sommati tra loro come la formula per il prodotto xy afferma, e come effettivamente si procede nella moltiplicazione grafica.

Riferimenti bibliografici

[1] N. Fiorentini, *La moltiplicazione grafica: dimostrazione algebrica e altre curiosità*, 2009.
[2] http://www.youtube.com/watch?v=QVnK4psCV1E
http://www.youtube.com/watch?v=0SqRPf300J0