

139. IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO CLASSICO, STORIA E MITO

Guglielmo Di Meglio¹

Sunto

Il celeberrimo *problema isoperimetrico* è il seguente: “Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, determinare quelle aventi area massima.” Tale problema ha origini nella Matematica greca antica e venne probabilmente formulato per la prima volta intorno al IX secolo a.C.; gli stessi greci “indovinarono” che le soluzioni dovessero essere i cerchi. Pur essendo la soluzione del problema “intuitivamente nota” sin dall’antichità, molti illustri matematici hanno lavorato per dare basi rigorose a tale intuizione, riuscendoci solo a partire dalla fine del 1800. In questo articolo si cerca di ricostruire la storia del problema isoperimetrico, si compendiano varie leggende in cui esso viene citato e si fornisce un resoconto dei tentativi classici e moderni verso la sua soluzione.

2010 Mathematics Subject Classification: 49-03, 01A05, 51M16

1. La nascita del problema isoperimetrico: la storia

È cosa abbastanza nota che la matematica, e la geometria in particolare, trasse le sue origini da bisogni concreti delle popolazioni, come dividere in modo equo terreni tra cittadini, stimare la grandezza di isole, città, territori prima sconosciuti od innalzare monumentali costruzioni. Così fu per la matematica egizia e babilonese, e nulla fa pensare che la matematica greca abbia fatto eccezione a tale regola. Ad esempio, quale criterio usare per stimare la vastità di un’isola appena scoperta o la superficie occupata da una città? A molti esploratori dell’antichità parve una buona idea dedurre la grandezza di un’isola dal tempo impiegato per circumnavigarla, oppure assumere come estensione di una città il perimetro delle sue cinta murarie. Analogamente, in molte comunità greche (del tipo che oggi si direbbero comuniste), era d’uso dividere terreni in appezzamenti dallo stesso perimetro prima di distribuirli tra i membri. Era tale scelta una buona scelta? Beh, no! Infatti i geometri, una volta intuito come misurare un’area, si accorsero che misurare il perimetro non era un criterio efficiente per stabilire l’estensione di una superficie (fosse essa un’isola, una città, un appezzamento o una qualsiasi figura geometrica), poiché figure di ugual area potevano benissimo avere perimetri estremamente differenti e, viceversa, figure con ugual perimetro potevano avere aree molto diverse. Valga il seguente:

Esempio 1: s’immagini di prendere un quadrato ABCD di lato ℓ , di modo che la sua area sia $A := \mathcal{A}(\text{ABCD}) = \ell^2$ ed il suo perimetro sia $P(\text{ABCD}) = 4\ell$. Fissato un numero naturale N , si costruisca un rettangolo A'B'C'D' di altezza $h = \frac{\ell}{N}$ e di base $b = \frac{2N-1}{N}\ell$ (Fig. 1): evidentemente il rettangolo così costruito ha perimetro:

$$P(\text{A'B'C'D'}) = 2(b + h) = 2\left(\frac{1}{N} + \frac{2N-1}{N}\right)\ell = 4\ell = P(\text{ABCD})$$

però l’area di A'B'C'D' è:

$$A' := \mathcal{A}(\text{A'B'C'D'}) = \left(\frac{2N-1}{N}\right)\ell^2$$

e con un semplice calcolo si vede che $A' < A$. Si noti che più si sceglie grande il numero N , tanto più l’area A' del rettangolo A'B'C'D' diviene piccola rispetto all’area A ; anzi, si può dire che è sempre possibile determinare un rettangolo A'B'C'D' avente lo stesso perimetro del quadrato ABCD e con area A' “piccola a piacere”.

¹ Dottorando in Scienze Matematiche XXIV ciclo, Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, via Cintia, Monte S. Angelo 80126 Napoli.
Moderatore di www.matematicamente.it/forum; email: gugo82@excite.it

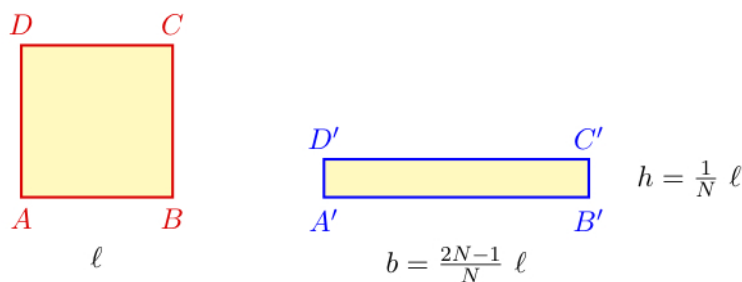


Figura 1: costruzione dell'Esempio 1

Tali osservazioni, nonostante sembrassero paradossali alle persone ordinarie, sicuramente ruppero nel paniere più di un uovo, giacché molti governanti delle comunità citate sopra s'erano guadagnati reputazione d'uomini onesti e probi distribuendo agli altri appezzamenti con lo stesso perimetro, ma con minor area, di quelli che tenevano per sé². Quanto appena detto giustifica, sul lato pratico, perché le questioni geometriche riguardanti le aree interessassero molto i matematici greci³; tra queste trovarono posto alcune questioni strettamente legate alle osservazioni fatte in precedenza, come il cosiddetto *problema isoperimetrico*:

Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, determinare quelle aventi area massima

ed il suo “duale”:

Tra tutte le figure piane aventi la stessa area, determinare quelle aventi perimetro minimo.

Si osservi che tali problemi sono gli unici ad essere ben posti: infatti l'Esempio 1 mostra che non ha senso chiedersi quali siano le figure d'area minima tra quelle aventi perimetro assegnato; inoltre, con una ragionevole variazione, si prova che è altrettanto privo di senso chiedere di determinare le figure di perimetro massimo tra quelle aventi la stessa area.

2. La nascita del problema isoperimetrico: i miti

Didone e la fondazione di Cartagine. Molto più immersa nel mito è l'origine di un altro problema classico, collegato e molto simile al problema isoperimetrico, il cosiddetto *problema di Didone*. Didone fu la mitica fondatrice della città di Cartagine, della quale si hanno notizie da alcuni storici romani⁴; tuttavia il resoconto più noto delle vicende che la videro protagonista è quello messo in poesia da Virgilio in [V, libro I, versi 335-368].

La principessa fenicia Didone fuggì con alcuni fedelissimi dalla città natale di Tiro dopo aver scoperto che il re Pigmalione (suo fratello) aveva assassinato suo marito Sicteo; dopo un lungo viaggio approdò sulle coste dell'Africa settentrionale (in Libia). Qui contattò il re locale Iarba per l'acquisto di un appezzamento di terra su cui costruire una nuova città: egli, per tutta risposta, le affidò una pelle di toro e le disse che poteva prendere tanto terreno quanto tale pelle potesse racchiuderne⁵. Virgilio non descrive dettagliatamente come Didone risolse il problema della pelle di toro; tuttavia la tradizione tramanda che la principessa, senza perdersi d'animo, escogitò un astuto stratagemma per accaparrarsi un terreno quanto più vasto fosse possibile, includente la collina su cui costruire la rocca. Didone ordinò che la pelle fosse tagliata in listarelle sottili, le quali fossero legate insieme ai capi per formare una lunga corda. Con tale corda, la principessa fece congiungere le rive dai lati opposti dell'altura, acquisendo così la proprietà della collina ed un comodo sbocco sul mare; inoltre viene specificato che Didone fece disporre la corda a forma di semicerchio in modo da racchiudere la maggior area possibile.

² In proposito Heat [H] cita come fonte i *Commenti al primo libro degli “Elementi” di Euclide* di Proclo.

³ Basti pensare a quanti teoremi sulla misura delle aree e sull'equivalenza di figure piane sono arrivati fino a noi: chiunque ricorda il teorema di Pitagora, ma sono notevolissimi anche alcuni scritti di Archimede, come *Sulla quadratura della parabola* e *Sulla misura del cerchio*.

⁴ Ne dà notizia Marco Giuniano Giustino, che cita uno scritto precedente di Gneo Pompeo Trogo.

⁵ Per dirla col sommo poeta: *mercatique solum [...] taurino quantum possent circumdare tergo*.



Figura 2: Ricostruzione di Cartagine; si noti la forma vagamente semicircolare della città.

Questo racconto, oltre a mettere in luce tutta l'astuzia della futura regina di Cartagine, ebbe gli ingredienti necessari ad alimentare la curiosità dei matematici: infatti porta con sé la questione del perché Didone avesse scelto proprio la forma semicircolare per delimitare quella che riteneva essere la maggior superficie possibile. Ecco così spiegati l'origine ed il nome del *problema di Didone*:

Tra tutte le curve della stessa lunghezza aventi estremi su una retta assegnata, determinare quelle che delimitano con la retta la figura piana d'area maggiore

e del suo "duale":

Tra tutte le curve aventi estremi su una retta assegnata che delimitano con la retta figure piane della stessa area, determinare quelle che hanno lunghezza minore.

Con costruzioni simili a quella relativa all'Esempio 1 si può provare che tali problemi sono gli unici ad essere *ben posti*. Inoltre c'è una stretta correlazione tra il problema di Didone ed il problema isoperimetrico: infatti, se Γ è una curva che risolve il problema di Didone, allora la figura che si ottiene riflettendo rispetto alla retta assegnata quella determinata da Γ è necessariamente una soluzione di un problema isoperimetrico; parimenti, se si taglia a metà con una retta una figura che risolve il problema isoperimetrico si ottiene una figura il cui bordo curvo è necessariamente la soluzione di un problema di Didone.

La ricompensa per Orazio Coclite. Altri problemi, simili ai precedenti, si trovano narrati in diversi testi dell'Antichità e del Medioevo. Il primo che viene alla mente è quello che si trovò ad affrontare Orazio Coclite quando ebbe a ritirare il premio assegnatogli dalla gente di Roma per la sua eroica difesa della città. Tito Livio⁶ racconta che, quando i repubblicani estromisero Tarquinio il Superbo dal potere, gli Etruschi mossero contro Roma guidati da Porsenna. L'esercito etrusco arrivò fino al Gianicolo ed avrebbe potuto entrare in città attraversando il Tevere sul ponte Sublicio. Visto tale pericolo, Orazio Coclite ordinò ai soldati di abbattere il ponte mentre egli stesso, con l'aiuto di un manipolo, avrebbe tenuto a bada gli avversari. La battaglia infuriò finché i contendenti furono sorpresi dal frastuono provocato dal crollo del ponte e dalle urla dei soldati romani; approfittando di quegli attimi concitati, Coclite si gettò nel fiume e, nonostante fosse bersagliato dagli arcieri nemici e tratto a fondo dal peso della propria armatura, nuotando riuscì ad arrivare vivo sull'altra sponda del Tevere. Grati per aver salvato la città dall'invasione, i romani dedicarono a Coclite una statua; inoltre, volendogli assegnare una ricompensa meno simbolica, pensarono di lasciargli un terreno. Tuttavia la cittadinanza non stabilì quanto tale terreno dovesse esser grande: l'unica clausola imposta a Coclite fu che egli avrebbe potuto prendere possesso di un appezzamento avente perimetro tracciabile con l'aratro in un'unica giornata di lavoro⁷. Evidentemente anche il problema di aratura che si trovò ad affrontare Orazio Coclite era di

⁶ L'intero racconto si trova in [Ti, libro II, capoversi I-X]; in particolare, l'episodio riguardante Coclite si legge al capoverso X. Nello stesso libro si racconta anche un altro notissimo episodio: quello di Muzio Scevola.

⁷ Livio dice: *Grata erga tantam virtutem civitas fuit: statua in comitio posita; agri quantum uno die circumaravit datum.*

tipo isoperimetrico: egli opportunisticamente avrebbe voluto massimizzare l'area dell'appezzamento, ma era costretto a sottostare al vincolo dell'unica giornata di lavoro (che, a conti fatti, si traduce in un vincolo sulla lunghezza dell'arco tracciato dall'aratro)⁸. Ecco che, nuovamente, un problema di tipo isoperimetrico è tradizionalmente legato alle dimensioni d'un appezzamento di terreno... E non è l'ultima volta!

L'astuzia di Iwar Lodbrok. Sorprendentemente anche Saxo Grammaticus, letterato danese del XII secolo, narra una storia molto simile a quella di Didone a proposito di Iwar, figlio del leggendario re vichingo Ragnar Lodbrok⁹. La leggenda narra che Ragnar, condannato a morte dopo essere stato catturato in battaglia, venne gettato in una fossa piena di serpenti velenosi così come ordinato dal re Ella di Northumbria. I quattro figli di Ragnar cercarono di vendicare la morte del padre invadendo il regno di Ella, però furono costretti a ritirarsi a causa della superiorità numerica dell'esercito degli Angli. Il giovane Iwar si recò da Ella per chiedere un *guidrigildo* per l'assassinio del padre¹⁰; come risarcimento venne stabilito che Iwar acquisisse la proprietà di tanta terra quanta ne potesse essere racchiusa da una pelle di bue. Proprio come Didone, Iwar ricavò una lunga corda dalla pelle e la distese al suolo in *forma di circonferenza*, delimitando così un'area vastissima di cui acquisì la proprietà: su tale terreno Iwar fondò una nuova città (che alcune fonti identificano con York). Infine, dopo alcuni anni, Iwar ed i suoi fratelli riuscirono a vendicare la morte del padre, catturando Ella e facendolo morire in atroce supplizio.

Quelle appena descritte sembrano essere le leggende più note riguardo il problema isoperimetrico. È notevole il fatto che alcune di esse sembrano avere un carattere marcatamente didattico: ascoltando queste storie, anche chi non conosceva la geometria riusciva a capire che la forma circolare o semicircolare era la migliore possibile per fondare città grandi o delimitare grandi spazi.

Il teorema isoperimetrico e le sue dimostrazioni: un breve resoconto

Il *problema isoperimetrico* rimase a lungo tale: invero, una soluzione rigorosa è stata trovata solo alla fine del 1800, circa duemilacinquecento anni dopo la sua formulazione. Ciò ne fa uno dei problemi più longevi nell'intera storia della Matematica.

Le dimostrazioni geometriche. Le prime congetture circa le soluzioni del problema hanno origine antica, sicuramente precedente alla storia di Didone; tuttavia i primi risultati nella determinazione delle soluzioni sono da attribuirsi al matematico greco Zenodoro (ca. 200–140 a.C.) il quale, con ragionamenti di tipo geometrico sintetico, riuscì a dimostrare che il cerchio ha area maggiore di ogni poligono (regolare o no) avente lo stesso perimetro. Un resoconto dettagliato del metodo di Zenodoro può essere reperito in [H, pagg. 209–212], e [P]. Sebbene tale risultato fosse tutt'altro che completo, esso portò i geometri a formulare il cosiddetto teorema isoperimetrico classico:

“Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, il cerchio è quella d'area massima”

I ragionamenti di Zenodoro segnarono profondamente il modo di approcciare il problema isoperimetrico, tant'è che si trovano ripetuti più o meno fedelmente in tutte le discussioni riguardo l'isoperimetria fino alla fine del 1700¹¹. Il primo matematico a dire qualcosa di veramente innovativo sulla questione fu Jakob Steiner (1796–1863), il quale inventò alcune tecniche per dimostrare che ogni figura d'assegnato perimetro realizzante l'area massima è necessariamente un cerchio. Le tecniche inventate da Steiner si basavano su un semplice principio: detta E una figura piana d'area massima, se E non è un cerchio si può determinare una seconda figura F che abbia stesso perimetro di E ma area maggiore. Quindi è evidente che nessuna figura piana tranne il cerchio può dare il massimo all'area, quando il perimetro venga fissato. Tuttavia, come fece notare Dedekind (1831–1916), i ragionamenti di Steiner lasciarono aperta la

⁸ Per una discussione riguardo la soluzione del problema di Orazio Coclite (e quello di Didone) si può leggere [Th], pagg. 571 e seguenti.

⁹ Si veda [S, libro IX, capoversi 314–315].

¹⁰ Il *guidrigildo* (*Wergeld* in germanico o *compositio* in latino) era un provvedimento, introdotto nel 643 d.C. con l'Editto di Rotari, che prevedeva per la famiglia della vittima un risarcimento in denaro o beni materiali da parte del colpevole del reato di omicidio e stabiliva la fine della faida.

¹¹ Vale la pena di ricordare i lavori di Kepler, Galilei, Riccati, Simpson e Legendre.

questione dell'esistenza di qualche soluzione al problema isoperimetrico¹². L'argomento di Steiner fu perfezionato intorno al 1916 da W. Blaschke (1885–1962), il quale dimostrò l'esistenza di una figura d'area minima usando un teorema di compattezza nella classe delle figure convesse¹³ (oggi noto come principio di selezione di Blaschke). Altre dimostrazioni geometriche erano basate su stime del cosiddetto “deficit isoperimetrico” mediante funzioni dipendenti dalla geometria delle figure e nulle in corrispondenza di cerchi; il primo a fornire una dimostrazione di questo tipo fu T. Bonnesen (1873–1935). Il teorema isoperimetrico classico può essere rappresentato mediante la relazione:

$$P^2(E) \geq 4\pi A(E) \quad (\text{DI})$$

detta *disuguaglianza isoperimetrica classica*¹⁴, e la differenza tra primo e secondo membro di (DI):

$$\Delta(E) = P^2(E) - 4\pi A(E)$$

è detta *deficit isoperimetrico della figura E*. Chiaramente per dimostrare il teorema isoperimetrico occorre e basta provare che per ogni E risulta $\Delta(E) \geq 0$ e che l'uguaglianza si ha se e solo se E è un cerchio. Ebbene, nel 1921 Bonnesen dimostrò che il deficit isoperimetrico di E è sempre non minore della quantità $\alpha(E) := \pi^2(R-r)^2$, in cui r ed R sono rispettivamente i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto in E¹⁵. Evidentemente la quantità $\alpha(E)$ si annulla se e solo se $R = r$, ma in tal caso E è un cerchio di raggio r: quindi il teorema isoperimetrico segue immediatamente.

Le dimostrazioni analitiche. La questione dell'esistenza di soluzioni al problema isoperimetrico rimase aperta fino alla fine del 1800, quando cominciarono ad essere scoperte varie dimostrazioni dell'esistenza di figure massimizzanti l'area a perimetro assegnato. Il primato probabilmente spetta a Weierstrass (1815–1897), il quale propose una dimostrazione variazionale piuttosto generale dell'esistenza di figure di area massima¹⁶. Dopo di lui, Hurwitz (1859–1919) e Lebesgue (1875–1941) usarono la teoria delle serie di Fourier ed una disuguaglianza integrale (nota come *disuguaglianza di Wirtinger*) per raggiungere lo stesso scopo.

Un'altra dimostrazione dell'esistenza, ma limitata alle figure convesse, fu data da Minkowski (1864–1909), il quale sfruttò la *disuguaglianza di Brunn e Minkowski*, alcune formule di Steiner ed un'appropriata definizione di perimetro (un po' diversa da quella classica, ma che coincideva con essa per figure convesse aventi bordo “abbastanza liscio”). Intanto era cominciato il XX secolo e le idee di Lebesgue sulla *Teoria della Misura* avevano cambiato non poco il modo di approcciare le questioni riguardanti le aree ed i perimetri. Infatti, visto che la nozione di *misura secondo Lebesgue* consentiva di misurare l'area di molti più insiemi, alcuni dei quali dalle forme piuttosto bizzarre (in tal senso si comprese subito che la misura di Lebesgue è una potente generalizzazione del classico concetto d'area della Geometria elementare), si sentiva il bisogno di una nozione di perimetro altrettanto generale che consentisse di misurare la lunghezza anche dei bordi degli insiemi più bizzarri. La definizione di perimetro usata da Minkowski (cui s'è accennato in precedenza) andava bene per le figure convesse, però era del tutto inapplicabile alle figure bizzarre aventi area nel senso di Lebesgue. La questione di una buona definizione generale di

¹² Per capire bene il grosso gap tra la condizione necessaria determinata da Steiner e l'esistenza di qualche soluzione si mediti sulla seguente pseudo-dimostrazione della proposizione (evidentemente falsa): 1 è il più piccolo dei numeri in $[0, 1]$. Dim.: Fissato un numero x in $[0, 1]$, il numero x^2 è in $[0, 1]$ ed è chiaramente $< x$; pertanto nessun $x \neq 1$ può essere il minimo di $[0, 1]$. Da ciò segue che 1 è il minimo di $[0, 1]$.

¹³ Una figura piana E è detta *convessa* se essa contiene il segmento congiungente una qualsiasi coppia di suoi punti.

¹⁴ Sia D un cerchio avente lo stesso perimetro di E; il raggio di D evidentemente è $\frac{1}{2\pi}P(E)$, perciò l'area di D è data da $\frac{1}{4\pi}P^2(E)$. Quindi la relazione $A(D) \geq A(E)$ (che rappresenta la tesi del teorema isoperimetrico) si può riscrivere al modo (DI).

¹⁵ Cerchi di tal fatta esistono per ogni figura E, ma possono non essere unici; tuttavia i due numeri non negativi r, R sono sempre univocamente determinati.

¹⁶ La dimostrazione venne data durante alcune lezioni alla Technische Universität Berlin e fu pubblicata postuma (nel settimo volume dell'opera omnia, edito nel 1927).

perimetro rimase aperta fino al 1953/54, quando Ennio De Giorgi (1928–1996) pubblicò due articoli definitivi su questo argomento: la definizione di De Giorgi riprendeva ed elaborava compiutamente le idee di Renato Caccioppoli (1904–1959), le quali erano state precedentemente snobbate dai recensori americani, e praticamente riconduceva il problema della definizione di perimetro alla possibilità di svolgere certi integrali per parti! Una volta in possesso della miglior definizione possibile di perimetro, nel 1958 De Giorgi dimostrò l'esistenza di soluzioni al *problema isoperimetrico generale*, ossia:

“Tra tutte le figure piane aventi perimetro di De Giorgi assegnato, determinare quelle aventi misura di Lebesgue massima”

ed adattò i ragionamenti di Steiner per dimostrare che le figure aventi misura di Lebesgue massima a perimetro fissato sono necessariamente cerchi. Anzi, a voler dirla tutta, la dimostrazione di De Giorgi era valida in uno spazio avente dimensione qualsiasi (ma finita!) sicché, in generale, le sfere N-dimensionali massimizzano la misura N-dimensionale di Lebesgue tra tutti gli insiemi aventi lo stesso perimetro di De Giorgi N-dimensionale.

Altre dimostrazioni, elementari e no. Tutte le dimostrazioni che precedono quella generale di De Giorgi sono classiche e si possono trovare dettagliatamente compendiate in [P]; la dimostrazione di De Giorgi, che fa uso di strumenti molto sofisticati, si può trovare ad esempio in [F]¹⁷. Tuttavia, a partire dal 1958, sono state trovate molte altre dimostrazioni del teorema isoperimetrico, alcune elementari, altre no. Tra quelle elementari pare doveroso citarne almeno due. La prima è quella di tipo geometrico presentata in [La]: essa si basa su una tecnica di dissezione e funziona per qualunque figura di perimetro finito. L'idea fondamentale è che si può sempre trovare un modo di suddividere in tanti pseudo-triangolini una figura convessa E ed un cerchio D d'ugual perimetro, in modo che ogni pseudo-triangolino contenuto in E abbia stessa base ed area minore del corrispondente pseudo-triangolino in D. La seconda, molto breve ed immediata, è quella di tipo analitico reperibile in [Lx]: essa si basa sull'uso della formula di Green e di disuguaglianze elementari, cosicché può essere compresa da chiunque conosca i rudimenti dell'Analisi. Tuttavia la sua validità è limitata al caso di insiemi col bordo “abbastanza liscio”. Tra quelle non elementari è sicuramente da ricordare quella proposta nel 1981 da Gromov (nato 1943), basata su un'idea di H. Knothe (1908–1978) del 1957, poiché è la prima dimostrazione in cui viene usata la teoria del trasporto ottimale¹⁸.

Appendice: una nota semiseria sulla leggenda di Didone

Ho descritto la leggenda di Didone all'inizio del presente articolo. Scrivendo dell'episodio, una delle domande che mi è immediatamente venuta in mente (prima ancora delle questioni matematiche) è: “Ammesso che la leggenda conservi un fondo di verità, quanto era grande l'insediamento originario che diede vita alla città di Cartagine?”. Per risolvere il problema, innanzitutto serve sapere quanto può essere grande (almeno in media) una pelle di toro. Cercando in Rete, non sono stato in grado di trovare nemmeno il più piccolo cenno sulla questione: insomma, non c'è nessuna pelle di mucca standard esposta al *Bureau international des poids et mesures* di Sèvres e nemmeno c'è alcun vincolo su tali dimensioni tra i parametri di Maastricht! Perciò ho deciso di assumere unilateralmente che la pelle del toro di Didone misurasse 1.5×2.5 mq. Supponendo che, con la loro infinita pazienza (ed i mezzi tecnici dell'epoca), le donne fenicie fossero in grado di tagliare listarelle di cuoio spesse 0.5 cm, dalla pelle si ricavarono 300 listarelle lunghe 2.5 m le quali, disposte le une accanto alle altre, avrebbero formato una striscia di 750 m; tuttavia, nel legarle insieme, si perse qualcosa in lunghezza: convenendo di quantificare in 5 cm la perdita dovuta ai nodi alle estremità (2% della lunghezza totale di ogni listarella), la striscia ottenuta da Didone avrebbe potuto essere lunga ben $P = 735$ m. Assumendo P come perimetro di una semicirconferenza e ricordato che gli antichi non avevano il π moderno (conforme agli standard ISO-9000), ma approssimavano a $\pi_a = 3$ il rapporto tra diametro e circonferenza, il raggio della semicirconferenza tracciata da Didone sulla spiaggia avrebbe potuto essere $r = P/\pi_a = 245$ m. L'area di una

¹⁷ N.B: questo è un riferimento tecnico.

¹⁸ Detto rozzamente, il Trasporto Ottimale è assimilabile ad una versione molto generale del teorema di cambiamento di variabili negli integrali.

semicirconferenza di raggio r per gli antichi era $A = \frac{\pi_a}{2} r^2 \approx 90000$ mq, sicché una stima per la superficie occupata dall'insediamento originario di Cartagine è 9 ettari. Considerando che un campo da calcio moderno occupa una superficie pari a circa 0.6 ettari, alla fine di questo piccolo conticino si può dire che l'insediamento punico avrebbe potuto esser largo quanto 15 campi da calcio... Mica male! Però tutto dipende pesantemente dall'approssimazione usata per le dimensioni del toro! Quindi, se avete un amico conciatore, informatevi sulle dimensioni di una pelle di toro e fatemi sapere se ho usato un'approssimazione verosimile.

Riferimenti bibliografici

[Be] Beda il venerabile (ca. 731), *Historia ecclesiastica gentis Anglorum*

Un'edizione del 1838 è reperibile al seguente url

<http://ia351428.us.archive.org/0/items/bedehistoriaecc00bedegoog/bedehistoriaecc00bedegoog.pdf>

[F] Fusco, N. (2004), *The classical isoperimetric theorem*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, vol. 71, n. 4.

[H] Heat, T. (1921), *A history of Greek Mathematics*, vol. II, Clarendon Press, Oxford

reperibile al seguente url

<http://ia351411.us.archive.org/2/items/ahistorygreekma00heatgoog/ahistorygreekma00heatgoog.pdf>

[La] Lawlor, G. (1998), *A new area maximization proof for the circle*, *Mathematical Intelligencer*, vol. 20, n. 1.

[Lx] Lax, P. D. (1995), *A short path to the shortest path*, *The American Mathematical Monthly*, vol.102, n.2
reperibile al seguente url

<http://www.myoops.org/twocw/nctu/upload/fourier/supplement/short%20path.pdf>

[P] Porter, T. I. (1931), *A history of the classical isoperimetric problem*, in Bliss, G.A. & Graves, L.M.

(1933), *Contributions to the Calculus of Variations* (1931-1932), University of Chicago Press, Chicago, IL

reperibile al seguente url: <http://math.arizona.edu/~dido/porter1933.pdf>

[S] Saxo Grammaticus (ca. 1200), *Gesta Danorum* (un'edizione del 1894 è reperibile al seguente url:

<http://ia341337.us.archive.org/1/items/cu31924089406593/cu31924089406593.pdf>).

[Th] Thomson, W. Lord Kelvin (1894), *Popular Lectures and Addresses*, vol. II, MacMillan, London

reperibile al seguente url:

<http://ia341334.us.archive.org/0/items/popularlectures07kelvgoog/popularlectures07kelvgoog.pdf>

[Ti] Tito Livio (ca. 20 a.C.), *Storia di Roma*, trad. G. Reverdito (1999), Garzanti, Milano.

[V] Publio Virgilio Marone (ca. 24 a.C.), *Eneide*, trad. C. Vivaldi (2001), Garzanti, Milano.