

# 141. Le Proposizioni 24 e 21 degli *Elementi* di Euclide e alcuni assiomi mancanti

Cosimo De Mitri, Domenico Lenzi

cosimo.demitri@unisalento.it, domenico.lenzi@unisalento.it

[Dip. Mat. Uni. Salento, Lecce]

## Sunto

Nella prima parte di questo articolo torniamo su certe questioni, esposte in [DML], riguardanti la Proposizione 24 degli *Elementi* di Euclide, da noi chiamata – per l'immagine che evoca il suo enunciato – *teorema del compasso*. Tra l'altro, nel primo paragrafo, rivolgiamo una fugace attenzione ai due casi che – in maniera un po' azzardata – Proclo in [Pr] imputa a Euclide di aver tralasciato nella dimostrazione della proposizione suddetta. Ne approfittiamo altresì per esaminare – nel secondo paragrafo - la dimostrazione della Proposizione 21 degli *Elementi* (si veda [E], p. 108), facendo delle osservazioni che – insieme al *Teorema Mancante* considerato in [DML] – valgono anche per una dimostrazione meno *naïf* della Proposizione 24, rispetto a quella condotta da Euclide.

Infatti, a nostro avviso, egli omette due altre precisazioni – che noi denotiamo come proprietà i) e ii) – forse perché le giudica scontate in base a quanto da lui già detto in precedenza. Come, ad esempio, nella dimostrazione della Proposizione 21, dove usa di fatto la proprietà i) – che esprime una sorta di continuità dei segmenti – pur senza citarla esplicitamente. Quindi le proprietà i) e ii) si configurerebbero come degli assiomi sottintesi (*assiomi mancanti*) del trattato euclideo, che il grande maestro adopera come una cosa talmente naturale, da non avvertire nemmeno la necessità di citarli come nozioni comuni (anche se le *nozioni comuni* euclidee sono da assimilare ad assiomi di tipo generale, meta-geometrico). Inoltre, sempre nel paragrafo 2, esaminiamo anche alcune proprietà – che negli *Elementi* sono sottintese – riguardanti la nozione di segmento.

In fine, nel paragrafo 3 ci occupiamo dell'Assioma sottinteso del Semipiano, facendo vedere che le proprietà i) e ii) discendono da esso.

Comunque, noi trattiamo questi argomenti senza alcuna pretesa di originalità, col solo intento di indurre il lettore a interessarsene, data la loro valenza sul piano storico ed epistemologico.

Facciamo presente che se questo scritto viene depurato dei riferimenti espliciti agli *Elementi* e si considerano le varie definizioni, nonché – come assiomi – le proprietà che noi usiamo senza dimostrazione, allora esso diventa un'esposizione assiomatica della nozione di *spazio di segmenti* (privi di lunghezza).

## 1. Sul Teorema Mancante

Preliminarmente ricordiamo la Proposizione 24 degli *Elementi*, così come viene presentata in [E] a p. 115. Precisiamo che il triangolo  $ABC$  e il triangolo  $DFE$  considerati nella seguente Fig. a corrispondono a quelli rappresentati con le stesse lettere nella figura a p. 115 di [E].

**Proposizione 24** (teorema del compasso<sup>1</sup>). *Siano dati due triangoli in cui due lati dell'uno siano rispettivamente uguali a due lati dell'altro. Allora il terzo lato è maggiore nel triangolo in cui tale lato si oppone ad angolo maggiore (e viceversa).*

Ricordiamo che in [DML] è stata da noi evidenziata l'assenza di una proprietà che abbiamo pensato di chiamare *il Teorema Mancante*, poiché abbiamo ipotizzato trattarsi di una proposizione andata perduta, essendo del tutto connaturata con lo sviluppo della geometria portato avanti da Euclide negli *Elementi*.

Qualcuno potrebbe parlare piuttosto di *proprietà ovvia*; tuttavia, la meticolosità con cui il grande maestro tratta anche cose abbastanza semplici, ci induce a pensare che egli non può aver trascurato una pro-

<sup>1</sup> Si pensi anche ai compassi con bracci diversi.

prietà così essenziale per la dimostrazione della Proposizione 24. Perciò se Euclide non la usa, è ragionevole ipotizzare che egli l'abbia considerata sottintesa, per averne già parlato in precedenza.

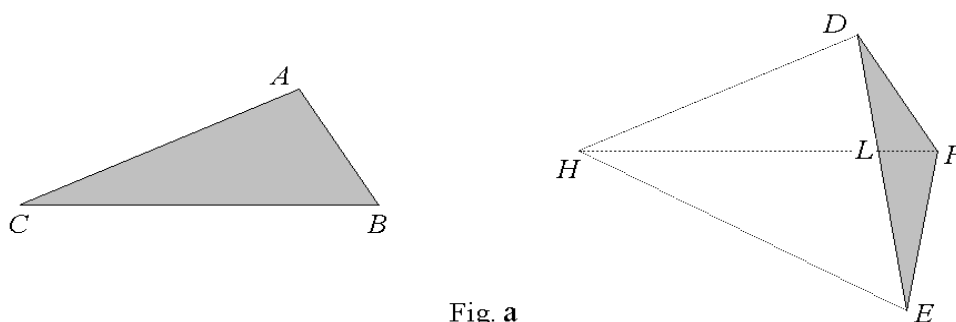


Fig. a

Ed ecco la proprietà in questione (si faccia riferimento alla parte destra di Fig. a):

**Il Teorema Mancante.** *Sia dato un triangolo DFH, in cui il lato HD sia maggiore/uguale rispetto al lato DF. Allora un segmento DL, che congiunga il vertice D con un punto del lato opposto HF, è minore del lato DH.*

Per maggior chiarezza, qui abbiamo cambiato Fig. 1 e Fig. 2 di [DML] rispettivamente con Fig. a – nella quale abbiamo anche scambiato tra loro le lettere E ed F e sostituito G con H – e Fig. b, in modo da mantenere in queste ultime la stessa posizione per la coppia dei triangoli evidenziati in grigio; cioè, quelli citati nella Proposizione 24.

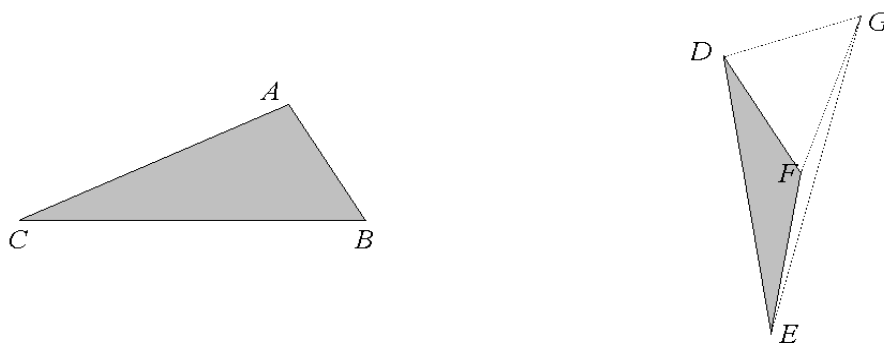


Fig. b

Come si è detto precedentemente, la situazione di Fig. a è quella descritta da Euclide in [E]. Invece la situazione di Fig. b è quella relativa a uno dei due casi che Proclo contesta come mancanti nella dimostrazione della Proposizione 24 (l'altro caso si verifica quando il punto F si trova sul segmento EG).

Facciamo presente che Proclo scrive (si veda [Pr], pp. 271-272): «[...] esaminiamo la costruzione di questo teorema data dall'autore degli Elementi e aggiungiamo ciò che in essa manca. [...]».

Ma Euclide – proprio per aver scelto il triangolo DFH come quello di Fig. a – non ha bisogno di considerare i casi di cui parla Proclo. Infatti DFH è soltanto un *triangolo di servizio* che – fermi restando i due triangoli che vengono confrontati, che in Fig. a sono grigi – conduce al solo caso previsto e discusso da Euclide; perciò si tratta di un triangolo che fa un “buon servizio”. Insomma, Euclide ha sapientemente evitato di scegliere una figura che avrebbe generato la situazione sgradita (se si fossero fatti combaciare i lati lunghi del triangolo DFE e di quello usato come triangolo di servizio). Egli, facendo combaciare i lati corti, ha tacitamente mostrato come evitarla.

Invece i due casi che Proclo considera mancanti sono riferiti alla scelta di un *triangolo di servizio* diverso: DEG; che ora è evidenziato nella parte destra di Fig. b ed è stato costruito in modo da essere uguale [congruente, se si preferisce] al triangolo ABC. Per inciso osserviamo che la situazione illustrata da Proclo

poc'anzi richiamata si verifica in tutti i casi in cui l'angolo  $BAC$  è maggiore di un angolo retto (si veda il caso illustrato in Fig. b), ma non solo in quelli.

In merito al *Teorema Mancante*, un lettore anonimo – che si firma “Acusmatico”<sup>2</sup> – ha osservato quanto segue (si veda la parte destra della seguente Fig. b):

*Il problema che è trattato e risolto con il "Teorema mancante" è riconducibile alla Proposizione 24 mediante una semplice rotazione [...] attorno al punto D, di modo che il segmento DF abbia come immagine DG. In questo senso la spiegazione al fatto che Euclide non enuncia il teorema mancante è da ricondurre ai problemi assiomatici posti da Hilbert [...]. Si parla allora di assiomi mancanti (tema già ampiamente discusso da altri) e non di teoremi mancanti.*

Se la rotazione di cui parla Acusmatico riguarda – come sembrerebbe – la situazione di Fig. b (Fig. 2, per [DML]), allora effettivamente tale rotazione fa cadere nel caso di Fig. a. Tuttavia, l'esigenza del *Teorema Mancante* non viene intaccata.

D'altro canto, sottolineiamo che in questo caso ci sembra improprio parlare di *Assioma Mancante* – come vorrebbe Acusmatico – per il semplice fatto che della proprietà in questione noi in [DML] abbiamo proposto una facile dimostrazione, perfettamente coerente con l'impostazione euclidea, e che utilizza soltanto alcune proposizioni dimostrate precedentemente da Euclide.

## 2. Alcuni assiomi mancanti e la Proposizione 21 di Euclide

In questo paragrafo faremo riferimento alla nozione di segmento (*linea retta* per Euclide) così come sembra sia intesa dal maestro secondo le sue applicazioni, che sono di tipo prettamente intuitivo<sup>3</sup>, ma, tra l'altro, aiutano a chiarire la definizione piuttosto vaga e oscura che egli dà (si veda [E], p. 66, nota 4). Tuttavia, noi accentueremo l'impostazione ipotetico-deduttiva che caratterizza gli *Elementi*. Infatti, alle proprietà che esprimono in forma più moderna i due classici postulati euclidei sui segmenti, noi aggiungeremo due altre semplici proprietà – del tutto naturali da un punto di vista intuitivo – dalle quali ricaveremo le altre che usualmente si attribuiscono ai segmenti.

L'uso che Euclide fa della nozione di segmento ci induce a pensare alla presentazione pratica che si fa nei primi approcci alla geometria, in cui ai discenti si fa tendere un filo tra le mani: il filo rappresenta il segmento e i capi trattenuti dalle dita ne rappresentano gli *estremi*. Il segmento di estremi  $A$  e  $B$  è un insieme di punti – tra i quali ci sono  $A$  e  $B$  – che è indicato indifferentemente con  $AB$  oppure con  $BA$ . Quindi diremo che  $AB$  *congiunge*  $A$  e  $B$ .

In genere, nel considerare il segmento  $AB$ , si ritiene  $A \neq B$ ; tuttavia a volte capita di indicare con  $AA$  il singoletto  $\{A\}$ , e noi qui seguiremo questa convenzione. Inoltre adopereremo, senza ulteriori precisazioni, modi di dire che sono usuali in geometria elementare e in teoria degli insiemi come *stare su*, ma anche *incontrare*, detto in riferimento a insiemi di punti che abbiano intersezione non vuota. Inoltre se un segmento  $s'$  include un segmento  $s$ , noi diremo anche che  $s'$  è un *prolungamento* di  $s$ , anche quando  $s' = s$ . Un punto del segmento  $AB$  diverso dagli estremi è detto *interno* a esso [o anche ad  $A$  e  $B$ ].

Come si ricordava, sono molteplici le proprietà che si è soliti attribuire ai segmenti; ma alcune possono essere scelte come postulati da cui ricavare le altre. Di ciò noi daremo qualche esempio importante per il prosieguo di questa esposizione.

Intanto indichiamo con  $E$  l'insieme dei punti considerato da Euclide<sup>4</sup>. Quindi tra le proprietà consideriamo preliminarmente le seguenti:

<sup>2</sup> Per un più sollecito e proficuo scambio di idee lo invitiamo a rivelarsi.

<sup>3</sup> David Hilbert in [H] deriva il concetto di *segmento* da un *legame* riguardante terne di punti  $A, B, C$ . Tale legame poi porta a dire che  $B$  è un punto del segmento che ha per estremi  $A$  e  $C$ . Per far ciò Hilbert considera uno spazio con una *buona* dotazione di *rette*.

Invece in [L] – pur prendendo spunto da Hilbert, usando terne di punti – si procede senza usare *a priori* delle rette, che nascono come particolari *prolungamenti* di segmenti.

<sup>4</sup> In realtà,  $E$  potrebbe essere un qualsiasi insieme non vuoto.

**P1.** *A due punti distinti  $A$  e  $B$  risulta sempre associato uno ed un solo sottoinsieme non vuoto di  $E$  – detto segmento di estremi  $A, B$ , o anche segmento  $AB$  – che abbia  $A$  e  $B$  come suoi elementi<sup>5</sup>.*

**P2.** *Per ogni due punti distinti  $A$  e  $B$  esiste un punto  $D$  tale che  $B$  sia interno al segmento  $AD$ .*

In questo paragrafo – a parte l'esempio che faremo tra poco – non useremo la proprietà P2, che diventerà essenziale solo nel prossimo paragrafo.

Le proprietà P1 e P2 sono una riscrittura dei Postulati I e II di Euclide (cfr. [E], p. 71), i quali si ritrovano nella prima parte della seguente proprietà, che a p. 159 di [Pr] enuncia i primi tre postulati euclidei:

**Postulati I-III.** *Si ammetta di poter condurre da ogni punto ad ogni altro punto una retta; di poter prolungare continuamente in linea retta una retta terminata [e di poter descrivere un cerchio da ogni centro e da ogni distanza].*

In seguito saranno di fondamentale importanza le due proprietà seguenti. La proprietà P3 assicura che ogni eventuale punto interno a un segmento lo *spezza* in due segmenti che hanno in comune solo quel punto.

**P3.** *Se  $X \in AB$ , allora  $AX \cap XB = \{X\}$  e  $AX \cup XB = AB$  [onde  $AX \subseteq AB$  e  $XB \subseteq AB$ ].*

**P4.** *Se due segmenti  $s$  ed  $s'$  hanno in comune più di un punto, allora  $s \cup s'$  è un segmento.*

Facciano notare che, su di un piano strettamente formale, dato un insieme  $E$  totalmente [linearmente] ordinato e privo di minimo e di massimo, chiamati punti i suoi elementi, allora si realizzano dei segmenti che soddisfano le precedenti proprietà associando a ogni coppia di punti  $A, B$  il sottoinsieme di  $E$  costituito da  $A$ , da  $B$  e dai punti fra essi compresi (rispetto all'ordinamento).

Inoltre aggiungiamo la seguente proprietà, che è soltanto una condizione che dà senso alla nozione di triangolo (in questo paragrafo) e a quella di piano (nel paragrafo successivo).

**P5.** *Ci sono almeno tre punti che non appartengono a uno stesso segmento.*

**Osservazione 1.** Sia  $X$  un punto interno al segmento  $AB$ . Allora si ha:

(1)  $B \notin AX$  per la prima parte della P3, essendo  $X \neq B$ . Analogamente,  $A \notin XB$ .

(2)  $AX \subset AB$ , poiché  $AX \subseteq AB$  (per la P3) e  $B \notin AX$ . Analogamente,  $XB \subset AB$ .

(3) Se  $Y$  è un altro punto di  $AB$ , allora  $XY \subset AB$ . Infatti, usando le lettere opportune, per la P3 deve essere  $AY \subseteq AX$  oppure  $AY \subseteq XB$ . Perciò, per il precedente punto (2), si ha rispettivamente  $XY \subseteq AX \subset AB$  oppure  $XY \subseteq XB \subset AB$ . ■

**Nota Bene.** Dati i segmenti  $AB$  e  $XY$ , il punto  $X$  (oppure  $Y$ ) sia distinto da  $A$  e da  $B$ . Allora quei segmenti sono diversi [vale a dire, un segmento non può avere più di due estremi]<sup>6</sup>. Infatti, se fosse  $XY$

<sup>5</sup> L'unicità non è presente nel Postulato I di Euclide, ma è insita nella definizione che egli dà di segmento. Infatti quella definizione – per quanto vaga – ci fa capire che c'è un solo modo *per andare dritto* da  $A$  a  $B$ , lungo un percorso di punti.

Da un punto di vista rigoroso, in questa proprietà si considera una funzione dall'insieme dei “duetti” di punti  $\{A, B\}$  verso l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di  $E$ .

<sup>6</sup> Ciò significa che la funzione di cui alla nota n. 5 è iniettiva.

$= AB$ , allora  $X$  e  $Y$  sarebbero punti di  $AB$ . Perciò, per la (3) dell'Osservazione 1, si avrebbe  $XY \subset AB$ . Il che è assurdo. ■

**Teorema 2.** *Siano  $X$  e  $Y$  due punti del segmento  $AB$ . Allora si ha:*

(1)  $X \in AY \iff AX \subseteq AY$ ;

(2)  $Y \in AX$  oppure  $X \in AY$ ;

(3)  $AY \subseteq AX$  oppure  $AX \subseteq AY$ ;

(4)  $X \in AY \iff Y \in XB$ .

*Dimostrazione.* Se  $X = Y$  oppure se uno tra  $X$  e  $Y$  coincide con un estremo, il teorema è di facile verifica. Perciò supponiamo  $X$  ed  $Y$  distinti ed interni ad  $AB$ .

(1) L'implicazione da sinistra a destra è ovvia per la P3, con  $Y$  al posto di  $B$ ; l'altra implicazione è conseguenza del fatto che, per l'ultima parte della P1,  $X \in AX$ .

(2) Se  $Y \notin AX$ , allora  $Y \in XB$  per la P3. Perciò dato che  $X, Y$  e  $B$  sono distinti, non può essere  $X \in YB$ , per la (1) dell'Osservazione 1 opportunamente usata; onde  $X \in AY$ .

(3) Scaturisce immediatamente dalla (2) tenendo opportuno conto della (1).

(4) Ovviamente, basta provare che  $X \in AY \Rightarrow Y \in BX$ . Perciò, sia  $X \in AY$ , onde non può essere  $Y \in AX$ . Quindi, per la prima parte della P3,  $Y \in XB$ . ■

**Nota Bene.** Se  $X$  e  $Y$  sono due punti, poniamo:

$$X \leq_A Y \text{ se e solo se } AX \subseteq AY.$$

In tal modo,  $\leq_A$  è il simbolo di una relazione d'ordine sull'insieme  $\mathbf{E}$  dei punti. Infatti,  $\leq_A$  è chiaramente riflessiva e transitiva. Inoltre, se  $X \leq_A Y$  e  $Y \leq_A X$ , allora  $AX \subseteq AY$  e  $AY \subseteq AX$ ; per cui  $AX = AY$ ; onde è facile vedere che  $X = Y$ . Ciò è ovvio se  $X = A$ ; altrimenti deriva dal fatto che un segmento non può avere più di due estremi. Perciò  $\leq_A$  è anche antisimmetrica. Ovviamente, rispetto a  $\leq_A$ , il punto  $A$  è il minimo dell'insieme  $\mathbf{E}$ .

Se  $B$  è un punto distinto da  $A$ , allora la (3) del Teorema 2 assicura che la restrizione  $\leq_{AB}$  di  $\leq_A$  al segmento  $AB$  è una relazione d'ordine totale [lineare], rispetto alla quale  $A$  e  $B$  sono rispettivamente il minimo e il massimo di  $AB$ .

Definendo allo stesso modo  $\leq_B$  e  $\leq_{BA}$ , per la (4) del Teorema 2 si ha immediatamente che  $\leq_{AB}$  e  $\leq_{BA}$  sono l'una la duale dell'altra. ■

**Teorema 3.** *Dati tre punti distinti di un segmento  $AB$ , uno di essi giace sul segmento che congiunge gli altri due.*

*Dimostrazione.* Siano  $X$  e  $Z$  rispettivamente il più piccolo e il più grande dei tre punti rispetto alla relazione  $\leq_{AB}$  e  $Y$  sia il terzo dei tre. Perciò  $X \leq_{AB} Y \leq_{AB} Z$ , onde  $AX \subseteq AY \subseteq AZ$ . Quindi  $X$  e  $Y$  giacciono su  $AZ$ . Di conseguenza, poiché  $X \in AY$ , tenendo conto della (4) del Teorema 2 – con  $Z$  al posto di  $B$  – si ha  $Y \in XZ$ . ■

Ora  $T$  sia un insieme con almeno due punti. I punti di  $T$  li diremo *allineati* – o anche che uno di essi è allineato con il sottoinsieme costituito dai rimanenti punti di  $T$  – quando  $T$  ha esattamente due punti, oppure ogni suo sottoinsieme costituito da tre punti è incluso in un segmento. Spesso diremo che  $T$  è un *insieme lineare* (di punti). Ovviamente, ogni segmento è un insieme di punti allineati.

**Teorema 4.**  $T$  sia un insieme lineare di punti. Allora ogni sottoinsieme finito  $F$  di  $T$  è incluso in un segmento.

*Dimostrazione.* Se  $F$  non ha più di tre punti, l'asserto è ovvio. Quindi, supposto l'asserto vero per sottoinsiemi aventi  $n$  punti, con  $n \geq 3$ , proviamolo per sottoinsiemi aventi  $n+1$  punti. Perciò sia  $F = \{X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}\}$ . Inoltre, per l'ipotesi induttiva, siano  $s$  un segmento che include  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  ed  $s'$  un segmento che include  $\{X_2, \dots, X_n, X_{n+1}\}$ . Poiché  $n \geq 3$ , i punti comuni ai due segmenti  $s$  ed  $s'$  sono almeno due; precisamente:  $X_2, \dots, X_n$ . Perciò  $s \cup s'$  è un segmento ed  $F$  è incluso in  $s \cup s'$ . ■

**Teorema 5.**  $X$  e  $Y$  siano due punti distinti di un insieme lineare di punti  $T$ . Se un punto  $Z$  è allineato con  $X$  e  $Y$ , allora anche  $T \cup \{Z\}$  è lineare.

*Dimostrazione.* Ovviamente, c'è da provare soltanto che se  $X'$  e  $Y'$  sono punti distinti di  $T$ , allora  $X', Y'$  e  $Z$  sono allineati. Sia  $s_1$  un segmento su cui giacciono  $X, Y$  e  $Z$ . Inoltre, poiché  $T$  è lineare, per il Teorema 4 possiamo considerare un segmento  $s_2$  su cui giacciono  $X, Y, X'$  e  $Y'$ ; onde  $s_1$  ed  $s_2$  hanno in comune i punti  $X$  ed  $Y$ . Quindi  $s_1 \cup s_2$  è un segmento che passa per  $X', Y'$  e  $Z$ . Ciò assicura la tesi. ■

**Teorema 6.**  $X$  e  $Y$  siano due punti distinti di un insieme  $T$  tali che ogni punto  $Z$  di  $T$  sia allineato con  $X$  e  $Y$ . Allora i punti di  $T$  sono allineati.

In particolare, sia  $T = T_1 \cup T_2$ , dove  $T_1$  e  $T_2$  sono due insiemi lineari che passano per  $X$  e  $Y$ . Allora  $T_1 \cup T_2$  è costituito da punti allineati.

*Dimostrazione.* Dati tre punti distinti  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  di  $T$ , proviamo che essi sono allineati. Per ipotesi,  $\{X, Y, Z_1\}$  è costituito da punti allineati; onde, applicando il Teorema 5, si ha che i punti di  $\{X, Y, Z_1, Z_2\}$  sono allineati. Di conseguenza – sempre per il Teorema 5 – sono allineati anche i punti di  $\{X, Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ . Perciò  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  sono allineati.

La seconda parte del teorema è ovvia dato che ciascun punto di  $T_1 \cup T_2$  è allineato con  $X$  e  $Y$ . ■

Anche per quanto attiene alla nozione di triangolo usata da Euclide, procederemo usando una definizione più rigorosa, che però è in linea con gli aspetti intuitivi.

Intanto partiamo da tre punti non allineati  $A, B$  e  $C$ , che chiamiamo *vertici*. Quindi chiamiamo *lati* i tre segmenti che congiungono quei vertici a due a due; inoltre chiamiamo *bordo* o *frontiera* associato ai tre vertici l'unione dei tre lati.

Allora per *triangolo*  $ABC$  intendiamo l'insieme dei punti – che diremo punti del triangolo – ciascuno dei quali è situato su di un segmento congiungente due punti del bordo. Perciò quei vertici, quei lati e quel bordo li diremo rispettivamente vertici, lati e bordo del triangolo. Un punto del triangolo che non sia situato sul bordo è detto *interno* al triangolo.

**Teorema 7.** Dati tre punti non allineati,  $T_1$  e  $T_2$  siano insiemi lineari tali che  $T_1$  passi per i primi due punti e  $T_2$  passi per il primo e per il terzo. Allora  $T_1$  e  $T_2$  si incontrano soltanto nel primo di quei tre punti.

In particolare, due lati distinti di un triangolo possono avere in comune soltanto un vertice.

*Dimostrazione.* In caso contrario, per il Teorema 6  $T_1 \cup T_2$  sarebbe costituito da punti allineati, onde i tre punti in questione sarebbero allineati. Il che è assurdo. ■

**Teorema 8.** *Dato un triangolo  $ABC$ , due punti distinti  $X$  e  $Y$  situati su di un lato non possono essere allineati con un punto  $Z$  del bordo che non sia situato su quello stesso lato. Inoltre, quattro punti allineati non possono essere situati sul bordo del triangolo, a meno che non stiano su di uno stesso lato.*

*Dimostrazione.* Per fissare le idee,  $X$  e  $Y$  stiano sul lato  $AB$ ; inoltre  $Z$  stia sul lato  $BC$  e sia diverso da  $B$ . Se  $X, Y$  e  $Z$  fossero allineati, allora – come conseguenza immediata del Teorema 5 – lo sarebbero anche i punti di  $AB \cup \{Z\}$ . Quindi, poiché il punto  $C$  è allineato con  $B$  e  $Z$ , sarebbero allineati – ancora per il Teorema 5 – anche i punti di  $AB \cup \{Z\} \cup \{C\}$ . Il che è assurdo, dato che  $A, B$  e  $C$  non sono allineati.

Per quel che riguarda la seconda parte del teorema, osserviamo che se quattro punti allineati fossero situati sul bordo del triangolo, senza stare tutti su di uno stesso lato, allora almeno due di questi dovrebbero comunque stare su di uno stesso lato; mentre, un altro dovrebbe stare su di un lato diverso. Il che contraddice la prima parte del teorema. ■

Si sottolinea il fatto che il Teorema 8 non esclude la possibilità che sul bordo del triangolo vi siano tre punti allineati tali che ogni lato ne contenga uno ed uno solo; questa possibilità, che contrasta con l'intuizione comune, sarà scongiurata più avanti in seguito alla introduzione della condizione ii).

Tornando alla Proposizione 24 del Libro I degli Elementi e facendo riferimento a Fig. a, aggiungiamo che ciò di cui difetta la dimostrazione di Euclide è anche il fatto che in essa non è esplicitamente provato che – essendo il segmento  $DE$  più lungo di qualsiasi segmento che congiunge  $D$  con un punto di  $HF$  – il punto  $E$  di Fig. a non giace sul triangolo  $DFH$ . D'altro canto, questo modo di procedere è in linea con l'impostazione euclidea, come si evince anche dalla dimostrazione della Proposizione 21 riportata qui sotto, che noi illustriamo in Fig. c con la stessa immagine utilizzata in [E] a p. 110.

**Proposizione 21.** *Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette (segmenti n. d. r.) che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore.*

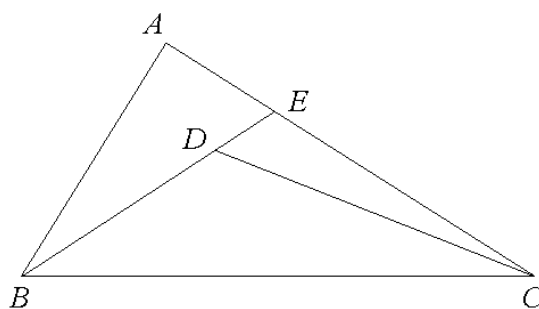


Fig. c

Si noti che anche la Proposizione 21 è ovvia sul piano intuitivo. Infatti – aiutandosi con Fig. c – è chiaro che andare da  $B$  a  $C$  lungo il percorso  $BDC$  è più breve che andarci lungo il percorso  $BDEC$ , che a sua volta è più breve del percorso  $BAEC$ .

D'altro canto, l'angolo  $BDC$  – in quanto esterno rispetto al triangolo  $DEC$  – è maggiore dell'angolo  $DEC$ ; mentre quest'ultimo, per la stessa ragione, è maggiore dell'angolo  $BAC$ .

La dimostrazione che fa Euclide della prima parte della Proposizione 21 si ispira alle valutazioni intuitive che noi abbiamo espresso poc'anzi. Però egli nella sua dimostrazione a un certo punto dice (si veda [E] p. 109): « *Si prolunghi difatti  $BD$  oltre  $D$  sino ad  $E$ ...* »

Euclide sorvola sul fatto che il punto  $E$  potrebbe non esistere, non prendendo in considerazione che i prolungamenti del lato  $BD$  potrebbero non *uscire* dal triangolo, oppure che, in caso di fuoriuscita, questa potrebbe avvenire attraverso un *buco*, eventualmente situato sul lato  $AC$  proprio laddove egli colloca il punto  $E$ . In definitiva, sul segmento  $AC$  potrebbe non esserci alcun punto allineato con  $B$  e  $D$ . In proposito si veda anche la dimostrazione della Proposizione 10 ([E], p. 92), in cui Euclide individua il punto medio di un segmento.

Questo atteggiamento alcuni esegeti dell'opera euclidea l'hanno imputato a una mancata esplicitazione di un *assioma di continuità del segmento (retta)*<sup>7</sup>, che potrebbe esprimersi con la seguente proprietà:

**i)** *D sia un punto interno a un triangolo  $ABC$ . Allora per ogni punto  $M$  del bordo esiste un punto  $E$  del bordo tale che  $D$  sia interno al segmento  $ME$ .*

Ovviamente, i punti  $M$  ed  $E$  non giacciono su di uno stesso lato, altrimenti anche  $D$  starebbe su quel lato e non sarebbe interno al triangolo.

Inoltre, dato che il segmento  $ME$  congiunge punti del bordo del triangolo  $ABC$ , i punti di  $ME$  stanno sul triangolo. E non può accadere – lo esclude la seconda parte del Teorema 8 – che due o più punti interni del segmento  $ME$  siano situati sul bordo. Tuttavia, il fatto che  $ME$  possa avere un punto interno situato sul bordo del triangolo  $ABC$ , cozza contro la visione intuitiva che si ha dei segmenti e dei triangoli. Perciò si può pensare anche alla seguente proprietà:

**ii)** *Dato un triangolo  $ABC$ , siano  $M$  ed  $E$  due punti del bordo interni a lati distinti. Allora ogni punto  $N$  interno al segmento  $ME$  è interno anche al triangolo.*

**Osservazione 9.** Se uno dei punti  $M$ ,  $E$  di cui alla proprietà ii) lo prendessimo coincidente con un vertice del triangolo e l'altro, comunque, su un lato che non contiene quel vertice, quanto richiesto dalla ii) sarebbe ugualmente soddisfatto, nel senso che ogni punto interno ad  $ME$  sarebbe interno al triangolo; e ciò in virtù della prima parte del Teorema 8. ■

**Nota Bene.** La proprietà ii), insieme a quanto abbiamo aggiunto con l'Osservazione 9, assicura che se tre punti distinti appartengono al bordo del triangolo  $ABC$  e sono allineati, allora essi non possono che stare sullo stesso lato. Infatti, per il Teorema 3, uno di essi è interno al segmento che congiunge gli altri due, e quindi verrebbe ad essere interno al triangolo se questi altri due punti non fossero con lui su uno stesso lato. ■

Data la rappresentazione cartesiana che usualmente si fa del piano reale euclideo, i segmenti di quest'ultimo hanno una controparte in  $\mathbb{R}^2$  che, oltre alle proprietà P1-P5 soddisfa anche alla i) e alla ii). Inoltre è chiaro che le tracce dei vari segmenti di  $\mathbb{R}^2$  sul sottoinsieme  $\mathbb{Z}^2$  – onde dei punti di ciascun segmento di  $\mathbb{R}^2$  consideriamo solo quelli che hanno entrambe le coordinate intere, e consideriamo solo triangoli che hanno per vertici punti di questo tipo – danno luogo a un insieme di segmenti che soddisfano alle proprietà P1-P5 e ii), ma non alla proprietà i). Questo dipende dal fatto che nel passaggio da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{Z}^2$  abbiamo eliminato dei punti, determinando dei “buchi”, onde due segmenti che in  $\mathbb{R}^2$  si incontravano in un punto le cui coordinate non erano intere, in  $\mathbb{Z}^2$  perdono il loro punto di incontro. Concretamente, ci si rende conto di ciò considerando un foglio a quadretti e prendendo come punti i nodi (cioè, gli incroci tra linee orizzontali e verticali).

Tuttavia l'inconveniente ora prospettato non si verifica se il passaggio lo si effettua da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{Q}^2$  [onde di  $\mathbb{R}^2$  si considerano soltanto i punti che hanno entrambe le coordinate razionali], purché inizialmente si considerino solo segmenti i cui estremi abbiano coordinate razionali. Infatti tali segmenti giacciono su

<sup>7</sup> Attualmente l'*assioma di continuità del segmento* ha un significato diverso da quello che stiamo per dare, potendosi identificare con l'*assioma di continuità della retta*. Quest'ultimo afferma che in uno spazio dotato di rette sulle quali si possano definire dei segmenti, e quindi un ordinamento (e il suo duale), ogni sottoinsieme  $\mathbf{T}$  limitato di una retta ha estremo inferiore ed estremo superiore. Il che, ad esempio, si verifica sullo spazio reale  $\mathbb{R}^3$ .



rette che sono rappresentate da equazioni a coefficienti razionali, onde i punti di incontro di tali rette [e quindi dei segmenti considerati] hanno coordinate razionali. Quindi quei punti di incontro stanno in  $\mathbb{R}^2$ .

La proprietà i) – da sola o insieme alla ii) – oltre a ovviare ad alcune manchevolezze che si riscontrano negli *Elementi*, consente di dimostrare diversi semplici teoremi della geometria euclidea. Perciò si potrebbe essere tentati di assumere queste proprietà come due ulteriori postulati. Tuttavia nel prossimo paragrafo vedremo che ciò è superfluo, dato che la i) e la ii) sono conseguenza dell'*Assioma del Semipiano*.

### 3. L'Assioma sottinteso del Semipiano

Qui  $\mathbf{E}$  continuerà ad essere l'insieme dei punti euclidei, con i suoi segmenti muniti delle proprietà P1, P2, P3, P4 e P5 del paragrafo precedente; onde varranno anche tutti i risultati fino all'Osservazione 9<sup>8</sup>. Intanto facciamo presente che attualmente la nozione di piano può essere data in maniera meno ingenua rispetto a quella data negli *Elementi* (si veda [E], Definizione VII, p. 67). Generalmente lo si fa in un ambiente geometrico in cui ci sia, come vedremo, un soddisfacente *bagaglio* di rette. In vero,  $\mathbf{S}$  sia un insieme non vuoto i cui elementi sono chiamati *punti*; inoltre,  $\mathcal{R}$  sia un insieme di sottoinsiemi di  $\mathbf{S}$ , chiamati *rette*, tali che sia verificata la seguente proprietà:

a) *Dati due punti distinti  $A$  e  $B$  di  $\mathbf{S}$ , c'è una e una sola retta [cioè, uno e un solo elemento di  $\mathcal{R}$ ] che passa per  $A$  e per  $B$ .*

Allora si dice che  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  è uno *spazio di rette*. Quindi si chiama *sottospazio* di  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  ogni sottoinsieme di  $\mathbf{S}$  che abbia al più un punto, oppure che per ogni coppia di suoi punti, contenga anche la retta che li congiunge. Ebbene, è facile verificare la seguente proprietà:

b) *Ogni intersezione di sottospazi di  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  è un sottospazio.*

Allora si chiama *piano* di  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  un sottospazio che sia l'intersezione dei sottospazi che passano per tre suoi punti non appartenenti a una stessa retta.

E' facile costruire un insieme di rette sull'insieme  $\mathbf{E}$  dei punti euclidei di cui ci stiamo occupando. Infatti, dati due punti distinti  $X$  e  $Y$ , ispirandosi alla nozione intuitiva di retta (che nasce come *prolungamento illimitato* di un segmento), ha senso chiamare *retta* determinata (o anche generata) da  $X$  e  $Y$  – brevemente, *retta  $XY$*  – l'insieme dei punti  $Z$  che sono allineati con  $X$  e  $Y$ ; ossia, l'unione dei prolungamenti del segmento  $XY$ .

**Nota Bene.** Grazie alla prima parte del Teorema 6, una retta è un insieme di punti allineati. ■

Allora, alla luce di quanto è stato evidenziato nel paragrafo precedente, si prova facilmente che l'insieme  $\mathcal{R}$  delle rette così definite gode della precedente proprietà a), onde veniamo ad avere lo spazio di rette  $(\mathbf{E}, \mathcal{R})$ .

In ambito euclideo il significato della proprietà a) è che due rette distinte – come, del resto, due segmenti – non possono *incontrarsi in due punti distinti e poi andarsene ognuna per i fatti suoi*, come si vede col seguente teorema.

**Teorema 10.** *Le rette  $BC$  e  $B'C$  abbiano in comune due punti distinti  $X$  e  $Y$ . Allora esse coincidono.*

*Dimostrazione.* Infatti, applicando il Teorema 5, si ha che ogni punto  $Z$  della retta  $BC$  è allineato con i punti della retta  $B'C$ , onde la retta  $BC$  è inclusa nella retta  $B'C$ . Analogamente, la retta  $B'C$  è inclusa nella retta  $BC$ . Donde la tesi. ■

<sup>8</sup> Si noti che nell'Osservazione 9 le condizioni i) e ii) non sono state usate. Della ii) sono state adottate soltanto le notazioni.

Quindi sullo spazio di rette  $(E, \mathcal{R})$  si ha la possibilità di parlare di piano. Però, come è noto, Euclide sembra rifuggire dal concetto di retta, anche a livello intuitivo; infatti, negli *Elementi* questo concetto lo si trova solo in un paio di occasioni. Tuttavia, Euclide aveva la possibilità di dare una definizione di piano utilizzando soltanto la nozione di segmento e le proprietà che sono state evidenziate nel paragrafo precedente, nel modo che intendiamo mostrare nel prosieguo di questo articolo.

Intanto sia  $\mathcal{S}$  l'insieme dei segmenti considerati da Euclide; onde diremo che  $(E, \mathcal{S})$  è uno spazio di segmenti. Allora possiamo chiamare *sottospazio* di  $(E, \mathcal{S})$  ogni sottoinsieme  $H$  di  $E$ , che abbia al più un punto, oppure che per ogni coppia di suoi punti contenga anche tutti i punti allineati con essi<sup>9</sup>. Ebbene, ricorrendo alla sola nozione di segmento, è facile verificare la seguente proprietà:

**b')** *Ogni intersezione di sottospazi euclidei è un sottospazio.*

Allora possiamo chiamare *piano euclideo* di  $(E, \mathcal{S})$  un sottospazio che sia l'intersezione dei sottospazi che passano per tre suoi punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  non allineati. Lo indicheremo con  $\Psi(A, B, C)$  o più semplicemente con  $\Psi$ , quando non importa fissare l'attenzione sui generatori  $A, B, C$ .

**Osservazione 11.** Dato un piano  $\Psi$  e un suo segmento  $s$ , sia  $\Psi^s$  l'insieme dei punti di  $\Psi$  che non stanno su alcun prolungamento di  $s$ . Quindi consideriamo la relazione  $\Sigma^s$  tra punti  $A, B$  di  $\Psi^s$  che consiste nel fatto che  $A = B$  oppure il segmento  $AB$  non incontra alcun prolungamento di  $s$ . Chiaramente, la  $\Sigma^s$  è una relazione riflessiva e simmetrica. ■

Ora siamo in condizione di aggiungere alle proprietà P1, P2, P3, P4 e P5 del paragrafo precedente anche l'*Assioma del Semipiano*, onde diremo che  $(E, \mathcal{S})$  è uno *spazio euclideo*. Questo assioma viene generalmente enunciato in spazi di rette. Però noi lo adattiamo a uno spazio di segmenti; il che faremo anche per il successivo *Assioma di Pasch*.

**Assioma del Semipiano.** *Per ogni piano  $\Psi$  e per ogni suo segmento  $s$ , l'insieme  $\Psi^s$  dei punti del piano che non sono allineati con  $s$  si ripartisce in due classi  $U^s$  e  $V^s$ , caratterizzate dalla due seguenti proprietà:*

**c)** *Il segmento che congiunge due punti distinti di una stessa classe non incontra alcun prolungamento di  $s$ ;*

**d)** *Il segmento che congiunge due punti appartenenti rispettivamente a  $U^s$  e a  $V^s$  incontra un prolungamento di  $s$ .*

Ciascuna delle due classi  $U^s$  e  $V^s$  considerate nell'Assioma del Semipiano è detta *semipiano aperto* (o soltanto *semipiano*) di  $s$ . Inoltre i due semipiani sono detti *opposti* rispetto a  $s$ .

Euclide usa spesso l'Assioma del Semipiano, pur senza citarlo, considerandolo naturalmente sottinteso. Negli *Elementi* la prima traccia di esso, implicita laddove si parla di "parte", si ha nel celebre *quinto postulato*, che viene espresso così (si veda [E], p. 71):

**Postulato V.** *E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori [cioè, con somma minore; n.d.r.] di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

**Nota Bene.** Tornando alla relazione  $\Sigma^s$  su  $\Psi^s$  introdotta nell'Osservazione 11, è evidente che i punti  $A$  e  $B$  sono in questa relazione se e solo se appartengono entrambi ad  $U^s$  o entrambi a  $V^s$ . Perciò l'Assioma del Semipiano assicura che la relazione  $\Sigma^s$  è una relazione di equivalenza che ha esattamente due classi di equivalenza:  $U^s$  e  $V^s$ . ■

<sup>9</sup> Perciò questa nozione coincide con quella di sottospazio dello spazio di rette  $(E, \mathcal{R})$ .

**Teorema 12.** *A, B e C siano tre punti non allineati di un piano  $\Psi$  dello spazio euclideo  $(E, \mathcal{S})$ . Allora risulta  $\Psi(A, B, C) = \Psi$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $A, B, C \in \Psi$ , allora  $\Psi(A, B, C) \subseteq \Psi$ , dato che  $\Psi$  è un sottospazio e  $\Psi(A, B, C)$  è il più piccolo sottospazio che passa per i punti  $A, B$  e  $C$ . Onde resta da provare l'altra inclusione. Quindi sia  $P \in \Psi$ . Se  $P$  è allineato con  $B$  e  $C$ , ovviamente  $P \in \Psi(A, B, C)$ . Perciò  $P, B$  e  $C$ , siano non allineati; onde, considerato il segmento  $s = PB$ , si ha che  $C \in \Psi^s$ . Tenendo conto della proprietà P2, prendiamo un punto  $D$  tale che  $B$  sia interno al segmento  $AD$ ; onde  $A$  e  $D$  sono situati su semipiani di  $\Psi$  opposti rispetto a  $s$ . Perciò si verifica una e una sola delle seguenti eventualità:

$$C \equiv A \pmod{\Sigma^s} \quad C \equiv D \pmod{\Sigma^s}.$$

Supposta vera la prima, allora  $C \not\equiv D \pmod{\Sigma^s}$ . Perciò il segmento  $CD$  incontra un prolungamento  $s'$  di  $s$  in un punto  $B' \in \Psi(A, B, C)$  che è diverso da  $B$ ; altrimenti  $C$  sarebbe allineato con  $D$  e  $B$ , onde sarebbe allineato anche con  $A$  e  $B$ ; il che è assurdo.

Poiché  $B'$  e  $B$  sono punti di  $s'$  che stanno su  $\Psi(A, B, C)$ ,  $s'$  giace su  $\Psi(A, B, C)$  e quindi  $P \in \Psi(A, B, C)$ . ■

Ora consideriamo una proprietà, dovuta a Moritz Pasch, che in alcuni contesti geometrici – come quello di cui ci stiamo occupando (si veda la successiva Osservazione 13) – è equivalente all'Assioma del Semipiano. Perciò essa viene individuata come Assioma di Pasch.

**Assioma di Pasch.** *Un segmento  $s$  del piano  $\Psi$ , incontra un lato  $I$  di un triangolo di  $\Psi$  in un solo punto  $M$  interno ad  $I$ . Allora  $s$  o un suo prolungamento incontrano in un punto  $E$  un lato del triangolo diverso da  $I$ . Inoltre,  $s$  e ogni suo prolungamento incontrano il bordo al più in quei punti  $M$  ed  $E$ .*

**Osservazione 13.** Con un po' di attenzione si può verificare che l'Assioma di Pasch equivale al fatto che la relazione  $\Sigma^s$  definita su  $\Psi^s$  è una relazione di equivalenza che ha al più due classi di equivalenza. D'altro canto, grazie alla proprietà P2, questo assioma determina per la relazione  $\Sigma^s$  almeno due classi di equivalenza. Infatti, considerati un segmento  $s$  e l'insieme  $\Psi^s$ , nonché due punti  $A \in \Psi^s$  e  $B \in s$ , allora il punto  $D$  di cui alla P2) si trova in una classe di equivalenza diversa da quella di  $A$ . Quindi, siccome l'Assioma del Semipiano equivale al fatto che la  $\Sigma^s$  ha esattamente due classi di equivalenza, gli Assiomi di Pasch e del Semipiano sono equivalenti. ■

Concludiamo con un teorema che assicura che, valendo le proprietà 1), 2), 3) e 4) e l'Assioma del Semipiano, le precedenti proprietà i) e ii) sono dei teoremi.

**Teorema 14.** *Nello spazio euclideo  $(E, \mathcal{S})$  valgono le due condizioni i) e ii) del paragrafo precedente.*

*Dimostrazione.* Sia  $ABC$  un triangolo i cui vertici giacciono su di un piano  $\Psi$ . Grazie all'Osservazione 13, per la dimostrazione utilizzeremo l'Assioma di Pasch.

Proviamo la i). Perciò  $M$  sia un punto del bordo e  $D$  sia un punto interno al triangolo  $ABC$ , onde  $D$  giace su di un segmento congiungente due punti  $P$  e  $Q$  del bordo, con  $P$  e  $Q$  non situati su di uno stesso lato. Allora dobbiamo provare che esiste un punto  $E$  del bordo tale che  $D$  sia interno al segmento  $ME$ . Se  $M$  è interno a un lato del triangolo, allora la presenza del punto  $E$  è garantita dall'Assioma di Pasch, dove  $MD$  sta al posto di  $s$ . Perciò ci resta da considerare il caso in cui  $M$  coincida con uno dei vertici. Tanto per fissare le idee, sia  $M = A$ . Allora dobbiamo provare che un prolungamento di  $AD$  incontra il lato  $BC$ . A tal fine distinguiamo due casi. Il primo caso è che uno dei due punti  $P, Q$  sul cui segmento giace  $D$  coincida con  $B$  oppure con  $C$ . Ad esempio,  $P$  coincida con  $B$ , onde  $Q$  deve essere interno al

segmento  $AC$ . In tal caso, per il Teorema 8, i punti  $B$ ,  $C$  e  $Q$  non sono allineati; quindi – poiché  $D$  è interno al segmento  $BQ$  – per l'Assioma di Pasch applicato al triangolo  $BCQ$ , un opportuno prolungamento del segmento  $AD$  [non potendo incontrare il segmento  $QC$ , dato che  $D$  non sta sul lato  $AC$ ] incontra il lato  $BC$ .

Il secondo caso è che nessuno dei due punti  $P$ ,  $Q$  coincida con uno dei vertici  $B$ ,  $C$ . Allora dato che i punti  $P$ ,  $C$  e  $Q$  – sempre per il Teorema 8 – non sono allineati, basta applicare l'Assioma di Pasch prima al triangolo  $PCQ$ , onde un opportuno prolungamento  $s'$  del segmento  $AN$  incontrerà il lato  $PC$  in un punto interno. Quindi – per l'Assioma di Pasch applicato ad  $s'$  e al triangolo  $BCP$  – un opportuno prolungamento di  $s'$  incontra il lato  $BC$ .

Ora proviamo la ii). Perciò supponiamo che  $M$  ed  $E$  siano interni a lati distinti del triangolo. Quindi, assumendo come segmento  $s$  di cui all'Assioma di Pasch proprio  $ME$ , si ha che esso può incontrare il bordo del triangolo solo nei punti  $M$  ed  $E$ . Il che assicura la condizione ii). ■

### Bibliografia

- [DML] De Mitri C., Lenzi D., *Euclide e il teorema mancante*, Matematicamente.it, N. 12 (2010).  
 [E] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccione, UTET, Torino (1970).  
 [H] Hilbert D., *Fondamenti della Geometria* (con introduzione di Carlo Felice Manara), Feltrinelli, Milano. (1970). Traduzione da *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Stuttgart (1968).  
 [L] Lenzi D., *David Hilbert e i suoi primi assiomi della geometria, con un'appendice dedicata a Moritz Pasch*, Periodico di Matematiche, IV (2008).  
 [Pr] Proclo, *Commento al primo libro di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini ed., Pisa (1978).