

• Numero 13 – Agosto 2010 •



Cristofe!, Sator, arepo, tenet, opera, rotas  
[http://www.flickr.com/photos/steam\\_tof/70805108/in/pool-471574@N23/](http://www.flickr.com/photos/steam_tof/70805108/in/pool-471574@N23/)

---

QUADRATI MAGICI – MOLTIPLICAZIONE GRAFICA – PROBLEMA  
ISOPERIMETRICO – TRAIETTORIE LUNARI – ASSIOMI MANCANTI IN  
EUCLIDE – PROBLEMA DI SYLVESTER – LIBRI DA LEGGERE

---

## Come proporre un contributo

### *Istruzioni per gli autori*

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

### MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito*  
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce  
ISSN 2035-0449

#### *Direttore responsabile*

Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it

#### *Vicedirettore*

Luca Lussardi  
lucalussardi@matematicamente.it

#### *Redazione*

Flavio Cimolin  
flaviocimolin@matematicamente.it  
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

#### *Hanno collaborato a questo numero*

Antonio Bernardo, Stefano Borgogni, Cosimo De Mitri, Guglielmo Di Meglio, Antonietta Fadda, Marco Giancola, Domenico Lenzi, Luca Lussardi, Andreana Zucco.

# Sommario

137. Quadrati magici . . . . .	5
Stefano Borgogni	
138. Moltiplicare i numeri con la geometria . . . . .	10
Luca Lussardi	
139. Il problema isoperimetrico classico, storia e mito . . . . .	15
Guglielmo Di Meglio	
140. Calcolo di traiettorie lunari mediante metodi analitici approssimati . . . . .	22
Marco Giancola	
141. Le proposizioni 24 e 21 degli Elementi di Euclide e alcuni assiomi mancanti . . . . .	26
Cosimo De Mitri e Domenico Lenzi	
142. Il problema di Sylvester, chi l'ha risolto per primo? . . . . .	38
Andreana Zucco	
143. Lo scaffale dei libri: 10+ il genio sei tu Il Pallino della matematica . . . . .	42

# Editoriale

Chiudiamo il 2010. Un buon 2011 a tutti i nostri lettori: per quello che può significare questa espressione. Ogni fine d'anno è sempre piacevole scambiarsi un po' di auguri. Dicendo auguri a tutti i nostri lettori significa che vogliamo male a tutti gli altri? Non è questa la nostra intenzione. Auguri a tutti.

In questo numero, Stefano Borgoni ci parla dei Quadrati magici, un tema vecchio, anzi antichissimo... ma sempre attuale. Luca Lussardi ha approfondito un "metodo" per moltiplicare numeri interi che è molto cliccato su Youtube, spesso viene presentato come un metodo magico... magico non è, ma sicuramente incuriosisce molti; chi vuole capire come funziona può leggere questo breve articolo. Guglielmo Di Meglio presenta il problema isoperimetrico, un problema classico la cui origine si perde nell'antichità tra miti e leggende. Marco Giancola spiega come calcolare traiettorie lunari con metodi approssimati. Cosimo De Mitri e Domenico Lenzi presentano una ulteriore riflessione sul libro che è alla base della cultura matematica, gli *Elementi* di Euclide. Un libro che continua a suscitare spunti di riflessione; quelle degli autori di questo articolo possono essere utili agli insegnanti per penetrare tra i meandri di questo libro. Andreana Zucco ci presenta il problema di Sylvester e le problematiche storiche sulla sua risoluzione. Infine vi presentiamo due libri che non devono mancare nella libreria del matematico appassionato: *10+ il genio sei tu* è una novità editoriale di Anna Cerasoli, divulgatrice di successo della matematica tra i ragazzi; *Il Pallino della matematica* è un classico libro di successo, che Cortina Raffaello ha da poco ristampato.

Antonio Bernardo

# 137. QUADRATI MAGICI

Stefano Borgogni  
stfbg@rocketmail.com

## Sunto

Questo articolo è dedicato ai quadrati magici. Si tratta di un argomento che è stato trattato in lungo e in largo da generazioni di matematici (e non), e su cui esiste un'ampia letteratura. L'intenzione del presente testo è, per l'appunto, quella di raggruppare e sintetizzare i principali dati e informazioni disponibili sui quadrati magici (comprese una serie di varianti al tema principale) per offrire in poche pagine una panoramica complessiva e, si spera, sufficientemente esauriente. Per maggiori approfondimenti si rimanda alla bibliografia e all'ampia documentazione disponibile in rete.

## Quadrati magici "normali"

Com'è noto, i quadrati magici di ordine  $N$  sono matrici quadrate  $N \times N$  di numeri interi consecutivi (da 1 a  $N^2$ ) costruite in modo tale che rimanga sempre costante la somma di ogni riga, colonna o diagonale principale. Tale somma, detta anche "costante magica", è facilmente ricavabile; la formula è:  $(N^3+N) / 2$ .

$N$	Costante magica
1	1
2	impossibile
3	15
4	34
5	65
6	111
7	175
8	260
9	369
10	505

I quadrati magici sono noti fin dai tempi più antichi: basti citare il seguente quadrato  $3 \times 3$ , noto come "Lo Shu", di origine cinese e con costante magica 15:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il Lo Shu è legato a una leggenda che parla di una disastrosa piena del fiume Lo. La gente offriva, invano, sacrifici al dio del fiume; dopo ogni sacrificio compariva una tartaruga. Finalmente un bambino si accorse che essa portava raffigurato sul guscio un quadrato magico  $3 \times 3$ , a indicare che il dio voleva un sacrificio di 15 (costante magica) animali. La richiesta fu accolta e la piena del fiume cessò. Il Lo Shu è stato interpretato anche come simbolo dell'armonia universale, poiché comprende i numeri da 1 (inizio di tutte le cose) a 9 (completamento).

I quadrati magici rimangono tali anche operando alcune trasformazioni; ad esempio:

- simmetria rispetto alla mediana (orizzontale o verticale);
- simmetria rispetto a una diagonale;
- sostituzione di ogni numero col suo complementare rispetto a  $N^2+1$ .

Il quadrato magico di ordine 1 è banale. E' facile verificare che quello di ordine 2 non è possibile, mentre per tutti gli altri ordini vi sono quadrati magici in un numero che cresce al crescere di  $N$ , diventando ben presto esorbitante. E' stato calcolato, infatti, che - senza contare rotazioni e riflessioni - esistono:

- 1 quadrato magico di ordine 3;
- 880 quadrati magici di ordine 4;
- 275.305.224 quadrati magici di ordine 5.

I quadrati magici di ordine 6 dovrebbero essere circa 17 miliardi di miliardi.

Resta da risolvere il problema più generale: qual è la regola per determinare il numero di quadrati magici per un dato ordine  $N$ ?

I quadrati magici sono citati anche nell'arte e nella letteratura: l'esempio più famoso è quello del dipinto di Durer "Melancolia P", in cui è raffigurato il seguente quadrato magico:



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Le celle centrali dell'ultima riga indicano la data di composizione dell'opera, il 1514.

### Quadrati diabolici

I *quadrati diabolici* sono quadrati magici che, oltre a righe, colonne e diagonali principali, mantengono la somma costante anche sulle diagonali "spezzate". Di fatto, i quadrati diabolici forniscono lo stesso risultato anche se si opera in altri modi (ad esempio, spostando una riga dalla posizione più alta a quella più bassa o una colonna da un lato all'altro).

Il loro nome deriva proprio dal fatto che la costante magica sembra avere la capacità diabolica di saltar fuori comunque si rigiri il quadrato iniziale.

Esistono quadrati diabolici per qualsiasi ordine  $N > 3$  con:

- $N$  dispari;
- $N$  pari ma divisibile per 4.

Non è possibile, ad esempio, costruire i quadrati diabolici  $6 \times 6$  o  $10 \times 10$ .

Un celebre quadrato diabolico è quello trovato in un'iscrizione del XII secolo in India, denominato "Quadrato di Nasik", dal nome della località in cui venne scoperto:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

In questo quadrato la costante magica 34 si può ottenere in ben 86 modi diversi; tra questi ne indichiamo alcuni:

- somma dei 4 numeri centrali;
- somma dei 4 numeri d'angolo;
- somma dei numeri centrali di prima e ultima riga;
- somma dei numeri centrali di prima e ultima colonna;
- somma dei numeri dei 4 quadrati  $2 \times 2$  ottenuti tagliando a metà la figura in verticale e in orizzontale.

### Quadrati antimagici ed eteromagici

I *quadrati eteromagici* si comportano esattamente al contrario rispetto a quelli magici: la somma di righe, colonne e diagonali deve essere sempre diversa.

Esistono quadrati eteromagici per ogni ordine  $N > 2$ .

Più interessanti sono i *quadrati antimagici*, che rispetto ai precedenti hanno un importante vincolo in più: la somma costruita su righe, colonne e diagonali deve dare una sequenza di numeri consecutivi.

Ecco un esempio di quadrato antimagico:

	2	15	5	13	35
	16	3	7	12	38
	9	8	14	1	32
	6	4	11	10	31
34	33	30	37	36	29

I più piccoli quadrati antimagici sono di ordine 4 e, come nell'esempio appena visto, le diverse somme danno i numeri da 29 a 38.

Non si sa se esistano quadrati antimagici per ogni ordine  $N > 3$ .

### Costruzione di quadrati magici

A prima vista costruire un quadrato magico potrebbe sembrare complicato. In realtà non è così, anzi in alcuni casi il procedimento è ridicolmente semplice.

Per ogni ordine  $N$  con  $N$  pari e divisibile per 4, basta scrivere i numeri in ordine da 1 a  $N^2$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

poi invertire la prima diagonale

16	2	3	4
5	11	7	8
9	10	6	12
13	14	15	1

poi invertire la seconda diagonale

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12

4	14	15	1
---	----	----	---

et voilà, il gioco è fatto.

Vi è anche un procedimento, leggermente più complicato, per costruire un quadrato magico di ordine dispari.

Si comincia scrivendo 1 nella cella centrale della prima riga.

		1		

Si prosegue nella colonna seguente salendo di una fila. Se si è nella 1° fila, si riparte da quella più bassa; se si è nell'ultima colonna, si riparte dalla 1° a sinistra.

		1		
	5			
4				
				3
			2	

Se il posto è già occupato, si scrive il numero immediatamente sotto all'ultimo immesso

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

e così via fino a completare il quadro:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Anche la costruzione di quadrati eteromagici è estremamente semplice.

Per quadrati di ordine dispari basta scrivere i numeri a spirale partendo dalla prima cella:

	1	2	3	6
	8	9	4	21

	7	6	5	18
19	16	17	12	15

Per quadrati di ordine pari, il procedimento è ancora più banale: basta scrivere in sequenza, a partire dalla cella in alto a sinistra, tutti i numeri da 1 a  $N^2$  e poi cambiare di posto l'1 e il 2:

	2	1	3	4	10
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	13	14	15	16	58
34	29	31	36	40	35

I quadrati diabolici e quelli antimagici sono molto più complessi; non si conosce un procedimento semplice per costruirli.

### Altre varianti sul tema

Eliminando il vincolo che i numeri contenuti nel quadrato siano consecutivi e partano da 1, si possono elaborare diverse varianti sul tema dei quadrati magici. Eccone alcune.

#### A - Quadrati magici moltiplicativi

Come è facile intuire, questi quadrati sono magici rispetto alla moltiplicazione anziché rispetto all'addizione. Il più piccolo quadrato moltiplicativo è di ordine 3 e ha costante magica 216:

12	1	18
9	6	4
2	36	3

#### B - Quadrati magici additivi-moltiplicativi

Esistono anche quadrati che sono magici sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione. Il più piccolo ha ordine 8, la costante additiva è 600 e quella moltiplicativa addirittura 67.463.283.888.000 (poco meno di 70.000 miliardi!).

#### C - Quadrati bimagici e trimagici

La fantasia non ha limiti: si è pensato anche a quadrati magici che rimangono tali se tutti i numeri che li compongono vengono elevati alla seconda. Si tratta, per l'appunto, dei *quadrati bimagici*.

Il più piccolo ha ordine 8 e somme magiche 260 e 11.180, rispettivamente per i numeri e per la loro seconda potenza:

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

Per completezza d'informazione, aggiungiamo che qualcuno si è preso la briga di lavorare anche sui *quadrati trimagici* (quadrati che rimangono magici se i numeri vengono elevati alla seconda e alla terza potenza).

Il più piccolo di questi quadrati ha ordine 12 e costanti magiche rispettivamente di 870, di 83.810 e di 9.082.800.

#### D - Quadrati magici di numeri primi

Sono stati studiati anche quadrati magici composti esclusivamente da numeri primi; il più piccolo, di ordine 3 e somma magica 111, è il seguente:

67	1	43
13	37	61
31	73	7

#### Il quadrato magico del "Sator"

Non si può concludere la trattazione sui quadrati magici senza accennare a un altro tipo di quadrato, questa volta di tipo letterale.

Si tratta del celeberrimo quadrato detto "*del Sator*", che riporta una scritta doppiamente palindroma, ossia leggibile indifferentemente da sinistra, da destra, dall'alto e dal basso:

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Questo quadrato è visibile su un numero sorprendentemente vasto di monumenti sparsi in tutta Europa, dalle rovine di Cirencester (Inghilterra) a Oppède (Francia) a Santiago di Compostela (Spagna).

In Italia il quadrato "del Sator" si trova, tra le altre località, su un lato del Duomo di Siena e

nella Certosa di Trisulti (FR). Ma quello più celebre (e più antico) fu rivenuto nel 1925, inciso su una colonna degli scavi di Pompei; da qui il nome di "*latercolo pompeiano*" con cui spesso è citato.

La frase riportata dal quadrato è di dubbia interpretazione, anche perché non si tratta di latino "puro". Qualcuno ha proposto una interpretazione letterale del tipo "il seminatore Arepo (nome proprio) tiene con cura le ruote".

Ma pare molto più probabile che il seminatore di cui si parla sia un riferimento religioso al Creatore; segnaliamo solo due tra le numerose traduzioni che sono state elaborate:

"Il seminatore, sul suo carro (*arepo*) tiene le opere del creato" oppure "Il seminatore con il suo carro dirige con cura le ruote (nel senso di sfere celesti)".

Ancora, è stata suggerita l'ipotesi di un riferimento all'Apocalisse, osservando che le lettere del quadrato possono comporre una croce con la scritta "PATERNOSTER" che si incrocia sulla lettera N. Avanzano 2 "A" e 2 "O" che, messe ai quattro estremi della croce, indicherebbero l'alfa e l'omega, ossia il principio e la fine.

In questo caso, il quadrato sarebbe in realtà una croce dissimulata, un sigillo nascosto in uso tra i primi cristiani ai tempi delle persecuzioni.

#### Cubi magici

Tornando ai quadrati numerici, è naturale chiedersi cosa succede passando dal piano allo spazio tridimensionale. Sono stati così analizzati i *cubi magici*, cubi NxNxN con somma costante per tutte le righe, le colonne e le diagonali (sia quelle sul piano, sia quelle spaziali).

Ovviamente, i cubi magici costituiscono un problema assai più complesso rispetto ai quadrati, tanto che solo nel 2003 - dopo oltre un secolo di vane ricerche da parte dei matematici - è stato dimostrato che il più piccolo cubo magico possibile è di ordine 5 e ha costante magica 315. Per  $N > 5$  è sempre possibile costruire cubi magici e la costante magica è data da una formula assai simile a quella dei quadrati:  $(N^4+N) / 2$ .

Ma non basta: c'è anche qualcuno che, per complicarsi un po' la vita, ha provato a salire ancora, dalla terza alla quarta dimensione, alla ricerca del più piccolo ipercubo magico.

E' stato dimostrato che si tratta di un ipercubo di ordine 16 e con somma magica 524.296.



## Altre figure magiche

Sulla falsariga di quanto appena visto per i quadrati, è possibile costruire altre figure geometriche variamente “magiche”.

In particolare, il ben noto giornalista e matematico Martin Gardner, riferimento obbligato per tutti gli appassionati di matematica ricreativa, trattò nei suoi articoli su “*Scientific American*” il caso degli esagoni magici e delle stelle magiche.

Per brevità, si ritiene opportuno non affrontare questo argomento nel presente testo e riservarlo, eventualmente, per successivi articoli.

## Bibliografia

### Quadrati magici in generale

GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici (vol. 2)*, Sansoni 1968

DANESI M., *Labirinti, quadrati magici e paradossi logici*, Dedalo 2006

PEIRETTI F., *La grande avventura matematica dei quadrati e dei cubi magici* su Polimath, progetto del Politecnico di Torino  
<http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/>

CIPRIANI M., *Quadrati magici in Antiqua historia*  
<http://www.antiqua.altervista.org/quadrati.html>

### Quadrato “del Sator”

CAMMILLERI R., *Il quadrato magico*, Rizzoli, 1999

Lopardi M., *Il quadrato magico del Sator*, Hoepli, 2006

### Cubi magici

TRUMP W., *The Successful Search for the Smallest Perfect Magic Cube*

<http://www.trump.de/magic-squares/magic-cubes/cubes-1.html>

### Esagoni magici

GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici (vol. 5)*, Sansoni 1976

## 138. MOLTIPLICARE I NUMERI CON LA GEOMETRIA

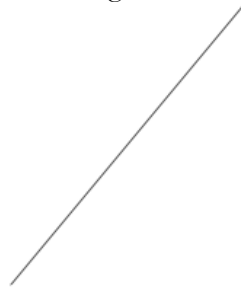
Luca Lussardi

Technische Universität Dortmund,  
Vogelpothsweg 87 44227, Dortmund (Germania)

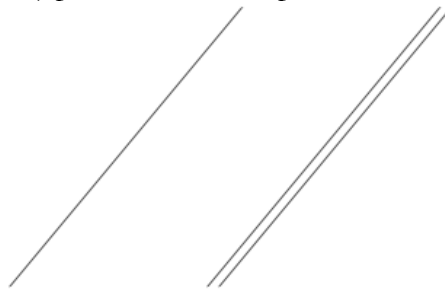
Non c'è certo da stupirsi se oggi troviamo relazioni tra operazioni matematiche e costruzioni geometriche; men che meno lo stupore potrebbe arrivare quando si riscontrano relazioni tra aritmetica e geometria negli antichi, poiché, come è ben noto, già negli antichi greci aritmetica e geometria viaggiavano su binari paralleli, e l'una serviva all'altra, anche se la geometria restava il sapere principale. Ma qui non parliamo dei soliti greci, bensì dei cinesi. Già, perché pare che proprio agli antichi cinesi venga attribuito il cosiddetto metodo della *moltiplicazione grafica*, il quale è sostanzialmente un algoritmo di natura geometrica che permette di moltiplicare due interi assegnati, dei quali almeno uno è maggiore o uguale a 10, costruendo opportuni fasci di rette parallele. Il metodo di per sé funzionerebbe anche con fattori entrambi minori di 10 come si vedrà, ma il procedimento, in tal caso, richiede, per costruzione, di saper già il risultato della moltiplicazione, per cui appare inutile.

### Esempi

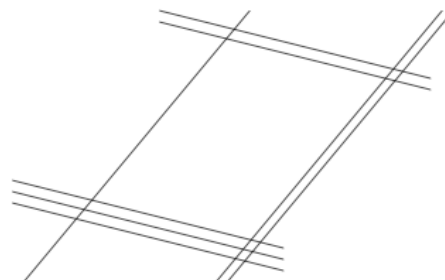
**Esempio 1.1.** Supponiamo di dover effettuare la moltiplicazione  $12 \times 32$ . Cominciamo col primo fattore: 12. Le sue due cifre sono 1 e 2. Allora disegniamo una retta (cifra 1 di 12):



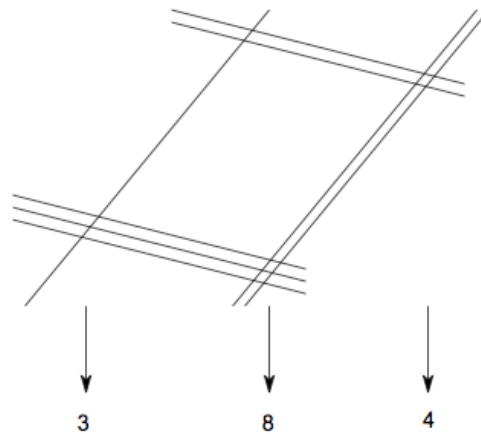
Ora disegniamo 2 rette (cifra 2 di 12) parallele alla retta precedentemente disegnata:



Costruiamo ora un sistema di rette parallele analogo a quello precedente, ma considerando il secondo fattore (32) e posizionandole trasversali rispetto al sistema precedente; precisamente:

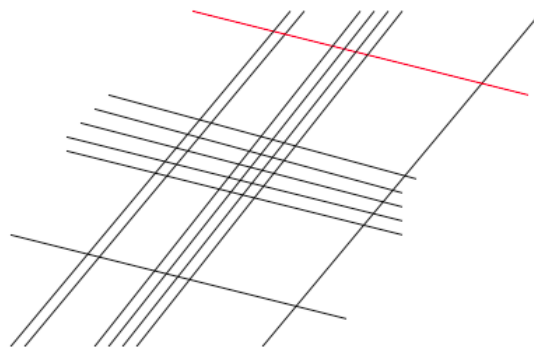


Ora contiamo in modo opportuno i punti di intersezione come la prossima figura mostra:

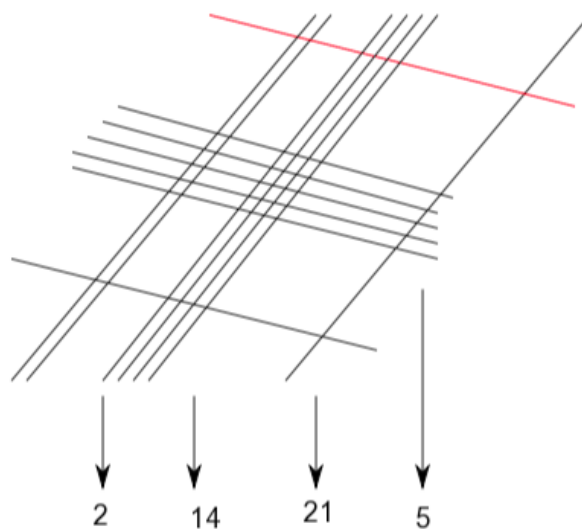


Leggiamo quindi il risultato:  $12 \times 32 = 384$ .

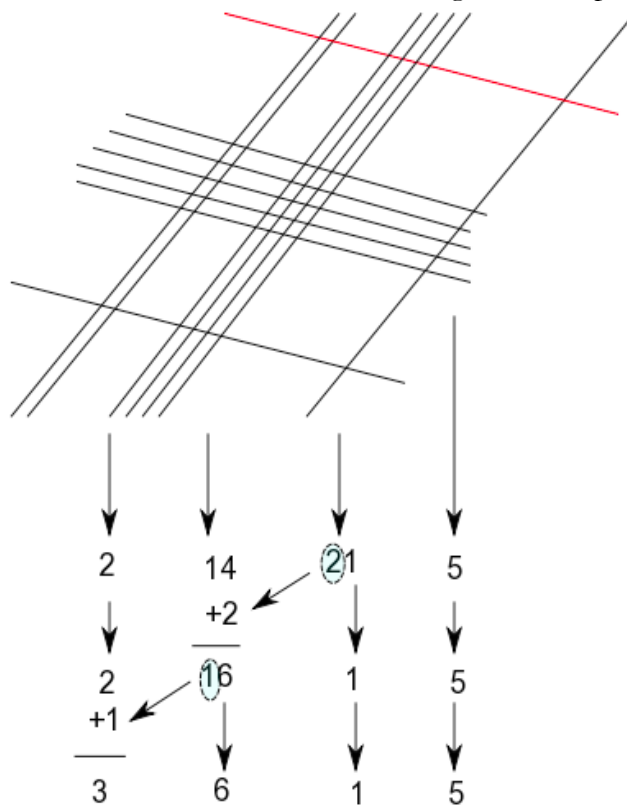
**Esempio 1.2.** Facciamo un secondo esempio nel quale i due fattori non hanno lo stesso numero di cifre; ad esempio calcoliamo  $241 \times 15$ . Procediamo come nell'esempio precedente considerando il primo fattore, 241, e disegnando quindi tre gruppi di rette parallele, rispettivamente 2 rette, 4 rette e 1 retta. Disegniamo poi il secondo gruppo di rette tra loro parallele ma trasversali rispetto alle precedenti, relative al secondo fattore, 15. Per dare alla figura la stessa simmetria come nell'esempio precedente, aggiungiamo una terza retta parallela alle ultime rette considerate; la coloriamo in rosso per ricordarci che non va contata. Otteniamo la seguente figura:



Procediamo quindi come nell'esempio precedente contando le intersezioni e sommandole per colonne, ricordando che la retta rossa in realtà non esiste. Otteniamo:

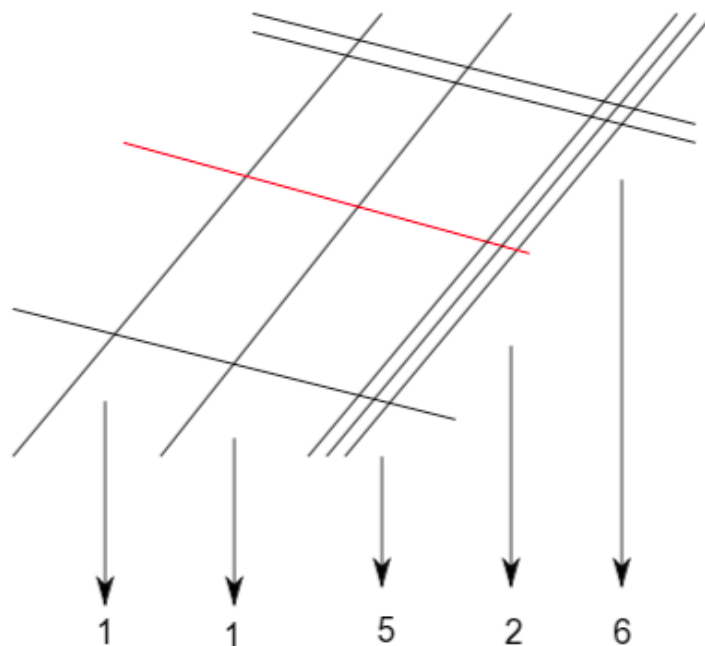


Ora si tratta di spostare le decine man mano verso sinistra; la figura si completa come segue:



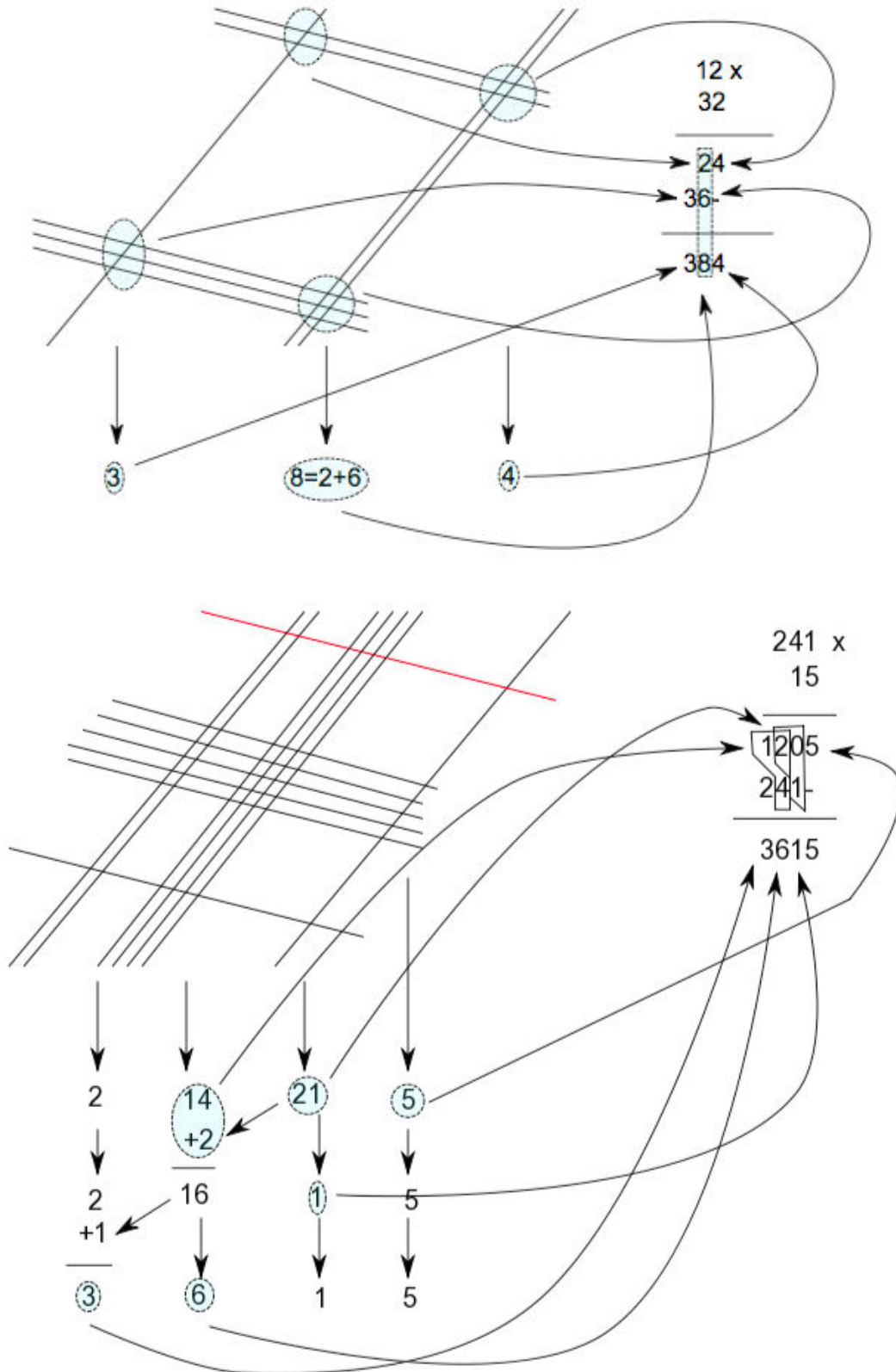
Si ha dunque  $241 \times 15 = 3615$ .

**Esempio 1.3.** Come ultimo esempio riportiamo il caso di due numeri che contengono almeno uno zero; in tal caso coloriamo di rosso la retta corrispondente in modo tale da ricordarci che non vanno contate intersezioni, ma stavolta, al contrario delle rette fittizie del caso precedente, lo zero derivante dalla retta di colore rosso va considerato. Mostriamo quindi che  $113 \times 102 = 11526$ .



### Confronto con l'usuale regola in colonna

E' giunta l'ora delle spiegazioni. Questo curioso metodo ha in realtà una spiegazione precisa molto semplice, cosa che posticipiamo alla prossima sezione. Per non appesantire la trattazione diamo in questa sezione una dimostrazione intuitiva confrontando alcune delle figure precedentemente con l'usuale algoritmo della moltiplicazione in colonna.





### Una dimostrazione rigorosa

Diamo, per concludere, una motivazione rigorosa della regola grafica illustrata per esempi (vedi [1]). Siano da moltiplicare due numeri interi  $x$  e  $y$ . Sviluppiamo  $x$  e  $y$  in base 10 ponendo

$$x = \sum_{i=0}^n \alpha_i 10^i, \quad y = \sum_{j=0}^m \beta_j 10^j$$

con  $\alpha_i, \beta_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . A meno di scegliere qualche coefficiente nullo, possiamo supporre che sia  $m=n$ , e che quindi sia

$$x = \sum_{i=0}^n \alpha_i 10^i, \quad y = \sum_{j=0}^n \beta_j 10^j.$$

In tali condizioni si ha facilmente l'espressione del prodotto  $xy$  dato da:

$$xy = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} 10^k.$$

Osserviamo che la scrittura precedente non è la rappresentazione in base 10 del numero  $xy$ ; infatti non è detto che le quantità

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} 10^k$$

siano tra 0 e 9. Tali quantità sono esattamente le somme che, nella regola grafica illustrata, si effettuano lungo le colonne della figura costruita. Tali valori vanno quindi semplicemente sommati tra loro come la formula per il prodotto  $xy$  afferma, e come effettivamente si procede nella moltiplicazione grafica.

### Riferimenti bibliografici

[1] N. Fiorentini, *La moltiplicazione grafica: dimostrazione algebrica e altre curiosità*, 2009.

[2] <http://www.youtube.com/watch?v=QVnK4psCV1E>

<http://www.youtube.com/watch?v=0SqRPf300J0>

# 139. IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO CLASSICO, STORIA E MITO

Guglielmo Di Meglio<sup>1</sup>

## Sunto

Il celeberrimo *problema isoperimetrico* è il seguente: “Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, determinare quelle aventi area massima.” Tale problema ha origini nella Matematica greca antica e venne probabilmente formulato per la prima volta intorno al IX secolo a.C.; gli stessi greci “indovinarono” che le soluzioni dovessero essere i cerchi. Pur essendo la soluzione del problema “intuitivamente nota” sin dall’antichità, molti illustri matematici hanno lavorato per dare basi rigorose a tale intuizione, riuscendoci solo a partire dalla fine del 1800. In questo articolo si cerca di ricostruire la storia del problema isoperimetrico, si compendiano varie leggende in cui esso viene citato e si fornisce un resoconto dei tentativi classici e moderni verso la sua soluzione.

2010 Mathematics Subject Classification: 49-03, 01A05, 51M16

## 1. La nascita del problema isoperimetrico: la storia

È cosa abbastanza nota che la matematica, e la geometria in particolare, trasse le sue origini da bisogni concreti delle popolazioni, come dividere in modo equo terreni tra cittadini, stimare la grandezza di isole, città, territori prima sconosciuti od innalzare monumentali costruzioni. Così fu per la matematica egizia e babilonese, e nulla fa pensare che la matematica greca abbia fatto eccezione a tale regola. Ad esempio, quale criterio usare per stimare la vastità di un’isola appena scoperta o la superficie occupata da una città? A molti esploratori dell’antichità parve una buona idea dedurre la grandezza di un’isola dal tempo impiegato per circumnavigarla, oppure assumere come estensione di una città il perimetro delle sue cinta murarie. Analogamente, in molte comunità greche (del tipo che oggi si direbbero comuniste), era d’uso dividere terreni in appezzamenti dallo stesso perimetro prima di distribuirli tra i membri. Era tale scelta una buona scelta? Beh, no! Infatti i geometri, una volta intuito come misurare un’area, si accorsero che misurare il perimetro non era un criterio efficiente per stabilire l’estensione di una superficie (fosse essa un’isola, una città, un appezzamento o una qualsiasi figura geometrica), poiché figure di ugual area potevano benissimo avere perimetri estremamente differenti e, viceversa, figure con ugual perimetro potevano avere aree molto diverse. Valga il seguente:

**Esempio 1:** s’immagini di prendere un quadrato ABCD di lato  $\ell$ , di modo che la sua area sia  $A := A(ABCD) = \ell^2$  ed il suo perimetro sia  $P(ABCD) = 4\ell$ . Fissato un numero naturale  $N$ , si costruisca un rettangolo A'B'C'D' di altezza  $h = \frac{\ell}{N}$  e di base  $b = \frac{2N-1}{N}\ell$  (Fig. 1): evidentemente il rettangolo così costruito ha perimetro:

$$P(A'B'C'D') = 2(b + h) = 2\left(\frac{1}{N} + \frac{2N-1}{N}\right)\ell = 4\ell = P(ABCD)$$

però l’area di A'B'C'D' è:

$$A' := A(A'B'C'D') = \left(\frac{2N-1}{N}\right)\ell^2$$

e con un semplice calcolo si vede che  $A' < A$ . Si noti che più si sceglie grande il numero  $N$ , tanto più l’area  $A'$  del rettangolo A'B'C'D' diviene piccola rispetto all’area  $A$ ; anzi, si può dire che è sempre possibile determinare un rettangolo A'B'C'D' avente lo stesso perimetro del quadrato ABCD e con area  $A'$  “piccola a piacere”.

<sup>1</sup> Dottorando in Scienze Matematiche XXIV ciclo, Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, via Cintia, Monte S. Angelo 80126 Napoli.  
Moderatore di [www.matematicamente.it/forum](http://www.matematicamente.it/forum); email: gugo82@excite.it

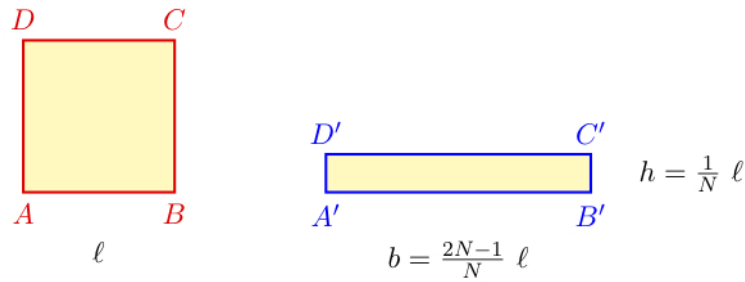


Figura 1: costruzione dell'Esempio 1

Tali osservazioni, nonostante sembrassero paradossali alle persone ordinarie, sicuramente ruppero nel paniere più di un uovo, giacché molti governanti delle comunità citate sopra s'erano guadagnati reputazione d'uomini onesti e probi distribuendo agli altri appezzamenti con lo stesso perimetro, ma con minor area, di quelli che tenevano per sé<sup>2</sup>. Quanto appena detto giustifica, sul lato pratico, perchè le questioni geometriche riguardanti le aree interessassero molto i matematici greci<sup>3</sup>; tra queste trovarono posto alcune questioni strettamente legate alle osservazioni fatte in precedenza, come il cosiddetto *problema isoperimetrico*:

*Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, determinare quelle aventi area massima*

ed il suo “duale”:

*Tra tutte le figure piane aventi la stessa area, determinare quelle aventi perimetro minimo.*

Si osservi che tali problemi sono gli unici ad essere ben posti: infatti l'Esempio 1 mostra che non ha senso chiedersi quali siano le figure d'area minima tra quelle aventi perimetro assegnato; inoltre, con una ragionevole variazione, si prova che è altrettanto privo di senso chiedere di determinare le figure di perimetro massimo tra quelle aventi la stessa area.

## 2. La nascita del problema isoperimetrico: i miti

**Didone e la fondazione di Cartagine.** Molto più immersa nel mito è l'origine di un altro problema classico, collegato e molto simile al problema isoperimetrico, il cosiddetto *problema di Didone*. Didone fu la mitica fondatrice della città di Cartagine, della quale si hanno notizie da alcuni storici romani<sup>4</sup>; tuttavia il resoconto più noto delle vicende che la videro protagonista è quello messo in poesia da Virgilio in [V, libro I, versi 335-368].

La principessa fenicia Didone fuggì con alcuni fedelissimi dalla città natale di Tiro dopo aver scoperto che il re Pigmalione (suo fratello) aveva assassinato suo marito Sicheo; dopo un lungo viaggio approdò sulle coste dell'Africa settentrionale (in Libia). Qui contattò il re locale Iarba per l'acquisto di un appezzamento di terra su cui costruire una nuova città: egli, per tutta risposta, le affidò una pelle di toro e le disse che poteva prendere tanto terreno quanto tale pelle potesse racchiuderne<sup>5</sup>. Virgilio non descrive dettagliatamente come Didone risolse il problema della pelle di toro; tuttavia la tradizione tramanda che la principessa, senza perdersi d'animo, escogitò un astuto stratagemma per accaparrarsi un terreno quanto più vasto fosse possibile, includente la collina su cui costruire la rocca. Didone ordinò che la pelle fosse tagliata in listarelle sottili, le quali fossero legate insieme ai capi per formare una lunga corda. Con tale corda, la principessa fece congiungere le rive dai lati opposti dell'altura, acquisendo così la proprietà della collina ed un comodo sbocco sul mare; inoltre viene specificato che Didone fece disporre la corda a forma di semicerchio in modo da racchiudere la maggior area possibile.

<sup>2</sup> In proposito Heat [H] cita come fonte i *Commenti al primo libro degli “Elementi” di Euclide* di Proclo.

<sup>3</sup> Basti pensare a quanti teoremi sulla misura delle aree e sull'equivalenza di figure piane sono arrivati fino a noi: chiunque ricorda il teorema di Pitagora, ma sono notevolissimi anche alcuni scritti di Archimede, come *Sulla quadratura della parabola* e *Sulla misura del cerchio*.

<sup>4</sup> Ne dà notizia Marco Giuniano Giustino, che cita uno scritto precedente di Gneo Pompeo Trogo.

<sup>5</sup> Per dirla col sommo poeta: *mercatique solum [. . .] taurino quantum possent circumdare tergo*.



**Figura 2:** Ricostruzione di Cartagine; si noti la forma vagamente semicircolare della città.

Questo racconto, oltre a mettere in luce tutta l'astuzia della futura regina di Cartagine, ebbe gli ingredienti necessari ad alimentare la curiosità dei matematici: infatti porta con sé la questione del perché Didone avesse scelto proprio la forma semicircolare per delimitare quella che riteneva essere la maggior superficie possibile. Ecco così spiegati l'origine ed il nome del *problema di Didone*:

*Tra tutte le curve della stessa lunghezza aventi estremi su una retta assegnata, determinare quelle che delimitano con la retta la figura piana d'area maggiore*

e del suo "duale":

*Tra tutte le curve aventi estremi su una retta assegnata che delimitano con la retta figure piane della stessa area, determinare quelle che hanno lunghezza minore.*

Con costruzioni simili a quella relativa all'Esempio 1 si può provare che tali problemi sono gli unici ad essere *ben posti*. Inoltre c'è una stretta correlazione tra il problema di Didone ed il problema isoperimetrico: infatti, se  $\Gamma$  è una curva che risolve il problema di Didone, allora la figura che si ottiene riflettendo rispetto alla retta assegnata quella determinata da  $\Gamma$  è necessariamente una soluzione di un problema isoperimetrico; parimenti, se si taglia a metà con una retta una figura che risolve il problema isoperimetrico si ottiene una figura il cui bordo curvo è necessariamente la soluzione di un problema di Didone.

**La ricompensa per Orazio Coclite.** Altri problemi, simili ai precedenti, si trovano narrati in diversi testi dell'Antichità e del Medioevo. Il primo che viene alla mente è quello che si trovò ad affrontare Orazio Coclite quando ebbe a ritirare il premio assegnatogli dalla gente di Roma per la sua eroica difesa della città. Tito Livio<sup>6</sup> racconta che, quando i repubblicani estromisero Tarquinio il Superbo dal potere, gli Etruschi mossero contro Roma guidati da Porsenna. L'esercito etrusco arrivò fino al Gianicolo ed avrebbe potuto entrare in città attraversando il Tevere sul ponte Sublicio. Visto tale pericolo, Orazio Coclite ordinò ai soldati di abbattere il ponte mentre egli stesso, con l'aiuto di un manipolo, avrebbe tenuto a bada gli avversari. La battaglia infuriò finché i contendenti furono sorpresi dal frastuono provocato dal crollo del ponte e dalle urla dei soldati romani; approfittando di quegli attimi concitati, Coclite si gettò nel fiume e, nonostante fosse bersagliato dagli arcieri nemici e tratto a fondo dal peso della propria armatura, nuotando riuscì ad arrivare vivo sull'altra sponda del Tevere. Grati per aver salvato la città dall'invasione, i romani dedicarono a Coclite una statua; inoltre, volendogli assegnare una ricompensa meno simbolica, pensarono di lasciargli un terreno. Tuttavia la cittadinanza non stabilì quanto tale terreno dovesse esser grande: l'unica clausola imposta a Coclite fu che egli avrebbe potuto prendere possesso di un appezzamento avente perimetro tracciabile con l'aratro in un'unica giornata di lavoro<sup>7</sup>. Evidentemente anche il problema di aratura che si trovò ad affrontare Orazio Coclite era di

<sup>6</sup> L'intero racconto si trova in [Ti, libro II, capoversi I-X]; in particolare, l'episodio riguardante Coclite si legge al capoverso X. Nello stesso libro si racconta anche un altro notissimo episodio: quello di Muzio Scevola.

<sup>7</sup> Livio dice: *Grata erga tantam virtutem civitas fuit: statua in comitio posita; agri quantum uno die circumaravit datum.*

tipo isoperimetrico: egli opportunisticamente avrebbe voluto massimizzare l'area dell'appezzamento, ma era costretto a sottostare al vincolo dell'unica giornata di lavoro (che, a conti fatti, si traduce in un vincolo sulla lunghezza dell'arco tracciato dall'aratro)<sup>8</sup>. Ecco che, nuovamente, un problema di tipo isoperimetrico è tradizionalmente legato alle dimensioni d'un appezzamento di terreno... E non è l'ultima volta!

**L'astuzia di Iwar Lodbrok.** Sorprendentemente anche Saxo Grammaticus, letterato danese del XII secolo, narra una storia molto simile a quella di Didone a proposito di Iwar, figlio del leggendario re vichingo Ragnar Lodbrok<sup>9</sup>. La leggenda narra che Ragnar, condannato a morte dopo essere stato catturato in battaglia, venne gettato in una fossa piena di serpenti velenosi così come ordinato dal re Ella di Northumbria. I quattro figli di Ragnar cercarono di vendicare la morte del padre invadendo il regno di Ella, però furono costretti a ritirarsi a causa della superiorità numerica dell'esercito degli Angli. Il giovane Iwar si recò da Ella per chiedere un *guidrigildo* per l'assassinio del padre<sup>10</sup>; come risarcimento venne stabilito che Iwar acquisisse la proprietà di tanta terra quanta ne potesse essere racchiusa da una pelle di bue. Proprio come Didone, Iwar ricavò una lunga corda dalla pelle e la distese al suolo in *forma di circonferenza*, delimitando così un'area vastissima di cui acquisì la proprietà: su tale terreno Iwar fondò una nuova città (che alcune fonti identificano con York). Infine, dopo alcuni anni, Iwar ed i suoi fratelli riuscirono a vendicare la morte del padre, catturando Ella e facendolo morire in atroce supplizio.

Quelle appena descritte sembrano essere le leggende più note riguardo il problema isoperimetrico. È notevole il fatto che alcune di esse sembrano avere un carattere marcatamente didattico: ascoltando queste storie, anche chi non conosceva la geometria riusciva a capire che la forma circolare o semicircolare era la migliore possibile per fondare città grandi o delimitare grandi spazi.

## Il teorema isoperimetrico e le sue dimostrazioni: un breve resoconto

Il *problema isoperimetrico* rimase a lungo tale: invero, una soluzione rigorosa è stata trovata solo alla fine del 1800, circa duemilacinquecento anni dopo la sua formulazione. Ciò ne fa uno dei problemi più longevi nell'intera storia della Matematica.

**Le dimostrazioni geometriche.** Le prime congetture circa le soluzioni del problema hanno origine antica, sicuramente precedente alla storia di Didone; tuttavia i primi risultati nella determinazione delle soluzioni sono da attribuirsi al matematico greco Zenodoro (ca. 200–140 a.C.) il quale, con ragionamenti di tipo geometrico sintetico, riuscì a dimostrare che il cerchio ha area maggiore di ogni poligono (regolare o no) avente lo stesso perimetro. Un resoconto dettagliato del metodo di Zenodoro può essere reperito in [H, pagg. 209–212], e [P]. Sebbene tale risultato fosse tutt'altro che completo, esso portò i geometri a formulare il cosiddetto teorema isoperimetrico classico:

*“Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, il cerchio è quella d'area massima”*

I ragionamenti di Zenodoro segnarono profondamente il modo di approcciare il problema isoperimetrico, tant'è che si trovano ripetuti più o meno fedelmente in tutte le discussioni riguardo l'isoperimetria fino alla fine del 1700<sup>11</sup>. Il primo matematico a dire qualcosa di veramente innovativo sulla questione fu Jakob Steiner (1796–1863), il quale inventò alcune tecniche per dimostrare che ogni figura d'assegnato perimetro realizzante l'area massima è necessariamente un cerchio. Le tecniche inventate da Steiner si basavano su un semplice principio: detta E una figura piana d'area massima, se E non è un cerchio si può determinare una seconda figura F che abbia stesso perimetro di E ma area maggiore. Quindi è evidente che nessuna figura piana tranne il cerchio può dare il massimo all'area, quando il perimetro venga fissato. Tuttavia, come fece notare Dedekind (1831–1916), i ragionamenti di Steiner lasciarono aperta la

<sup>8</sup> Per una discussione riguardo la soluzione del problema di Orazio Coclite (e quello di Didone) si può leggere [Th], pagg. 571 e seguenti.

<sup>9</sup> Si veda [S, libro IX, capoversi 314-315].

<sup>10</sup> Il *guidrigildo* (*Wergeld* in germanico o *compositio* in latino) era un provvedimento, introdotto nel 643 d.C. con l'Editto di Rotari, che prevedeva per la famiglia della vittima un risarcimento in denaro o beni materiali da parte del colpevole del reato di omicidio e stabiliva la fine della faida.

<sup>11</sup> Vale la pena di ricordare i lavori di Kepler, Galilei, Riccati, Simpson e Legendre.



questione dell'esistenza di qualche soluzione al problema isoperimetrico<sup>12</sup>. L'argomento di Steiner fu perfezionato intorno al 1916 da W. Blaschke (1885–1962), il quale dimostrò l'esistenza di una figura d'area minima usando un teorema di compattezza nella classe delle figure convesse<sup>13</sup> (oggi noto come principio di selezione di Blaschke). Altre dimostrazioni geometriche erano basate su stime del cosiddetto “deficit isoperimetrico” mediante funzioni dipendenti dalla geometria delle figure e nulle in corrispondenza di cerchi; il primo a fornire una dimostrazione di questo tipo fu T. Bonnesen (1873–1935). Il teorema isoperimetrico classico può essere rappresentato mediante la relazione:

$$P^2(E) \geq 4\pi A(E) \quad (\text{DI})$$

detta *disuguaglianza isoperimetrica classica*<sup>14</sup>, e la differenza tra primo e secondo membro di (DI):

$$\Delta(E) = P^2(E) - 4\pi A(E)$$

è detta *deficit isoperimetrico della figura E*. Chiaramente per dimostrare il teorema isoperimetrico occorre e basta provare che per ogni E risulta  $\Delta(E) \geq 0$  e che l'uguaglianza si ha se e solo se E è un cerchio. Ebbene, nel 1921 Bonnesen dimostrò che il deficit isoperimetrico di E è sempre non minore della quantità  $\alpha(E) := \pi^2(R-r)^2$ , in cui r ed R sono rispettivamente i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto in E<sup>15</sup>. Evidentemente la quantità  $\alpha(E)$  si annulla se e solo se  $R = r$ , ma in tal caso E è un cerchio di raggio r: quindi il teorema isoperimetrico segue immediatamente.

**Le dimostrazioni analitiche.** La questione dell'esistenza di soluzioni al problema isoperimetrico rimase aperta fino alla fine del 1800, quando cominciarono ad essere scoperte varie dimostrazioni dell'esistenza di figure massimizzanti l'area a perimetro assegnato. Il primato probabilmente spetta a Weierstrass (1815–1897), il quale propose una dimostrazione variazionale piuttosto generale dell'esistenza di figure di area massima<sup>16</sup>. Dopo di lui, Hurwitz (1859–1919) e Lebesgue (1875–1941) usarono la teoria delle serie di Fourier ed una disuguaglianza integrale (nota come *disuguaglianza di Wirtinger*) per raggiungere lo stesso scopo.

Un'altra dimostrazione dell'esistenza, ma limitata alle figure convesse, fu data da Minkowski (1864–1909), il quale sfruttò la *disuguaglianza di Brunn e Minkowski*, alcune formule di Steiner ed un'appropriata definizione di perimetro (un po' diversa da quella classica, ma che coincideva con essa per figure convesse aventi bordo “abbastanza liscio”). Intanto era cominciato il XX secolo e le idee di Lebesgue sulla *Teoria della Misura* avevano cambiato non poco il modo di approcciare le questioni riguardanti le aree ed i perimetri. Infatti, visto che la nozione di *misura secondo Lebesgue* consentiva di misurare l'area di molti più insiemi, alcuni dei quali dalle forme piuttosto bizzarre (in tal senso si comprese subito che la misura di Lebesgue è una potente generalizzazione del classico concetto d'area della Geometria elementare), si sentiva il bisogno di una nozione di perimetro altrettanto generale che consentisse di misurare la lunghezza anche dei bordi degli insiemi più bizzarri. La definizione di perimetro usata da Minkowski (cui s'è accennato in precedenza) andava bene per le figure convesse, però era del tutto inapplicabile alle figure bizzarre aventi area nel senso di Lebesgue. La questione di una buona definizione generale di

<sup>12</sup> Per capire bene il grosso gap tra la condizione necessaria determinata da Steiner e l'esistenza di qualche soluzione si mediti sulla seguente pseudo-dimostrazione della proposizione (evidentemente falsa): 1 è il più piccolo dei numeri in  $]0, 1]$ . Dim.: Fissato un numero  $x$  in  $]0, 1]$ , il numero  $x^2$  è in  $]0, 1]$  ed è chiaramente  $< x$ ; pertanto nessun  $x \neq 1$  può essere il minimo di  $]0, 1]$ . Da ciò segue che 1 è il minimo di  $]0, 1]$ .

<sup>13</sup> Una figura piana E è detta *convessa* se essa contiene il segmento congiungente una qualsiasi coppia di suoi punti.

<sup>14</sup> Sia D un cerchio avente lo stesso perimetro di E; il raggio di D evidentemente è  $\frac{1}{2\pi}P(E)$ , perciò l'area di D è data da  $\frac{1}{4\pi}P^2(E)$ . Quindi la relazione  $A(D) \geq A(E)$  (che rappresenta la tesi del teorema isoperimetrico) si può riscrivere al modo (DI).

<sup>15</sup> Cerchi di tal fatta esistono per ogni figura E, ma possono non essere unici; tuttavia i due numeri non negativi r, R sono sempre univocamente determinati.

<sup>16</sup> La dimostrazione venne data durante alcune lezioni alla Technische Universität Berlin e fu pubblicata postuma (nel settimo volume dell'opera omnia, edito nel 1927).

perimetro rimase aperta fino al 1953/54, quando Ennio De Giorgi (1928–1996) pubblicò due articoli definitivi su questo argomento: la definizione di De Giorgi riprendeva ed elaborava compiutamente le idee di Renato Caccioppoli (1904–1959), le quali erano state precedentemente snobbate dai recensori americani, e praticamente riconduceva il problema della definizione di perimetro alla possibilità di svolgere certi integrali per parti! Una volta in possesso della miglior definizione possibile di perimetro, nel 1958 De Giorgi dimostrò l'esistenza di soluzioni al *problema isoperimetrico generale*, ossia:

“Tra tutte le figure piane aventi perimetro di De Giorgi assegnato, determinare quelle aventi misura di Lebesgue massima”

ed adattò i ragionamenti di Steiner per dimostrare che le figure aventi misura di Lebesgue massima a perimetro fissato sono necessariamente cerchi. Anzi, a voler dirla tutta, la dimostrazione di De Giorgi era valida in uno spazio avente dimensione qualsiasi (ma finita!) sicché, in generale, le sfere N-dimensionali massimizzano la misura N-dimensionale di Lebesgue tra tutti gli insiemi aventi lo stesso perimetro di De Giorgi N-dimensionale.

**Altre dimostrazioni, elementari e no.** Tutte le dimostrazioni che precedono quella generale di De Giorgi sono classiche e si possono trovare dettagliatamente compendiate in [P]; la dimostrazione di De Giorgi, che fa uso di strumenti molto sofisticati, si può trovare ad esempio in [F]<sup>17</sup>. Tuttavia, a partire dal 1958, sono state trovate molte altre dimostrazioni del teorema isoperimetrico, alcune elementari, altre no. Tra quelle elementari pare doveroso citarne almeno due. La prima è quella di tipo geometrico presentata in [La]: essa si basa su una tecnica di dissezione e funziona per qualunque figura di perimetro finito. L'idea fondamentale è che si può sempre trovare un modo di suddividere in tanti pseudo-triangolini una figura convessa E ed un cerchio D d'ugual perimetro, in modo che ogni pseudo-triangolino contenuto in E abbia stessa base ed area minore del corrispondente pseudo-triangolino in D. La seconda, molto breve ed immediata, è quella di tipo analitico reperibile in [Lx]: essa si basa sull'uso della formula di Green e di disuguaglianze elementari, cosicché può essere compresa da chiunque conosca i rudimenti dell'Analisi. Tuttavia la sua validità è limitata al caso di insiemi col bordo “abbastanza liscio”. Tra quelle non elementari è sicuramente da ricordare quella proposta nel 1981 da Gromov (nato 1943), basata su un'idea di H. Knothe (1908–1978) del 1957, poiché è la prima dimostrazione in cui viene usata la teoria del trasporto ottimale<sup>18</sup>.

### Appendice: una nota semiseria sulla leggenda di Didone

Ho descritto la leggenda di Didone all'inizio del presente articolo. Scrivendo dell'episodio, una delle domande che mi è immediatamente venuta in mente (prima ancora delle questioni matematiche) è: “Ammesso che la leggenda conservi un fondo di verità, quanto era grande l'insediamento originario che diede vita alla città di Cartagine?”. Per risolvere il problema, innanzitutto serve sapere quanto può essere grande (almeno in media) una pelle di toro. Cercando in Rete, non sono stato in grado di trovare nemmeno il più piccolo cenno sulla questione: insomma, non c'è nessuna pelle di mucca standard esposta al *Bureau international des poids et mesures* di Sèvres e nemmeno c'è alcun vincolo su tali dimensioni tra i parametri di Maastricht! Perciò ho deciso di assumere unilateralmente che la pelle del toro di Didone misurasse  $1.5 \times 2.5$  mq. Supponendo che, con la loro infinita pazienza (ed i mezzi tecnici dell'epoca), le donne fenicie fossero in grado di tagliare listarelle di cuoio spesse 0.5 cm, dalla pelle si ricavarono 300 listarelle lunghe 2.5 m le quali, disposte le une accanto alle altre, avrebbero formato una striscia di 750 m; tuttavia, nel legarle insieme, si perse qualcosa in lunghezza: convenendo di quantificare in 5 cm la perdita dovuta ai nodi alle estremità (2% della lunghezza totale di ogni listarella), la striscia ottenuta da Didone avrebbe potuto essere lunga ben  $P = 735$  m. Assumendo P come perimetro di una semicirconferenza e ricordato che gli antichi non avevano il  $\pi$  moderno (conforme agli standard ISO-9000), ma approssimavano a  $\pi_a = 3$  il rapporto tra diametro e circonferenza, il raggio della semicirconferenza tracciata da Didone sulla spiaggia avrebbe potuto essere  $r = P/\pi_a = 245$  m. L'area di una

<sup>17</sup> N.B: questo è un riferimento tecnico.

<sup>18</sup> Detto rozzamente, il Trasporto Ottimale è assimilabile ad una versione molto generale del teorema di cambiamento di variabili negli integrali.

semicirconferenza di raggio  $r$  per gli antichi era  $A = \frac{\pi_a}{2} r^2 \approx 90000$  mq, sicché una stima per la superficie occupata dall'insediamento originario di Cartagine è 9 ettari. Considerando che un campo da calcio moderno occupa una superficie pari a circa 0.6 ettari, alla fine di questo piccolo conticino si può dire che l'insediamento punico avrebbe potuto esser largo quanto 15 campi da calcio... Mica male! Però tutto dipende pesantemente dall'approssimazione usata per le dimensioni del toro! Quindi, se avete un amico conciatore, informatevi sulle dimensioni di una pelle di toro e fatemi sapere se ho usato un'approssimazione verosimile.

### Riferimenti bibliografici

[Be] Beda il venerabile (ca. 731), *Historia ecclesiastica gentis Anglorum*

Un'edizione del 1838 è reperibile al seguente url

<http://ia351428.us.archive.org/0/items/bedehistoriaecc00bedegoog/bedehistoriaecc00bedegoog.pdf>

[F] Fusco, N. (2004), *The classical isoperimetric theorem*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, vol. 71, n. 4.

[H] Heath, T. (1921), *A history of Greek Mathematics*, vol. II, Clarendon Press, Oxford

reperibile al seguente url

<http://ia351411.us.archive.org/2/items/ahistorygreekma00heatgoog/ahistorygreekma00heatgoog.pdf>

[La] Lawlor, G. (1998), *A new area maximization proof for the circle*, *Mathematical Intelligencer*, vol. 20, n. 1.

[Lx] Lax, P. D. (1995), *A short path to the shortest path*, *The American Mathematical Monthly*, vol.102, n.2 reperibile al seguente url

<http://www.myoops.org/twocw/nctu/upload/fourier/supplement/short%20path.pdf>

[P] Porter, T. I. (1931), *A history of the classical isoperimetric problem*, in Bliss, G.A. & Graves, L.M.

(1933), *Contributions to the Calculus of Variations* (1931-1932), University of Chicago Press, Chicago, IL

reperibile al seguente url: <http://math.arizona.edu/~dido/porter1933.pdf>

[S] Saxo Grammaticus (ca. 1200), *Gesta Danorum* (un'edizione del 1894 è reperibile al seguente url:

<http://ia341337.us.archive.org/1/items/cu31924089406593/cu31924089406593.pdf>).

[Th] Thomson, W. Lord Kelvin (1894), *Popular Lectures and Addresses*, vol. II, MacMillan, London

reperibile al seguente url:

<http://ia341334.us.archive.org/0/items/popularlectures07kelvgoog/popularlectures07kelvgoog.pdf>

[Ti] Tito Livio (ca. 20 a.C.), *Storia di Roma*, trad. G. Reverdito (1999), Garzanti, Milano.

[V] Publio Virgilio Marone (ca. 24 a.C.), *Eneide*, trad. C. Vivaldi (2001), Garzanti, Milano.

## 140. Calcolo di traiettorie lunari mediante metodi analitici approssimati

Marco Giancola

giancolamarco@libero.it

Studiare il moto di un veicolo spaziale diretto verso la Luna equivale a risolvere il problema ristretto dei tre corpi (Terra, Luna, veicolo), il quale non ammette soluzione analitica. Pertanto, una traiettoria lunare può essere calcolata con sufficiente precisione solamente mediante integrazione numerica delle equazioni del moto.

La procedura usuale consiste nello scegliere le condizioni iniziali, ossia la posizione iniziale del veicolo, detta anche *punto di iniezione*, e la sua velocità iniziale (rispetto al centro della Terra), rappresentate rispettivamente dai vettori  $\vec{r}_0$  e  $\vec{V}_0$ , e nel determinare poi, mediante un integratore numerico che utilizza l'algoritmo di Runge-Kutta o un altro simile, la traiettoria del veicolo. Se la traiettoria così ottenuta non è soddisfacente, si ricomincia daccapo scegliendo un altro valore di  $\vec{r}_0$  e/o  $\vec{V}_0$ , finché non si ottiene una traiettoria adatta ad un trasferimento lunare. È evidente che una simile procedura può richiedere molto tempo. Per questo motivo, prima di integrare numericamente le equazioni del moto, si effettua un'analisi preliminare della missione lunare tramite metodi analitici approssimati, i quali consentono di limitare la scelta delle condizioni iniziali e aiutano a comprendere la dinamica del problema.

Un metodo analitico approssimato, comunemente usato per il calcolo di traiettorie interplanetarie, è il *metodo delle coniche raccordate*. Esso consiste nel suddividere il problema degli  $n$  corpi, problema che approssima quello del moto di un qualsiasi oggetto nello spazio, in una sequenza di problemi di due corpi. In altre parole, quando il veicolo spaziale entra in quella che si chiama *sfera di influenza* di un pianeta, ossia quella regione sferica dello spazio nella quale l'attrazione gravitazionale del pianeta è predominante rispetto a quella degli altri corpi celesti, si suppone che il suo comportamento possa essere approssimato da un semplice moto a due corpi, come se su di esso agisse esclusivamente la forza gravitazionale del pianeta. Sotto questa ipotesi, si può scrivere una soluzione analitica utilizzando semplici formule kepleriane, ottenendo una sequenza di archi di coniche kepleriane raccordati in quei punti che definiscono il limite della sfera di influenza dei corpi celesti incontrati.

Un altro metodo analitico approssimato, simile a quello delle coniche raccordate, è il *metodo di Öpik*, che si basa essenzialmente su tre assunzioni:

- il comportamento del veicolo, durante l'incontro con un pianeta, segue un modello a due corpi;
- nel punto di massimo avvicinamento, la velocità del veicolo è uguale alla velocità di collisione;
- fuori dalla sfera di influenza del pianeta, il veicolo percorre una traiettoria kepleriana imperturbata.

Adotteremo la definizione di sfera di influenza di un corpo celeste di massa  $m$  rispetto ad un altro di massa  $M$  data da Laplace. Essa è una sfera concentrica con  $m$ , il cui raggio è

$$R_s = d \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}}$$

dove  $d$  è la distanza che separa  $m$  da  $M$ . Grazie a questa formula, si può calcolare il raggio della sfera di influenza della Luna rispetto alla Terra, che è uguale a 66300 km, ovvero circa 1/6 della distanza della Luna dalla Terra.

Vediamo ora come si calcola una traiettoria lunare utilizzando il metodo delle coniche raccordate. Supporremo che tale traiettoria sia complanare con l'orbita della Luna.

Cominciamo col determinare il segmento di traiettoria che va dal punto di iniezione alla frontiera della sfera di influenza della Luna. Tale segmento è un arco di conica kepleriana con un fuoco nel centro

della Terra, poiché, in questa prima fase, consideriamo solo l'attrazione gravitazionale terrestre. I quattro parametri che caratterizzano l'orbita geocentrica con cui il veicolo si allontana dalla Terra sono:

$$r_0, V_0, \phi_0, \gamma_0$$

dove  $\gamma_0$  è l'angolo che  $\vec{r}_0$  forma con la retta passante per il centro della Terra e quello della Luna, mentre  $\phi_0$  è l'angolo che  $\vec{V}_0$  forma con la retta passante per il punto di iniezione e perpendicolare a  $\vec{r}_0$ . Vengono scelti arbitrariamente i valori di  $r_0, V_0, \phi_0$  (ossia tre delle 4 condizioni iniziali) e l'angolo  $\lambda_1$  che specifica il punto nel quale la traiettoria geocentrica interseca la frontiera della sfera di influenza lunare. Dati questi 4 valori, siamo in grado di determinare le condizioni  $r_1, V_1, \phi_1$  e  $\gamma_1$  dell'arrivo alla sfera di influenza della Luna. Ipotizziamo che il veicolo penetri nella sfera prima di giungere all'apogeo. L'energia totale ed il momento angolare dell'orbita geocentrica sono dati rispettivamente da

$$E = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_0} \quad h = r_0 V_0 \cos \phi_0$$

essendo  $\mu_T$  la costante gravitazionale terrestre, ovvero il prodotto della costante di gravitazione universale per la massa della Terra. Grazie al teorema del coseno, possiamo calcolare la norma del vettore corrispondente al punto di intersezione della traiettoria con la frontiera della sfera di influenza lunare:

$$r_1 = \sqrt{d_{TL}^2 + R_S^2 - 2d_{TL}R_S \cos \lambda_1}$$

dove  $d_{TL}$  è la distanza Terra-Luna. Dalla conservazione dell'energia totale e del momento angolare ricaviamo la velocità con cui il veicolo entra nella sfera di influenza della Luna:

$$V_1 = \sqrt{2(E + \mu_T/r_1)}$$

e l'angolo che  $\vec{V}_1$  forma con le rette perpendicolari a  $\vec{r}_1$ :

$$\cos \phi_1 = \frac{h}{r_1 V_1} \Rightarrow \phi_1 = \arccos\left(\frac{h}{r_1 V_1}\right)$$

$\phi_1$  è compreso tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , dal momento che abbiamo imposto alla navicella spaziale di arrivare alla frontiera della sfera di influenza lunare prima di pervenire all'apogeo.  $\gamma_1$  è l'angolo che  $\vec{r}_1$  forma con la retta passante per i centri della Terra e della Luna, mentre  $\lambda_1$  è l'angolo che tale retta forma con quella passante per il centro del globo lunare ed il punto individuato da  $\vec{r}_1$ . Pertanto, questi due angoli sono legati dalla relazione

$$\text{sen} \gamma_1 = \frac{R_S}{r_1} \text{sen} \lambda_1$$

Il tempo

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

che occorre per realizzare questo trasferimento dal punto di iniezione alla sfera di influenza lunare può essere calcolato una volta noti i valori  $v_0$  e  $v_1$  dell'anomalia vera. Per calcolare tali valori, occorre prima determinare il parametro  $p$ , l'eccentricità  $e$  e la lunghezza  $a$  del semiasse maggiore della traiettoria geocentrica, tramite le formule

$$p = \frac{h^2}{\mu_T} \quad a = \frac{-\mu_T}{2E} \quad e = \sqrt{1 - p/a}$$

Dopodiché, dall'equazione polare di una conica

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos v}{p}$$



otteniamo:

$$\cos v_0 = \frac{p - r_0}{r_0 e} \quad \cos v_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e}$$

Ora possiamo calcolare le anomalie eccentriche  $E_0$  ed  $E_1$ :

$$E_0 = \arccos\left(\frac{e + \cos v_0}{1 + e \cos v_0}\right) \quad E_1 = \arccos\left(\frac{e + \cos v_1}{1 + e \cos v_1}\right)$$

Siamo finalmente in grado di determinare il tempo di volo:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_T}} [(E_1 - e \sin E_1) - (E_0 - e \sin E_0)]$$

Durante il periodo di tempo  $\Delta t$ , la Luna si muove, con velocità angolare  $\omega = 2,66 \cdot 10^{-6}$  rad/s, andando dalla posizione che aveva all'istante  $t_0$ , in cui avviene l'iniezione, alla posizione che consente al veicolo di penetrare nella sua sfera di influenza all'istante  $t_1$ . Conoscendo l'angolo  $\omega \Delta t$  descritto dal movimento della Luna durante il tempo di volo  $\Delta t$ , siamo in grado di calcolare l'angolo  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = v_1 - v_0 - \gamma_1 - \omega \Delta t$$

Prima di calcolare  $\Delta t$  e  $\gamma_0$ , conviene verificare che i valori  $r_0, v_0, \phi_0$  e  $\lambda_1$ , che abbiamo scelto arbitrariamente, determinino una traiettoria soddisfacente. Se la traiettoria non fosse soddisfacente (ad esempio, non consentisse al veicolo di entrare nella sfera di influenza lunare), bisognerà riprovare a calcolarla modificando opportunamente i suddetti valori.

A questo punto, ci rimane da determinare la traiettoria interna alla sfera di influenza della Luna, dove si suppone che solamente la gravità lunare agisca sulla navicella spaziale. Poiché ora dobbiamo considerare la Luna come corpo centrale, è necessario trovare la velocità e la direzione del veicolo relative al centro della Luna. Indicheremo con il pedice due le condizioni iniziali relative al centro della Luna. Quindi, si avrà:

$$r_2 = R_S$$

La velocità del veicolo spaziale relativa al centro della Luna è

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_L$$

dove  $\vec{V}_L$  è la velocità della Luna relativa al centro della Terra ed è pari, in modulo, a 1,02 km/s. Poiché l'angolo formato da  $\vec{V}_1$  e  $\vec{V}_L$  è  $\phi_1 - \gamma_1$ , dalla formula precedente e dal teorema del coseno otteniamo:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + V_L^2 - 2V_1V_L \cos(\phi_1 - \gamma_1)}$$

Chiamiamo  $\varepsilon_2$  l'angolo formato da  $\vec{V}_2$  e da  $-\vec{r}_2$ , il quale soddisfa la relazione

$$V_2 \sin \varepsilon_2 = V_L \cos \lambda_1 - V_1 \cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1) \Rightarrow \varepsilon_2 = \arcsen \left[ \frac{V_L}{V_2} \cos \lambda_1 - \frac{V_1}{V_2} \cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1) \right]$$

E' ovvio che, se  $\varepsilon_2 = 0$ , il veicolo si schianterebbe sulla superficie lunare. L'energia totale ed il momento angolare dell'orbita selenocentrica sono dati dalle seguenti formule:

$$E = \frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu_L}{r_2} \quad h = r_2 V_2 \sin \varepsilon_2$$

dove  $\mu_L$  è la costante gravitazionale lunare, ossia il prodotto della costante di gravitazione universale per la massa della Luna. Mentre il parametro e l'eccentricità si possono calcolare mediante le formule

$$p = \frac{h^2}{\mu_L} \quad e = \sqrt{1 + 2Eh^2/\mu_L^2}$$

Siamo ora in grado di determinare le condizioni al periselenio:

$$r_p = \frac{p}{1+e} \quad V_p = \sqrt{2(E + \mu_L/r_p)}$$

Qualora tali condizioni non fossero soddisfacenti, occorrerebbe modificare opportunamente o le condizioni di iniezione  $r_0, V_0, \phi_0$  o l'angolo  $\lambda_1$ . Si può dimostrare, verificando che  $E > 0$ , che la traiettoria kepleriana selenocentrica interna alla sfera di influenza lunare è iperbolica.

Tramite un decremento di velocità pari a

$$\Delta V = V_p - \sqrt{\frac{\mu_L}{r_p}}$$

effettuato al periselenio, si può immettere il veicolo in un'orbita circolare lunare di raggio  $r_p$ .

### Bibliografia

Bate R. R., Mueller D. D., White J. E.: *Fundamentals of Astrodynamics*; New York, Dover Publication Inc., 1971.

Castronuovo M. M.: *Analisi di una missione interplanetaria*, "Quaderni di Astrodinamica", volume 1; Roma, Esagrafica s.r.l., 1993.

# 141. Le Proposizioni 24 e 21 degli *Elementi* di Euclide e alcuni assiomi mancanti

Cosimo De Mitri, Domenico Lenzi

cosimo.demitri@unisalento.it, domenico.lenzi@unisalento.it

[Dip. Mat. Uni. Salento, Lecce]

## Sunto

Nella prima parte di questo articolo torniamo su certe questioni, esposte in [DML], riguardanti la Proposizione 24 degli *Elementi* di Euclide, da noi chiamata – per l'immagine che evoca il suo enunciato – *teorema del compasso*. Tra l'altro, nel primo paragrafo, rivolgiamo una fugace attenzione ai due casi che – in maniera un po' azzardata – Proclo in [Pr] imputa a Euclide di aver tralasciato nella dimostrazione della proposizione suddetta. Ne approfittiamo altresì per esaminare – nel secondo paragrafo - la dimostrazione della Proposizione 21 degli *Elementi* (si veda [E], p. 108), facendo delle osservazioni che – insieme al *Teorema Mancante* considerato in [DML] – valgono anche per una dimostrazione meno *naïf* della Proposizione 24, rispetto a quella condotta da Euclide.

Infatti, a nostro avviso, egli omette due altre precisazioni – che noi denotiamo come proprietà i) e ii) – forse perché le giudica scontate in base a quanto da lui già detto in precedenza. Come, ad esempio, nella dimostrazione della Proposizione 21, dove usa di fatto la proprietà i) – che esprime una sorta di continuità dei segmenti – pur senza citarla esplicitamente. Quindi le proprietà i) e ii) si configurerebbero come degli assiomi sottintesi (*assiomi mancanti*) del trattato euclideo, che il grande maestro adoperava come una cosa talmente naturale, da non avvertire nemmeno la necessità di citarli come nozioni comuni (anche se le *nozioni comuni* euclidee sono da assimilare ad assiomi di tipo generale, meta-geometrico). Inoltre, sempre nel paragrafo 2, esaminiamo anche alcune proprietà – che negli *Elementi* sono sottintese – riguardanti la nozione di segmento.

In fine, nel paragrafo 3 ci occupiamo dell'Assioma sottinteso del Semipiano, facendo vedere che le proprietà i) e ii) discendono da esso.

Comunque, noi trattiamo questi argomenti senza alcuna pretesa di originalità, col solo intento di indurre il lettore a interessarsene, data la loro valenza sul piano storico ed epistemologico.

Facciamo presente che se questo scritto viene depurato dei riferimenti espliciti agli *Elementi* e si considerano le varie definizioni, nonché – come assiomi – le proprietà che noi usiamo senza dimostrazione, allora esso diventa un'esposizione assiomatica della nozione di *spazio di segmenti* (privi di lunghezza).

## 1. Sul Teorema Mancante

Preliminarmente ricordiamo la Proposizione 24 degli *Elementi*, così come viene presentata in [E] a p. 115. Precisiamo che il triangolo  $ABC$  e il triangolo  $DFE$  considerati nella seguente Fig. a corrispondono a quelli rappresentati con le stesse lettere nella figura a p. 115 di [E].

**Proposizione 24** (teorema del compasso<sup>1</sup>). *Siano dati due triangoli in cui due lati dell'uno siano rispettivamente uguali a due lati dell'altro. Allora il terzo lato è maggiore nel triangolo in cui tale lato si oppone ad angolo maggiore (e viceversa).*

Ricordiamo che in [DML] è stata da noi evidenziata l'assenza di una proprietà che abbiamo pensato di chiamare *il Teorema Mancante*, poiché abbiamo ipotizzato trattarsi di una proposizione andata perduta, essendo del tutto connaturata con lo sviluppo della geometria portato avanti da Euclide negli *Elementi*.

Qualcuno potrebbe parlare piuttosto di *proprietà ovvia*; tuttavia, la meticolosità con cui il grande maestro tratta anche cose abbastanza semplici, ci induce a pensare che egli non può aver trascurato una pro-

<sup>1</sup> Si pensi anche ai compassi con bracci diversi.

prietà così essenziale per la dimostrazione della Proposizione 24. Perciò se Euclide non la usa, è ragionevole ipotizzare che egli l'abbia considerata sottintesa, per averne già parlato in precedenza.

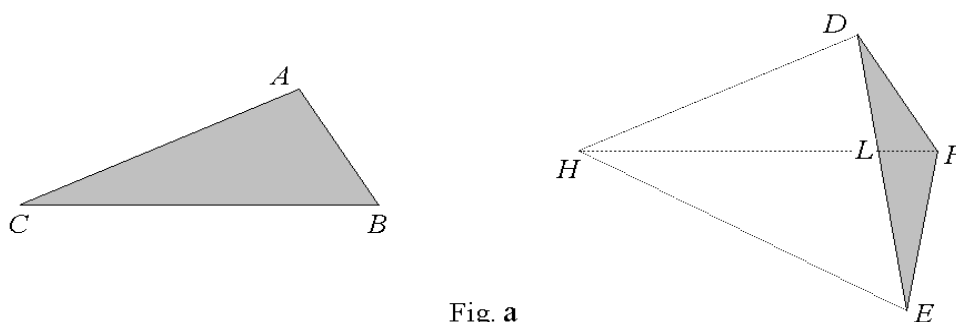


Fig. a

Ed ecco la proprietà in questione (si faccia riferimento alla parte destra di Fig. a):

**Il Teorema Mancante.** *Sia dato un triangolo DFH, in cui il lato HD sia maggiore/uguale rispetto al lato DF. Allora un segmento DL, che congiunga il vertice D con un punto del lato opposto HF, è minore del lato DH.*

Per maggior chiarezza, qui abbiamo cambiato Fig. 1 e Fig. 2 di [DML] rispettivamente con Fig. a – nella quale abbiamo anche scambiato tra loro le lettere E ed F e sostituito G con H – e Fig. b, in modo da mantenere in queste ultime la stessa posizione per la coppia dei triangoli evidenziati in grigio; cioè, quelli citati nella Proposizione 24.

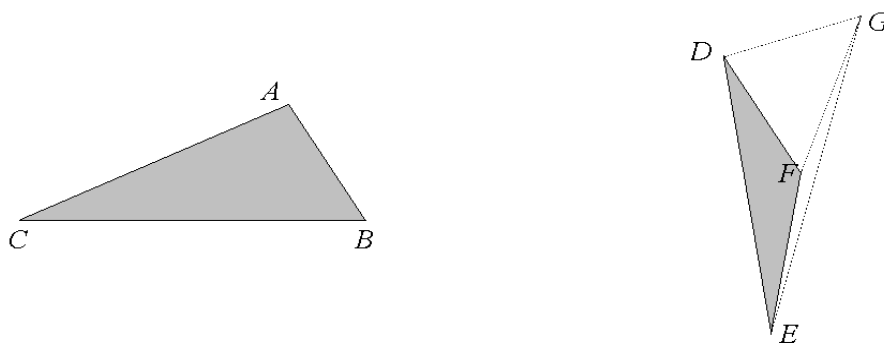


Fig. b

Come si è detto precedentemente, la situazione di Fig. a è quella descritta da Euclide in [E]. Invece la situazione di Fig. b è quella relativa a uno dei due casi che Proclo contesta come mancanti nella dimostrazione della Proposizione 24 (l'altro caso si verifica quando il punto F si trova sul segmento EG).

Facciamo presente che Proclo scrive (si veda [Pr], pp. 271-272): «[...] esaminiamo la costruzione di questo teorema data dall'autore degli Elementi e aggiungiamo ciò che in essa manca. [...]».

Ma Euclide – proprio per aver scelto il triangolo DFH come quello di Fig. a – non ha bisogno di considerare i casi di cui parla Proclo. Infatti DFH è soltanto un *triangolo di servizio* che – fermi restando i due triangoli che vengono confrontati, che in Fig. a sono grigi – conduce al solo caso previsto e discusso da Euclide; perciò si tratta di un triangolo che fa un “buon servizio”. Insomma, Euclide ha sapientemente evitato di scegliere una figura che avrebbe generato la situazione sgradita (se si fossero fatti combaciare i lati lunghi del triangolo DFE e di quello usato come triangolo di servizio). Egli, facendo combaciare i lati corti, ha tacitamente mostrato come evitarla.

Invece i due casi che Proclo considera mancanti sono riferiti alla scelta di un *triangolo di servizio* diverso: DEG; che ora è evidenziato nella parte destra di Fig. b ed è stato costruito in modo da essere uguale [congruente, se si preferisce] al triangolo ABC. Per inciso osserviamo che la situazione illustrata da Proclo

poc'anzi richiamata si verifica in tutti i casi in cui l'angolo  $BAC$  è maggiore di un angolo retto (si veda il caso illustrato in Fig. b), ma non solo in quelli.

In merito al *Teorema Mancante*, un lettore anonimo – che si firma “Acusmatico”<sup>2</sup> – ha osservato quanto segue (si veda la parte destra della seguente Fig. b):

*Il problema che è trattato e risolto con il "Teorema mancante" è riconducibile alla Proposizione 24 mediante una semplice rotazione [...] attorno al punto D, di modo che il segmento DF abbia come immagine DG. In questo senso la spiegazione al fatto che Euclide non enuncia il teorema mancante è da ricondurre ai problemi assiomatici posti da Hilbert [...]. Si parla allora di assiomi mancanti (tema già ampiamente discusso da altri) e non di teoremi mancanti.*

Se la rotazione di cui parla Acusmatico riguarda – come sembrerebbe – la situazione di Fig. b (Fig. 2, per [DML]), allora effettivamente tale rotazione fa cadere nel caso di Fig. a. Tuttavia, l'esigenza del *Teorema Mancante* non viene intaccata.

D'altro canto, sottolineiamo che in questo caso ci sembra improprio parlare di *Assioma Mancante* – come vorrebbe Acusmatico – per il semplice fatto che della proprietà in questione noi in [DML] abbiamo proposto una facile dimostrazione, perfettamente coerente con l'impostazione euclidea, e che utilizza soltanto alcune proposizioni dimostrate precedentemente da Euclide.

## 2. Alcuni assiomi mancanti e la Proposizione 21 di Euclide

In questo paragrafo faremo riferimento alla nozione di segmento (*linea retta* per Euclide) così come sembra sia intesa dal maestro secondo le sue applicazioni, che sono di tipo prettamente intuitivo<sup>3</sup>, ma, tra l'altro, aiutano a chiarire la definizione piuttosto vaga e oscura che egli dà (si veda [E], p. 66, nota 4). Tuttavia, noi accentueremo l'impostazione ipotetico-deduttiva che caratterizza gli *Elementi*. Infatti, alle proprietà che esprimono in forma più moderna i due classici postulati euclidei sui segmenti, noi aggiungeremo due altre semplici proprietà – del tutto naturali da un punto di vista intuitivo – dalle quali ricaveremo le altre che usualmente si attribuiscono ai segmenti.

L'uso che Euclide fa della nozione di segmento ci induce a pensare alla presentazione pratica che si fa nei primi approcci alla geometria, in cui ai discenti si fa tendere un filo tra le mani: il filo rappresenta il segmento e i capi trattenuti dalle dita ne rappresentano gli *estremi*. Il segmento di estremi  $A$  e  $B$  è un insieme di punti – tra i quali ci sono  $A$  e  $B$  – che è indicato indifferentemente con  $AB$  oppure con  $BA$ . Quindi diremo che  $AB$  *congiunge*  $A$  e  $B$ .

In genere, nel considerare il segmento  $AB$ , si ritiene  $A \neq B$ ; tuttavia a volte capita di indicare con  $AA$  il singoletto  $\{A\}$ , e noi qui seguiremo questa convenzione. Inoltre adopereremo, senza ulteriori precisazioni, modi di dire che sono usuali in geometria elementare e in teoria degli insiemi come *stare su*, ma anche *incontrare*, detto in riferimento a insiemi di punti che abbiano intersezione non vuota. Inoltre se un segmento  $s'$  include un segmento  $s$ , noi diremo anche che  $s'$  è un *prolungamento* di  $s$ , anche quando  $s' = s$ . Un punto del segmento  $AB$  diverso dagli estremi è detto *interno* a esso [o anche ad  $A$  e  $B$ ].

Come si ricordava, sono molteplici le proprietà che si è soliti attribuire ai segmenti; ma alcune possono essere scelte come postulati da cui ricavare le altre. Di ciò noi daremo qualche esempio importante per il prosieguo di questa esposizione.

Intanto indichiamo con  $E$  l'insieme dei punti considerato da Euclide<sup>4</sup>. Quindi tra le proprietà consideriamo preliminarmente le seguenti:

<sup>2</sup> Per un più sollecito e proficuo scambio di idee lo invitiamo a rivelarsi.

<sup>3</sup> David Hilbert in [H] deriva il concetto di *segmento* da un *legame* riguardante terne di punti  $A, B, C$ . Tale legame poi porta a dire che  $B$  è un punto del segmento che ha per estremi  $A$  e  $C$ . Per far ciò Hilbert considera uno spazio con una *buona* dotazione di *rette*.

Invece in [L] – pur prendendo spunto da Hilbert, usando terne di punti – si procede senza usare *a priori* delle rette, che nascono come particolari *prolungamenti* di segmenti.

<sup>4</sup> In realtà,  $E$  potrebbe essere un qualsiasi insieme non vuoto.

**P1.** *A due punti distinti  $A$  e  $B$  risulta sempre associato uno ed un solo sottoinsieme non vuoto di  $E$  – detto segmento di estremi  $A, B$ , o anche segmento  $AB$  – che abbia  $A$  e  $B$  come suoi elementi<sup>5</sup>.*

**P2.** *Per ogni due punti distinti  $A$  e  $B$  esiste un punto  $D$  tale che  $B$  sia interno al segmento  $AD$ .*

In questo paragrafo – a parte l'esempio che faremo tra poco – non useremo la proprietà P2, che diventerà essenziale solo nel prossimo paragrafo.

Le proprietà P1 e P2 sono una riscrittura dei Postulati I e II di Euclide (cfr. [E], p. 71), i quali si ritrovano nella prima parte della seguente proprietà, che a p. 159 di [Pr] enuncia i primi tre postulati euclidei:

**Postulati I-III.** *Si ammetta di poter condurre da ogni punto ad ogni altro punto una retta; di poter prolungare continuamente in linea retta una retta terminata [e di poter descrivere un cerchio da ogni centro e da ogni distanza].*

In seguito saranno di fondamentale importanza le due proprietà seguenti. La proprietà P3 assicura che ogni eventuale punto interno a un segmento lo *spezza* in due segmenti che hanno in comune solo quel punto.

**P3.** *Se  $X \in AB$ , allora  $AX \cap XB = \{X\}$  e  $AX \cup XB = AB$  [onde  $AX \subseteq AB$  e  $XB \subseteq AB$ ].*

**P4.** *Se due segmenti  $s$  ed  $s'$  hanno in comune più di un punto, allora  $s \cup s'$  è un segmento.*

Facciano notare che, su di un piano strettamente formale, dato un insieme  $E$  totalmente [linearmente] ordinato e privo di minimo e di massimo, chiamati punti i suoi elementi, allora si realizzano dei segmenti che soddisfano le precedenti proprietà associando a ogni coppia di punti  $A, B$  il sottoinsieme di  $E$  costituito da  $A$ , da  $B$  e dai punti fra essi compresi (rispetto all'ordinamento).

Inoltre aggiungiamo la seguente proprietà, che è soltanto una condizione che dà senso alla nozione di triangolo (in questo paragrafo) e a quella di piano (nel paragrafo successivo).

**P5.** *Ci sono almeno tre punti che non appartengono a uno stesso segmento.*

**Osservazione 1.** Sia  $X$  un punto interno al segmento  $AB$ . Allora si ha:

(1)  $B \notin AX$  per la prima parte della P3, essendo  $X \neq B$ . Analogamente,  $A \notin XB$ .

(2)  $AX \subset AB$ , poiché  $AX \subseteq AB$  (per la P3) e  $B \notin AX$ . Analogamente,  $XB \subset AB$ .

(3) Se  $Y$  è un altro punto di  $AB$ , allora  $XY \subset AB$ . Infatti, usando le lettere opportune, per la P3 deve essere  $AY \subseteq AX$  oppure  $AY \subseteq XB$ . Perciò, per il precedente punto (2), si ha rispettivamente  $XY \subseteq AX \subset AB$  oppure  $XY \subseteq XB \subset AB$ . ■

**Nota Bene.** Dati i segmenti  $AB$  e  $XY$ , il punto  $X$  (oppure  $Y$ ) sia distinto da  $A$  e da  $B$ . Allora quei segmenti sono diversi [vale a dire, un segmento non può avere più di due estremi]<sup>6</sup>. Infatti, se fosse  $XY$

<sup>5</sup> L'unicità non è presente nel Postulato I di Euclide, ma è insita nella definizione che egli dà di segmento. Infatti quella definizione – per quanto vaga – ci fa capire che c'è un solo modo *per andare dritto* da  $A$  a  $B$ , lungo un percorso di punti.

Da un punto di vista rigoroso, in questa proprietà si considera una funzione dall'insieme dei “duetti” di punti  $\{A, B\}$  verso l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di  $E$ .

<sup>6</sup> Ciò significa che la funzione di cui alla nota n. 5 è iniettiva.



$= AB$ , allora  $X$  e  $Y$  sarebbero punti di  $AB$ . Perciò, per la (3) dell'Osservazione 1, si avrebbe  $XY \subset AB$ . Il che è assurdo. ■

**Teorema 2.** *Siano  $X$  e  $Y$  due punti del segmento  $AB$ . Allora si ha:*

(1)  $X \in AY \iff AX \subseteq AY$ ;

(2)  $Y \in AX$  oppure  $X \in AY$ ;

(3)  $AY \subseteq AX$  oppure  $AX \subseteq AY$ ;

(4)  $X \in AY \iff Y \in XB$ .

*Dimostrazione.* Se  $X = Y$  oppure se uno tra  $X$  e  $Y$  coincide con un estremo, il teorema è di facile verifica. Perciò supponiamo  $X$  ed  $Y$  distinti ed interni ad  $AB$ .

(1) L'implicazione da sinistra a destra è ovvia per la P3, con  $Y$  al posto di  $B$ ; l'altra implicazione è conseguenza del fatto che, per l'ultima parte della P1,  $X \in AX$ .

(2) Se  $Y \notin AX$ , allora  $Y \in XB$  per la P3. Perciò dato che  $X, Y$  e  $B$  sono distinti, non può essere  $X \in YB$ , per la (1) dell'Osservazione 1 opportunamente usata; onde  $X \in AY$ .

(3) Scaturisce immediatamente dalla (2) tenendo opportuno conto della (1).

(4) Ovviamente, basta provare che  $X \in AY \Rightarrow Y \in XB$ . Perciò, sia  $X \in AY$ , onde non può essere  $Y \in AX$ . Quindi, per la prima parte della P3,  $Y \in XB$ . ■

**Nota Bene.** Se  $X$  e  $Y$  sono due punti, poniamo:

$$X \leq_A Y \text{ se e solo se } AX \subseteq AY.$$

In tal modo,  $\leq_A$  è il simbolo di una relazione d'ordine sull'insieme  $\mathbf{E}$  dei punti. Infatti,  $\leq_A$  è chiaramente riflessiva e transitiva. Inoltre, se  $X \leq_A Y$  e  $Y \leq_A X$ , allora  $AX \subseteq AY$  e  $AY \subseteq AX$ ; per cui  $AX = AY$ ; onde è facile vedere che  $X = Y$ . Ciò è ovvio se  $X = A$ ; altrimenti deriva dal fatto che un segmento non può avere più di due estremi. Perciò  $\leq_A$  è anche antisimmetrica. Ovviamente, rispetto a  $\leq_A$ , il punto  $A$  è il minimo dell'insieme  $\mathbf{E}$ .

Se  $B$  è un punto distinto da  $A$ , allora la (3) del Teorema 2 assicura che la restrizione  $\leq_{AB}$  di  $\leq_A$  al segmento  $AB$  è una relazione d'ordine totale [lineare], rispetto alla quale  $A$  e  $B$  sono rispettivamente il minimo e il massimo di  $AB$ .

Definendo allo stesso modo  $\leq_B$  e  $\leq_{BA}$ , per la (4) del Teorema 2 si ha immediatamente che  $\leq_{AB}$  e  $\leq_{BA}$  sono l'una la duale dell'altra. ■

**Teorema 3.** *Dati tre punti distinti di un segmento  $AB$ , uno di essi giace sul segmento che congiunge gli altri due.*

*Dimostrazione.* Siano  $X$  e  $Z$  rispettivamente il più piccolo e il più grande dei tre punti rispetto alla relazione  $\leq_{AB}$  e  $Y$  sia il terzo dei tre. Perciò  $X \leq_{AB} Y \leq_{AB} Z$ , onde  $AX \subseteq AY \subseteq AZ$ . Quindi  $X$  e  $Y$  giacciono su  $AZ$ . Di conseguenza, poiché  $X \in AY$ , tenendo conto della (4) del Teorema 2 – con  $Z$  al posto di  $B$  – si ha  $Y \in XZ$ . ■

Ora  $T$  sia un insieme con almeno due punti. I punti di  $T$  li diremo *allineati* – o anche che uno di essi è allineato con il sottoinsieme costituito dai rimanenti punti di  $T$  – quando  $T$  ha esattamente due punti, oppure ogni suo sottoinsieme costituito da tre punti è incluso in un segmento. Spesso diremo che  $T$  è un *insieme lineare* (di punti). Ovviamente, ogni segmento è un insieme di punti allineati.

**Teorema 4.**  $T$  sia un insieme lineare di punti. Allora ogni sottoinsieme finito  $F$  di  $T$  è incluso in un segmento.

*Dimostrazione.* Se  $F$  non ha più di tre punti, l'asserto è ovvio. Quindi, supposto l'asserto vero per sottoinsiemi aventi  $n$  punti, con  $n \geq 3$ , proviamolo per sottoinsiemi aventi  $n+1$  punti. Perciò sia  $F = \{X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}\}$ . Inoltre, per l'ipotesi induttiva, siano  $s$  un segmento che include  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  ed  $s'$  un segmento che include  $\{X_2, \dots, X_n, X_{n+1}\}$ . Poiché  $n \geq 3$ , i punti comuni ai due segmenti  $s$  ed  $s'$  sono almeno due; precisamente:  $X_2, \dots, X_n$ . Perciò  $s \cup s'$  è un segmento ed  $F$  è incluso in  $s \cup s'$ . ■

**Teorema 5.**  $X$  e  $Y$  siano due punti distinti di un insieme lineare di punti  $T$ . Se un punto  $Z$  è allineato con  $X$  e  $Y$ , allora anche  $T \cup \{Z\}$  è lineare.

*Dimostrazione.* Ovviamente, c'è da provare soltanto che se  $X'$  e  $Y'$  sono punti distinti di  $T$ , allora  $X'$ ,  $Y'$  e  $Z$  sono allineati. Sia  $s_1$  un segmento su cui giacciono  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Inoltre, poiché  $T$  è lineare, per il Teorema 4 possiamo considerare un segmento  $s_2$  su cui giacciono  $X$ ,  $Y$ ,  $X'$  e  $Y'$ ; onde  $s_1$  ed  $s_2$  hanno in comune i punti  $X$  ed  $Y$ . Quindi  $s_1 \cup s_2$  è un segmento che passa per  $X'$ ,  $Y'$  e  $Z$ . Ciò assicura la tesi. ■

**Teorema 6.**  $X$  e  $Y$  siano due punti distinti di un insieme  $T$  tali che ogni punto  $Z$  di  $T$  sia allineato con  $X$  e  $Y$ . Allora i punti di  $T$  sono allineati.

In particolare, sia  $T = T_1 \cup T_2$ , dove  $T_1$  e  $T_2$  sono due insiemi lineari che passano per  $X$  e  $Y$ . Allora  $T_1 \cup T_2$  è costituito da punti allineati.

*Dimostrazione.* Dati tre punti distinti  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  di  $T$ , proviamo che essi sono allineati. Per ipotesi,  $\{X, Y, Z_1\}$  è costituito da punti allineati; onde, applicando il Teorema 5, si ha che i punti di  $\{X, Y, Z_1, Z_2\}$  sono allineati. Di conseguenza – sempre per il Teorema 5 – sono allineati anche i punti di  $\{X, Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ . Perciò  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  sono allineati.

La seconda parte del teorema è ovvia dato che ciascun punto di  $T_1 \cup T_2$  è allineato con  $X$  e  $Y$ . ■

Anche per quanto attiene alla nozione di triangolo usata da Euclide, procederemo usando una definizione più rigorosa, che però è in linea con gli aspetti intuitivi.

Intanto partiamo da tre punti non allineati  $A, B$  e  $C$ , che chiamiamo *vertici*. Quindi chiamiamo *lati* i tre segmenti che congiungono quei vertici a due a due; inoltre chiamiamo *bordo* o *frontiera* associato ai tre vertici l'unione dei tre lati.

Allora per *triangolo*  $ABC$  intendiamo l'insieme dei punti – che diremo punti del triangolo – ciascuno dei quali è situato su di un segmento congiungente due punti del bordo. Perciò quei vertici, quei lati e quel bordo li diremo rispettivamente vertici, lati e bordo del triangolo. Un punto del triangolo che non sia situato sul bordo è detto *interno* al triangolo.

**Teorema 7.** Dati tre punti non allineati,  $T_1$  e  $T_2$  siano insiemi lineari tali che  $T_1$  passi per i primi due punti e  $T_2$  passi per il primo e per il terzo. Allora  $T_1$  e  $T_2$  si incontrano soltanto nel primo di quei tre punti.

In particolare, due lati distinti di un triangolo possono avere in comune soltanto un vertice.

*Dimostrazione.* In caso contrario, per il Teorema 6  $T_1 \cup T_2$  sarebbe costituito da punti allineati, onde i tre punti in questione sarebbero allineati. Il che è assurdo. ■

**Teorema 8.** *Dato un triangolo  $ABC$ , due punti distinti  $X$  e  $Y$  situati su di un lato non possono essere allineati con un punto  $Z$  del bordo che non sia situato su quello stesso lato. Inoltre, quattro punti allineati non possono essere situati sul bordo del triangolo, a meno che non stiano su di uno stesso lato.*

*Dimostrazione.* Per fissare le idee,  $X$  e  $Y$  stiano sul lato  $AB$ ; inoltre  $Z$  stia sul lato  $BC$  e sia diverso da  $B$ . Se  $X, Y$  e  $Z$  fossero allineati, allora – come conseguenza immediata del Teorema 5 – lo sarebbero anche i punti di  $AB \cup \{Z\}$ . Quindi, poiché il punto  $C$  è allineato con  $B$  e  $Z$ , sarebbero allineati – ancora per il Teorema 5 – anche i punti di  $AB \cup \{Z\} \cup \{C\}$ . Il che è assurdo, dato che  $A, B$  e  $C$  non sono allineati.

Per quel che riguarda la seconda parte del teorema, osserviamo che se quattro punti allineati fossero situati sul bordo del triangolo, senza stare tutti su di uno stesso lato, allora almeno due di questi dovrebbero comunque stare su di uno stesso lato; mentre, un altro dovrebbe stare su di un lato diverso. Il che contraddice la prima parte del teorema. ■

Si sottolinea il fatto che il Teorema 8 non esclude la possibilità che sul bordo del triangolo vi siano tre punti allineati tali che ogni lato ne contenga uno ed uno solo; questa possibilità, che contrasta con l'intuizione comune, sarà scongiurata più avanti in seguito alla introduzione della condizione ii).

Tornando alla Proposizione 24 del Libro I degli Elementi e facendo riferimento a Fig. a, aggiungiamo che ciò di cui difetta la dimostrazione di Euclide è anche il fatto che in essa non è esplicitamente provato che – essendo il segmento  $DE$  più lungo di qualsiasi segmento che congiunge  $D$  con un punto di  $HF$  – il punto  $E$  di Fig. a non giace sul triangolo  $DFH$ . D'altro canto, questo modo di procedere è in linea con l'impostazione euclidea, come si evince anche dalla dimostrazione della Proposizione 21 riportata qui sotto, che noi illustriamo in Fig. c con la stessa immagine utilizzata in [E] a p. 110.

**Proposizione 21.** *Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette (segmenti n. d. r.) che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore.*

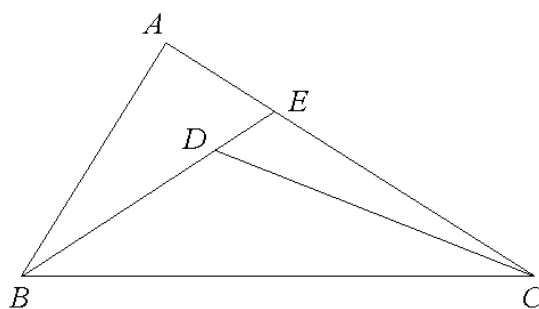


Fig. c

Si noti che anche la Proposizione 21 è ovvia sul piano intuitivo. Infatti – aiutandosi con Fig. c – è chiaro che andare da  $B$  a  $C$  lungo il percorso  $BDC$  è più breve che andarci lungo il percorso  $BDEC$ , che a sua volta è più breve del percorso  $BAEC$ .

D'altro canto, l'angolo  $BDC$  – in quanto esterno rispetto al triangolo  $DEC$  – è maggiore dell'angolo  $DEC$ ; mentre quest'ultimo, per la stessa ragione, è maggiore dell'angolo  $BAC$ .

La dimostrazione che fa Euclide della prima parte della Proposizione 21 si ispira alle valutazioni intuitive che noi abbiamo espresso poc'anzi. Però egli nella sua dimostrazione a un certo punto dice (si veda [E] p. 109): « *Si prolunghi difatti  $BD$  oltre  $D$  sino ad  $E$ ...* »

Euclide sorvola sul fatto che il punto  $E$  potrebbe non esistere, non prendendo in considerazione che i prolungamenti del lato  $BD$  potrebbero non *uscire* dal triangolo, oppure che, in caso di fuoriuscita, questa potrebbe avvenire attraverso un *buco*, eventualmente situato sul lato  $AC$  proprio laddove egli colloca il punto  $E$ . In definitiva, sul segmento  $AC$  potrebbe non esserci alcun punto allineato con  $B$  e  $D$ . In proposito si veda anche la dimostrazione della Proposizione 10 ([E], p. 92), in cui Euclide individua il punto medio di un segmento.

Questo atteggiamento alcuni esegeti dell'opera euclidea l'hanno imputato a una mancata esplicitazione di un *assioma di continuità del segmento (retta)*<sup>7</sup>, che potrebbe esprimersi con la seguente proprietà:

**i)** *D sia un punto interno a un triangolo  $ABC$ . Allora per ogni punto  $M$  del bordo esiste un punto  $E$  del bordo tale che  $D$  sia interno al segmento  $ME$ .*

Ovviamente, i punti  $M$  ed  $E$  non giacciono su di uno stesso lato, altrimenti anche  $D$  starebbe su quel lato e non sarebbe interno al triangolo.

Inoltre, dato che il segmento  $ME$  congiunge punti del bordo del triangolo  $ABC$ , i punti di  $ME$  stanno sul triangolo. E non può accadere – lo esclude la seconda parte del Teorema 8 – che due o più punti interni del segmento  $ME$  siano situati sul bordo. Tuttavia, il fatto che  $ME$  possa avere un punto interno situato sul bordo del triangolo  $ABC$ , cozza contro la visione intuitiva che si ha dei segmenti e dei triangoli. Perciò si può pensare anche alla seguente proprietà:

**ii)** *Dato un triangolo  $ABC$ , siano  $M$  ed  $E$  due punti del bordo interni a lati distinti. Allora ogni punto  $N$  interno al segmento  $ME$  è interno anche al triangolo.*

**Osservazione 9.** Se uno dei punti  $M$ ,  $E$  di cui alla proprietà ii) lo prendessimo coincidente con un vertice del triangolo e l'altro, comunque, su un lato che non contiene quel vertice, quanto richiesto dalla ii) sarebbe ugualmente soddisfatto, nel senso che ogni punto interno ad  $ME$  sarebbe interno al triangolo; e ciò in virtù della prima parte del Teorema 8. ■

**Nota Bene.** La proprietà ii), insieme a quanto abbiamo aggiunto con l'Osservazione 9, assicura che se tre punti distinti appartengono al bordo del triangolo  $ABC$  e sono allineati, allora essi non possono che stare sullo stesso lato. Infatti, per il Teorema 3, uno di essi è interno al segmento che congiunge gli altri due, e quindi verrebbe ad essere interno al triangolo se questi altri due punti non fossero con lui su uno stesso lato. ■

Data la rappresentazione cartesiana che usualmente si fa del piano reale euclideo, i segmenti di quest'ultimo hanno una controparte in  $\mathbb{R}^2$  che, oltre alle proprietà P1-P5 soddisfa anche alla i) e alla ii). Inoltre è chiaro che le tracce dei vari segmenti di  $\mathbb{R}^2$  sul sottoinsieme  $\mathbb{Z}^2$  – onde dei punti di ciascun segmento di  $\mathbb{R}^2$  consideriamo solo quelli che hanno entrambe le coordinate intere, e consideriamo solo triangoli che hanno per vertici punti di questo tipo – danno luogo a un insieme di segmenti che soddisfano alle proprietà P1-P5 e ii), ma non alla proprietà i). Questo dipende dal fatto che nel passaggio da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{Z}^2$  abbiamo eliminato dei punti, determinando dei “buchi”, onde due segmenti che in  $\mathbb{R}^2$  si incontravano in un punto le cui coordinate non erano intere, in  $\mathbb{Z}^2$  perdono il loro punto di incontro. Concretamente, ci si rende conto di ciò considerando un foglio a quadretti e prendendo come punti i nodi (cioè, gli incroci tra linee orizzontali e verticali).

Tuttavia l'inconveniente ora prospettato non si verifica se il passaggio lo si effettua da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{Q}^2$  [onde di  $\mathbb{R}^2$  si considerano soltanto i punti che hanno entrambe le coordinate razionali], purché inizialmente si considerino solo segmenti i cui estremi abbiano coordinate razionali. Infatti tali segmenti giacciono su

<sup>7</sup> Attualmente l'*assioma di continuità del segmento* ha un significato diverso da quello che stiamo per dare, potendosi identificare con l'*assioma di continuità della retta*. Quest'ultimo afferma che in uno spazio dotato di rette sulle quali si possano definire dei segmenti, e quindi un ordinamento (e il suo duale), ogni sottoinsieme  $\mathbf{T}$  limitato di una retta ha estremo inferiore ed estremo superiore. Il che, ad esempio, si verifica sullo spazio reale  $\mathbb{R}^3$ .

rette che sono rappresentate da equazioni a coefficienti razionali, onde i punti di incontro di tali rette [e quindi dei segmenti considerati] hanno coordinate razionali. Quindi quei punti di incontro stanno in  $\mathbb{R}^2$ .

La proprietà i) – da sola o insieme alla ii) – oltre a ovviare ad alcune manchevolezze che si riscontrano negli *Elementi*, consente di dimostrare diversi semplici teoremi della geometria euclidea. Perciò si potrebbe essere tentati di assumere queste proprietà come due ulteriori postulati. Tuttavia nel prossimo paragrafo vedremo che ciò è superfluo, dato che la i) e la ii) sono conseguenza dell'*Assioma del Semipiano*.

### 3. L'Assioma sottinteso del Semipiano

Qui  $\mathbf{E}$  continuerà ad essere l'insieme dei punti euclidei, con i suoi segmenti muniti delle proprietà P1, P2, P3, P4 e P5 del paragrafo precedente; onde varranno anche tutti i risultati fino all'Osservazione 9<sup>8</sup>. Intanto facciamo presente che attualmente la nozione di piano può essere data in maniera meno ingenua rispetto a quella data negli *Elementi* (si veda [E], Definizione VII, p. 67). Generalmente lo si fa in un ambiente geometrico in cui ci sia, come vedremo, un soddisfacente *bagaglio* di rette. In vero,  $\mathbf{S}$  sia un insieme non vuoto i cui elementi sono chiamati *punti*; inoltre,  $\mathcal{R}$  sia un insieme di sottoinsiemi di  $\mathbf{S}$ , chiamati *rette*, tali che sia verificata la seguente proprietà:

a) *Dati due punti distinti A e B di S, c'è una e una sola retta [cioè, uno e un solo elemento di  $\mathcal{R}$ ] che passa per A e per B.*

Allora si dice che  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  è uno *spazio di rette*. Quindi si chiama *sottospazio* di  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  ogni sottoinsieme di  $\mathbf{S}$  che abbia al più un punto, oppure che per ogni coppia di suoi punti, contenga anche la retta che li congiunge. Ebbene, è facile verificare la seguente proprietà:

b) *Ogni intersezione di sottospazi di  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  è un sottospazio.*

Allora si chiama *piano* di  $(\mathbf{S}, \mathcal{R})$  un sottospazio che sia l'intersezione dei sottospazi che passano per tre suoi punti non appartenenti a una stessa retta.

E' facile costruire un insieme di rette sull'insieme  $\mathbf{E}$  dei punti euclidei di cui ci stiamo occupando. Infatti, dati due punti distinti  $X$  e  $Y$ , ispirandosi alla nozione intuitiva di retta (che nasce come *prolungamento illimitato* di un segmento), ha senso chiamare *retta* determinata (o anche generata) da  $X$  e  $Y$  – brevemente, *retta XY* – l'insieme dei punti  $Z$  che sono allineati con  $X$  e  $Y$ ; ossia, l'unione dei prolungamenti del segmento  $XY$ .

**Nota Bene.** Grazie alla prima parte del Teorema 6, una retta è un insieme di punti allineati. ■

Allora, alla luce di quanto è stato evidenziato nel paragrafo precedente, si prova facilmente che l'insieme  $\mathcal{R}$  delle rette così definite gode della precedente proprietà a), onde veniamo ad avere lo spazio di rette  $(\mathbf{E}, \mathcal{R})$ .

In ambito euclideo il significato della proprietà a) è che due rette distinte – come, del resto, due segmenti – non possono *incontrarsi in due punti distinti e poi andarsene ognuna per i fatti suoi*, come si vede col seguente teorema.

**Teorema 10.** *Le rette  $BC$  e  $B'C$  abbiano in comune due punti distinti  $X$  e  $Y$ . Allora esse coincidono.*

*Dimostrazione.* Infatti, applicando il Teorema 5, si ha che ogni punto  $Z$  della retta  $BC$  è allineato con i punti della retta  $B'C$ , onde la retta  $BC$  è inclusa nella retta  $B'C$ . Analogamente, la retta  $B'C$  è inclusa nella retta  $BC$ . Donde la tesi. ■

<sup>8</sup> Si noti che nell'Osservazione 9 le condizioni i) e ii) non sono state usate. Della ii) sono state adottate soltanto le notazioni.

Quindi sullo spazio di rette  $(E, \mathcal{R})$  si ha la possibilità di parlare di piano. Però, come è noto, Euclide sembra rifuggire dal concetto di retta, anche a livello intuitivo; infatti, negli *Elementi* questo concetto lo si trova solo in un paio di occasioni. Tuttavia, Euclide aveva la possibilità di dare una definizione di piano utilizzando soltanto la nozione di segmento e le proprietà che sono state evidenziate nel paragrafo precedente, nel modo che intendiamo mostrare nel prosieguo di questo articolo.

Intanto sia  $\mathcal{S}$  l'insieme dei segmenti considerati da Euclide; onde diremo che  $(E, \mathcal{S})$  è uno spazio di segmenti. Allora possiamo chiamare *sottospazio* di  $(E, \mathcal{S})$  ogni sottoinsieme  $H$  di  $E$ , che abbia al più un punto, oppure che per ogni coppia di suoi punti contenga anche tutti i punti allineati con essi<sup>9</sup>. Ebbene, ricorrendo alla sola nozione di segmento, è facile verificare la seguente proprietà:

**b')** *Ogni intersezione di sottospazi euclidei è un sottospazio.*

Allora possiamo chiamare *piano euclideo* di  $(E, \mathcal{S})$  un sottospazio che sia l'intersezione dei sottospazi che passano per tre suoi punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  non allineati. Lo indicheremo con  $\Psi(A, B, C)$  o più semplicemente con  $\Psi$ , quando non importa fissare l'attenzione sui generatori  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

**Osservazione 11.** Dato un piano  $\Psi$  e un suo segmento  $s$ , sia  $\Psi^s$  l'insieme dei punti di  $\Psi$  che non stanno su alcun prolungamento di  $s$ . Quindi consideriamo la relazione  $\Sigma^s$  tra punti  $A$ ,  $B$  di  $\Psi^s$  che consiste nel fatto che  $A = B$  oppure il segmento  $AB$  non incontra alcun prolungamento di  $s$ . Chiaramente, la  $\Sigma^s$  è una relazione riflessiva e simmetrica. ■

Ora siamo in condizione di aggiungere alle proprietà P1, P2, P3, P4 e P5 del paragrafo precedente anche l'*Assioma del Semipiano*, onde diremo che  $(E, \mathcal{S})$  è uno *spazio euclideo*. Questo assioma viene generalmente enunciato in spazi di rette. Però noi lo adattiamo a uno spazio di segmenti; il che faremo anche per il successivo *Assioma di Pasch*.

**Assioma del Semipiano.** *Per ogni piano  $\Psi$  e per ogni suo segmento  $s$ , l'insieme  $\Psi^s$  dei punti del piano che non sono allineati con  $s$  si ripartisce in due classi  $U^s$  e  $V^s$ , caratterizzate dalla due seguenti proprietà:*

- c)** *Il segmento che congiunge due punti distinti di una stessa classe non incontra alcun prolungamento di  $s$ ;*
- d)** *Il segmento che congiunge due punti appartenenti rispettivamente a  $U^s$  e a  $V^s$  incontra un prolungamento di  $s$ .*

Ciascuna delle due classi  $U^s$  e  $V^s$  considerate nell'Assioma del Semipiano è detta *semipiano aperto* (o soltanto *semipiano*) di  $s$ . Inoltre i due semipiani sono detti *opposti* rispetto a  $s$ .

Euclide usa spesso l'Assioma del Semipiano, pur senza citarlo, considerandolo naturalmente sottinteso. Negli *Elementi* la prima traccia di esso, implicita laddove si parla di "parte", si ha nel celebre *quinto postulato*, che viene espresso così (si veda [E], p. 71):

**Postulato V.** *E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori [cioè, con somma minore; n.d.r.] di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

**Nota Bene.** Tornando alla relazione  $\Sigma^s$  su  $\Psi^s$  introdotta nell'Osservazione 11, è evidente che i punti  $A$  e  $B$  sono in questa relazione se e solo se appartengono entrambi ad  $U^s$  o entrambi a  $V^s$ . Perciò l'Assioma del Semipiano assicura che la relazione  $\Sigma^s$  è una relazione di equivalenza che ha esattamente due classi di equivalenza:  $U^s$  e  $V^s$ . ■

<sup>9</sup> Perciò questa nozione coincide con quella di sottospazio dello spazio di rette  $(E, \mathcal{R})$ .



**Teorema 12.**  $A, B$  e  $C$  siano tre punti non allineati di un piano  $\Psi$  dello spazio euclideo  $(E, \mathcal{S})$ . Allora risulta  $\Psi(A, B, C) = \Psi$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $A, B, C \in \Psi$ , allora  $\Psi(A, B, C) \subseteq \Psi$ , dato che  $\Psi$  è un sottospazio e  $\Psi(A, B, C)$  è il più piccolo sottospazio che passa per i punti  $A, B$  e  $C$ . Onde resta da provare l'altra inclusione. Quindi sia  $P \in \Psi$ . Se  $P$  è allineato con  $B$  e  $C$ , ovviamente  $P \in \Psi(A, B, C)$ . Perciò  $P, B$  e  $C$ , siano non allineati; onde, considerato il segmento  $s = PB$ , si ha che  $C \in \Psi^s$ . Tenendo conto della proprietà P2, prendiamo un punto  $D$  tale che  $B$  sia interno al segmento  $AD$ ; onde  $A$  e  $D$  sono situati su semipiani di  $\Psi$  opposti rispetto a  $s$ . Perciò si verifica una e una sola delle seguenti eventualità:

$$C \equiv A \pmod{\Sigma^s} \quad C \equiv D \pmod{\Sigma^s}.$$

Supposta vera la prima, allora  $C \not\equiv D \pmod{\Sigma^s}$ . Perciò il segmento  $CD$  incontra un prolungamento  $s'$  di  $s$  in un punto  $B' \in \Psi(A, B, C)$  che è diverso da  $B$ ; altrimenti  $C$  sarebbe allineato con  $D$  e  $B$ , onde sarebbe allineato anche con  $A$  e  $B$ ; il che è assurdo.

Poiché  $B'$  e  $B$  sono punti di  $s'$  che stanno su  $\Psi(A, B, C)$ ,  $s'$  giace su  $\Psi(A, B, C)$  e quindi  $P \in \Psi(A, B, C)$ . ■

Ora consideriamo una proprietà, dovuta a Moritz Pasch, che in alcuni contesti geometrici – come quello di cui ci stiamo occupando (si veda la successiva Osservazione 13) – è equivalente all'Assioma del Semipiano. Perciò essa viene individuata come Assioma di Pasch.

**Assioma di Pasch.** *Un segmento  $s$  del piano  $\Psi$ , incontra un lato  $I$  di un triangolo di  $\Psi$  in un solo punto  $M$  interno ad  $I$ . Allora  $s$  o un suo prolungamento incontrano in un punto  $E$  un lato del triangolo diverso da  $I$ . Inoltre,  $s$  e ogni suo prolungamento incontrano il bordo al più in quei punti  $M$  ed  $E$ .*

**Osservazione 13.** Con un po' di attenzione si può verificare che l'Assioma di Pasch equivale al fatto che la relazione  $\Sigma^s$  definita su  $\Psi^s$  è una relazione di equivalenza che ha al più due classi di equivalenza. D'altro canto, grazie alla proprietà P2, questo assioma determina per la relazione  $\Sigma^s$  almeno due classi di equivalenza. Infatti, considerati un segmento  $s$  e l'insieme  $\Psi^s$ , nonché due punti  $A \in \Psi^s$  e  $B \in s$ , allora il punto  $D$  di cui alla P2) si trova in una classe di equivalenza diversa da quella di  $A$ . Quindi, siccome l'Assioma del Semipiano equivale al fatto che la  $\Sigma^s$  ha esattamente due classi di equivalenza, gli Assiomi di Pasch e del Semipiano sono equivalenti. ■

Concludiamo con un teorema che assicura che, valendo le proprietà 1), 2), 3) e 4) e l'Assioma del Semipiano, le precedenti proprietà i) e ii) sono dei teoremi.

**Teorema 14.** *Nello spazio euclideo  $(E, \mathcal{S})$  valgono le due condizioni i) e ii) del paragrafo precedente.*

*Dimostrazione.* Sia  $ABC$  un triangolo i cui vertici giacciono su di un piano  $\Psi$ . Grazie all'Osservazione 13, per la dimostrazione utilizzeremo l'Assioma di Pasch.

Proviamo la i). Perciò  $M$  sia un punto del bordo e  $D$  sia un punto interno al triangolo  $ABC$ , onde  $D$  giace su di un segmento congiungente due punti  $P$  e  $Q$  del bordo, con  $P$  e  $Q$  non situati su di uno stesso lato. Allora dobbiamo provare che esiste un punto  $E$  del bordo tale che  $D$  sia interno al segmento  $ME$ . Se  $M$  è interno a un lato del triangolo, allora la presenza del punto  $E$  è garantita dall'Assioma di Pasch, dove  $MD$  sta al posto di  $s$ . Perciò ci resta da considerare il caso in cui  $M$  coincida con uno dei vertici. Tanto per fissare le idee, sia  $M = A$ . Allora dobbiamo provare che un prolungamento di  $AD$  incontra il lato  $BC$ . A tal fine distinguiamo due casi. Il primo caso è che uno dei due punti  $P, Q$  sul cui segmento giace  $D$  coincida con  $B$  oppure con  $C$ . Ad esempio,  $P$  coincida con  $B$ , onde  $Q$  deve essere interno al

segmento  $AC$ . In tal caso, per il Teorema 8, i punti  $B$ ,  $C$  e  $Q$  non sono allineati; quindi – poiché  $D$  è interno al segmento  $BQ$  – per l'Assioma di Pasch applicato al triangolo  $BCQ$ , un opportuno prolungamento del segmento  $AD$  [non potendo incontrare il segmento  $QC$ , dato che  $D$  non sta sul lato  $AC$ ] incontra il lato  $BC$ .

Il secondo caso è che nessuno dei due punti  $P$ ,  $Q$  coincida con uno dei vertici  $B$ ,  $C$ . Allora dato che i punti  $P$ ,  $C$  e  $Q$  – sempre per il Teorema 8 – non sono allineati, basta applicare l'Assioma di Pasch prima al triangolo  $PCQ$ , onde un opportuno prolungamento  $s'$  del segmento  $AN$  incontrerà il lato  $PC$  in un punto interno. Quindi – per l'Assioma di Pasch applicato ad  $s'$  e al triangolo  $BCP$  – un opportuno prolungamento di  $s'$  incontra il lato  $BC$ .

Ora proviamo la ii). Perciò supponiamo che  $M$  ed  $E$  siano interni a lati distinti del triangolo. Quindi, assumendo come segmento  $s$  di cui all'Assioma di Pasch proprio  $ME$ , si ha che esso può incontrare il bordo del triangolo solo nei punti  $M$  ed  $E$ . Il che assicura la condizione ii). ■

### Bibliografia

- [DML] De Mitri C., Lenzi D., *Euclide e il teorema mancante*, Matematicamente.it, N. 12 (2010).
- [E] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccione, UTET, Torino (1970).
- [H] Hilbert D., *Fondamenti della Geometria* (con introduzione di Carlo Felice Manara), Feltrinelli, Milano. (1970). Traduzione da *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Stuttgart (1968).
- [L] Lenzi D., *David Hilbert e i suoi primi assiomi della geometria, con un'appendice dedicata a Moritz Pasch*, Periodico di Matematiche, IV (2008).
- [Pr] Proclo, *Commento al primo libro di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini ed., Pisa (1978).

## 142. Il problema di Sylvester, chi l'ha risolto per primo?

Andreana Zucco

Esistono problemi che hanno avuto una storia curiosa. Ad esempio, quando James Joseph Sylvester nel 1893, mentre era professore all'Università di Oxford, propose su una rivista il quesito di provare che dato nel piano un insieme finito, superiore a 2, di punti non allineati esiste una retta che ne contiene esattamente 2, non poteva supporre che la soluzione sarebbe arrivata circa mezzo secolo dopo e che la paternità della soluzione sarebbe stata controversa.

La rivista in questione era "Mathematical Questions and Solutions from Educational Times" e nel vol. 59 pag. 98-99 si trova il problema n.11851, del quale riportiamo l'enunciato:

Provare che non è possibile trovare un numero finito di punti del piano reale tali che ogni retta per due di essi passi per un terzo, a meno che tutti i punti stiano sulla stessa retta.

Il suggerimento proposto da H.J.Woodall per la risoluzione non era convincente. Il problema fu dapprima dimenticato e ripreso solo verso il 1930.

In seguito vari contributi e diverse dimostrazioni di questo problema sono stati dati da numerosi autori: Erdős[1943], Gallai [1944], Steiner [1944], Coxeter [1948], Fejes-Tóth [1948], Trevisan [1949], Dirac [1951], Motzkin [1951], Hadwiger con altri autori [1955],[1960],[1964],[1965], Chakerian [1970], ecc.

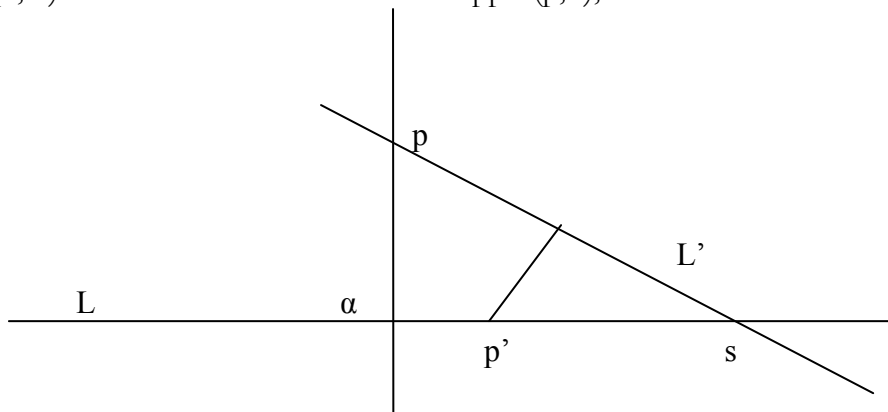
Contrariamente ad un'opinione largamente affermata che cita il teorema come teorema di Sylvester-Gallai, secondo B.Grünbaum (vedi [G]) la prima valida dimostrazione, che vedremo nella terza sezione, si ebbe ad opera di E.Melchior nel 1940, quindi prima di quella di T.Gallai del 1944.

**I** La seguente dimostrazione pubblicata da Coxeter nel 1948, è dovuta a Kelly (1944).

*Dimostreremo che per ogni insieme finito  $S$  di punti, non allineati, del piano esiste almeno una retta che ne contiene esattamente due.*

Consideriamo le coppie  $(p, L)$  ove  $p$  è un punto di  $S$  ed  $L$  una retta che non contiene  $p$ , ma almeno due punti di  $S$ . Poiché i punti di  $S$  non sono allineati, esiste almeno una coppia ed essendo  $S$  finito tali coppie sono in numero finito. Fra tutte le coppie consideriamo quella per cui la distanza di  $p$  da  $L$  è minima. Vogliamo dimostrare che tale retta  $L$  è quella cercata. Supponiamo il contrario, ossia che  $L$  abbia almeno tre punti di  $S$  e indichiamo con  $\alpha$  il punto piede della perpendicolare per  $p$  ad  $L$ . Essendo almeno tre i punti su  $L$ , almeno due stanno dalla stessa parte rispetto alla perpendicolare, indichiamo con  $p'$  il punto più vicino ad  $\alpha$  (eventualmente coincidente con  $\alpha$ ) e con  $s$  l'altro.

Costruiamo la retta  $L'$  per  $p$  e per  $s$ . Osservato che la distanza di  $p'$  dall'ipotenusa  $ps$  è minore del cateto  $p\alpha$ , la coppia  $(p',L')$  avrebbe distanza minore della coppia  $(p,L)$ , il che è assurdo.



**II** Prima di vedere un'altra dimostrazione, dovuta a X.B.Lin (nel 1988) occorre premettere le seguenti definizioni.

**Def.1** Un insieme di punti del piano è detto *convesso* se contenendo due punti, contiene anche il segmento che li congiunge.

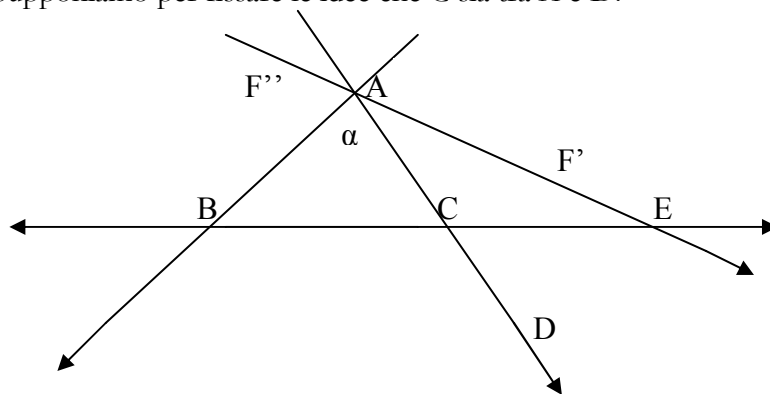
**Def.2** Si dice *inviluppo convesso* di un insieme  $A$ , si scrive  $conv(A)$ , il più piccolo convesso che contiene  $A$ .

Ad esempio, nel piano l'inviluppo convesso di un numero finito di punti è un poligono.

Dimostreremo che *se  $S$  è un insieme finito di punti nel piano, tali che nessuna retta interseca  $S$  in esattamente due punti, allora i punti sono allineati.*

Un angolo secondo la definizione scelta dall'autore è determinato da due raggi non allineati aventi punto iniziale comune. Per raggio  $(A, B)$  si intende la semiretta di origine  $A$  che passa per  $B$ . Se  $A, B, C$  sono punti dell'insieme  $S$ , allora l'angolo definito dai raggi  $(A, B)$  e  $(A, C)$  è denotato con  $BAC$  oppure  $CAB$ . Se sul raggio  $(A, B)$  oppure  $(A, C)$  c'è un quarto punto di  $S$ , diciamo che l'angolo è *ammissibile* (rispetto ad  $S$ ). Supponiamo che i punti di  $S$  non siano allineati. Poiché per ipotesi nessuna retta interseca  $S$  in esattamente due punti, allora gli angoli al vertice del poligono dato dall'inviluppo convesso di  $S$  sono certamente ammissibili, quindi l'insieme di tali angoli non è vuoto.

Indichiamo con  $BAC$  il più grande di tali angoli con ampiezza  $\alpha < 180^\circ$  e con  $D$  un quarto punto di  $S$  sul raggio  $(A, C)$ . Supponiamo per fissare le idee che  $C$  sia tra  $A$  e  $D$ .



Ora  $BCD$  è un angolo più grande di  $BAC$ , quindi non può essere ammissibile. Allora il raggio  $(C, B)$  non può contenere un altro punto di  $S$ , altrimenti  $BCD$  sarebbe ammissibile. Ma per ipotesi la retta per  $C$  e  $B$  deve contenere un altro punto  $E$  di  $S$ , perciò  $E$  deve stare sul raggio opposto al raggio  $(C, B)$ .

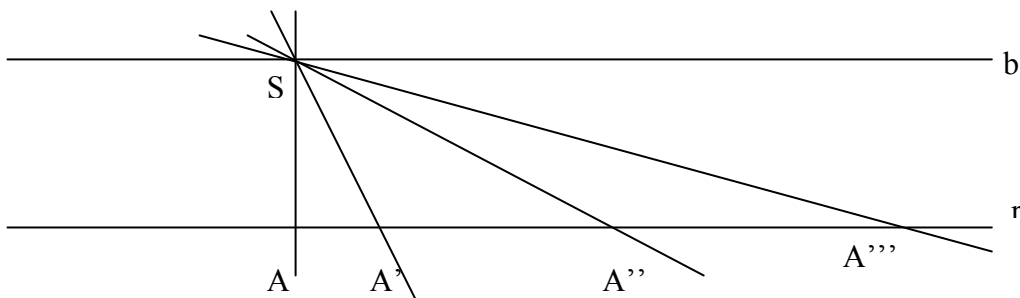
In tale situazione troviamo una contraddizione sulla retta  $AE$ . Dovendo per ipotesi contenere un terzo punto  $F$  di  $S$ , si hanno due casi:

- se  $F$  è sul raggio  $(A,E)$ , indichiamolo con  $F'$ , allora  $BAE$  è ammissibile e più ampio di  $BAC$ , assurdo;
- se  $F$  è sul raggio opposto ad  $(A,E)$ , indichiamolo con  $F''$ , allora  $F''AC$  è ammissibile, poiché su  $(A,C)$  c'è il punto  $D$  e l'angolo  $F''AC$  è maggiore di  $BAC$ , assurdo.

Tale contraddizione prova che i punti di  $S$  devono essere allineati.

**III** In questa terza parte ci occuperemo del problema duale che fu risolto da Melchior. Prima di enunciarlo occorre introdurre alcuni concetti nuovi.

Nel piano supponiamo di considerare una retta  $r$  ed un punto  $S$  ad essa esterno. Consideriamo la retta  $a$  per  $S$  perpendicolare ad  $r$ , che interseca  $r$  in un punto  $A$ . Facendo ruotare la retta  $a$  attorno ad  $S$  i punti di intersezione su  $r$  si allontanano indefinitamente da  $A$  e quando la retta  $a$  viene a coincidere con la retta  $b$  parallela ad  $r$ , il punto comune viene sostituito dalla direzione comune di  $r$  e di  $b$ , per questo viene detto *punto all'infinito* o *punto improprio*.



Quindi un punto improprio di una retta è il punto che è comune a tutte le sue rette parallele, in quanto tutte queste rette hanno la stessa direzione.

E l'insieme dei punti impropri costituisce la *retta impropria* o *retta all'infinito*.

Il piano ampliato con tali elementi impropri viene detto *piano proiettivo*. Nel piano proiettivo due rette hanno sempre un punto in comune, se sono parallele è il loro punto all'infinito.

Osserviamo come nel piano proiettivo le seguenti due proposizioni si deducono l'una dall'altra con lo scambio delle parole punto e retta:

- i) due punti individuano una retta alla quale essi appartengono,
- ii) due rette individuano un punto al quale esse appartengono.

Due proposizioni come le precedenti si dicono *duali*.

Il risultato di Melchior riguarda il problema di Sylvester posto in forma duale:

*Considerata una qualsiasi famiglia finita di rette del piano proiettivo, non formanti fascio, esiste almeno un punto del piano per il quale passano esattamente due di tali rette?-*

La risposta è che non solo esiste un tale punto, ma ne esistono almeno 3.

Per dimostrarlo introduciamo alcune definizioni ed un minimo di nomenclatura.

Per *configurazione A* di rette intendiamo una qualsiasi famiglia di rette del piano proiettivo e nel seguito escludiamo sempre che si tratta di un fascio di rette, ossia di rette tutte per un punto proprio o per un punto all'infinito. Si definiscono *vertici* i punti di incontro delle rette, *lati* i segmenti delle rette aventi come estremi due vertici e non contenenti alcun altro vertice, *celle* i poligoni aventi per lati i lati della configurazione e non contenenti altri lati.

Ad esempio, la configurazione formata da 3 rette possiede 3 vertici, 6 lati e 4 celle.

Il numero dei vertici, dei lati, delle celle di  $\mathcal{A}$  si indicano rispettivamente con  $f_0, f_1, f_2$ . Tali numeri soddisfano alla nota relazione di Eulero:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 1.$$

Diciamo che un vertice ha molteplicità  $n$  se  $n$  è il numero esatto di rette di  $\mathcal{A}$  che passano per tale punto ed indichiamo con  $t_j$  il numero dei vertici con molteplicità  $j$  (per esempio  $t_2$  è il numero di vertici per i quali passano due rette, detti anche punti doppi), per cui si ha

$$f_0 = t_2 + t_3 + t_4 + \dots$$

Indichiamo con  $p_j$  il numero delle celle di  $\mathcal{A}$  con  $j$  lati (per esempio  $p_3$  è il numero delle celle triangolari), per cui si ha

$$f_2 = p_3 + p_4 + p_5 + \dots$$

Ora se sommiamo tutti i vertici con le relative molteplicità, considerato che da ogni vertice di molteplicità  $n$  passano  $n$  rette di  $\mathcal{A}$ , ossia escono  $2n$  lati, ma che ogni lato è comune a due vertici, otteniamo il numero dei lati:

$$f_1 = 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + \dots$$

Sommando tutte le celle con le relative molteplicità, otteniamo tutti i lati, ma contati due volte, perché un lato è comune a due celle:

$$2f_1 = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots$$

Tenuto conto della relazione di Eulero e delle relazioni precedenti si ha

$$3 = 3(f_0 - f_1 + f_2) = 3f_0 - f_1 + 3f_2 = 3t_2 + 3t_3 + 3t_4 + \dots - (2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + \dots) + 3p_3 + 3p_4 + 3p_5 + \dots - (3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots) = t_2 - t_4 - \dots - p_4 - \dots$$

Da cui deduciamo

$$t_2 = 3 + t_4 + \dots + p_4 + \dots$$

e quindi

$$t_2 \geq 3.$$

Il che risolve in modo matematicamente convincente il problema, ma fatto strano sembra che Melchior pur avendolo risolto, non fosse a conoscenza del problema di Sylvester. In ogni caso la dimostrazione del problema è dovuta a Melchior!

**IV** In questa ultima parte enunciamo alcuni risultati, che migliorano il risultato di Melchior, riguardanti configurazioni di rette nel piano, sempre non fasci.

Nel 1951 Motzkin provò che se la configurazione ha  $n \geq 8$  rette allora

$$t_2 \geq 4.$$

Kelly-Moser nel 1958 provarono che se la configurazione ha  $n$  rette con  $n \geq 7$ , allora

$$t_2 \geq \frac{3}{7}n$$

e tale confine non è migliorabile, infatti esiste una configurazione di 7 rette e con 3 punti doppi (vedi [G]).

Nel 1993 Csima e Sawyer provarono che per ogni configurazione di rette con  $n \geq 8$  si ha

$$t_2 \geq \frac{6}{13}n$$

e tale confine non è migliorabile, poiché esiste una configurazione con 13 rette e 6 punti doppi (vedi [G]).

Motzkin e anche Dirac congetturarono che per ogni configurazione di  $n$  rette il numero dei punti doppi è maggiore della parte intera di  $\frac{n}{2}$

$$t_2 \geq \left[ \frac{n}{2} \right]$$

Una lunga dimostrazione di Hansen (circa 100 pagine) del 1981 non ha superato la critica degli esperti.

### Bibliografia

[C-S] J.CSISMA-E.SAWYER, *There exist  $6n/13$  ordinary points*, Discrete and Computational Geometry, 9(1993), 187-202.

[G] B.GRÜNBAUM, *Arrangements and spreads*, Lectures delivered at a Regional Conference on Combinatorial Geometry, University of Oklahoma, Amer. Math. Soc. (1971).

[K-M] L.M.KELLY-W.O.J.MOSER, *On the number of ordinary lines determined by  $n$  points*, Canad. J. Math. 10(1958), 210-219.

[L] X.B.LINN, *Another Brief Proof of the Sylvester Theorem*, Amer. Math. Monthly, 95 (1988), 932-933.



## 136. Lo scaffale dei libri

**Anna Cerasoli, 10+ il genio sei tu, Emme edizioni, 2010**

Anna Cerasoli è tra le più attive divulgatrici della matematica per bambini e ragazzi. In questo libro si cimenta con una fiaba. Chi è asino resta asino per sempre? Chi ha un cervello di gallina non può imparare la matematica? Anna Cerasoli è convintissima che non è vero: con un po' di determinazione e tanta buona volontà "tutto cambia", come diceva il filosofo. Tre asinelli, Bello, Bullo e Snello, girano il mondo finché incontrano tre asinelle e mettono su una fattoria, anzi trovano una vecchia fattoria dove vivono dei vecchietti che non riescono a fare più niente e si mettono di impegno per farne una moderna fattoria. "Cari amici asinelli, siamo quattro vecchietti, quattro bocche da sfamare, otto braccia per lavorare. Voi siete sei, perciò sei bocche da sfamare, ma quante zampe per lavorare? Nessuno riuscì a fare il conto, però tutti furono d'accordo che le zampe erano  $4+4+4+4+4+4$ . Tu sai quante sono in tutto le zampe degli asinelli?" Il racconto viene interrotto qua e là da quesiti, indovinelli ed esercizi di aritmetica che il genitore o la maestra può porre ai bambini, perché la matematica è dappertutto e bisogna esercitarla in continuazione, anche quando si leggono le fiabe. Ma per portare avanti la fattoria non bastano le braccia e le zampe, bisogna appunto saper far di conto e saper risolvere problemi di "alta economia". E' così che uno degli asinelli è costretto ad andare a scuola pur sapendo che gli asini non sono graditi a scuola. Sulla porta del direttore, infatti, un cartello ammonisce: "Guai agli asini". Ma per fortuna c'è un equivoco: "noi abbiamo dichiarato guerra alle persone asine, non agli asini in persona" dice il Preside. E allora il Preside cambia il cartello: "chiunque tu sia, benvenuto a scuola!" E che dire delle galline con il cervello da gallina? "Vi racconto la mia storia, dice una di esse. Quando sentii il padrone della fattoria in cui sono nata dire a sua moglie "non capisci niente perché hai un cervello di gallina", giurai a me stessa: a costo di fondermi, per lo sforzo, quel poco cervello che ho, dimostrerò allo zotico che si sbaglia! Imparerò addirittura i numeri e le quattro operazioni. Subito dopo me ne pentii, perché pensai che si trattasse di cose troppo difficili. Ma non ci misi molto a capire che le quattro operazioni erano già nella mia vita." Come in tutte le fiabe la morale c'è: asini e cervelli da gallina datevi da fare, la matematica è per tutti. Ma c'è una morale per la scuola: è ora che asini con le orecchie da asini e galline con il cervello di gallina siano anche loro i benvenuti nella scuola.

Antonio Bernardo



## Stanilas Dehaene, Il pallino della matematica, Cortina Raffaello, 2010

È con vero piacere che ho letto "Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi" di Stanislas Dehaene.

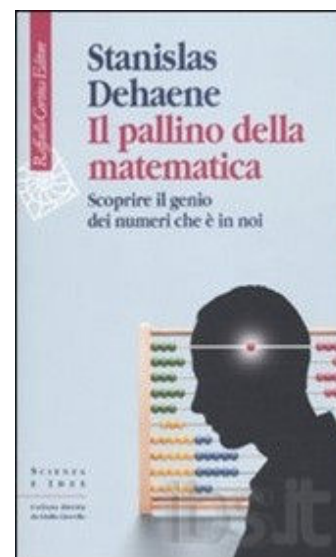
Inizialmente qualcuno può pensare che si tratti di un libro che, come tanti altri, espone in maniera semplice ed accattivante alcuni concetti della matematica, la sua presenza o utilità nella realtà quotidiana, la sua bellezza, il piacere intellettuale che può dare o alcuni aneddoti relativi alla storia di questa disciplina da tante persone odiata e ritenuta ostica.

In realtà, leggendolo si scopre tutt'altro: vengono indagati i motivi della diversa predisposizione verso la matematica da parte delle persone. L'autore, che insegna psicologia cognitiva sperimentale al Collège de France, espone qui i risultati delle sue ricerche sull'argomento in questione. Il libro collega così la matematica e la psicologia, molto distanti tra loro nell'immaginario comune (ma non mancano neanche riferimenti ad altre discipline, come la linguistica).

Nel corso della lettura si scopre che esistono delle strutture cerebrali alla base delle capacità matematiche già presenti nei bambini piccoli in età prescolare, in popoli con una cultura matematica molto ridotta e addirittura in diverse specie animali. La struttura cerebrale di base non è tutto: l'autore indaga su come questa possa essere influenzata dalla struttura linguistica, dall'educazione e dall'esperienza scolastica e propone, alla fine del testo, anche alcune soluzioni per migliorare le situazioni di difficoltà. Il pallino della matematica, così, risulta utile per chi si interessa di psicologia, per gli insegnanti della scuola primaria, per i genitori di bambini affetti da discalculia o più semplicemente con difficoltà in matematica, ma può essere utile anche per i genitori di bambini privi di debolezze in questa materia.

Un altro aspetto positivo di questo libro è che esso mostra il metodo scientifico, il metodo con cui procede un ricercatore, e ben rappresenta il tipo di quesiti che ci si pone durante un'indagine scientifica.

Un'ulteriore chiave di lettura può essere offerta ai matematici per capire meglio la propria disciplina. Ad esempio, in matematica l'impalcatura dei numeri viene costruita a partire da quelli naturali per giungere soltanto in un momento successivo a quelli reali. Si parte, cioè, dal discreto per giungere al continuo. Leggendo il libro si scopre che in realtà nel nostro cervello le cose non sono definite così nettamente... ma anche che la matematica dal punto di vista fisiologico non è così esatta come invece è stata poi costruita dalla nostra evoluzione culturale. Evoluzione che, come la selezione naturale darwiniana, ha portato ad eliminare quella parte della matematica risultata non efficace. Allo stesso modo il nostro cervello si è evoluto con una struttura matematica perché così



riesce meglio a comprendere l'ambiente ed interagire con esso con successo. Queste considerazioni costituiscono una parziale risposta al quesito posto dal matematico Jacques Hadamard: "Verrà mai il giorno in cui i matematici ne sapranno abbastanza di fisiologia del cervello e i neurofisiologi saranno abbastanza al corrente delle scoperte matematiche, perché sia possibile una cooperazione efficace?".

Forse un limite di questo libro è che esso si riferisce alla matematica così come la si considera usualmente, riducendola all'abilità nel fare i calcoli e nel lavorare con i numeri. Questo, però, è soltanto una parte della matematica: quella parte che fondamentalmente abbiamo imparato a conoscere nella scuola elementare e media inferiore e che nell'immaginario comune rappresenta la matematica stessa. In realtà, il matematico non è colui che fa i conti, il matematico ragiona. Essere matematico, cioè, va ben oltre possedere la mera tecnica di calcolo, così come essere un letterato, un poeta, uno scrittore non significa soltanto saper leggere un testo o comporre un tema come si fa nelle scuole elementari o medie. Ad ogni modo, sicuramente l'aritmetica costituisce la base, il punto di partenza.

Concludendo, considero *Il pallino della matematica* un libro interessante. Consiglio di leggerlo per approfondire quanto qui accennato e scoprire tutto il resto.

Buona lettura!

Antonietta Fadda

**MAGAZINE**  
**MATEMATICAMENTE.IT** *Rivista trimestrale di matematica,  
per curiosi e appassionati  
distribuita gratuitamente sul sito*

---

**Anno 4 Numero 13 AGOSTO 2010**

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo  
[antoniobernardo@matematicamente.it](mailto:antoniobernardo@matematicamente.it)