Matematicamente.it Magazine

Rivista di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it
Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Anno 1 – Numero 2 *Aprile 2007*

http://www.cosmos2001.info

NEWS - METALLICA: UN RACCONTO – NUOVA DIDATTICA PER LA MATEMATICA - SUPERFICI NON ORIENTABILI - TEORIA DEI GIOCHI - ZODIACO - ESAME DI STATO - DISQUISIZIONI SULL'ARITMETICA - INTEGRALI FRATTI - CALCOLO DELLE VARIAZIONI NEL TRATTAMENTO DELLE IMMAGINI - TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE - ASTEROIDI

Sommario

Editoriale

In questo numero, pubblichiamo il primo di sei racconti matematici di Anna Cerasoli, scrittrice e divulgatrice di successo.

Andrea ci ricorda che il 14 marzo è stato il giorno della festa della matematica, il "Pi day".

Luca ci parla delle superfici non orientabili e tra gli aspetti di frontiera della ricerca matematica ci spiega cosa centra il calcolo delle variazioni con la correzione delle immagini digitali.

Fioravante ci descrive un importante risultato della teoria dei giochi: come prendere decisioni di gruppo rispettando le preferenze dei singoli.

Michele ci parla dello zodiaco … ma non da astrologo mentre Domenico ci presenta i nostri vicini scomodi dello spazio.

Luigi ricorda a studenti e docenti che è tempo di esami. Bindo, Cerasoli e Costabile invitano a rinnovare l'insegnamento della matematica.

Flavio ci fa riflettere, anche in questo numero, su una coincidenza matematica: derivata e integrale provengono da strade diverse e si incontrano nel teorema fondamentale del calcolo.

Carlo ci spiega come funziona Mathcad.

E per finire vi segnaliamo qualche libro da leggere e qualche giochino, speriamo simpatico.

Che dire del numero precedente? Il server segna 20.307 download in tre mesi. Non tutti quelli che l'hanno scaricato l'hanno letta, d'altra parte nemmeno tutti quelli che comprano le riviste cartacee poi trovano il tempo di leggerle. Direi che 20.000 lettori non sono pochi per una rivista di matematica. Andiamo avanti così!

Antonio Bernardo

News

di Andrea Vitiello

Il π day

Scommetto che la maggior parte dei lettori di questa rivista ha recentemente perso una grande occasione… Dite la verità: quanti di voi il 14 marzo hanno festeggiato il Pi Day?

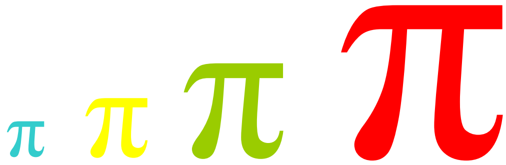
Per chi non lo sapesse, il Pi Day è una festa, non ufficialmente riconosciuta, in onore del celebre numero π, una delle più note, forse la più celebre, tra le costanti matematiche. Effettivamente questo numero è presente un po' dappertutto in quasi ogni ramo della matematica e della fisica ed è lecito dunque chiedersi da dove sia saltato fuori.

La storia di π ebbe inizio molto tempo fa, quando qualcuno si accorse che il rapporto tra la misura della circonferenza e quella del diametro di un cerchio è costante. Ecco dunque uno dei possibili modi per definire π: rapporto tra circonferenza e diametro. Stabilito che tale rapporto si mantiene costante, il problema successivo fu quello di quantificarlo esattamente.

Credo sia bene precisare che in origine non si utilizzava certo la lettera greca π per indicare il numero in questione, anche perché si sta parlando di un'epoca precedente al fiorire della civiltà ellenica; la convenzione di adoperare il simbolo π si è diffusa soltanto a partire dal 1706, per opera dell'inglese William Jones.

Già i Babilonesi e gli Egizi trovarono modi ingegnosi per approssimare il valore di π e via via col passare dei secoli si è riusciti a raggiungere una precisione sempre maggiore; addirittura con i computer moderni si è arrivati a calcolarne centinaia di miliardi di cifre decimali. Un valore numerico esatto non lo si troverà mai, visto che nel 1767 Johann Heinrich Lambert ha dimostrato l'irrazionalità di π.

Un'altra importante caratteristica di questo numero fu provata nel 1882 da Ferdinand von Lindemann, il quale dimostrò che π è trascendente, cioè non può essere soluzione di nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi non tutti nulli. Agli studenti delle scuole elementari tuttavia, per semplicità, π viene presentato semplicemente come 3,14 ed è proprio su questa semplice e nota approssimazione che si basa gran parte delle usanze relative al Pi Day.



L'idea di istituire una festa che celebrasse il numero π è da attribuire all'Exploratorium, importante Museo della Scienza con sede a San Francisco, in California. La scelta della data, 14 marzo, non è affatto casuale, anzi può risultare ovvia se ci si presta attenzione: nei paesi anglosassoni le date si indicano scrivendo prima il numero del mese e poi quello relativo al giorno ed ecco che la scrittura "3-14" indica appunto il 14 marzo. L'istituzione del Pi Day è piuttosto recente: i primi festeggiamenti risalgono infatti al 1987. Purtroppo la cultura del Pi Day non si è ancora diffusa in Italia, a differenza degli Stati

Uniti, dove invece è molto presente, soprattutto negli ambienti universitari.

L'Exploratorium, da cui è partita l'idea dell'omaggio a π, il 14 marzo scorso ha dato il via alla festa, come di consueto, esattamente un minuto prima delle due del pomeriggio. Perché proprio quell'ora? Semplici virtuosismi da matematici: difatti quell'orario secondo la convenzione americana si scrive come "1.59 p.m."… guardando le prime cifre decimali di π (3,14159...), sarà immediatamente chiaro come non ci sia momento più adatto per cominciare i festeggiamenti!

Molte delle attività che si svolgono solitamente durante la festa, non solo presso l'Exploratorium, sono legate a doppi sensi e giochi di parole. Innanzitutto è interessante notare che gli anglosassoni pronunciano "π" allo stesso modo in cui pronunciano la parola "pie", che in italiano vuol dire "torta". In tutti i luoghi in cui si festeggia il Pi Day non possono dunque mancare torte dalle forme e dalle decorazioni a tema con ciò che si celebra; alcune torte ad esempio sono quadrate, per via della famosa formula per il calcolo dell'area di un cerchio "πr^2", che letta in inglese suona come "pie are squared" (traduzione italiana: "le torte sono quadrate"!?). Oltre alle torte, un altro cibo molto in voga è la pizza, mentre tra le bevande la più diffusa è la piña colada (un cocktail a base di rum).

Oltre ad essere un momento goliardico, il Pi Day costituisce un'occasione importante per le scuole per realizzare progetti di diffusione delle conoscenze circa la storia, i metodi di calcolo approssimato, le proprietà più importanti e originali del numero π. Alcune associazioni tengono conferenze in cui si mette in risalto il ruolo che π ha avuto nella storia dell'umanità e si prova a immaginare come sarebbe il mondo senza π. Non mancano i momenti di declamazione: qualcuno particolarmente volenteroso declama a tutti i partecipanti il maggior numero di cifre decimali di π che è riuscito ad imparare a memoria.

Il fenomeno del Pi Day è in rapida ascesa: basti pensare che presso università importanti come Harvard e il MIT viene celebrato regolarmente ogni anno ed è ormai una ricorrenza molto sentita. Addirittura ad Harvard, ormai da diversi anni, momenti cardine come la degustazione di torte e la declamazione delle cifre decimali hanno assunto un carattere competitivo.

Si svolge infatti una vera e propria gara di degustazione, nella quale i concorrenti devono cercare di mangiare il maggior quantitativo possibile di torte nel tempo previsto, che ovviamente è di 3 minuti e 14 secondi. L'altra sfida importante è quella di declamazione, in cui i partecipanti devono recitare a memoria tutta la sequenza di cifre decimali di π che conoscono ed ovviamente vince chi riesce a ricordarne di più; quest'anno la campionessa in carica Serena Rezny, vincitrice anche delle due edizioni precedenti, si è aggiudicata nuovamente la gara battendo ogni record e superando la soglia delle 1000 cifre (per la precisione è riuscita a recitare correttamente i primi 1058 decimali di π).

Dolci per un Pi Day svoltosi negli Usa.

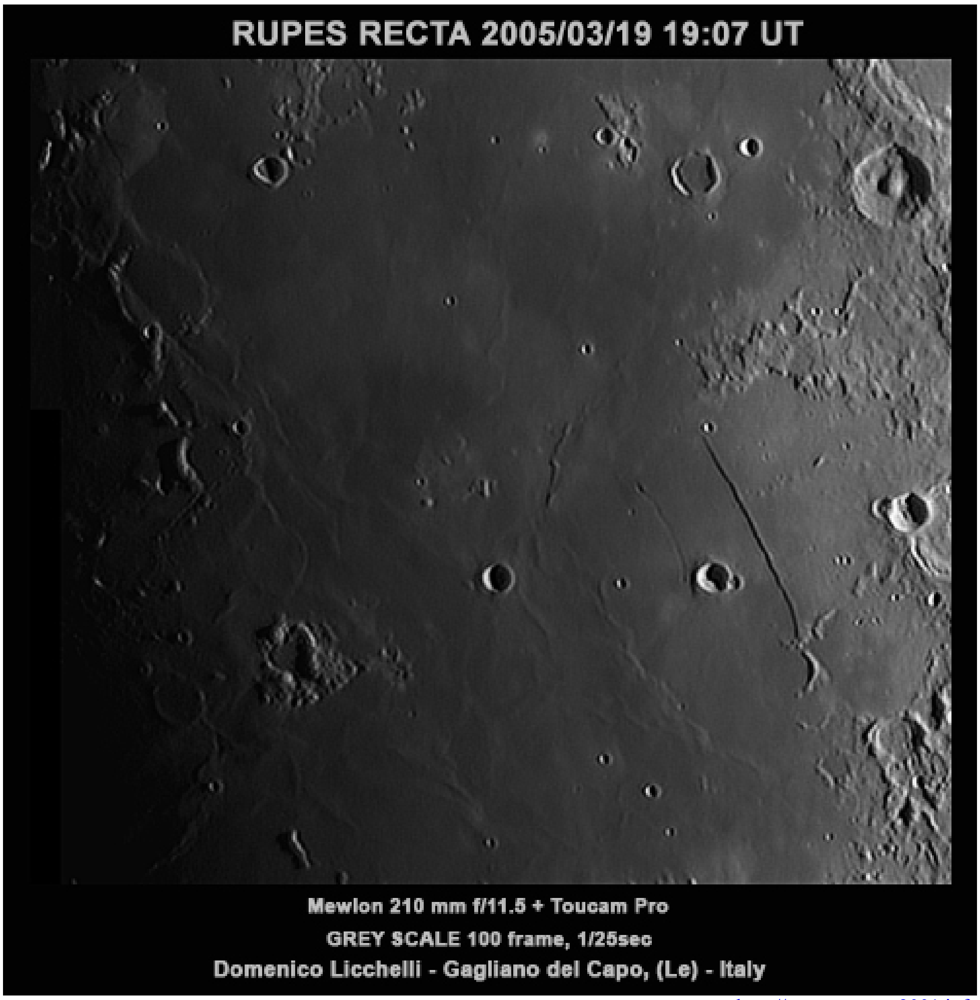
Una curiosità: il 14 marzo è una data che non passava inosservata agli occhi dei matematici già molto tempo prima dell'istituzione del Pi Day, difatti si dà il caso che il 14 marzo 1879 sia nato Albert Einstein.

Sulla scia dell'entusiasmo, alcuni europei hanno deciso di fare festa anche il 22 luglio di ogni anno. Cosa festeggiano? Il Pi Approximation Day. Secondo il format europeo, quella data si indica come "22/7"… e il numero razionale

22/7 è una delle più conosciute approssimazioni (per eccesso) di π, già nota nel III secolo a.C. ad Archimede. Una buona notizia per tutti coloro che il 14 marzo non hanno festeggiato; potranno rifarsi il 22 luglio. Ma festeggiare il 22 luglio sarà lo stesso che festeggiare il Pi Day? Beh… *approssimativamente* direi di sì!

E in Italia?? In verità, la cultura del Pi Day non si è ancora radicata appieno nel nostro paese. Un buon segnale, tuttavia, è arrivato quest'anno dal Politecnico di Torino, che lo scorso 14 marzo ha ospitato, nell'ambito del progetto Polymath, delle lezioni sul numero irrazionale più famoso della storia e anche una gara tra studenti a chi ricordasse il maggior numero di cifre decimali di π.

Noi di *Matematicamente.it* non potevamo lasciar passare il Pi day senza alcuna iniziativa e quest'anno abbiamo fatto partire una gara di matematica per le scuole medie, la "MatematiCup". Una grande gara on line in collaborazione con l'Università del Salento e il Gruppo Editoriale L'Espresso.



http://www.cosmos2001.info

MATEMATICUP

Alunni delle scuole medie di tutta Italia, preparatevi!
Siete bravi in matematica? E' arrivato il vostro momento!

Matematicamente.it, **Kataweb** e il **DIDA-lab** dell'Università del Salento, in collaborazione con **Repubblica Scuola&Giovani, L'Espresso online, Le Scienze, DEEJAY** e **ALLMUSIC**, organizzano "***MatematiCup***", prima gara nazionale di matematica a squadre completamente on line, patrocinata dai **Dipartimenti di Ingegneria dell'Innovazione, Matematica, Scienze Economiche e Matematico-statistiche dell'Università del Salento**, dall'associazione **Mathesis, Società italiana di scienze matematiche e fisiche**.

Iscrizioni dal 14 marzo, al 5 maggio, allenamenti fino al 7 maggio, finale l'8 maggio.

Aperta agli studenti di tutte le classi della scuola secondaria di primo grado (media inferiore), ***MatematiCup*** punta a stimolare l'interesse dei giovani nei confronti della matematica, sviluppare la collaborazione in gruppo attraverso la rete Internet e incentivare l'uso consapevole e formativo delle tecnologie informatiche.

14	**14 marzo apertura iscrizioni**	**8**	**8 maggio il giorno della finale**
12	**Gli alunni per classe**	**3**	**I computer collegati ad internet per giocare**
50	**I quesiti da risolvere nella gara finale**	**per iscriversi** http://www.matematicamente.it	

Partner editoriali

Partner scientifici

Metallica
1. Oggi cosa mi metto?

di Anna Cerasoli

Metallica è il soprannome della mia amica Lucia, che a chiamarla col nome della santa va su tutte le furie: "perché è una ingiustizia che uno il proprio nome non se lo possa scegliere da sé!" E' una ribelle in tutto Metallica, e lo si capisce già da come ti lancia il primo sguardo. Se poi non bastasse, è sufficiente una ricognizione a tutte le chincaglierie che si mette addosso per avere un'idea del suo caratterino. A dire il vero, da un po' di tempo, noto qualche alleggerimento nell'armamentario decorativo: dice che, a pensarci su, anche quelle stanno diventando regole. E lei con le regole proprio non va d'accordo; "le uniche buone" aggiunge "sono quelle matematiche". Sì, perchè a Metallica la matematica piace, anzi, è l'unica materia a piacerle! Per il resto, specie in latino e a storia, è una frana; la sua salvezza è che alla fine dell'anno si mette sotto a studiare come una matta e recupera.

A matematica, invece, è una specie di genio; mentre il professore interroga o spiega, lei gli tiene gli occhi addosso e in qualunque punto riesce a intervenire. Metallica non è una gran bellezza ma in quei momenti mi sembra meravigliosa. Come l'altro giorno, quando il prof ha cominciato una dimostrazione e a un tratto ha chiesto: "C'è qualcuno che sa continuare?" Silenzio di tomba, con tutti che si accucciavano dietro le spalle di quello davanti per timore d'essere chiamati alla lavagna. Lei tranquilla, non diceva niente, ma nemmeno si nascondeva. E allora il prof: "Vuoi provarci tu?" rivolgendosi a lei.

E' uscita dal banco, ha preso il pennarello che lui le porgeva e ha cominciato a scrivere. Si sentiva solo il tintinnio dei suoi braccialetti. E' andata avanti a scrivere e a disegnare mentre noi mortali prendevamo appunti. E alla fine ha concluso scrivendo il mitico

C V D

Come Volevasi Dimostrare!

Faceva l'indifferente ma io l'ho capito che era orgogliosa!

I maschi della mia classe vanno dietro alle ragazze più belle, che sono anche le più eleganti, sanno ballare e hanno sempre visto l'ultimo film che è uscito. Da un po', però, anche loro si sono accorti di Metallica e questo mi preoccupa perché io sono un tantino timido e già così faccio fatica a dimostrarle che esisto.

Per fortuna oggi il prof ha fatto i gruppi di studio ed io sono capitato con lei: dobbiamo ripassare il calcolo combinatorio, perché lunedì prossimo ci darà la verifica scritta. Gli altri mi hanno lanciato occhiate complici: lo sanno che ho un debole per Metallica, e forse pure il prof l'ha capito... L'unica che non s'è accorta di nulla è proprio lei; meglio così, altrimenti sarei ancora più impacciato.

E' venuta da me già nel primo pomeriggio perché poi, verso le sei, aveva un impegno. Chissà che impegno?! Spero non abbia già un ragazzo. Ci siamo messi in camera mia dove ho una scrivania molto grande, sulla quale avevo piazzato il libro di testo, il quaderno di appunti e un pacco di fogli di brutta. Lei vi ha aggiunto il suo quaderno, il diario stracolmo di adesivi e infine la calcolatrice: da come l'ha estratta dalla tasca posteriore dei jeans e l'ha appoggiata alla sua destra mi ha fatto pensare alla colt dell'Infallibile Pistolero. E in quel preciso momento ho deciso che questo benedetto calcolo combinatorio io lo voglio sapere alla perfezione, voglio risolvere tutti i problemi che il prof ci dà, voglio che lei, prima o poi, mi chieda di confrontare i risultati di qualche esercizio! Sì proprio a me!

"Dunque", ha cominciato senza tanti complimenti "alla fine, quando avremo studiato tutto l'argomento, dovremmo saper rispondere ai quesiti che stanno in fondo al capitolo:

1) In quanti modi si possono scegliere 2 studenti da una classe di 20 alunni, come rappresentanti al consiglio di classe?

2) Quante sono tutte le possibili schedine che devo giocare per esser certo di vincere al totocalcio?

3) Se lancio 3 monete, mi conviene scommettere che escano 2 teste e una croce oppure che escano 3 croci?

4) In quanti modi posso ordinare il pranzo in un ristorante che nel menù propone 3 primi, 5 secondi e 4 dessert?

5) Come possono classificarsi i 5 concorrenti ad una corsa?

6) In quanti modi 3 persone che si trovano in ascensore possono fermarsi nei 4 diversi piani dello stabile?

"Che te ne pare?" ha concluso aprendo gli appunti del prof "Sono quasi dei rompicapo. Forse c'è da divertirsi."

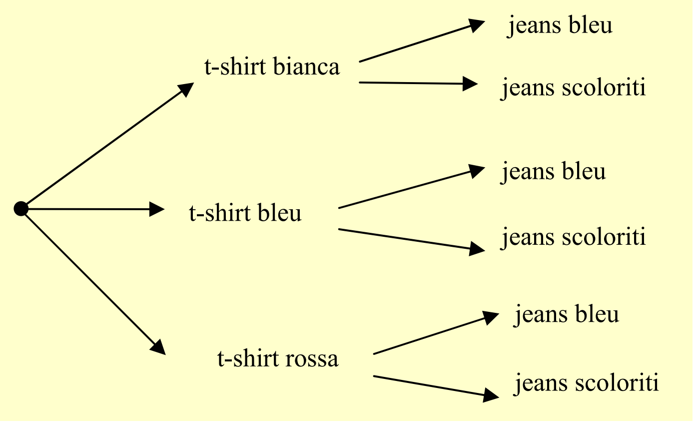
"Sì, certo" ho risposto convinto, ma in cuor mio avrei voluto aggiungere 'Con te troverei divertente qualunque argomento. Pure imparare a memoria l'elenco telefonico!'

"Senti" ha continuato decisa "io direi di seguire gli appunti perché, con questa storia dei modelli, il prof la fa molto semplice, senza tante complicazioni di nomi difficili, come qui sul libro."

Le ho dato ragione perché, in effetti, mentre il prof spiegava mi sembrava di capire senza fatica.

"Allora seguimi e dimmi se sei d'accordo" ha esclamato col suo piglio combattivo. "Lui dice che, in tutto, ci sono solo sei tipi di problemi e la cosa importante, quando ci si trova di fronte ad un quesito di calcolo combinatorio, è saper riconoscere a quale di questi tipi appartiene. Poi è facile applicare la formula per avere il risultato. Insomma, i sei tipi di problemi sono come sei modelli a cui tutti gli altri assomigliano. In effetti, la parola modello, mi fa pensare al modello della sarta: lo schema dell'abito è fisso, puoi cambiare la taglia, il colore della stoffa o il tipo di bottoni ma un tailleur è sempre un tailleur, mentre un cappotto è sempre un cappotto. Il primo modello, che lui chiama modello '*cosa mi metto?*', si presenta così:

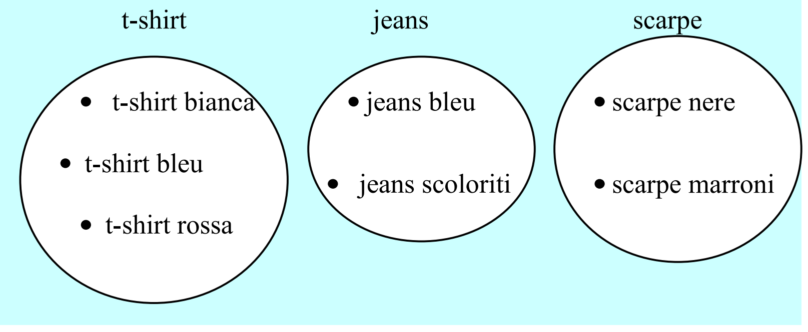
Sono davanti allo specchio e devo scegliere cosa indossare tra 3 t-shirt e 2 jeans. In quanti differenti modi posso vestirmi? Questo è lo schema che aiuta a fare i conti. E' il classico diagramma ad albero.



"Beh!" sono intervenuto "Mi sembra un problema facile, lo schema spiega tutto: per trovare il risultato basta moltiplicare 3×2, il numero delle t-shirt per il numero dei jeans. E se poi volessi abbinare anche 2 paia di scarpe dovrei moltiplicare 3×2×2 e così avrei tutti i diversi modi di vestirmi!"

Metallica per la prima volta mi ha guardato con un certo interesse e ha aggiunto: "Sì, hai ragione. E poi osserva qua, tra i quesiti in fondo al capitolo, ce n'è uno che possiamo già risolvere, secondo me ha lo stesso modello del nostro: in quanti modi posso ordinare il pranzo in un ristorante che propone 3 primi, 5 secondi e 4 dessert? Se si disegna un diagramma ad albero, verrà fuori che posso farlo in 3×5×4, cioè 60, modi diversi! Sono tutte le possibili terne del *prodotto cartesiano* tra i tre insiemi Primi, Secondi e Dessert. Sei d'accordo?

Insomma, riassumendo, mi pare che il modello di questo tipo di problema consista nell'avere alcuni insiemi e nello scegliere un solo elemento da ciascuno.



Il numero di tutti gli abbinamenti possibili si trova moltiplicando il numero di elementi del primo insieme per quello del secondo insieme, per quello del terzo... e così via se gli insiemi sono più di tre."

"Vuoi fare una merenda?" ho proposto e, cercando di fare lo spiritoso, ho aggiunto "Possiamo scegliere tra un tè o un succo di frutta che potremmo abbinare con un panino o una fetta di crostata. A conti fatti ti offro 4 abbinamenti: quali sono i tuoi gusti?"

Lei ha risposto con uno di quei sorrisi che mi fanno tremare le ginocchia e poi ha scelto il tè con la crostata. Subito dopo ha proposto di continuare a studiare ed io avrei voluto chiederle con chi avesse quell'impegno importante delle sei ma, accidenti alla mia timidezza, sono riuscito solo a dire 'va bene, continuiamo'. Altro che calcolo combinatorio, io dovrei frequentare un corso di autostima!

****

La storia di Metallica continua sul prossimo numero. Nel frattempo esercitati a cercare tu esempi di problemi reali che si risolvono con il prodotto cartesiano.

Per una nuova didattica della matematica

di Tiziana Bindo, Mauro Cerasoli, Carlo Costabile

Perché gli esaminatori pongono le domande ai candidati in maniera così complessa?

Sembra che abbiano paura di farsi comprendere dagli interrogati. Da dove trae origine questa deplorevole abitudine di complicare i problemi con difficoltà inventate?

Evariste Galois, 21 gennaio 1831

Premessa

Sempre più frequentemente gli studenti manifestano un grave disagio nei confronti della matematica; alcune indagini recenti hanno evidenziato che è considerata una scienza astratta, lontana dalle loro esperienze e dai loro interessi, di scarsa o nessuna utilità per la vita di tutti i giorni. "Una montagna fredda e temibile", troppo difficile da scalare, un'impresa a cui spesso si rinuncia in partenza.

Questo disagio è peraltro confermato dai docenti, che lamentano una crescente difficoltà ad avviare il processo educativo e instaurare un dialogo costruttivo. Gli educatori trovano sempre più difficile ed estenuante interessare e coinvolgere gli allievi in un percorso di apprendimento, tenuto conto dei brevi e rari momenti che i giovani sono disposti a dedicare allo studio "codificato".

L'esigenza di un rinnovamento nella didattica della matematica è ormai ampiamente condiviso da tutte le componenti della scuola e dell'università. Alle "tradizionali motivazioni" interne alla dinamica didattica, principalmente legate alle difficoltà di apprendimento, si stanno aggiungendo e sovrapponendo nuove e pressanti esigenze provenienti dal mondo esterno.

L'attuale "società della conoscenza" richiede, a ogni livello, un continuo aggiornamento delle conoscenze e delle competenze individuali. Per affrontare e risolvere problemi e compiti del quotidiano e svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società, non solo è indispensabile saper utilizzare conoscenze ed abilità tradizionali, ma occorre anche usare tecnologie e informazioni moderne.

1. Introduzione

L'esistenza di software di calcolo simbolico e di grafica digitale o di calcolatrici dotate di *Computer Algebra System* (CAS) modifica ormai radicalmente i contenuti dei corsi di matematica e le modalità d'insegnamento.

Così come più nessuno calcola radici quadrate, o logaritmi o seni a mano o con le tavole, ma con le calcolatrici, analogamente bisogna individuare quegli argomenti di matematica che sono destinati a fare la stessa fine.

Un tempo, la stessa calcolatrice scientifica era vietata all'esame di stato con la motivazione che non tutti gli studenti la possedevano. Oggi, questo divieto vige per quelle dotate di CAS, con la stessa motivazione, sebbene i costi siano scesi al livello della portata di tutti e una calcolatrice costi meno di uno zainetto firmato o di un telefonino. Per non parlare dei computer portatili che ormai quasi ogni studente possiede. Ad esempio (Sessione Suppletiva esame di stato LS 2004/2005 PNI) si chiede di calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} (1-x)^{1/x}$$

Basta scriverlo su una tastiera di computer attrezzato con *TI InterActive!* (e fra poco anche su TI Nspire) per avere subito la risposta nella forma

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt[x]{1 - x}\right) = e^{-1}$$

o su una calcolatrice CAS, ad esempio la TI 89, per sapere che vale 1/e. (Risposta 5 nel quiz).

2. Argomenti da eliminare

Per un politico, i tagli, per la sanità o per la spesa pubblica, sono la cosa più difficile da effettuare. Questa dolorosa operazione è necessaria anche per la matematica. Già è ormai troppo tardi per sedersi a un tavolo e mettere in chiaro cosa bisogna eliminare. Prima si fa e meglio è.

L'odio per la nostra materia è arrivato a livelli mai visti prima. Il cittadino medio si vanta addirittura di non capire nulla di matematica e afferma orgoglioso di disprezzarla. E pensare che è il miglior prodotto della mente umana. Qualcuno ha scritto infatti: *se Dio esiste, allora deve essere un puro matematico*. Vogliamo provare a smettere di fare, a titolo puramente indicativo:

a) i radicali, nel senso di calcoli inutili con i radicali che non sono serviti mai a niente;

b) i quattro metodi di risoluzione dei sistemi lineari due per due, visto che li risolve il computer in modo automatico anche quando i coefficienti sono numeri del tipo, 3,14159 o 2,7182818 o 1,7321 e 1936,27 ecc. cioè numeri veri con la virgola e con tante cifre e non quelli inventati come 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3 ecc. che quasi sempre stanno nei sistemi proposti;

c) le formule di trigonometria che venivano usate per applicarvi i logaritmi;

d) il calcolo di limiti, derivate, integrali di espressioni artificiose e complicate e quindi inutili;

e)…………..

3. Il nuovo da mettere

Alcuni argomenti di matematica discreta (come: alberi, grafi, funzioni aritmetiche, geometrie finite ecc. oppure frattali, variabili aleatorie, simulazioni Monte-Carlo, teoria dei giochi, tanto per fare dei nomi) possono essere inseriti nei programmi. D'altra parte non ci sembra che tali argomenti siano stati trattati e proposti in modo adeguato dagli estensori di *Matematica 2003 - La matematica per il cittadino*, di recente pubblicazione con enfasi inneggiante alla novità.

A titolo esemplificativo la seguente tabella riporta le analisi effettuate da un paziente negli ultimi anni:

Anni	Col	LDL	GGT	T	G	A
1985	201	135		92	90	
1991			56			
1992	273		61	125	113	
1997	263		70	153	82	24
2000	261		148	252	94	
2001	274		122	168		58
2002	244		143	180	86	
2004	252			121	98	55
2005	244	175	105	151	88	45

Eliminati la prima riga e la prima colonna si ottiene la nuova tabella:

201	135		92	90	
		56			
273		61	125	113	
263		70	153	82	24
261		148	252	94	
274		122	168		58
244		143	180	86	
252			121	98	55
244	175	105	151	88	45

Questa tabella è una matrice? No, perché ci sono delle caselle prive di numeri: sono i casi in cui non sono stati rilevati dati al paziente. Allora che cosa è da un punto vista matematico tale tabella? Gli autori di questa nota non lo sanno. A cosa servono le matrici se si hanno tabelle come questa prive di significato matematico?

Visto che negli ultimi tempi sta furoreggiando il gioco del Sudoku, qual è la matematica necessaria per vincere? In quale programma ministeriale è svolta?

La disciplina che doveva essere una delle maggiori novità nella nuova didattica della Matematica, sia per le sue innumerevoli applicazioni che per l'importanza che riveste nell'educazione civica del cittadino, educandolo al dubbio e tenendolo fuori dai fondamentalismi e dalle certezze assolute, cioè la Probabilità, è poco insegnata. E ciò rattrista l'animo sapendo inoltre che il metodo Monte Carlo è stato una delle prime applicazioni delle *nuove tecnologie* e sia oggi uno dei maggiori motivi per cui si usa il computer, nei dipartimenti scientifici e non, delle università di tutto il mondo.

Steven Strogatz, docente di Matematica Applicata alla Cornell University, nel 2004 ha scritto per il New York Times un articolo dedicato alle grandi scoperte scientifiche di cinquanta anni fa. Si legge tra l'altro: "Il vero eroe scientifico del 1953 fu Enrico Fermi. Quella del DNA non fu la sola a cambiare il corso della storia: un'altra, quella degli esperimenti col computer, o simulazioni al computer come si dice oggi, fu altrettanto importante. […] Fermi non va ricordato solo come lo scopritore dell'atomo, ma anche come l'uomo che trasformò il computer *nel telescopio della mente*". Nell'ultimo mezzo secolo, scrive ancora Strogatz, la via da lui aperta ci ha aiutato a vedere l'invisibile e a immaginare l'inimmaginabile.

Ma da noi è ancora poco noto il metodo Monte Carlo, quando esso è un modo di pensare che sta facendo fuori buona parte della matematica classica nel senso di renderla obsoleta o semplicemente inutile. Questo però è un discorso che va approfondito e chiarito in altra sede.

4. A proposito di Storia della Matematica

Per qualcuno la novità potrebbe consistere nell'inserimento di argomenti di *Storia della Matematica*. Ben venga la storia purchè si tratti di storia pertinente, cioè, quegli episodi che contribuiscono alla comprensione e all'approfondimento di concetti di matematica. Vanno bandite, invece, le notizie che si riferiscono e riguardano fatti personali o secondari e privi di contenuto matematico. Ad esempio bisogna evitare di parlare di Pitagora che non gradiva le fave, tralasciando il suo teorema e le applicazioni. Ugualmente si dica pure di Galois, accanito repubblicano, che morì in duello a 21 anni a patto che prima si sia spiegato bene che cosa è un gruppo e che Galois sia stato il primo a introdurre tale concetto, precedendo Ruffini e Abel. Ugualmente ci interessa poco sapere della famiglia di Hilbert, se aveva figli maschi o femmine e quanti, o che morì cadendo dal tram: a noi interessa sapere se David ha risolto o no definitivamente il problema fondamentale degli invarianti nella teoria delle forme quadratiche binarie.

Così lasciamo pure pubblicare a Novella 2000 e a programmi televisivi dello stesso genere fatti ed aneddoti di matematici che non hanno attinenza con enti e concetti di matematica.

Siamo, ovviamente, favorevoli ad aneddoti e storielle come i problemi di Delo e di Didone o i ponti di Konisberg di Eulero o il primo problema risolto da Gauss bambino, perché possono servire a dare un volto più umano alla Matematica.

Come scriveva il Manzoni: *adelante Pedro i con judicio*. Altrimenti facciamo come i letterati che parlano di Giulio Cesare, di quando è nato e quando è morto, che una delle quattro mogli si chiamava Calpurnia e la figlia Giulia, ma nessuno ha mai letto una riga del *De Bello Gallico*.

Per un maggiore approfondimento sui pericoli insiti in un cattivo insegnamento della Storia della Matematica, spesso confusa con la storia della matematica greca, si rimanda al capitolo *Una cattiva lettura della storia della matematica* che appare a pag. 93 del volume *Pensieri Discreti* di Gian Carlo Rota, edito da Garzanti nel 1993.

5. Il dramma della pedagogia invasiva

Negli ultimi anni si è spostato un po' troppo l'accento sul piano delle cosiddette *scienze dell'educazione* a scapito dei contenuti. Non c'è alcun dubbio sul fatto che l'insegnante nella scuola di oggi abbia bisogno, e in misura molto maggiore dell'insegnante nella scuola di un tempo, di conoscenze che vanno al di là della materia che insegna, e in particolare di fondamenti di psicologia e pedagogia, ma questo non deve voler dire abdicare al piano dei contenuti o peggio infiocchettarlo con qualche nozione pedagogica. Piuttosto, si dovrebbe cercare, nelle sedi opportune, un rapporto proficuo con gli studiosi di Scienze dell'Educazione, in modo che ognuno porti le competenze che gli sono proprie nel processo di formazione degli insegnanti, senza indebite deleghe dall'una e dall'altra parte.

Tornando ai contenuti, e cercando di esplicitare cosa possa voler dire "spostare l'accento sui contenuti", sono tre i punti su cui articolare un intervento su questi problemi.

Il primo è uno sforzo teorico, che vada nella direzione di identificare i nuclei fondanti irrinunciabili nell'insegnamento preuniversitario, non con lo scopo di *diminuire* il sapere matematico che si chiede alla scuola di trasmettere ai ragazzi, ma con lo scopo di lasciare il massimo spazio *alla libertà individuale dell'insegnante* per quel che riguarda le possibili, diverse, aggiunte rispetto a un sapere minimale.

È inutile ossessionare gli insegnanti con l'idea che sia assolutamente necessario trattare trecento argomenti, quando tutti sappiamo che di questi trecento ce ne saranno sì e no tre o quattro che si possono dare per effettivamente acquisiti al termine della scuola, e che per quelli che continuano gli studi nei corsi di laurea delle Facoltà Scientifiche già la vita sarebbe più facile se quelli acquisiti fossero una decina, magari insieme a un po' di idee chiare sullo spirito di cosa vuol dire fare matematica.

Cerchiamo quindi di trovare la maniera per lasciare agli insegnanti sufficiente tranquillità per operare dei tagli, e anche sufficiente spazio per viceversa approfondire degli argomenti sulla base della semplice motivazione che a loro piacciono di più di altri, o per cogliere e sfruttare eventuali occasioni che volta a volta si presentano, e che, per essere sviluppate, richiedono però del tempo e quindi dei tagli su altri fronti.

Dopotutto tutti noi sappiamo, più dalla nostra esperienza di studenti che da quella di insegnanti, che è facilissimo distinguere quando un insegnante tratta un argomento che gli piace e quando no: se un insegnante non si sente sicuro di ciò che insegna, o non ama quello che insegna, continuerà a non essere sicuro e a trasmettere insicurezza e a non divertirsi e a trasmettere indifferenza o repulsione.

Il primo *comandamento* del *decalogo* di Polya per l'insegnante è proprio "*abbi interesse per la tua materia*" e purtroppo, non è affatto facile per un insegnante tenere fede a questo "comandamento" nel dilagare di impegni e coinvolgimenti su mille fronti che la scuola di oggi richiede.

Venendo al secondo punto, c'è bisogno anche di idee, di spunti, di problemi. Di problemi intelligenti, cioè, riprendendo una definizione di Vittorio Checcucci "ricchi di interrelazioni con idee significative"; problemi che generino altri problemi, e che stimolino la fantasia, di chi impara, e anche di chi insegna; che forzino la persona a pensare, a discutere, a fare dei collegamenti.

Problemi e situazioni ricchi di spunti che diano la possibilità di fare matematica in modo attivo: fare degli esperimenti, intravedere un filo comune nei risultati di questi esperimenti, formulare delle congetture, cercare di giustificare queste congetture, provare l'entusiasmo della "scoperta". E fare anche degli errori, perché l'errore è uno stadio e una tappa naturale nell'impadronirsi di un concetto: ma avendo un retroterra nell'ambiente circostante, e una sicurezza di fondo da parte dell'insegnante che permetta di non esorcizzare e nascondere l'errore, ma di farne uno strumento di crescita collettiva, analizzandone l'origine e le cause.

Insomma una sorta di laboratorio, non necessariamente identificato come un luogo fisico, ma piuttosto come un modo di porsi di fronte al processo di apprendimento/insegnamento.

Non è certo una scoperta di oggi il fatto che l'apprendimento, per essere reale, debba essere attivo: basta ricordare i bellissimi libri di Polya, gli scritti di Freudenthal e, per chi l'ha vissuta, l'esperienza della *palazzina*, a Pisa nei primi anni '70: un luogo, voluto da Checcucci, con l'idea che potesse essere un punto di raccolta per persone diverse (studenti, insegnanti di diversi livelli scolastici) accomunate dal desiderio di imparare e insegnare la matematica.

Una delle convinzioni sottostanti a quel tentativo era proprio il fatto che qualunque discussione o ripensamento sull'insegnamento non dovesse essere confinato nel "segmento" scolastico a cui si riferiva, ma non potesse che avvantaggiarsi dalla comunicazione con altri contesti. L'idea era quella di coagulare in un luogo una raccolta di testi, di modelli, di oggetti ricchi di contenuti matematici ed efficacemente utilizzabili, possibilmente a livelli diversi e da interlocutori diversi, senza nulla togliere alle potenzialità di fantasia e di "riscoperta" e anche, insieme, che fosse un luogo dove fosse piacevole andare.

Infine l'ultimo punto è quello dell'uso intelligente delle tecnologie che consente di privilegiare_i contenuti e le idee portanti rispetto ad un insegnamento volto all'apprendimento di formule e regole di calcolo lasciando l'esecuzione dei calcoli alle macchine. I mondi artificiali, capaci di simulare la realtà con le sue leggi e le sue regole, rappresentano piacevoli opportunità per coinvolgere gli studenti riportando l'apprendimento nella sua dimensione naturale: quella dell'esplorazione ludica.

La conoscenza scientifica è un grande gioco con la realtà, tra quella parte di essa che si pensa di conoscere e quella parte che invece sfugge alla comprensione, nel tentativo di rappresentarla entro schemi e modelli rappresentativi creati dalla mente.

In tutti i campi della scienza il gioco gode ormai di una considerazione assai elevata, ben superiore a quella riconosciutagli dalla scuola, dove rimane tollerato come momento episodico di scarico delle tensioni, senza possibilità di confondersi con le attività "serie". Nel campo delle tecnologie informatiche il gioco diviene vero e proprio laboratorio di ricerca, in quanto il calcolatore offre enormi possibilità di sviluppo della dimensione ludico-virtuale.

"Creatività è sinonimo di *pensiero divergente,* cioè capace di rompere continuamente gli schemi dell'esperienza. E' creativa una mente sempre al lavoro, sempre a far domande, a scoprire problemi dove gli altri trovano risposte soddisfacenti, a suo agio nelle situazioni fluide nelle quali gli altri fiutano solo pericoli, capace di giudizi autonomi e indipendenti (anche dal padre, dal professore, dalla società), che rifiuta il codificato, che rimanipola oggetti e concetti senza lasciarsi inibire dai conformismi.

Tutte queste qualità si manifestano nel processo creativo. E questo processo ha un carattere giocoso: sempre, anche se sono in ballo le "matematiche severe"...

6. Procedere per problemi concreti

Uno dei rompicapi spesso utilizzati per mettere in difficoltà qualche amico è il seguente:

un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?

La maggior parte delle persone intelligenti ha risposto: un chilo e mezzo. Dopo anni di liceo, pochi sanno scrivere l'equazione

$$x = 1 + x/2$$

che è il *modello matematico* adatto a risolvere il problema. La soluzione $x = 2$ è immediata. Si può fare a mano. Purtroppo nella realtà, un mattone non pesa esattamente 2 chili, ovvero le equazioni non hanno coefficienti come 1 e 2. Anche questo indovinello è inventato: artefatto. Quando l'equazione è:

$$234{,}5678x = 119{,}4957 + x/2294{,}1897$$

ricorrere a una calcolatrice è inevitabile. Resta però il fatto che è inutile insegnare matematica pura se non si danno sempre problemi concreti. Vogliamo dare un esempio di nuova didattica della matematica riportando l'intervento *Sui sistemi lineari 2 per 2* presentato da Cerasoli Mauro e Cerasoli Anna a Otranto nel 2° Incontro ADT-Mathesis del settembre 2005 sul tema *La Matematica è la più odiata dagli italiani! Come farla amare?*.

a. Considerazioni generali

Sfogliando uno dei testi di algebra più usati nel biennio del liceo scientifico (comprese le classi PNI), ci siamo imbattuti in una grande quantità di pagine che l'amabile docente, protagonista del film *L'attimo fuggen*te, non avrebbe esitato a strappare con gesto plateale, se al posto della letteratura, avesse dovuto insegnare la matematica su quel testo. Tra l'interminabile sfilza di formule e calcoli, assolutamente privi di riferimento a qualunque tipo di problema, spiccava, per astrattezza, ripetitività e autoreferenzialità, l'argomento riguardante *I sistemi lineari*.

Ad esso il testo dedica 35 pagine di teoria, 42 di esercizi e 6 di problemi; di questi ultimi, soltanto 7 sono problemi di tipo reale. Dunque, un'apoteosi di teoria e calcoli su cui lo studente è inchiodato per numerose lezioni! Più che in altri casi, su questo tema, è stridente il contrasto tra la *potenza* dello strumento matematico e la *noia* infinita che può ingenerare la ricerca della soluzione di un sistema con l'uso di tutti i metodi: sostituzione, riduzione, confronto e Cramer.

Il modo in cui vengono trattati i sistemi lineari è emblematico di come, nella scuola, *si sostituisce lo studio cavilloso dello strumento matematico al suo concreto utilizzo per risolvere problemi*. E' la stessa cosa che se a uno studente di chirurgia si insegnasse tutto sulla fabbricazione del bisturi, trascurando, però, di insegnargliene l'uso. Ma, il fine dell'insegnamento della matematica non dovrebbe essere proprio la risoluzione di problemi?

Il risolvere problemi è un'arte pratica, come il nuotare o lo sciare o il suonare il piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica [...] se desiderate imparare a nuotare, dovete gettarvi in acqua e se desiderate diventare un risolutore di problemi, dovete risolvere problemi.

(*La scoperta matematica,* George Polya, 1961, Feltrinelli).

Nella didattica tradizionale, i sistemi lineari vengono solitamente trattati seguendo questo schema:

- definizione di sistema
- esempio con numeri interi
- metodi di soluzione (sostituzione, confronto, riduzione, Cramer e determinanti)
- studio di sistemi possibili, impossibili e indeterminati
- risoluzione grafica
- verifica del sistema
- sistemi 3x3 (regola di Sarrus)
- esercizi.

Riteniamo che il tempo impiegato e le energie impegnate da parte dello studente sono sproporzionate rispetto alla effettiva competenza che lo stesso può acquisire, con tale approccio. Sempre che non si sia perso, strada facendo! Bisogna tenere presente, infatti, che i problemi reali, quelli che incontrerà nel proprio lavoro un futuro matematico o economista o fisico, solo molto raramente presentano numeri interi come negli esercizi del libro. I numeri che si incontrano nella realtà sono

1936,27 ... 9,8 ... 3,14 ...

1,4142... 2,718 ... 0,618 ...1,732...

ed inoltre il numero di equazioni di un sistema è quasi sempre superiore a tre. E' impensabile, quindi, far a meno del computer.

Per questi motivi, proponiamo un diverso approccio all'argomento:

- *analisi di un problema concreto*
- *traduzione del problema in sistema*
- *risoluzione con il computer*
- *discussione del risultato*
- *visualizzazione grafica*
- *generalizzazione*
- *esercizi su risoluzione di problemi.*

b. Un problema per esempio

Dovendo preparare una cena tra amici, acquisto sei bottiglie di birra e quattro di vino, pagando 40,1 euro. Alla stessa cena arriva il mio amico Carlo, con due bottiglie di birra e sette di vino, della stessa marca e acquistate nello stesso supermercato, pagando 46,8 euro.

Poco dopo arriva anche Luigi con cinque bottiglie dello stesso vino acquistato in superofferta presso una enoteca, a sei euro ciascuna. Luigi sostiene che si tratta di un vero affare e invita gli amici a rifornirsi di vino presso quella enoteca. Conviene seguire il consiglio di Luigi?

Per sapere quanto costano le bottiglie di birra e di vino indichiamo con x il prezzo di una di birra e con y il prezzo di una di vino. Queste incognite devono soddisfare *simultaneamente* le equazioni

$$6x + 4y = 40{,}1$$

$$2x + 7y = 46{,}8$$

Per sapere quanto valgono x e y usiamo *TI-InterActive*! per mezzo dell'istruzione:

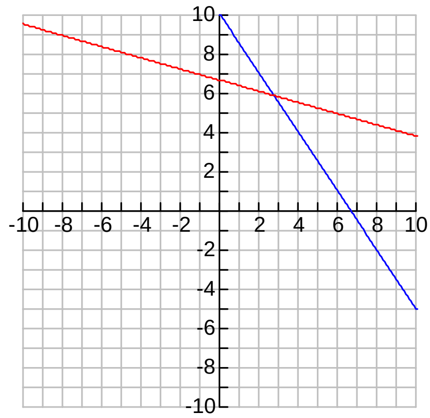
simult([6,4;2,7],[40.1;46.8]).

Quando si preme ENTER appare la schermata

$$\mathrm{simult}\left(\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40.1 \\ 46.8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 5.9 \end{bmatrix}$$

Così una bottiglia di birra costa 2,75 euro e una di vini costa 5,9 euro. Non conviene seguire il consiglio di Luigi.

Si può avere anche una visualizzazione grafica del problema:



Modifichiamo il problema nel modo seguente.

Se Carlo avesse acquistato tre bottiglie di birra e due di vino, pagando 20,05 euro, avremmo potuto ricavare dai nostri dati il prezzo delle singole bottiglie di birra e vino?

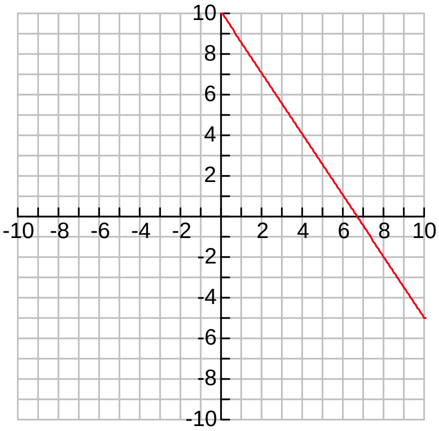
Riscriviamo l'istruzione, ma questa volta il computer ci segnala un errore:

$$\mathrm{simult}\left(\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40.1 \\ 20.05 \end{bmatrix}\right)$$

EVAL ERROR: Singular matrix

Non è possibile determinare la soluzione del sistema. Infatti, in questo caso i dati forniti da Carlo non costituiscono una ulteriore informazione rispetto alla mia. Avremmo potuto dedurre i suoi dati dai miei, senza nemmeno recarci al supermercato!

La visualizzazione grafica ci conferma che siamo in possesso di una e non due informazioni.



Modifichiamo ulteriormente il problema.

Carlo ha acquistato tre bottiglie di birra e due di vino e ricorda di aver pagato 25 euro.

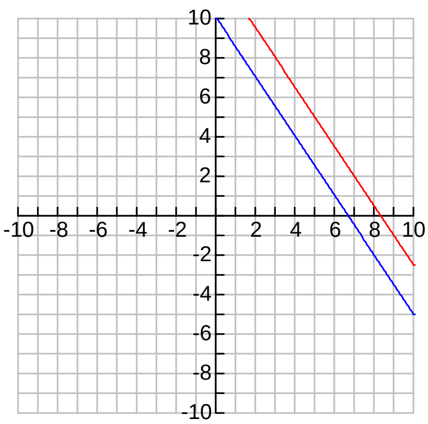
Scriviamo nuovamente l'istruzione, ma anche in questo caso il computer ci segnala errore.

$$\mathrm{simult}\left(\begin{bmatrix}6 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}40.1\\25\end{bmatrix}\right)$$

EVAL ERROR: Singular matrix

Non è possibile trovare la soluzione: la seconda informazione contraddice la prima. Carlo non ricorda bene, oppure ha dimenticato di prendere il resto.

Il grafico ci chiarisce la natura di questo sistema.



A questo punto risulta facile, dopo una discussione sui risultati ottenuti, una generalizzazione del problema.

c. Commento finale

La risoluzione di sistemi con carta e penna, e una eventuale calcolatrice per i calcoli elementari, comporta elevato rischio di errore e impiego di molto tempo. Né, d'altra parte, nessuno dei quattro algoritmi di risoluzione, ha elevata valenza culturale: si tratta sempre di applicare in maniera automatica e ripetitiva alcune operazioni elementari.

Pertanto, ci sembra inderogabile l'uso del computer nell'insegnamento dei sistemi lineari. La domanda da porsi a questo punto è: quale parte della teoria è ancora necessaria? Cosa vuol dire *singular matrix*? Si noti che non è mai stata usata l'espressione *sistemi lineari*.

7. Internet e Wikipedia

In tutti i discorsi fatti non può mancare il riferimento obbligato a Internet ed in particolare a siti che, gratuitamente, forniscono materiale matematico, come l'enciclopedia in rete

http://www.it.wikipedia.org

Ad esempio, per sapere qualcosa sul *calcolo umbrale*, basta andare sul sito:

http://it.wikipedia.org/wiki/calcolo_umbrale

Analogamente, navigando con

http://it.wikipedia.org/wiki/Wiki_/successione_di_Fibonacci

si ottengono tante informazioni sui numeri di Fibonacci difficilmente reperibili sui libri.

Wikipedia è uno dei tanti siti dove trovare materiale matematico. Più in generale, sul motore di ricerca *Google.it*, digitando in inglese termini matematici, ad esempio *Fibonacci numbers*, si trovano tanti siti che trattano l'argomento. Il tal caso è necessaria una buona conoscenza della lingua inglese. Un campo affascinante di ricerca in rete è quello relativo ai frattali.

Altri siti interessanti sono

http://www.cut-the-knot.org

dove, ad esempio, consigliamo di leggere tante belle cose sul Monty Hall Dilemma, o Paradosso delle tre scatole, nella Teoria delle Probabilità e

http://mathworld.wolfram.com

valido più per studenti universitari e appassionati del software Mathematica.

In questo ambito il MIUR sta promuovendo progetti per l'uso della rete nella didattica quotidiana soprattutto per la Matematica, partendo dalla constatazione che le nuove tecnologie dell'informazione hanno modificato il modo di interagire, conoscere e comunicare. I giovani di oggi crescono in questa realtà: giocano, imparano e parlano usando il linguaggio digitale.

Nell'ultimo anno scolastico, in un campione di scuole medie di 1° e 2°, è partita la sperimentazione di nuove forme di insegnamento innovativo per l'italiano e la matematica.

Le classi coinvolte nella sperimentazione sono dotate di computer portatili collegati ad internet, di lavagne multimediali e di videoproiettori. I docenti, opportunamente formati e coadiuvati da tutor, potranno scegliere durante l'anno scolastico un numero predefinito di 'Learning Object', disponibili in una 'Libreria virtuale Nazionale (Marketplace) all'interno di una piattaforma sulla rete.

I 'Learning Object' sono applicazioni didattiche digitali di piccole dimensioni e durata, flessibili e utilizzabili in modo autonomo dal docente per integrare le attività didattiche tradizionali.

Le tecnologie hardware saranno offerte alle scuole insieme a un'adeguata formazione per il personale docente sull'utilizzo dei computer e sulle possibilità che le tecnologie offrono per arricchire il processo didattico; i computer non saranno destinati solo alle apposite aule informatiche, ma sarà data la possibilità di utilizzo delle tecnologie nella classe e in orari extrascolastici.

8. La prova d'esame

L'attuale esame di stato riserva alla matematica un ruolo secondario in quanto è oggetto della seconda prova scritta solo nei licei scientifici, compare con altre discipline nella terza prova e occupa uno spazio ridottissimo nel colloquio. Peraltro dove è oggetto di prova scritta , con i divieti d'uso delle calcolatrici programmabili, è anacronistica. Sono state fatte varie proposte di modifica ma tutte cadute nel vuoto, vuoi per volontà del MIUR, vuoi per l'indifferenza dei docenti i quali, viste alcune statistiche, preferiscono in larga misura che la prova resti così come è. Contenti loro, contenti tutti. Ecco le statistiche sull'argomento.

Esame di Stato 2004

I risultati dell'indagine sulla prova scritta di matematica nei licei scientifici.

(Elaborati dagli Ispettori Tecnici Emilio Ambrisi, Annamaria Gilberti ed Antonino Giambò.)

L'ultimo punto che l'indagine si riprometteva di mettere in luce riguarda il parere delle Commissioni circa *l'uso o meno di strumenti di calcolo automatico in sede d'esame.*

Si è fatto un gran parlare, negli ultimi 7-8 anni, circa la possibilità di consentire negli esami di Stato l'uso di una calcolatrice programmabile e grafica; alcuni davano addirittura ad intendere che su questo ormai fossero d'accordo tutti i docenti di matematica.

Ebbene le risultanze dell'indagine sono chiarissime: più di 4 Commissioni su 5 continuano a privilegiare una calcolatrice scientifica, purché però non sia grafica o programmabile; addirittura il 6% delle Commissioni ritiene che non dovrebbe essere consentito l'uso di alcuno strumento di calcolo automatico in sede d'esame. Solo 1 Commissione su 10 è favorevole all'uso di una calcolatrice programmabile e grafica. Tutto questo quando in Europa la situazione è esattamente all'opposto.

Tiziana Bindo, *t.bindo@istruzione.it*

Mauro Cerasoli, *mauro.cerasoli@alice.it*

Carlo Costabile, *c.costabile@unical.it*

Le superfici non orientabili

di Luca Lussardi

Quando si pensa a un oggetto matematico, solitamente non si pensa a qualcosa di concreto, ovvero a qualcosa che si possa toccare con mano. Questo, purtroppo, è vero per la maggior parte degli enti di cui si occupa la matematica.

Esistono, però, alcune figure geometriche molto particolari, e interessanti per le loro proprietà, che possono essere facilmente (o quasi) costruite e visualizzate. In questo modo, è possibile verificare in modo diretto e stimolante le anomale proprietà che tali figure possiedono.

Una classe di enti geometrici di questo tipo è costituita dalle cosiddette *superfici non orientabili*, ovvero superfici che non possiedono un'orientazione naturale.

Per chiarire meglio quanto detto, partiamo da un esempio concreto di superficie che è parte dell'esperienza comune. Pensiamo alla superficie laterale di un cilindro: la possiamo ottenere facilmente incollando fra loro i lati opposti di un foglio di carta rettangolare. La seguente figura mostra una simile superficie cilindrica.

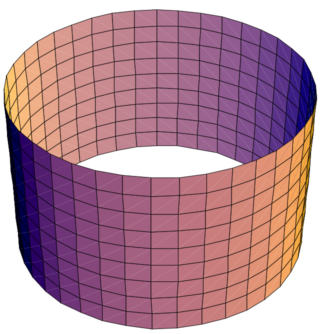


Fig.1. Superficie cilindrica, superficie orientabile.

Si potrebbe ingenuamente pensare che tutte le superfici debbano avere due facce: un "sopra" e un "sotto". L'esempio appena mostrato calza alla perfezione: se immaginiamo di camminare sulla superficie esterna del cilindro, non riusciremo mai ad arrivare a camminare sulla superficie interna senza attraversare il bordo.

Per convincersi, di ciò basta colorare la superficie cilindrica partendo da una delle due facce: se non si attraversa il bordo con il pennarello, si finisce inevitabilmente con il colorare solo una delle facce.

Le superfici di questo tipo si chiamano *orientabili*: hanno un sopra ed un sotto, hanno due facce, possono essere orientate.

Ma ci sono superfici che hanno una sola faccia. Si può passare da "una faccia all'altra" (terminologia impropria, visto che abbiamo appena detto che la faccia è una sola) senza dover per questo attraversare il bordo, o bucare la superficie stessa.

È molto semplice costruire una superficie di questo tipo: basta prendere la stessa striscia rettangolare di carta usata per costruire la superficie cilindrica: ora, però, prima di incollare due lati opposti del rettangolo, facciamo fare mezzo giro a un lato. Infine incolliamo i due lati, dei quali uno è stato ribaltato di mezzo giro, e otteniamo la superficie rappresentata in fig.2.

La superficie che abbiamo costruito si chiama *nastro di Moebius*, ed è una superficie *non orientabile*; infatti, se proviamo a colorare il nastro partendo da un suo punto qualsiasi, finiamo con il colorare tutto il nastro senza attraversare il bordo.

Dunque, il nastro di Moebius ha una sola faccia: se uno immagina di camminare su un nastro di Moebius, dopo un certo tempo si ritrova esattamente al di sotto di dove era partito, senza aver dovuto per questo attraversare il bordo, o aver fatto un buco lungo il percorso.

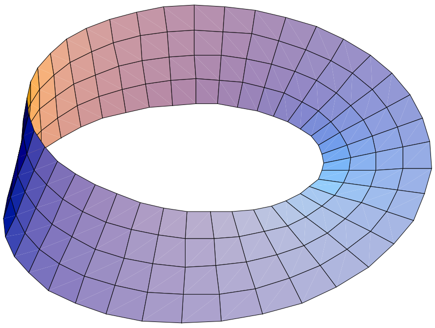


Fig. 2. Nastro di Moebius, superficie non orientabile.

La seguente fotografia (fig. 3) mostra un nastro di Moebius costruito utilizzando una striscia di foglio lucido.

Fig. 3. Un nastro di Moebius "casalingo".

Il nastro di Moebius ha però una cosa in comune con la superficie cilindrica di prima: entrambi hanno una *curva bordo*: osservando direttamente le superfici costruite, non è difficile convincersi che il bordo della superficie cilindrica è costituito da due circonferenze giacenti su piani paralleli tra loro.

Per il nastro di Moebius, invece, il bordo, se uno prova a seguirlo, è costituito da una sola linea continua chiusa, quella che in matematica viene detta *curva di Jordan.*

Esistono superfici, come la superficie della sfera, che non hanno bordo, sono le cosiddette *superfici chiuse*. Relativamente alle superfici chiuse, quello che accade usualmente (per le superfici ordinarie) è ancora più evidente, rispetto agli esempi di superfici non chiuse discussi precedentemente.

Se pensiamo alla superficie sferica e immaginiamo di camminarci sopra (cosa non difficile da immaginare, visto che, approssimativamente, è quanto ci capita abitualmente) allora è ovvio che non possiamo entrare nel suo interno senza attraversarla. La superficie ha ancora due facce ben precise e distinte, solo che ora non si parla più di sopra e sotto, ma di "dentro" e "fuori".

Una superficie chiusa che ha un dentro e un fuori si dice orientabile. La cosa interessante è che esistono superfici chiuse le quali non hanno un dentro e un fuori.

La proprietà di queste superfici, detta ancora di *non orientabilità,* si può interpretare come segue: se prendiamo un contenitore chiuso delimitato da una superficie orientabile (e chiusa), e supponiamo che vi sia contenuto del liquido, è abbastanza scontato che tale liquido non potrà uscire dal contenitore, comunque esso venga rigirato.

Se invece prendiamo una superficie chiusa non orientabile, e ipotizziamo sia riempita di liquido al suo interno (ma cos'è l'interno di una superficie chiusa non orientabile?), questo non necessariamente rimarrà all'interno del contenitore delimitato dalla superficie data, ma potrebbe fuoriuscire all'esterno.

La costruzione di una superficie chiusa non orientabile non è semplice come la costruzione del nastro di Moebius, e difficilmente può essere effettuata con della carta.

L'idea sarebbe quella di partire da una superficie quasi cilindrica, una specie di superficie laterale di una bottiglia, aperta sia sul collo che sul fondo; quindi si piega il collo della bottiglia fino a saldare il bordo superiore del collo con il bordo del fondo, attraversando la bottiglia stessa, e facendo la saldatura dall'interno della bottiglia. In tal modo, la superficie diviene chiusa. La seguente immagine mostra il risultato finale ottenuto.

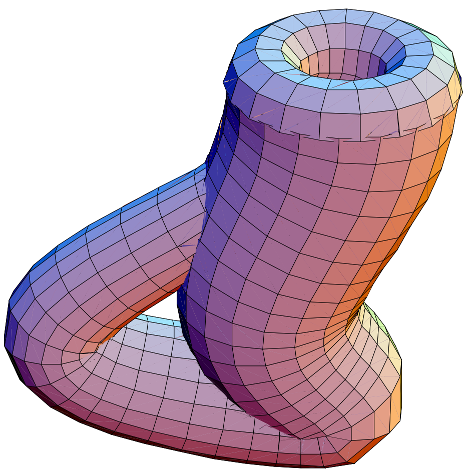


Fig. 3: Bottiglia di Klein, superficie chiusa non orientabile.

Questo è un modello tridimensionale della *bottiglia di Klein*. In realtà, la bottiglia di Klein è una "superficie a 4 dimensioni"; sostanzialmente, per cercare di vederla, si è costretti a ripiegarla opportunamente, e ad effettuare quell'auto-intersezione come appare in figura, cosa che se avessimo una dimensione in più non saremmo costretti a fare. La fotografia che segue mostra una bottiglia di Klein artificialmente soffiata in vetro (acquistata presso http://www.kleinbottle.com).

La bottiglia di Klein non ha un dentro ed un fuori: infatti, se immaginiamo di camminare sulla bottiglia, riusciamo ad entrare al suo interno senza bucarla ed a riuscirne al punto di partenza.

Ciò nonostante, è una superficie chiusa: se la riempiamo con del liquido e la rigiriamo, il liquido fuoriesce, cosa inconcepibile per un'ordinaria (cioè orientabile) superficie chiusa, come quella sferica.

Sebbene questo oggetto sia più complicato del precedente nastro di Moebius, esso si riconduce al nastro stesso: se aginiamo di tagliare lungo una mediana una bottiglia di Klein, si ottengono due nastri di Moebius.

Questa proprietà è del tutto generale: si può dimostrare, infatti, che ogni superficie, chiusa o non chiusa, non orientabile contiene almeno un nastro di Moebius.

In effetti, come i numeri primi sono i mattoni con cui si costruiscono tutti i numeri naturali (ogni numero naturale si scompone in fattori primi),allo stesso modo il nastro di Moebius è il mattone fondamentale con cui si costruiscono tutte le superfici non orientabili, di qualunque dimensione.

NOTA. Le figure 1, 2, 3 sono state ottenute col software *Matematica*, utilizzando le seguenti parametrizzazioni:

Fig. 1: cilindro

```
cilindro[a_][u_,v_]:=a {Cos[u],Sin[u],v}
ParametricPlot3D[
  cilindro[1][u,v],{u,0,2 Pi},{v,-0.6,0.6},
  PlotPoints->{20,20},Axes->None,Boxed->False]
```

Fig. 2: nastro di Moebius

```
nastromoebius[a_][u_,v_]:=
 {a    Cos[u]+v    Cos[u/2]  Cos[u],a    Sin[u]+v    Cos[u/2]  Sin[u],v
Sin[u/2]}

ParametricPlot3D[
  nastromoebius[1][u,v]//Evaluate, {u,0,2 Pi},{v,-0.3,0.3},
  PlotPoints->{40,5}, Axes->None, Boxed->False]
```

Fig. 3: bottiglia di Klein

```
kleinbottlebis[e_,f_][u_,v_]:=If[u<0,
        {f*Sin[u]/2,(-e - f/2 + f*Cos[u]/2)*Cos[v],
         (e + f/2 - f*Cos[u]/2)*Sin[v]},
        {10*Sin[0.105*u] + 2*(e + 0.033*f*u)*
         (Cos[0.105*u] + 4*Cos[0.21*u])*Cos[v]*
         (Sin[0.105*u] + 2*Sin[0.21*u])/
         Sqrt[100*Cos[0.105*u]^2 + 4*(Cos[0.105*u] +
          4*Cos[0.21*u])^2*(Sin[0.105*u] + 2*Sin[0.21*u])^2],
         (Sin[0.105*u] + 2*Sin[0.21*u])^2 -
         (10*(e + 0.033*f*u)*Cos[0.105*u]*Cos[v])/
         Sqrt[100*Cos[0.105*u]^2 + 4*(Cos[0.105*u] +
          4*Cos[0.21*u])^2*(Sin[0.105*u] + 2*Sin[0.21*u])^2],
         (e + 0.033*f*u)*Sin[v]}]
ParametricPlot3D[Evaluate[
kleinbottlebis[1,2][u,v]],
{u,-Pi,30},
{v,-Pi,Pi},
ViewPoint->{-2,0,-3},
PlotPoints->{50,20},
Axes->None,Boxed->False];
```

Il teorema di May

di Fioravante Patrone

Queste brevi note sono dedicate al teorema di May, che caratterizza la regola di decisione a maggioranza semplice in un contesto specifico ma molto interessante.

1 II problema

Supponiamo di avere un insieme (finito, non vuoto) N di individui. Immaginiamo che questo gruppo debba scegliere fra due alternative: a oppure b. Indichiamo con X l'insieme i cui elementi sono queste due alternative: $X = \{a,b\}$.

Immaginiamo che ognuno degli individui abbia preferenze su X, nel senso che: preferisce (strettamente) a a b, o viceversa, o è indifferente.

Possiamo aggregare queste preferenze in una unica preferenza collettiva?

Vorremmo trovare un metodo generale che ci permetta di operare questa aggregazione qualunque siano le preferenze degli individui. E che, naturalmente, soddisfi alcune condizioni basilari. Un paio di condizioni sono naturali: deve "trattare allo stesso modo" sia gli individui che gli esiti. C'è un'altra condizione, abbastanza naturale anch'essa: si tratta di una richiesta minimale di "monotonia" (anche se poi la chiameremo in modo diverso): ci si aspetta che, se la collettività esprime una preferenza debole[1] per a rispetto a b ed un decisore cambia la sua preferenze in favore di a, le preferenze collettive dovrebbero passare a favore stretto di a.

Ebbene, c'è una ed una sola modalità di aggregazione delle preferenze che soddisfa queste (ragionevoli) condizioni: è la regola di decisione mediante votazione a maggioranza semplice. Questo è, per l'appunto, il teorema di May [May, 1952]. Uno dei (pochi?) interessanti risultati "positivi" nella teoria delle scelte sociali (a fianco al noto teorema di Black [Black, 1958] sulle preferenze "single peaked"). Rispetto al più noto "teorema di impossibilità" di Arrow[2] [Arrow, 1951 e 1963; vedi anche Moretti e Patrone, 2000] può essere considerato un risultato "minore", tuttavia meriterebbe di essere più conosciuto di quanto non lo sia.

2 Formalizzazione

Come detto, abbiamo un insieme N, finito e non vuoto. Abbiamo un insieme di alternative che contiene due elementi: $X = \{a, b\}$. Per ogni $i \in N$, è data una relazione di preordine totale[3] su X.

[1] Cioè: la collettività preferisce strettamente a a b o è indifferente tra di essi.

[2] Questo risultato fu annunciato da Arrow al meeting della Econometrie Society nel dicembre 1948, e May era fra il pubblico, secondo quanto dice Arrow stesso. Non solo, è di May anche una delle prime recensioni di *Social Choice and Individuai Values*.

[3] Qui c'è la definizione formale:

Definizione 1 *Una relazione* $\preceq$ *su* X *si dice essere un* preordine *se è riflessiva e transitiva. Si dice essere un* preordine totale *se è un preordine ed è anche totale. Diciamo che*

Naturalmente, su X possiamo avere tre preordini totali: quello per cui $a \prec b$, quello per cui $b \prec a$ e quello per cui a ~ b. Per comodità, conveniamo di indicarli (se e dove ci servirà) rispettivamente con 1, -1 e 0. Quindi, possiamo identificare $\wp$, l'insieme dei preordini totali su X, con $\{-1, 0, 1\}$.

Siamo interessati ad una funzione di benessere sociale, $\Phi : A \to \wp$, dove $A \subseteq \wp^N$.

Le richieste che facciamo sono:

- **Dominio Universale** $A = \wp^N$
- **Anonimità** Data una corrispondenza biunivoca $\psi : N \to N$, dato un profilo di preferenze $\left(\preceq_i\right)_{i\in N}$ si definisca il profilo di preferenze $\left(\preceq_i'\right)_{i\in N}$ nel modo seguente: $\left(\preceq_i'\right)_{i\in N} = \left(\preceq_{\psi(i)}\right)_{i\in N}$.

  Allora $\Phi\left(\left(\preceq_i\right)_{i\in N}\right) = \Phi\left(\left(\preceq_i'\right)_{i\in N}\right)$
- **Neutralità** Data una corrispondenza biunivoca $\eta : X \to X$, dato un profilo di preferenze $\left(\preceq_i\right)_{i\in N}$ si definisca il profilo di preferenze $\left(\preceq_i'\right)_{i\in N}$ nel modo seguente: $a \preceq_i' b$ se e solo se $b \preceq_i a$.

  Allora, posto: $\sqsubseteq = \Phi\left(\left(\preceq_i\right)_{i\in N}\right)$ e $\sqsubseteq' = \Phi\left(\left(\preceq_i'\right)_{i\in N}\right)$, si ha che $a \sqsubseteq b$ se e solo se $b \sqsubseteq' a$.
- **Positive responsiveness** Siano dati due profili di preferenze, $\left(\preceq_i\right)_{i\in N}$ e $\left(\preceq_i'\right)_{i\in N}$. Supponiamo che il secondo profilo di preferenze differisca dal primo per questo: esiste una coppia di alternative $x, y \in X$ ed $i_0 \in N$ t.c: $\left(y \prec_{i0} x \text{ e } x \sim_{i0}' y\right)$ oppure $\left(y \sim_{i0} x \text{ e } x \prec_{i0}' y\right)$.

  Allora[4], $x \sqsubseteq y$ implica $x \sqsubset' y$.

Il teorema di May ci dice che esiste una ed una sola regola di aggregazione delle preferenze che soddisfa queste quattro richieste, e che questa regola di aggregazione coincide con la regola di votazione a maggioranza semplice. Vale a dire, per stabilire se, collettivamente, *a è* preferito a *b*, ogni individuo "vota" per *a* se preferisce strettamente *a* a *b*, vota per *b* se vale il viceversa, e si astiene se è indifferente fra *a* e *b*. La collettività preferirà (debolmente) *a* a *b* se e solo se *a* riceve un numero di voti maggiore o uguale di quelli ricevuti da *b*.

Per dimostrare questo teorema osserviamo, come prima cosa, che è immediato verificare come la regola di votazione a maggioranza semplice soddisfi le quattro proprietà.

---

una relazione $\preceq$ *definita su X è:*

riflessiva, se: $\forall x \in X, x \preceq x$

transitiva, se: $\forall x, y, z \in X, x \preceq y$ *e* $y \preceq x$ implica $x \preceq z$

totale, se: $\forall x, y \in X, x \preceq y$ o $y \preceq x$

Indico rispettivamente con $\prec$ e con ~ le relazioni così definite:

$x \prec y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \preceq y$ e non $y \preceq x$

$x \sim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \preceq y$ e $y \preceq x$.

[4] La relazione $\sqsubset'$ è definita, a partire da $\sqsubset'$, in modo del tutto analogo a come $\prec$ è definita a partire da $\preceq$:

$x \sqsubset' y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \sqsubseteq' y$ e non $x \sqsubseteq' y$.

Per quanto riguarda il viceversa, la dimostrazione è piuttosto semplice. Usando la rappresentazione delle preferenze con —1, 0, 1, la condizione di anonimità ci permette di dire che per determinare il valore di Φ è sufficiente contare il numero di 1 e di —1 presenti nel profilo di preferenze (che sarà un vettore del tipo $(t_i)_{i\in N}$, con $t_i \in \{-1,0,1\}$).

Ora, se il numero di "1" è uguale al numero di "-1", il risultato deve essere l'indifferenza (se una alternativa fosse collettivamente preferita ad un'altra, scambiando le due alternative, le preferenze dovrebbero essere rovesciate, ma questo contrasta con la condizione di neutralità).

Allora, la "positive responsiveness" ci dice che, se il numero di "1" è uguale al numero di "-1" più uno, allora la decisione è in favore della alternativa *a.* E, sempre la positive responsiveness (applicata un numero sufficiente di volte), ci garantisce che *a* è preferita quando il numero di "1" supera il numero di "-1", qualunque sia la differenza.

Abbiamo così visto che Φ coincide con la regola di decisione a maggioranza semplice, la quale ci dice, per l'appunto, che $b \sqsubseteq a$ se e solo se il numero di "1" è maggiore o uguale del numero di "-1".

Ricordo che May ha anche dimostrato che le quattro condizioni sopra descritte sono fra loro indipendenti.

Anche per il teorema di May vale un fatto generale che si ha ogni qualvolta si ha una funzione di benessere sociale: ad essa è subordinata una funzione di scelta sociale. Ovvero, dato un profilo di preferenze $(\preceq_i)_{i\in N}$, le preferenze "sociali" $\Phi\left((\preceq_i)_{i\in N}\right)$ permettono di determinare quale sia la scelta della collettività: verrà scelto quell'elemento di *X* che risulta essere preferito agli altri. Cioè, $\bar{x} \in X$ tale che $x \sqsubseteq \bar{x}$ per ogni $x \in X$ (anche qui, per alleggerire le notazioni, usiamo il simbolo $\sqsubseteq$ per indicare $\Phi\left((\preceq_i)_{i\in N}\right)$. Naturalmente nulla vieta che vi possano essere delle situazioni di parità (ciò accade se il numero di individui che preferiscono strettamente *a* a *b* è uguale a quello di coloro che hanno la preferenza opposta). Quindi, non sempre viene determinato univocamente l'elemento scelto in *X* (per cui, tecnicamente, dobbiamo parlare più correttamente di *corrispondenza* di scelta sociale, anziché di funzione di scelta sociale).

3 Commenti

In questa breve sezione vorrei analizzare la ragionevolezza delle ipotesi del teorema di May. Un modo per discutere il senso di questo teorema è quello di mettersi da un punto di vista di "ingegneria costituzionale" (si tratta di un punto di vista che è anche adottato nella discussione delle ipotesi che stanno alla base del teorema di Arrow). Se l'ottica è questa, le prime tre proprietà appaiono molto naturali.

Una "Costituzione" ha lo scopo di fissare un quadro generale di regole per l'esercizio concreto del potere deliberativo, e in quanto tale non dovrebbe escludere "a priori" dal suo ambito nessuno dei possibili profili di preferenze di coloro i quali saranno poi chiamati a decidere. Sarebbe curioso che certe configurazioni delle preferenze venissero escluse dal novero di quelle "trattabili". Insomma, la condizione di *Dominio Universale* appare essere una richiesta del tutto ragionevole.

Gli stessi motivi valgono, a maggior ragione, per corroborare le due condizioni di *Anonimità* e di *Neutralità.* Che un decisore venga trattato in modo diverso da un altro sembrerebbe sospetto (diverso è il discorso nel caso di una SpA, in cui il numero di azioni possedute da un azionista è tenuto in considerazione; diverso discorso vale anche in una monarchia costituzionale... In effetti, qualche perplessità sull'istituto della monarchia ce l'ho). Ugualmente sospetto sarebbe il caso in cui una alternativa avesse una posizione precostituita di maggior forza (anche qui, si possono trovare eccezioni, e senza neanche dover andare molto lontano: una norma "costituzionale" è di solito trattata in modo asimmetrico rispetto a una sua proposta di modifica!).

Infine, l'ultima condizione, la *Positive responsiveness:* essa riflette una condizione di monotonia che sembra abbastanza naturale (anche qui, contestazioni se ne possono fare: un parere unanime o quasi potrebbe generare il sospetto che non vi sia sufficiente diritto di "voce" per le minoranze). Una obiezione che si può formulare alla *Positive responsiveness* è il fatto che essa imponga sempre il passaggio a una preferenza stretta anche per effetto di una preferenza diversa da parte di un solo decisore: in una situazione di parità che coinvolge magari un milione di decisori pensare che uno solo sia in grado di far pendere l'ago della bilancia da una parte può in effetti sembrare eccessivo.

Al di là delle poche cose dette qui sopra, vorrei ancora solo sottolineare l'importanza di carattere *didattico* che hanno modelli di questo tipo: mostrano come, con strumenti relativamente elementari, si possano offrire esempi di interfaccia tra il linguaggio matematico e il mondo reale, contribuendo a illustrare quanto ampio sia lo spettro delle questioni che possono essere affrontate (utilmente) con la matematica. Dimostrano anche come strutture di base della matematica possano avere delle applicazioni interessanti. Non va dimenticato, però, che le risposte che si ottengono in questo modo potrebbero non essere adeguate per una descrizione significativa del problema reale cui si è interessati (peggio, uno potrebbe essere tentato di "costringere" il mondo vero dentro un vestito inadatto). Insomma, come al solito, nella modellizzazione matematica occorre avere umiltà: la cautela non è mai troppa. Specialmente quando si affrontano problematiche delle scienze sociali.

4 Bibliografia

- Arrow, Kenneth J. (1951): *Social Choice and Individuai Values,* Cowles Commission Foundation monograph, 12, Wiley, New York (NY-USA). Seconda edizione, con importanti correzioni: 1963. Liberamente scaricabile da: http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/cfmmain.htm Suggerisco di farlo con la versione del 1963.

- Black, Duncan (1958): *The Theory of Committees and Elections,* Cambridge University Press, Cambridge (MA-USA).

- May, Kenneth O. (1952): *A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions,* Econometrica, 20, 680-684.

- Moretti, Stefano, e Fioravante Patrone (2000): *Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali,* serie di tre conferenze tenute all'IRRSAE (ora IRRE) Liguria.
- Disponibili in rete:

http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/decisori_razionali_interagenti_web.htm

Alla scoperta dello Zodiaco

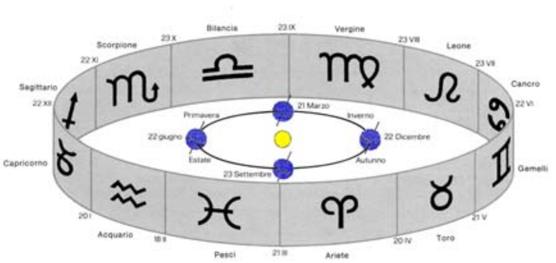
di Michele T. Mazzucato

... Se Castore e Polluce
fossero in compagnia di quello specchio
che su e giù del suo lume conduce,
tu vedresti il Zodiaco rubecchio
ancora all'Orse più stretto rotare,
se non uscisse fuor del cammin vecchio.

Purgatorio IV, 61-66
Dante Alighieri (1265-1321)

La fascia zodiacale è quella striscia immaginaria di cielo centrata sul percorso apparente annuale del Sole nel cielo (*eclittica*) che abbraccia le costellazioni dello zodiaco, dal greco *zoidiakós kýklos* propriamente "circolo di figure di animali".

Tale fascia si estende per circa 9° a nord e a sud dall'eclittica e venne suddivisa in 12 parti uguali di 30° ciascuna. Ogni parte è distinta dal nome della rispettiva costellazione e chiamata *segno zodiacale*.



La posizione delle costellazioni zodiacali.

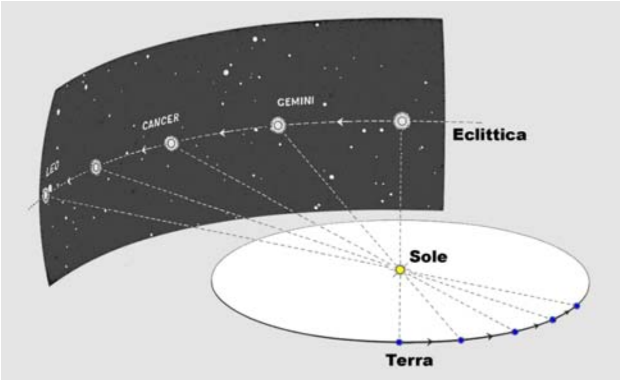
La serie dei segni inizia dal *punto d'Ariete*, il punto del cielo in cui appare il Sole nell'istante dell'equinozio di primavera, per proseguire con i ben noti segni di Toro, Gemelli, Cancro, Leone, Vergine, Bilancia, Scorpione, Sagittario, Capricorno, Acquario e Pesci.

Sole sulla costellazione			costellazione	Sole sul segno		
26	18 apr	14 mag	Ariete	30	20 mar	19 apr
38	14 mag	21 giu	Toro	31	19 apr	20 mag
29	21 giu	20 lug	Gemelli	32	20 mag	21 giu
21	20 lug	10 ago	Cancro	31	21 giu	22 lug
37	10 ago	16 set	Leone	32	22 lug	23 ago
45	16 set	31 ott	Vergine	30	23 ago	22 set
23	31 ott	23 nov	Bilancia	31	22 set	23 ott
6	23 nov	29 nov	Scorpione	30	23 ott	22 nov
19	29 nov	18 dic	Ofiuco	--	-- --	-- --
32	18 dic	19 gen	Sagittario	29	22 nov	21 dic
28	19 gen	16 feb	Capricorno	29	21 dic	19 gen
24	16 feb	12 mar	Acquario	30	19 gen	18 feb
37	12 mar	18 apr	Pesci	30	18 feb	20 mar
gg	dal	al		gg	dal	al

In questa tabella sono riportate le date approssimate in cui il Sole entra ed esce dalle costellazioni (date astronomiche) e dai segni zodiacali (date astrologiche) con le rispettive durate di permanenza in giorni.

Il nome del punto iniziale deriva dal fatto che oltre duemila anni fa, quando nell'astronomia ellenistica furono determinate le regole dei moti apparenti celesti ed entrò nell'uso tale nomenclatura, questo punto si trovava nella costellazione dell'Ariete.

Mentre la Terra si sposta lungo la sua orbita intorno al Sole, quest'ultimo viene visto in direzioni diverse contro lo sfondo del cielo stellato. Il segno zodiacale è quello della costellazione davanti alla quale il Sole passa durante il suo percorso apparente annuo.



La proiezione del Sole sullo sfondo del cielo individua la costellazione eclitticale.

♈	Ariete	⊙	Sole	☿	L'elmo e il caduceo di Mercurio
♉	Toro	☽	Luna	♀	Lo specchio di Venere
♊	Gemelli	☄	Cometa	⊕	L'equatore e il meridiano della Terra
♋	Cancro	☊	Nodo ascendente	♂	Lo scudo e lancia di Marte
♌	Leone	☋	Nodo discendente	♃	Il fulmine di Giove
♍	Vergine	☌	Congiunzione (angolo fra due pianeti 0°)	♄	La falce di Saturno
♎	Bilancia	⚹	Sestile (angolo fra due pianeti 60°)	♅	L'iniziale di Frederick William Herschel (1738-1822) scopritore, nel 1781, di Urano
♏	Scorpione	□	Quadratura (angolo fra due pianeti 90°)	♆	Il tridente di Nettuno
♐	Sagittario	△	Trigono (angolo fra due pianeti 120°)	♇	Il monogramma di Plutone e Percival Lowell (1855-1916), colui che determinò il punto dove nel 1930 venne scoperto Plutone
♑	Capricorno	☍	Opposizione (angolo fra due pianeti 180°)		
♒	Acquario				
♓	Pesci				

I simboli astronomici delle dodici costellazioni canoniche dello zodiaco, delle configurazioni planetarie e dei corpi celesti del Sistema Solare. ***Nota:*** *il 24 agosto 2006 una risoluzione dell'International Astronomical Union IAU, durante la sua XXVI Assemblea Generale tenutasi a Praga, ha inserito Plutone (scoperto da C. Tombaugh nel 1930) nella nuova categoria dei pianeti nani insieme all'asteroide Cerere e ad Eris (scoperto da M. Brown – C.A. Trujillo – D.L. Rabinowitz, 2005).*

Tuttavia, a causa del moto di precessione, il punto d'Ariete, o *punto gamma* (dalla lettera greca simbolo dell'Ariete), dall'epoca si è spostato (e continua lentamente a spostarsi di 50.26″/anno, in senso opposto o retrogrado a quello apparente annuo del Sole) di oltre 30° e ora si trova nella costellazione dei Pesci.

Conseguentemente, si spostano tutti gli altri segni rispetto alle costellazioni, le quali invece rimangono relativamente fisse nel cielo.

Così, il segno del Toro si trova ora nella costellazione dell'Ariete, il segno dei Gemelli nella costellazione del Toro, il segno del Cancro nella costellazione dei Gemelli e così via.

Astronomicamente parlando, il Sole nel suo apparente percorso annuale interseca le seguenti 14 costellazioni: (dal primo giorno di primavera) Pesci, Balena, Pesci, Ariete, Toro, Gemelli , Cancro, Leone, Vergine, Bilancia, Scorpione, Ofiuco, Sagittario, Capricorno e Acquario.

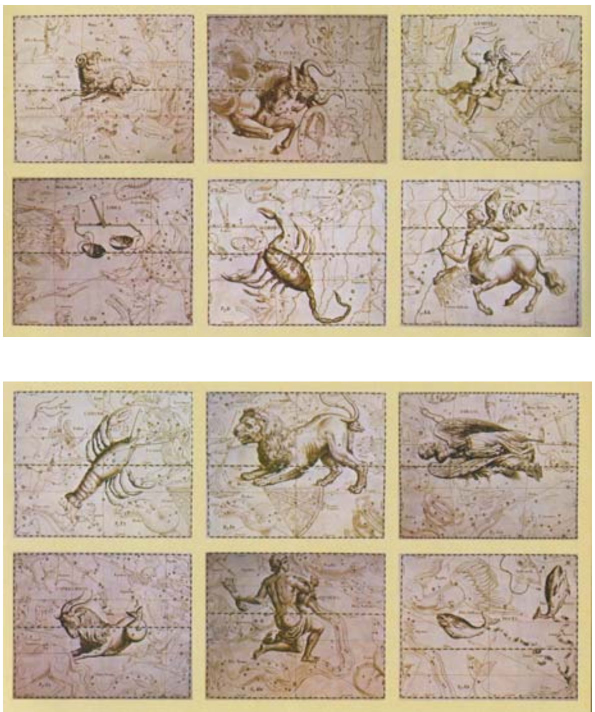
La costellazione dell'Ofiuco (in latino, "Serpentario"), nella quale il Sole trascorre più tempo che in quella dello Scorpione, e la costellazione della Balena, che il Sole attraversa lasciando per brevissimo tempo quella dei Pesci per poi rientravi, generalmente non sono considerate astrologicamente e quindi negli oroscopi.

Sia la costellazione dell'Ofiuco sia quella della Balena erano due delle quarantotto costellazioni già descritte da Claudio Tolomeo nell'*Almagesto* (in greco *Hè Megalè Syntaxis*), un trattato nel quale raccolse la conoscenza astronomica sino ad allora nota (II secolo a.C.). L'opera, tradotta in arabo nel IX secolo e in latino nel XII secolo, fu un testo fondamentale per l'insegnamento dell'astronomia e della geometria sferica.sino al XV secolo.

La scoperta del fenomeno della *precessione degli equinozi* viene attribuita al greco Ipparco di Nicea che nel II secolo a.C. confrontò le posizioni di alcune stelle da lui misurate con quelle misurate circa un secolo e mezzo prima dai greci Timocari e Aristillo (III secolo a.C.).

Anche se una prima interpretazione della precessione come conseguenza della variazione dell'orientazione dell'asse terrestre venne fornita da Nikolaj Kopernik (Copernico) (1473-1543) nell'opera *De revolutionibus orbium caelestium* (1543), la spiegazione fisica, tuttavia, giunse da Isaac Newton (1642-1727) nei suoi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* pubblicati nel 1687.

Il moto di precessione (dal latino *praecessio* = precedere) è un moto conico dell'asse terrestre, intorno a una posizione media, dovuto all'attrazione gravitazionale che, principalmente, il Sole e la Luna esercitano sul globo terrestre, non perfettamente sferico. Una rotazione completa si compie in circa 25.800 anni (= 360° / 50.26″) e tale periodo viene denominato *anno cosmico* o *anno platonico*.



Le costellazioni dello zodiaco raffigurate nell'atlante "Firmamentum Sobiescianum sive Uranographia" dell'astronomo di Danzica (Polonia) JOHANNES HEVELIUS (1611-1687), pubblicato postumo nel 1690.

Quest'ultima denominazione deriva dal filosofo greco Platone di Atene (IV secolo a.C.) che nell'opera *Timeo* parla di 'anno perfetto' quando, completato un intero giro, le cose 'ritornano al punto di partenza' ripetendosi ciclicamente:

> *... non di meno è tuttavia possibile capire che il numero perfetto del tempo realizza l'anno perfetto allorquando le velocità di tutti e gli otto periodi, compiendosi reciprocamente, ritornano al punto di partenza, misurate secondo l'orbita del medesimo che si muove in modo uniforme.*
>
> (*Timeo* VII - traduzione di Diego Fusaro)

Il moto di precessione, che avviene in direzione retrograda (in senso orario) rispetto a quella del pianeta Terra, fa sì che ogni 2.150 anni circa (= 30° / 50.26″) corrispondenti a 30° sull'eclittica (dodicesima parte dell'angolo giro, estensione costante di un segno zodiacale e settore denominato *mese cosmico*), il punto d'Ariete percorra a ritroso i segni zodiacali uno, appunto, ogni 2.150 anni.

Notevoli sono le conseguenze del moto di precessione dell'asse terrestre. Esse si riassumono, essenzialmente, in:

- spostamento dei punti equinoziali (da cui il nome di precessione degli equinozi) e solstiziali lungo l'eclittica, con il conseguente spostamento dei segni zodiacali rispetto alle costellazioni zodiacali,
- spostamento dei poli celesti (per esempio, la direzione del nord celeste era indicata dalla stella Thuban nel 3000 a.C., oggi dalla *Stella Polare* e lo sarà dalla stella Vega nel 14000 d.C.)
- variazione continua delle coordinate eclittiche (latitudine e longitudine) ed equatoriali (ascensione retta e declinazione) degli astri; e, infine, nella diversa durata delle stagioni (*anno tropico*) rispetto all'*anno siderale* (l'anno tropico medio 365g 05h 48m 46.08s = 365.2422g risulta inferiore all'anno siderale medio 365g 06h 09m 09.50s = 365.25636g di 20 minuti e 23 secondi corrispondenti a un giorno ogni 70.6 anni).

Quanto riportato sopra rappresenta, comunque, una semplificazione, poiché le cose in realtà sono un pò più complesse di quanto possa sembrare.

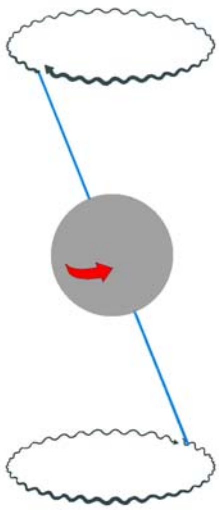
Infatti, lo spostamento progressivo del punto d'Ariete (come per gli altri riferimenti) non dipende soltanto dal moto di precessione (che tra l'altro ha una componente *lunisolare* di 50.37″ annuo in senso orario o retrogrado e una componente dovuta alle perturbazioni planetarie di 0.12″ annuo in senso antiorario o progrado e la cui azione combinata fornisce il valore di 50.26″ annuo utilizzato in precedenza) ma anche da altri moti come, per esempio, di nutazione, dell'obliquità dell'asse terrestre, dell'eccentricità dell'orbita terrestre, lo spostamento della linea degli apsidi, etc.

Fra tutti questi ulteriori moti, le cui conseguenze sono irrilevanti sulla vita civile ma non per l'astronomia sferica, risulta importantissimo quello di *nutazione*, che si viene a sovrapporre a quello ben più rilevante della precessione degli equinozi.

La nutazione (dal latino *nutatio* = oscillare), nelle sue componenti parallela (*nutazione longitudinale*) e perpendicolare (*nutazione obliqua*) all'eclittica, è una piccola oscillazione dell'asse terrestre, intorno alle successive generatrici del moto conico precessionale, che ammonta a circa 9.2″ d'arco per quella obliqua e 16.8 ″ d'arco per quella longitudinale, con un periodo ciclico di circa 18.58 anni (identico al moto di precessione della linea dei nodi della Luna).

Anche questa perturbazione è dovuta all'attrazione lunisolare sul rigonfiamento equatoriale della Terra. Il fenomeno venne scoperto dall'astronomo inglese James Bradley (1693-1762) nel 1728, ma egli lo annunciò solo nel 1748, dopo averlo dettagliatamente studiato per tutta la durata dell'intero ciclo di rivoluzione.

Da considerare, inoltre, che tutti i moti non sono rigidamente uniformi e hanno delle oscillazioni. Ciò è dovuto, principalmente, alla variabilità delle configurazioni planetarie che variano continuamente le forze d'interazione gravitazionali in gioco e conseguentemente variano i loro valori.



In ordine d'importanza il terzo movimento della Terra, dopo quello di rivoluzione intorno al Sole e di rotazione sul proprio asse, è la precessione dell'asse terrestre al quale si sovrappone il quarto movimento, quello della nutazione.

Approfondimenti:

- Cattabiani A., *Planetario*, Mondadori Milano 1998
- Ridpath I., *Mitologia delle costellazioni*, Muzzio Padova 1994
- Astrologia e superstizione di Antonio Vecchia
  http://www.cosediscienza.it/varie/18_astrologia%20e%20superstizione.htm
- Di che costellazione sei ?
  http://www.vialattea.net/eratostene/zodiaco/index.html
- Le costellazioni nei francobolli (Unione Astrof. Bresciani)
  http://www.astrofilibresciani.it/Filatelia/Costellazioni.htm
- Le schede delle 88 costellazioni di Marco Murara (Associazione Astrofili Trentini)
  http://www.astrofilitrentini.it/mat/costell.html
- Le tredici costellazioni zodiacali nell'opera pittorica di Claudio Del Duca
  http://www.astroarte.it/delduca/zodiaco.htm
- Note critiche per una valutazione serena della validità dell'astrologia di Paolo Sirtoli
  http://www.vialattea.net/sirtoli/scetticismo/index.html
- Termini in astronomia di Michele T. Mazzucato
  http://www.gruppom1.it/doc/articoli/mtm_terminiastronomici.pdf

Verso l'esame di stato

di Luigi Lecci

Ricerca degli zeri di una funzione

Introduzione

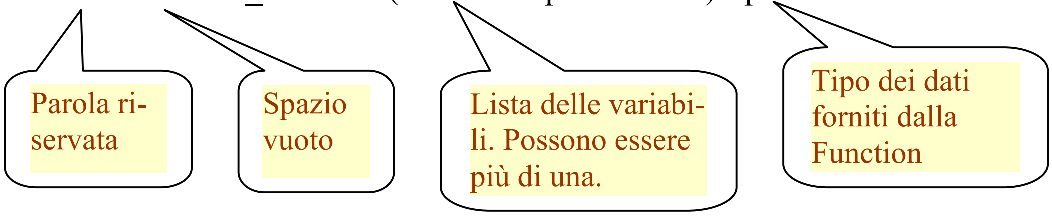
In analisi numerica spesso ci si imbatte nel problema di dover determinare un valore approssimato dello zero che una funzione continua ammette internamente ad un certo intervallo [a;b]. Illustriamo di seguito tre semplici programmi costruiti con lo scopo di guidare gli utenti poco esperti nella programmazione. In particolare, considerato che nelle classi delle scuole italiane dell'indirizzo PNI (Piano Nazionale per introduzione dell'Informatica) del Liceo Scientifico, il linguaggio che si insegna è il *Turbo Pascal*, il codice dei miniprogrammi è proprio in questo linguaggio.

Primo obiettivo: familiarizzare con l'utilizzo di una *Function*

Il Turbo Pascal (T.P. nel seguito) permette di organizzare il codice di un programma introducendo blocchi particolari definiti dall'utente in modo da rendere più elegante la struttura e la leggibilità del programma.

Una Function è un segmento di codice che l'utente scrive per risolvere un particolare problema. Nel nostro contesto utilizzeremo una particolare Function per gestire una funzione matematica della quale sia nota l'espressione analitica. La struttura è la seguente:

Function Nome_Funzione(variabile:tipo variabile):tipo dato



Ad esempio, se volessimo scrivere una Function con cui calcolare il cubo di un numero reale x ed alla quale volessimo assegnare come nome proprio Cubo potremmo scrivere il seguente codice:

```
Function Cubo(x:real):real;
 Begin
   Cubo:=x*x*x;
 End;
```

Il primo programma in Turbo Pascal

In questo programma calcoliamo alcuni valori della funzione trascendente $f(x)=2^{-x}+x^2-1$.

Premessa

Occorre precisare subito che in T.P. non esiste una funzione predefinita che permetta di calcolare la potenza ad esponente intero di un numero reale e neanche il valore della funzione esponenziale $f(x)=a^x$. Si può però aggirare l'ostacolo sfruttando la nota uguaglianza numerica

$$\forall x > 0, x = e^{\log x}, \tag{1}$$

nella quale il logaritmo che compare ha come base il numero di Nepero e=2,7182818…. In T.P. il logaritmo in base e di un numero positivo x si calcola con la funzione predefinita ln(x).

Nell'espressione esponenziale indicata compare però la funzione esponenziale di base e. Ebbene, in T.P. esiste la funzione predefinita $f(x)=e^x$ e la sua sintassi è la seguente

$$\mathtt{exp}(x) \tag{2}$$

In virtù della (1) il calcolo della potenza x^n può essere eseguito ponendo

$$x^n=\mathtt{exp(n*ln(x))}$$

Analogamente, si può calcolare il valore della funzione esponenziale a^x , con a>0, osservando che risulta

$$a^x=e^{x\ln a} \tag{3}$$

e quindi che

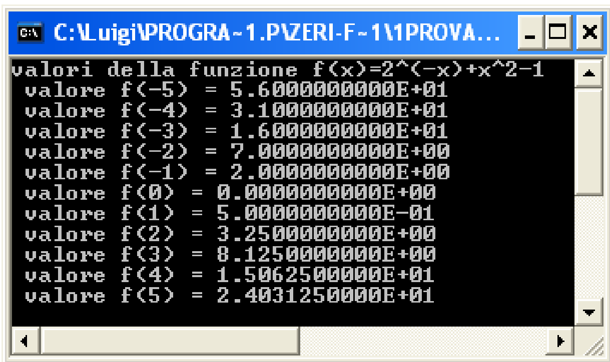
$$a^x=\mathtt{exp}(x*\mathtt{ln}(a)) \tag{4}$$

Riportiamo di seguito il codice del programma, di nome *Prova_fx* nel quale è stata definita una funzione di nome F.

```
Program Prova_fx;
 Uses Crt;
 Var I:integer;
 Function F(x:real):real;
  Begin
   F:=exp(-x*ln(2))+x*x-1;
  End; (* chiude la Function *)
 Begin
  clrscr;
  Writeln('valori della funzione f(x)=2^(-x)+x^2-1');
  For I:=-5 to 5 do
  writeln(' valore f(',I,') =',f(I));
  readln;
 End.
```

Il programma permette di calcolare i valori della funzione $f(x)=2^{-x}+x^2-1$ corrispondenti ai valori della variabile x che vanno da -5 a +5, con incremento +1. L'aggiornamento della variabile è gestito dalla struttura ciclica **For …to…do….**

A lato riporto la schermata di esecuzione del programma.



Si noti che la funzione si annulla nel punto x=0. In verità, la funzione si annulla anche in un punto interno all'intervallo]0;1[. Coi prossimi programmi indagheremo più a fondo la questione.

Il secondo programma

Il programma che segue è un po' più ricercato. Con esso si è realizzato l'obiettivo di visualizzare i valori che la funzione di riferimento assume in un intervallo [a;b] i cui estremi sono definiti dall'utente. I valori della variabile in cui calcolare la funzione sono decisi dall'utente stesso. Infatti, all'utente si richiedono i due estremi dell'intervallo ed il valore *dx* dell'incremento da assegnare alla variabile per il calcolo del valore successivo. Il processo dell'aggiornamento della variabile ha luogo finché il valore della variabile non supera l'estremo destro dell'intervallo. Il primo valore calcolato è $f(a)$. Dunque si calcolano i valori $f(a), f(a+dx), f(a+2dx),\dots\dots, f(a+ndx)$ e si procede finché risulta $a+ndx \le b$.

Come si diceva, l'obiettivo di questo programma è permettere di osservare come variano i valori della funzione in esame quando la variabile *x* descrive (sia pure a salti) un certo intervallo. Questo metodo, detto degli incrementi finiti, permette di indagare se una funzione continua in un certo intervallo si annulla qualche volta. I risultati della ricerca dipendono molto dal senso critico dell'operatore. Egli dovrà essere attento a definire adeguatamente l'incremento da attribuire alla variabile e saper leggere le elaborazioni ottenute in output, se vuole ottenere informazioni significative.

Osservazioni sul codice del programma

Il programma è strutturato con procedure. È presente la Procedure dati**;** con cui si acquisiscono i dati che l'utente deve inserire e la Procedure calcolo**;** preposta al calcolo dei valori della funzione.

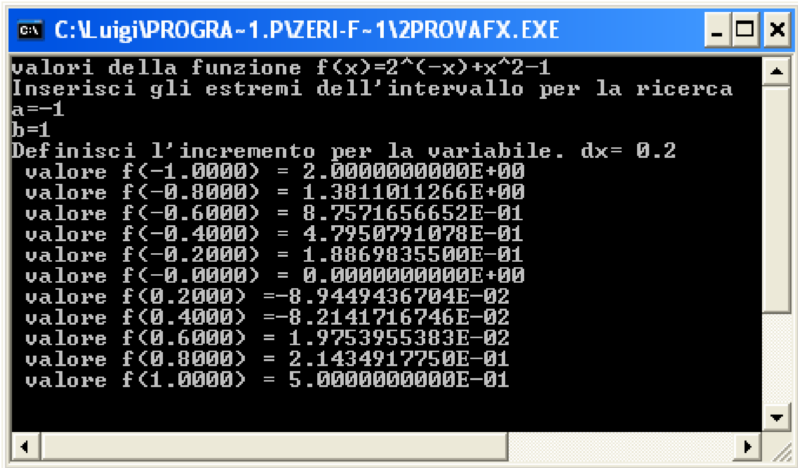
All'interno di questa vi è la struttura ciclica **Repeat…Until…** che itera il calcolo finché il valore della variabile *x* non supera l'estremo destro dell'intervallo [*a*;*b*].

Di seguito riportiamo la codifica del programma e due videate ottenute con altrettante esecuzioni dello stesso.

```
Program Prova_fx;
 Uses Crt;
 Var a,b,x,dx:real;

 Procedure Dati;
  Begin
   Writeln('Inserisci gli estremi dell''intervallo per la ricerca');
   Write('a=');Readln(a);
   Write('b=');Readln(b);
   Write('Definisci l''incremento per la variabile. dx= ');Readln(dx);
  End;
 Function F(x:real):real;
  Begin
   F:=exp(-x*ln(2))+x*x-1;
  End; (* chiude la Function *)
 Procedure Calcolo;
  Begin
   x:=a;
   Repeat
    writeln(' valore f(',x:2:4,') =',f(x));
    x:=x+dx;
   Until (x>b);
```

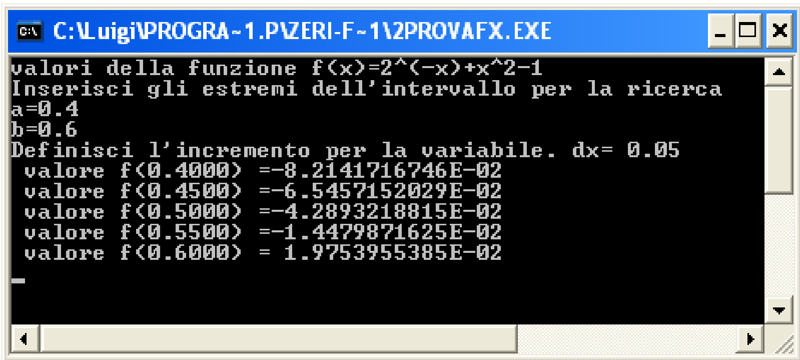
```
End; (* chiude la procedura Calcolo *)

Begin (* Corpo principale *)
 clrscr;
 Writeln('valori della funzione f(x)=2^(-x)+x^2-1');
 Dati;
 Calcolo;
 readln;
End.
```

Con questa prima esecuzione sono stati determinati valori assunti dalla funzione nell'intervallo [-1;1] procedendo con incremento dx=0.2 per la variabile. Dai risultati ottenuti si evince che $f(0.4)<0$ ed $f(0.6)>0$. Poiché la funzione in esame è continua, per il teorema di esistenza degli zeri deduciamo che internamente all'intervallo [0.4;0.6] essa si annulla almeno una volta. Detto $x=\alpha$ il valore dello zero, siamo interessati a cercarne un'approssimazione. Come fare?

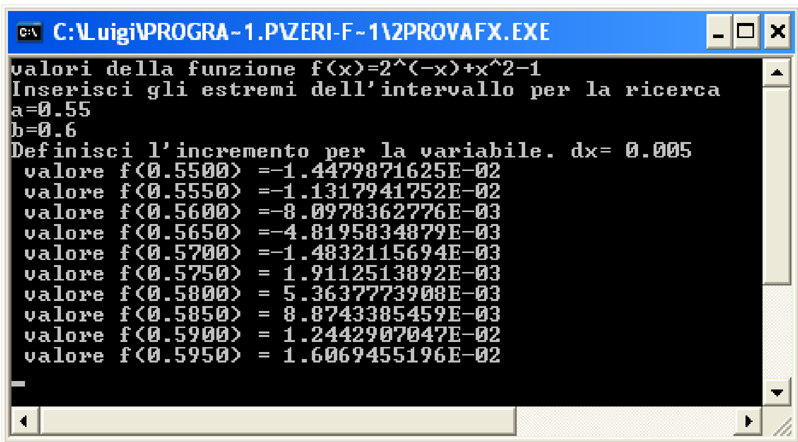


Il programma ci aiuta.

È sufficiente rilanciarlo, definire come intervallo di ricerca [0.4;0.6] e fissando per l'incremento dx un valore più piccolo, per esempio dx=0.05. Lo facciamo.



A lato riportiamo la videata dell'esecuzione. Si osserva che lo zero della funzione è interno all'intervallo [0.55;0.60] perché la funzione assume agli estremi di quest'intervallo valori di segno diverso. Possiamo rilanciare il programma per affinare la ricerca. Questa volta porremo dx=0.005.



A lato riportiamo la videata dell'elaborazione. Notiamo che lo zero cercato è interno all'intervallo [0.570;0.575]. La ricerca può continuare fino ad ottenere la precisione desiderata. Il metodo illustrato non presenta limitazioni nella ricerca. Basta un po' di attenzione nell'osservazione dei risultati che via via si ottengono e la pazienza di eseguire più volte il programma per ottenere per lo zero una precisione prestabilita, e dunque conoscerlo con un errore inferiore ad un certo margine predefinito. Con il successivo programma miglioreremo ulteriormente la ricerca. Cambieremo anche la strategia di ricerca.

Il terzo programma (sul metodo di ricerca dicotomico)

Con questo programma vogliamo alzare il livello nella qualità della ricerca.

Una volta acquisito che una determinata funzione continua presenta almeno uno zero internamente all'intervallo [*a*;*b*], vogliamo costruire un algoritmo che consenta al ricercatore di determinare un'approssimazione dello zero con un una precisione che egli stesso definirà. Detto $x=\alpha$ lo zero della funzione interno all'intervallo [*a*;*b*], l'operatore può fissare operativamente un margine superiore per lo scostamento tra α ed un valore approssimato che egli potrà determinare con l'esecuzione del programma. Il margine di errore è solitamente espresso da una potenza del 10 con esponente negativo. Ad esempio, si potrà richiedere di trovare un'approssimazione per lo zero con errore inferiore a 10^{-4}, vale a dire che il valore rappresentativo di α dovrà discostarsi da α per meno di un decimillesimo. Naturalmente l'operatore potrà essere più esigente e richiedere una precisione migliore. I risultati che potrà ottenere dipendono però anche dal software e dal processore matematico utilizzati. Non vogliamo addentrarci nella questione in questa sede. Ci basta aver segnalato il problema.

Si tenga comunque presente che se gli estremi *a*, *b* sono razionali e lo zero della funzione è irrazionale, si potranno ottenere solo approssimazioni che sono razionali (la semisomma di due numeri razionali è un numero razionale). Comunque, per quanto potenti possano essere le tecnologie in dotazione, i valori che i processori matematici forniscono possono avere solo un numero finito di cifre decimali e dunque anche se lo zero della funzione fosse un valore razionale periodico (semplice o misto), il processore fornirebbe solo un'approssimazione più o meno spinta. Evidentemente la questione si complica ulteriormente se il valore da determinare è irrazionale.

Per comprendere il funzionamento del programma si deve tener presente il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua che di seguito enunciamo.

Teorema

Sia $f:[a;b]\to R$ *una funzione reale di variabile reale continua nell'intevallo [a;b]. Se la funzione agli estremi dell'intervallo assume valori di segno discorde allora si annulla in almeno un punto interno all'intervallo.*

Osservato che l'ipotesi "la funzione agli estremi dell'intervallo assume valori di segno discorde" equivale all'affermazione che il prodotto dei valori assunti agli estremi è negativo, il teorema si può presentare nella seguente forma simbolica

$$\begin{pmatrix} f:[a;b]\to R \\ [a;b]\subseteq R, continua \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\exists c\in\,]a;b[\, : f(c)=0\right)$$

Il metodo di ricerca dicotomico

Il metodo implementato nel programma che segue è quello dicotomico, detto anche di bisezione. Di cosa si tratta?

Una volta acquisito che la funzione si annulla internamente all'intervallo [a;b], si potrebbe assumere come prima approssimazione dello zero $x=\alpha$ il valore del punto medio dell'intervallo

$$x_m = \frac{a+b}{2} \tag{5}$$

Posto per brevità *b*-*a*=l, con la scelta fatta, se x_m non dovesse coincidere con α, il valore $|x_m - \alpha|$ rappresenta l'errore connesso alla scelta e risulta evidentemente

$$|x_m - \alpha| < \frac{l}{2} \tag{6}$$

Il metodo dicotomico ci guida per ottenere approssimazioni sempre migliori dello zero, cioè approssimazioni che si discostano sempre meno dal valore α. Come fare?

Avendo supposto che $f(x_m) \neq 0$, $f(x_m)$ sarà concorde con uno solo dei due valori $f(a)$, $f(b)$. Si può presentare dunque solo uno dei due seguenti casi:

1) se $f(x_m)$ è concorde con $f(a)$, allora lo zero previsto della funzione è interno all'intervallo $[x_m; b]$. In questo caso la ricerca continua "aggiornando" il valore dell'estremo sinistro dell'intervallo; si pone $a=x_m$.
2) se $f(x_m)$ è concorde con $f(b)$, allora lo zero previsto della funzione è interno all'intervallo $[a; x_m]$. In questo caso la ricerca prosegue "aggiornando" il valore dell'estremo destro dell'intervallo; si pone $b=x_m$.

Una volta stabilito in quale dei due casi ci si ritroverà, la ricerca proseguirà determinando il valore del punto medio del nuovo intervallo nel quale calcolare il valore della funzione e confrontandolo con i valori assunti dalla stessa negli estremi dell'intervallo corrente. E' evidente che dopo ogni aggiornamento dell'intervallo di ricerca l'informazione migliora. Così, assumendo per lo zero il valore:

del primo punto medio, l'errore è inferiore a $\frac{l}{2}$;

del secondo punto medio, l'errore è inferiore a $\frac{l}{2^2}$;

……

dell'n-esimo punto medio, l'errore è inferiore a $\frac{l}{2^n}$. (7)

Poiché sussiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{l}{2^n} = 0$$

deduciamo che si può spingere la ricerca quanto occorre fino ad ottenere un valore approssimato dello zero della funzione che differisca dal valore effettivo per meno del valore positivo $\varepsilon = 10^{-k}$, con *k* naturale positivo, comunque prefissato. La filosofia del metodo dicotomico è tutta qui!

Possiamo aggiungere di più. Una volta noto l'intervallo iniziale [a;b] in cui cade lo zero, e fissato il margine di errore, possiamo anche **prevedere il numero massimo di passaggi che saranno necessari per ottenere l'approssimazione dello zero con la precisione desiderata**. Volendo che l'errore sia inferiore a 10^{-k}, il numero *n* di passaggi necessari si determina risolvendo la disequazione seguente:

$$\frac{l}{2^n} < 10^{-k}$$

che risolta nell'incognita n fornisce la seguente condizione

$$n > \log_2 l + k \log_2 10 \qquad (8)$$

Scrivendo la (8) utilizzando i logaritmi in base 10 la limitazione per n è

$$n > \frac{\log_{10} l + k}{\log_{10} 2}$$

Esempio

Abbiamo precisato che la funzione $f(x) = 2^{-x} + x^2 - 1$ ammette uno zero internamente all'intervallo [0;1]. In questo caso *l*=1-0=1, k=5. Si otterrà un'approssimazione dello zero previsto con un errore inferiore a 10^{-5} con un numero di passaggi

$$n > \log_2 1 + 5 \log_2 10 \quad \Leftrightarrow \quad n > 16,6$$

Dunque basta eseguire *n*=17 passaggi.

Riportiamo ora il codice del programma che risolve il problema illustrato.

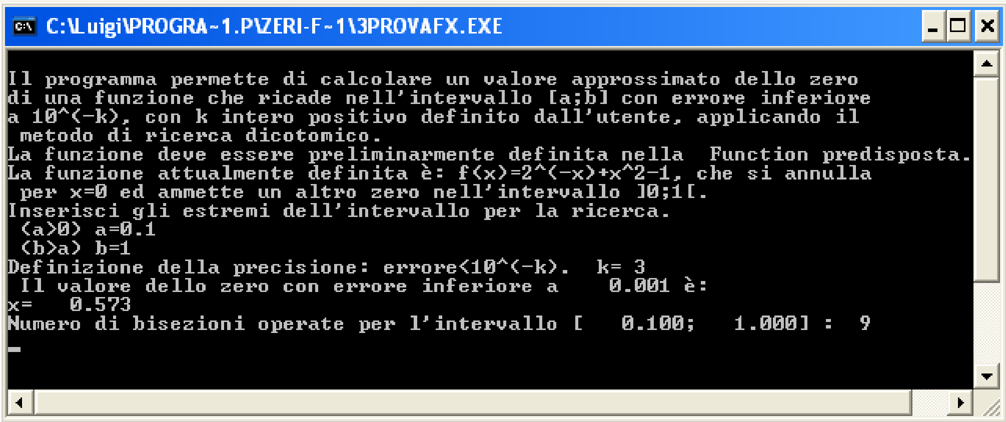
```
Program Prova_fx;
 Uses Crt;
 Var a,b,x,dx   :real;
     k          :integer;
 Procedure Avviso;
  Begin
   Clrscr;writeln;
   writeln('Il programma permette di calcolare un valore approssimato dello zero
');
   writeln('di una funzione che ricade nell''intervallo [a;b] con errore inferiore-
');
   writeln('a 10^(-k), con k intero positivo definito dall''utente, applicando i-
l');
   writeln(' metodo di ricerca dicotomico.');
   write('La funzione deve essere preliminarmente definita nella ');
   writeln(' Function predisposta.');
   writeln('La funzione attualmente definita è: f(x)=2^(-x)+x^2-1, che si annulla
');
   writeln(' per x=0 ed ammette un altro zero nell''intervallo ]0;1[.');
  End;
 Procedure Dati;
  Begin
   Writeln('Inserisci gli estremi dell''intervallo per la ricerca.');
   Write(' (a>0) a=');Readln(a);
   Write(' (b>a) b=');Readln(b);
   Write('Definizione della precisione: errore<10^(-k).  k= ');Readln(k);
  End;
 Function F(x:real):real;
  Begin
   F:=exp(-x*ln(2))+x*x-1; (* Qui va definita la struttura della funzione. *)
  End; (* chiude la Function *)
 Function Controllo(a,b:real):Boolean;
  (* La Function controlla se la funzione f(x) agli estremi dell'intervallo *)
  (* [a;b] definito assume segno discorde. In caso negativo la ricerca non si ef-
fettua.*)
  Begin
    Controllo:=True;
```

```
    If (F(a)*F(b)>0) Or (F(a)*F(b)=0) then
      Begin
        Textcolor(2+blink);
        writeln('Nell''intervallo [',a:8:k,';',b:8:k,'] la funzione non verifica le
ipotesi del');
        writeln(' teorema sull'esistenza degli zeri per una funzione continua. ');
        write(' Il metodo dicotomico non è applicabile.');
        Controllo:=False;
      End;
  End; (*chiude la function controllo *)
 Procedure Itera_Calcolo;
  Var x1,x2,xm,error     :real;    (* variabili locali per il ciclo *)
      N_Elab              :integer; (* variabile per contare il numero delle bise-
zioni dell'intervallo *)
  Begin
   x1:=a;x2:=b;
   error:=(b-a)/2;N_Elab:=0;
   While (f(x1)*f(x2)<0) and (error>exp(-k*ln(10))) do
    Begin
     xm:=(x1+x2)/2;
     N_Elab:=N_Elab+1;
     If f(x1)*f(xm)<0 then x2:=xm
                      Else x1:=xm;
     error:=(x2-x1)/2;
    End;
    Writeln(' Il valore dello zero con errore inferiore a ',exp(-k*ln(10)):8:k,'
è:');
    Writeln('x=',xm:8:k);
    Write('Numero di bisezioni operate per l''intervallo [',a:8:k,';',b:8:k,'] :');
    Writeln(N_Elab:3);
  End; (* chiude la procedura Itera_Calcolo *)

  Begin (* Corpo principale del programma *)
   Avviso;
   Dati;
   If Controllo(a,b) then Itera_Calcolo;
   readln;
  End.
```

Riportiamo ora le videate di tre elaborazioni del programma con cui si ottengono approssimazioni sempre migliori. Per ogni elaborazione sceglieremo un intervallo ed un margine di errore diversi, affinando la ricerca.

Prima elaborazione

Come primo intervallo prendiamo]0.1;1[e margine di errore minore di 10^{-3}.

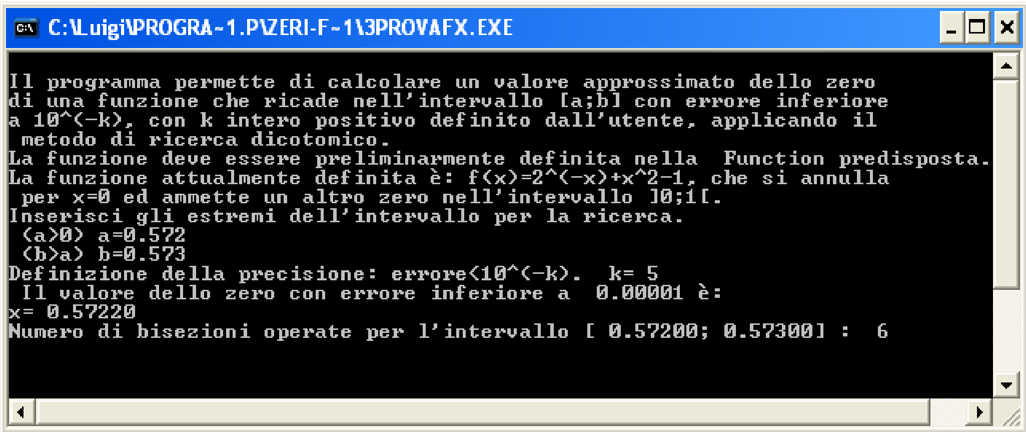


```
C:\Luigi\PROGRA~1.P\ZERI-F~1\3PROVAFX.EXE
Il programma permette di calcolare un valore approssimato dello zero
di una funzione che ricade nell'intervallo [a;b] con errore inferiore
a 10^(-k), con k intero positivo definito dall'utente, applicando il
 metodo di ricerca dicotomico.
La funzione deve essere preliminarmente definita nella  Function predisposta.
La funzione attualmente definita è: f(x)=2^(-x)+x^2-1, che si annulla
 per x=0 ed ammette un altro zero nell'intervallo ]0;1[.
Inserisci gli estremi dell'intervallo per la ricerca.
 (a>0) a=0.1
 (b>a) b=1
Definizione della precisione: errore<10^(-k).  k= 3
 Il valore dello zero con errore inferiore a    0.001 è:
x=   0.573
Numero di bisezioni operate per l'intervallo [   0.100;   1.000] :  9
```

Il valor approssimato per lo zero è x=0.573, affetto da un errore inferiore a 10^{-3}. Sono stati necessari 9 passaggi, cioè l'intervallo iniziale di ricerca è stato diviso in due parti uguali per nove volte.

Seconda elaborazione

Dall'elaborazione precedente abbiamo l'informazione che lo zero cercato appartiene all'intervallo di estremi 0.573-0.001=0.572 e 0.573+0.001=0.574. Scegliamo dunque questo come secondo intervallo di ricerca e come margine superiore per l'errore 10^{-5}. Segue la videata dell'elaborazione.

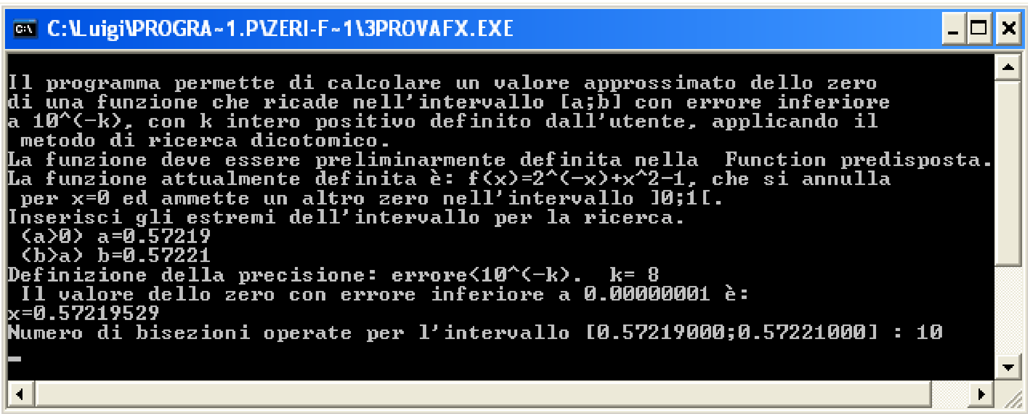


```
C:\Luigi\PROGRA~1.P\ZERI-F~1\3PROVAFX.EXE
Il programma permette di calcolare un valore approssimato dello zero
di una funzione che ricade nell'intervallo [a;b] con errore inferiore
a 10^(-k), con k intero positivo definito dall'utente, applicando il
 metodo di ricerca dicotomico.
La funzione deve essere preliminarmente definita nella  Function predisposta.
La funzione attualmente definita è: f(x)=2^(-x)+x^2-1, che si annulla
 per x=0 ed ammette un altro zero nell'intervallo ]0;1[.
Inserisci gli estremi dell'intervallo per la ricerca.
 (a>0) a=0.572
 (b>a) b=0.573
Definizione della precisione: errore<10^(-k).  k= 5
 Il valore dello zero con errore inferiore a  0.00001 è:
x= 0.57220
Numero di bisezioni operate per l'intervallo [ 0.57200; 0.57300] :  6
```

L'approssimazione trovata è x=0.57220 con un errore <0.00001. Sono stati necessari 6 passaggi.

Dunque lo zero $x=\alpha$ verifica la doppia disuguaglianza $0.57219<\alpha<0.57221$.

Eseguiamo la nuova elaborazione prendendo come intervallo di partenza [0.57219;0.57221] e come margine superiore per l'errore 10^{-8}. Segue la videata dell'elaborazione.



```
C:\Luigi\PROGRA~1.P\ZERI-F~1\3PROVAFX.EXE
Il programma permette di calcolare un valore approssimato dello zero
di una funzione che ricade nell'intervallo [a;b] con errore inferiore
a 10^(-k), con k intero positivo definito dall'utente, applicando il
 metodo di ricerca dicotomico.
La funzione deve essere preliminarmente definita nella  Function predisposta.
La funzione attualmente definita è: f(x)=2^(-x)+x^2-1, che si annulla
 per x=0 ed ammette un altro zero nell'intervallo ]0;1[.
Inserisci gli estremi dell'intervallo per la ricerca.
 (a>0) a=0.57219
 (b>a) b=0.57221
Definizione della precisione: errore<10^(-k).  k= 8
 Il valore dello zero con errore inferiore a 0.00000001 è:
x=0.57219529
Numero di bisezioni operate per l'intervallo [0.57219000;0.57221000] : 10
```

Con dieci elaborazioni è stata ottenuta per lo zero della funzione l'approssimazione x=0.57219529, affetta da errore<10^{-8}.

Curiosità

Se si lancia il programma scegliendo come intervallo di ricerca [0.1;1] e 10^{-8} come margine superiore per l'errore sono necessarie 26 bisezioni e si trova lo stesso valore per l'approssimazione: x=0.57219529.

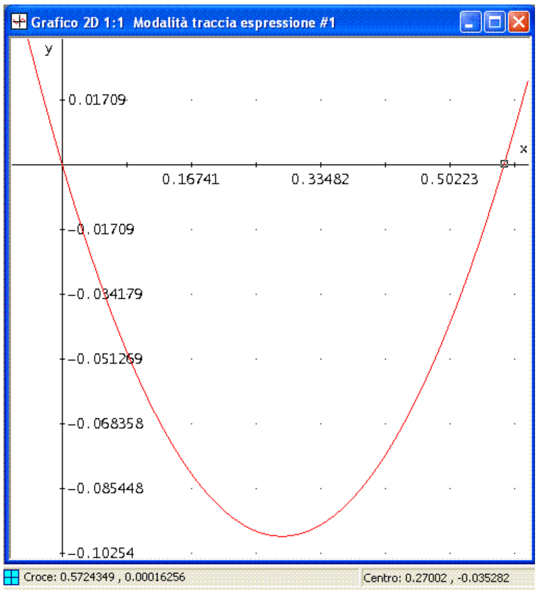
Scegliendo per la ricerca l'intervallo [0.1;0.9] e margine di errore 10^{-9} si ottiene il valore approssimato x=0.5721952787 dopo 29 bisezioni.

Cosa offre *Derive*?

Da diversi anni nelle scuole superiori italiane si utilizzano sempre più frequentemente programmi applicativi come *Derive*. Senza dubbio l'interfaccia grafica è stimolante e gratifica immediatamente lo studioso con grafici eleganti.

Ma se si vuole sviluppare una ricerca più approfondita l'affascinante mondo grafico spesso non è sufficiente. Qui vedremo una differenza sostanziale tra la qualità dell'informazione che si può estrarre operando con un linguaggio di programmazione e quella che si può ricavare dall'osservazione di un'elaborazione grafica.

A completamento del lavoro sviluppato riportiamo la rappresentazione grafica ottenuta con *Derive 6*, della funzione che abbiamo analizzato.



Inizialmente abbiamo rappresentato la funzione su un intervallo piuttosto esteso contenente l'intervallo [0;1] per osservare quale valutazione dello zero si riesce a rilevare con l'applicazione in modalità traccia. Successivamente, per avere approssimazioni migliori dello zero della funzione, abbiamo operato degli ingrandimenti (zoom) impostando via via intervalli di rappresentazione di dimensione sempre più piccola.

L'immagine riportata a lato è quella che permette di "vedere" ancora abbastanza bene la forma del diagramma della funzione. Si possono leggere chiaramente le coordinate del puntatore, collocato apparentemente sullo "zero" della funzione che interessa a noi. Si noti che l'ordinata del punto non è zero, ma 0.00016256 e la sua ascissa vale 0.5724349.

Confrontando il valore dell'ascissa suddetta con il valore dell'approssimazione determinato con la terza esecuzione del programma, cioè x=0.57219529, possiamo notare che in quello di Derive solo le prime tre cifre decimali sono esatte.

Certamente si può migliorare il valore dell'approssimazione ottenibile con l'applicazione Derive, ma occorre restringere notevolmente l'ampiezza dell'intervallo in cui visualizzare la curva e a livello grafico non ne vale la pena.

Concludiamo questa riflessione affermando che le elaborazioni numeriche ottenibili con un linguaggio di programmazione sono senza dubbio di qualità superiore rispetto alle informazioni ottenibili con elaborazioni grafiche.

Disquisizioni euleriane sull'aritmetica

di Andrea Ossicini

A mio padre, Alessandro Ossicini:
il mio primo grande maestro.

Il seguente contributo include due miei lavori: *Leonhard Euler: il principe dei matematici…* e *Nova Theoremata de primis naturalibusque numeris*.

Il primo non è altro che un elogio personale al grandissimo matematico svizzero, che tanta parte ha avuto nella mia passione per la Matematica. Lo studio di alcune opere di Leonhard Euler è risultato determinante per il conseguimento della dimostrazione dei teoremi contenuti in questa memoria, ma ha anche caratterizzato i metodi, le tecniche e lo stile utilizzati soprattutto per l'ultimo teorema. Il secondo costituisce i fondamenti di una "nuova" Teoria dei numeri naturali, di natura squisitamente aritmetica, ma che implicitamente fornisce una rappresentazione geometrica nello spazio di un qualsiasi numero naturale, attraverso l'impiego di un *paraboloide iperbolico*.

L'obiettivo di tale Teoria è quello di potere attaccare attraverso l'uso dell'analisi indeterminata di secondo grado i problemi ancora irrisolti nel campo dell'Aritmetica, ovvero di risolverli con tecniche squisitamente elementari.

LEONHARD EULER: IL PRINCIPE DEI MATEMATICI...

Leonhard Euler[5], conosciuto in Italia con il nome di Eulero, è indiscutibilmente il principe dei matematici del XVIII secolo. Grandissimo anche come fisico teorico, egli può essere accostato senza dubbio a figure chiave come Euclide, Archimede, Newton, Gauss e Einstein.

Il suo genio non ha uguali né simili se si pensa alla sua capacità di affrontare e risolvere indifferentemente i problemi dei due principali campi della matematica: il continuo e il discreto. Grazie a questa sua caratteristica, Eulero, nel campo delle scienze esatte, risulta il più prolifico della storia e tutto ciò nonostante abbia dovuto passare gli ultimi diciassette anni della sua vita completamente cieco.

Il fisico Arago sosteneva che "Eulero calcolava senza sforzo apparente proprio come gli uomini respirano e le aquile volano nel vento", ma i suoi contemporanei riconobbero in lui l'*Incarnazione* dell'*Analisi* a causa del contributo di sistemazione e organizzazione che egli da solo seppe dare alla più grande realizzazione del XVIII secolo: il Calcolo Infinitesimale.

Nei primi anni del 1700, quando in pratica erano scomparsi personaggi come G. W. Leibniz e Giacomo Bernoulli ed I. Newton si era ritirato dalla scienza militante, Giovanni Bernoulli, fratello minore di Giacomo, passava a ragione come il più grande matematico d'Europa. Il 17 novembre del 1705, do-

[5] Leonhard Euler nacque a Basilea (Svizzera) il 15 aprile 1707, e morì a S. Pietroburgo (Russia) il 18 settembre 1783.

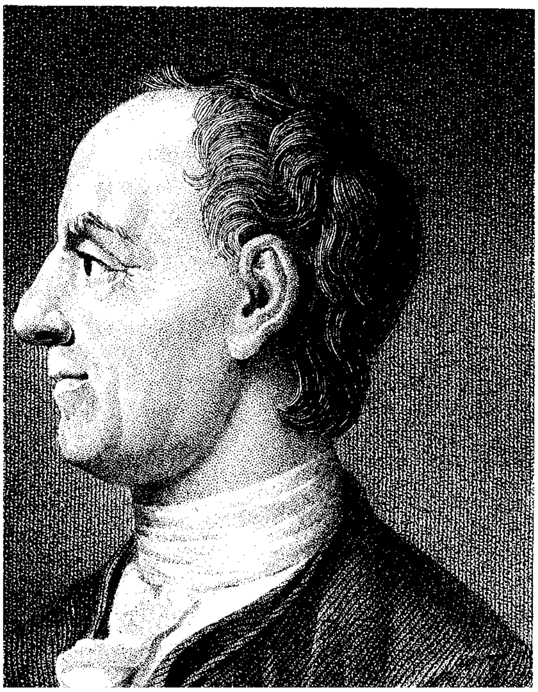
po aver accettato la cattedra di Professore in Matematica precedentemente tenuta dal fratello maggiore, egli tenne presso l'università di Basilea l'orazione inaugurale.

Insegnante formidabile, Giovanni Bernoulli attirò intorno a sé numerosi giovani accorsi ad ascoltarlo da ogni parte d'Europa. Alcuni di essi non tardarono successivamente a salire a grande fama nell'ambito della Matematica e della Fisica. Fortuna volle che nel 1720 divenne maestro di Leonardo Eulero e che immediatamente riconobbe nel giovane discepolo delle capacità non indifferenti. Per questo motivo gli dedicò gratuitamente una lezione privata ogni sabato pomeriggio.

Giovanni Bernoulli, sospettoso ed invidioso per indole, non seppe instaurare mai rapporti felici con il prossimo, né negli ultimi anni con il fratello Giacomo, né tantomemo con i figli Daniele, Nicola e Giovanni II, che si ribellarono all'autorità paterna per proseguire in modo brillante la loro carriera nel mondo scientifico.Un'unica eccezione il rapporto con Leonardo, che proseguì in maniera stupefacente per tutto l'arco della vita del maestro. Non solo, ma quando Eulero si allontanò da Basilea e si trasferì prima a San Pietroburgo e successivamente a Berlino, la corrispondenza scientifica attraverso lettere fu sempre intensa e cordiale

La fecondità scientifica di Eulero nei suoi primi soggiorni in Russia e in Prussia (l'attuale Germania) fu tanto intensa che la sua fama presto raggiunse livelli straordinari e, circostanza ancora più sorprendente, ciò non turbò minimamente l'amicizia e l'affetto del suo maestro, tanto che quando quest'ultimo riconobbe che il suo allievo lo aveva ormai superato, gli tributò in una lettera del 23 settembre 1745 la citazione "*Princeps Mathematicorum*".

Il mantello di Principe dei Matematici era ormai scivolato inesorabilmente e giustamente sulle spalle di Leonardo ed egli lo mantenne saldamente per tutto il resto della sua vita.



Leonardo Eulero (1707-1783)

"NOVA THEOREMATA DE PRIMIS NATURALIBUSQUE NUMERIS"
"Nuovi Teoremi sui numeri primi e sui numeri naturali"
di Andrea Ossicini

Proposizione[6] **1**: ogni numero primo > 2 si può partizionare in un unico modo nella differenza di due quadrati di naturali.

$$(1) \qquad m = \left[\frac{(m+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(m-1)}{2}\right]^2 = m \cdot 1 \qquad \text{con } m = 2n+1 \in \mathbb{N}$$

La dimostrazione è conseguenza della (1) e del Teorema fondamentale dell'Aritmetica.

Si tenga presente che la relazione (1) sussiste anche per tutti i numeri naturali dispari ≥ 1.

Proposizione **2**: Il prodotto di due distinte differenze di quadrati di naturali si può comunque esprimere almeno in due modi nella differenza di due quadrati di naturali.

La dimostrazione si basa sulla seguente relazione[7] (Teorema Eximium) citata da L. Euler relativamente alle forme quadratiche:

$$\left(a^2 - Nb^2\right)\cdot\left(\alpha^2 - N\beta^2\right) = \left(a\alpha \mp Nb\beta\right)^2 - N\cdot\left(a\beta \mp \alpha b\right)^2 \qquad \begin{matrix} a,\alpha \\ b,\beta \end{matrix} \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad N \in \mathbb{Z}$$

Ora, posto $N=1$, abbiamo :

$$(2) \quad \left(a^2 - b^2\right)\cdot\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = \left(a\alpha \mp b\beta\right)^2 - \left(a\beta \mp \alpha b\right)^2$$

Proposizione **3**: Ogni naturale dispari composto > 1 si può esprimere almeno in due modi come differenza di quadrati di naturali.

Tale Proposizione è conseguenza di:

- il criterio di scomposizione in fattori di un numero naturale dispari non primo, intendendo con ciò la possibilità comunque di esprimere un tale numero come prodotto di almeno due numeri naturali dispari;
- la relazione (2).

Nuovo Teorema sui numeri primi

Teorema **A:** Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero naturale N >2 sia primo è che si possa partizionare in un unico modo come differenza di due quadrati di naturali.

La dimostrazione di tale teorema deriva dall'applicazione congiunta delle proposizioni **3** ed **1**.

Nuovo Teorema sui numeri naturali composti

Teorema **B:** Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero naturale dispari N >1 sia composto è che si possa partizionare almeno in due modi distinti come differenza di due quadrati di naturali.
La dimostrazione di tale teorema deriva dall'applicazione congiunta delle proposizioni **1** e **3**.

[6] Tale proposizione è stata enunciata da P. Fermat.
[7] Tale identità era già nota a Brahmagupta (VII sec. D.C.).

Il Test di Primalità
Per verificare la primalità di un numero naturale dispari >1 è necessario che la sua partizione in differenza di quadrati di naturali : (3) $N = A^2 - B^2$
implichi l'impossibilità di risolvere in numeri interi positivi, distinti da A e B, la seguente equazione diofantea di secondo grado : (4) $X^2 - Y^2 = A^2 - B^2$

La dimostrazione si basa sul seguente ragionamento: se determinati A e B di (3) con la formula definita dalla (1) l'equazione (4) non ammette soluzioni intere positive distinte da A e B e quindi banali, allora per il Teorema **A** il numero naturale trattato è primo, viceversa se l'equazione (4) viene verificata con numeri interi positivi distinti da A e B per il Teorema **B** il numero naturale trattato è composto.

Nuovo Teorema sulle potenze dei numeri naturali
Teorema **C**: Ogni potenza, con esponente intero dispari > 1, di un numero naturale può essere espressa come la differenza di due quadrati di interi positivi:

$$\alpha^{2n+1} = r^2 - s^2 \qquad \alpha, r, s, n \in \mathbb{N}$$

Procediamo per induzione. Intanto il teorema è vero per $n=1$.

Infatti dato che ogni cubo di un numero naturale è la differenza di due numeri triangolari consecutivi elevati al quadrato possiamo scrivere la seguente relazione:

$$\alpha^3 = \left[\frac{1}{2}\alpha\,(a+1)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\alpha\,(\alpha-1)\right]^2$$

e con le posizioni :

$$r = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) \qquad \text{e} \qquad s = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1) \qquad r, s \in \mathbb{N} \quad \text{la tesi è verificata.}$$

Supposto ora il teorema vero per $n=k$, cioè : $\alpha^{2k+1} = r_1^2 - s_1^2 \quad \alpha, r_1, s_1, k \in \mathbb{N}$

dimostriamolo per $n=k+1$.

Dal seguente sviluppo :

$$\alpha^{2(k+1)+1} = \alpha^{2k+1+2} = \alpha^{2k+1} \cdot \alpha^2$$

abbiamo :

$$\alpha^{2(k+1)+1} = (r_1^2 - s_1^2) \cdot \alpha^2 = (\alpha \cdot r_1)^2 - (\alpha \cdot s_1)^2$$

e con le posizioni $r = \alpha \cdot r_1$ e $s = \alpha \cdot s_1$ con $r, s \in \mathbb{N}$
Il Teorema **C** è dimostrato.

Proposizione 4 :Tutti i numeri interi positivi, ad eccezione di quelli della forma 4k + 2, si possono partizionare come differenza di due quadrati di naturali .

La dimostrazione generale di tale proposizione è la seguente: Se n non è della forma 4k +2, deve avere una delle seguenti forme 4k , 4k + 1, o 4k +3.

Nel primo caso possiamo utilizzare la seguente : $n = \left(\frac{n}{4}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{4}-1\right)^2$

Negli altri due casi possiamo utilizzare la (1), che qui ribadiamo : $n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

D'altro canto, ogni quadrato è un multiplo di 4, o un multiplo di 4 aumentato di 1, a seconda che si tratti del quadrato di un numero pari o dispari ; quindi la differenza di due quadrati non può essere un multiplo di 4 più 2, e di conseguenza i numeri che sono esprimibili nella forma 4k +2 (con k naturale , incluso 0) non sono esprimibili come differenza di due quadrati.

<u>Proposizione **5**</u> **:** ogni naturale della forma 4k + 2 si può esprimere come semi-differenza di due quadrati di naturali.

La Proposizione deriva dalla seguente relazione : $4k + 2 = \frac{1}{2}\left[4 \cdot \left(2k+1\right)\right]$

che per la (1) dà luogo alla seguente proprietà : $4k + 2 = \frac{1}{2} \cdot \left[2^2 \cdot \left(k+1\right)^2 - 2^2 \cdot \left(k\right)^2\right]$

<u>Proposizione **6**</u> **:** ogni naturale della forma 4k si può esprimere come semi-differenza di due quadrati di naturali.

La Proposizione deriva dalla seguente relazione : $4k = \frac{1}{2} \cdot \left(8k\right)$ che per la proposizione **4**, essendo $8k$ un numero pari della forma 4k , dà luogo alla seguente proprietà :

$$4k = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(2k+1\right)^2 - \left(2k-1\right)^2\right]$$

<u>Proposizione **7**</u> **:** Tutti i numeri interi dispari non si possono partizionare come semi-differenza di due quadrati di naturali.

la Proposizione deriva dalla seguente caratteristica di tutti i numeri dispari, ovvero sia quelli della forma 4k + 1, che della forma 4k +3.

Ogni numero intero dispari è sempre e solo la metà di un numero pari della forma 4k +2, infatti la metà di un numero intero pari della forma 4k è senz'altro ancora un numero intero pari.

Di conseguenza per la proposizione **5** possiamo scrivere:

$$4k + 2 = \frac{1}{2} \cdot \left[2^2 \cdot \left(k+1\right)^2 - 2^2 \cdot \left(k\right)^2\right]$$

che divisa per due dà luogo a :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(4k+2\right) = \frac{1}{2^2} \cdot \left[2^2 \cdot \left(k+1\right)^2 - 2^2 \cdot \left(k\right)^2\right] = \left(k+1\right)^2 - \left(k\right)^2$$

pertanto tutti i numeri dispari si possono partizionare esclusivamente come differenza di due quadrati di naturali.

Digressioni analitiche

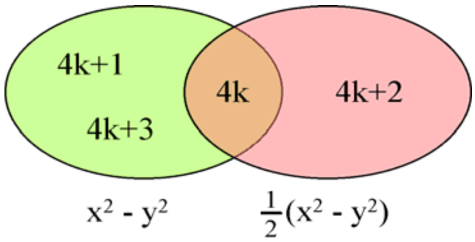
I Teoremi e le Proposizioni illustrati in questo lavoro permettono di introdurre una **nuova teoria** nell'ambito dei numeri naturali.
Più precisamente mi riferisco alla possibilità di dare la seguente nuova classificazione per l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ può suddividersi nelle seguenti due classi :

- la classe dei naturali che si possono partizionare nella differenza di quadrati di naturali;
- la classe dei naturali che si possono partizionare nella semi-differenza di quadrati di naturali.

La prima classe comprende :
- il numero naturale 1
- i numeri primi > 2 (Teorema **A**)
- i numeri composti dispari > 2 (Teorema **B**)
- le potenze con esponente dispari di un naturale (Teorema **C**)
- i numeri pari della forma 4 k (Proposizione **4**).

La seconda classe comprende :
- il numero naturale e primo 2
- i numeri pari della forma 4 k + 2 (Proposizione **5**)
- i numeri pari della forma 4 k (Proposizione **6**).

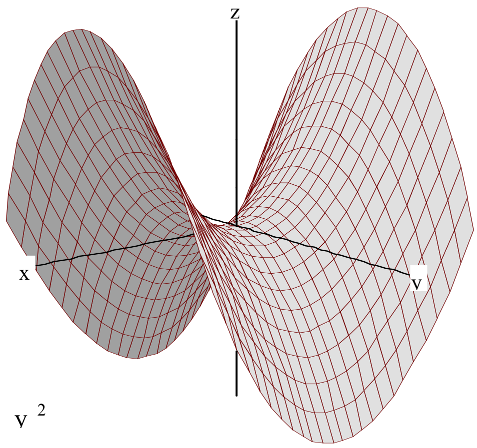
Tale classificazione permette di includere tutti i numeri naturali per il fatto che alla prima classe appartengono i numeri delle forme 4 k, 4 k + 1 , 4 k + 3 e alla seconda i numeri della forma 4k e 4 k + 2.
Le due classi pertanto non risultano completamente disgiunte (vedasi anche la proposizione **7**) e mettono in evidenza la caratteristica particolare che possiedono soltanto tutti i numeri pari del tipo 4k, che rappresentano l'intersezione non vuota delle due classi.



In definitiva un numero naturale Z può essere rappresentato comunque attraverso la seguente espressione (prodotto di un parametro razionale per la differenza di due quadrati di interi):

$$Z = K\,(X^2 - Y^2) \qquad \text{con } K \in \mathbb{Q} \quad (\text{ovvero } K=1 \text{ o } K=1/2) \text{ e } X, Y \in \mathbb{N}$$

Tale equazione rappresenta in uno spazio euclideo a tre dimensioni
un paraboloide iperbolico (detto anche "a sella").



Un'estensione della nuova teoria dei numeri naturali
Nel precedente paragrafo è stata illustrata una nuova e diversa classificazione dei numeri naturali.
In passato la rappresentazione di un numero naturale si è basata esclusivamente sulla somma di due o più quadrati.
In questo paragrafo, sfruttando alcune proprietà stabilite per i numeri primi e i numeri composti, unificheremo le due classi distinte, definite dalla nuova Teoria dei Numeri, in una sola classe.
Nel campo dei numeri naturali, in relazione alla possibile rappresentazione di un numero come somma algebrica di quattro quadrati di interi, è sempre possibile verificare la proprietà di gruppo moltiplicativo che godono tali numeri, ovvero l'identità fondamentale :

(6) $(a^2-b^2+c^2-d^2)\cdot(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)=A^2-B^2+C^2-D^2$

infatti considerando le seguenti posizioni:

$A=a\alpha+b\beta+c\gamma-d\delta$; $B=a\beta+b\alpha-c\delta+d\gamma$; $C=a\gamma+b\delta-c\alpha+d\beta$; $D=a\delta+b\gamma+c\beta-d\alpha$

o in alternativa

$A=a\alpha+b\beta-c\gamma-d\delta$; $B=a\beta+b\alpha-c\delta-d\gamma$; $C=a\gamma-b\delta+c\alpha-d\beta$; $D=a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha$

la (6) è soddisfatta.
Premesso che addirittura anche il numero 1 gode della proprietà di essere espresso come somma algebrica di quattro quadrati di interi, in quanto vale anche la seguente generale relazione:

$$1=n^2-(n+2)^2+[2(n+1)+1]^2-[2(n+1)]^2=(n+2)^2-(n)^2+(2n+1)^2-(2n+2)^2$$

ad esempio, per $n=2$ abbiamo : $1=2^2-4^2+7^2-6^2=4^2-2^2+5^2-6^2$ stabiliremo la seguente proposizione relativa a tutti i numeri primi:
Proposizione **8:** ogni numero primo m si può sempre esprimere come somma algebrica di quattro quadrati di interi, tutti non nulli.

(7) $m=\left[a^2+c^2\right]-\left[b^2+d^2\right]=a^2-b^2+c^2-d^2 \qquad a,b,c,d\in\mathbb{N}$ (tutti $\neq 0$)

La dimostrazione è la seguente, essendo $m=2$ abbiamo certamente: $2=1^2-0^2+1^2-0^2$.

Ma sfruttando l'identità (6) e le due scomposizioni del numero 1, sopraindicate, possiamo scrivere la seguente : $2=9^2-2^2+5^2-10^2=9^2-4^2+1^2-8^2$
Più in generale, sfruttando la rappresentazione generale del numero naturale 1 ,è possibile ottenere la seguente formula :

$$2=(3n+3)^2-(n)^2+(n+3)^2-(3n+4)^2=(3n+3)^2-(n+2)^2+(n-1)^2-(3n+2)^2$$

Se m=*primo dispari* abbiamo che: $m=2n+1=(n+1)^2-(n)^2$

Sia $n=2k$ allora avremo :

$$m=4k+1=\left[\frac{(2k+1)^2+1}{2}\right]^2-\left[\frac{(2k+1)^2-1}{2}\right]^2-\left[\left(\frac{(2k)^2}{4}+1\right)\right]^2+\left[\left(\frac{(2k)^2}{4}-1\right)\right]^2$$

Sia $n=2k+1$ allora avremo:

$$m=4k+3=\left[\left(\frac{(2(k+1))^2}{4}+1\right)\right]^2-\left[\left(\frac{(2(k+1))^2}{4}-1\right)\right]^2-\left[\frac{(2k+1)^2+1}{2}\right]^2+\left[\frac{(2k+1)^2-1}{2}\right]^2$$

Ora le due ultime formule ricavate per m non includono i numeri primi 3 e 5.
Allo scopo di trattare anche questi due numeri primi effettueremo, come è stato trattato il caso del numero primo 2, il prodotto tra $m=(n+1)^2-(n)^2$ e separatamente le due scomposizioni del numero naturale 1 e sfrutteremo ancora una volta l'identità (6).
In questo modo avremo le seguenti scomposizioni:

$$m=2n+1=\left(2n^2+3n\right)^2-\left(2n^2+3n+2\right)^2+\left(4n^2+7n+3\right)^2-\left(4n^2+7n+2\right)^2 \quad \text{oppure}$$

$$m=2n+1=\left(2n^2+3n+2\right)^2-\left(2n^2+3n\right)^2+\left(4n^2+5n+1\right)^2-\left(4n^2+5n+2\right)^2$$

In definitiva la tesi è dimostrata.
La conseguenza immediata di tale proposizione in congiunzione con il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica e l'identità (6) sopraindicata è il seguente:

Theorema (di Ossicini): Ogni numero naturale può essere rappresentato in infiniti modi come somma algebrica di quattro quadrati di interi, tutti non nulli, ovvero nel seguente modo:

$$n=a^2-b^2+c^2-d^2 \qquad \text{con } n,a,b,c,d \in \mathbb{N} \quad (\text{tutti} \neq 0)$$

Infatti tenuto conto dell'identità (6) e della proposizione dimostrata sulla rappresentabilità di ogni numero primo è ovvio che la rappresentabilità di un numero naturale composto seguirà da una ripetuta applicazione dell'identità stessa.
Tale rappresentazione, possibile quindi per un qualsiasi numero naturale, pur risultando unica rispetto a determinati quattro quadrati di interi (*segno incluso*) , non è unica rispetto ad altri ulteriori quadrati di interi in quanto il numero infinito di rappresentazioni possibili del numero naturale 1, in termini di somma algebrica di quattro quadrati di interi , tutti non nulli, implica che anche per un numero naturale siano sempre possibili infinite rappresentazioni: è infatti sufficiente ricorrere ancora l'identità (6).

Una caratterizzazione dei numeri composti

In apparenza il Theorema precedente non evidenzia nessuna caratteristica particolare dei numeri primi rispetto a quelli composti, pertanto di seguito, sfruttando una tecnica di fattorizzazione utilizzata da Eulero e che porta il suo nome, illustreremo una particolare caratteristica posseduta esclusivamente dai numeri composti.
Sia N un naturale (che supporremo dispari) esprimibile nel modo che segue:

(8) $$N = \left(a^2 - b^2\right) = \left(c^2 - d^2\right) \quad \text{con} \quad \begin{matrix} a,c \\ b,d \end{matrix}, N \in \mathbb{N}$$

La (8) può essere scritta come $\left(a^2 - c^2\right) = \left(b^2 - d^2\right)$ ovvero:

(9) $$\left(a - c\right) \cdot \left(a + c\right) = \left(b - d\right) \cdot \left(b + d\right)$$

Sia k il M.C.D. di $\left(a - c\right)$ *e* $\left(b - d\right)$ potremo allora scrivere :

(10) $$\left(a - c\right) = k \cdot l \quad \text{e} \quad \left(b - d\right) = k \cdot m \quad \text{con} \quad \left(l, m\right) = 1$$

Sostituendo la (10) nella (8) eliminando k abbiamo: (11) $l \cdot \left(a + c\right) = m \cdot \left(b + d\right)$

essendo l e m primi tra di loro, $\left(a + c\right)$ deve essere divisibile per m : (12) $\left(a + c\right) = m \cdot n$

Applicando quest'ultima alla (11) abbiamo infine : (13) $\left(d + b\right) = l \cdot n$

Le due espressioni (12) e (13) mostrano che n è il M.C.D. di $\left(a + c\right)$ e $\left(d + b\right)$.

Premesso tutto ciò,in base alla (8), N si può sempre fattorizzare nel seguente modo :

(15) $$N = \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] \cdot \left(n^2 - k^2\right)$$

Per provare che l'equazione (15) è corretta , moltiplichiamo i due fattori e avremo:

(16) $$N = \frac{1}{4}\left[(mn)^2 - (km)^2 + (kl)^2 - (\ln)^2\right]$$

Ora utilizzando le equazioni (10), (11) e (12) abbiamo: (17) $N = \frac{1}{4}\left[2 \cdot N + 2 \cdot N\right] =$

$$N = \frac{1}{4}\left[(a + c)^2 - (b - d)^2 + (a - c)^2 - (b + d)^2\right] = \frac{1}{4}\left[2a^2 - 2b^2 + 2c^2 - 2d^2\right]$$

La relazione (15) ci ha permesso di scomporre nella somma algebrica di quattro quadrati (16) il numero *N,* a partire da una sua possibile scomposizione in differenza di quadrati.
In aggiunta la (16) mette in evidenza la seguente **proprietà**: Il numero composto N è somma algebrica di quattro quadrati di interi , dove ognuno di essi è primo soltanto con uno degli altri.
Infine dalla (17) , in particolare dall'espressione centrale, è possibile verificare che anche i numeri composti del tipo 4*k* e *4k+2* , ottenibili rispettivamente da 4*N* e da 2*N* con *N* dispari, godono della stessa proprietà.

Un'applicazione della nuova Teoria : il Teorema Eximium e il Teorema C
Consideriamo la seguenti scomposizioni in differenze di quadrati di un numero naturale già descritte in precedenza:

(18) $$\mathrm{m} = \left[\frac{(\mathrm{m}+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(\mathrm{m}-1)}{2}\right]^2 \qquad \text{se } \mathrm{m} = 2\mathrm{k} + 1 \in \mathbb{N} \qquad \text{e}$$

(19) $\quad m = \left[\frac{m}{4}+1\right]^2 - \left[\frac{m}{4}+1\right]^2 \qquad$ se $m = 4k \in \mathbb{N}$

e applichiamole ai fattori “più grandi” di una potenza con esponente dispari di un numero naturale m , ovvero (vedasi secondo membro) alla relazione:

(20) $\quad m^{2n+1} = m^{n+1} \cdot m^n \qquad$ con $\quad n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$

Siamo allora nelle condizioni di potere sfruttare nella (20) la proposizione 2, ovvero l’identità:

$$\left(a^2 - b^2\right)\cdot\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = (a\alpha \mp b\beta)^2 - (a\beta \mp \alpha b)^2 \qquad \begin{matrix} a,\alpha \\ b,\beta \end{matrix} \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad N \in \mathbb{Z}$$

Più precisamente se m è dispari si avranno le seguenti due scomposizioni :

$$m^{2n+1} = m^{n+1}\cdot m^n = \left[\frac{1}{2}m^n\cdot(m+1)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}m^n\cdot(m-1)\right]^2 = \left[\frac{m^{2n+1}+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{m^{2n+1}-1}{2}\right]^2$$

mentre se m è pari avremo:

$$m^{2n+1} = \left[\frac{1}{2}m^n\cdot(m+1)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}m^n\cdot(m-1)\right]^2 = \left[2\cdot\left(\frac{m^{2n+1}}{16}+1\right)\right]^2 - \left[2\cdot\left(\frac{m^{2n+1}}{16}-1\right)\right]^2$$

E’ evidente a questo punto che sia valido anche il Teorema **C** e che la scomposizione di una potenza con esponente dispari come differenza di due quadrati di interi positivi può risultare , prescindendo dalla parità del naturale m, addirittura la stessa.

Cenni di Analisi indeterminata di secondo grado

Nostro scopo è di occuparci della risoluzione, in *numeri interi*, di un’equazione di secondo grado a *coefficienti interi*, dipendente da n incognite.
Svilupperemo le nostre considerazioni sull’equazione a tre incognite:

(21) $\qquad F(X,Y,Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$

avvertendo che, tutto quanto diremo, si estende immediatamente al caso delle n incognite.
Dato che la (21) è un’equazione omogenea, se (A,B,C) sono soluzioni lo sono anche (mA,mB,mC); di conseguenza riterremo identiche due soluzioni come (A,B,C) e (mA,mB,mC).
Tale assunzione restringerà quindi la ricerca alle sole soluzioni primitive della (21), cioè a quelle in cui *X, Y* e *Z* sono primi tra di loro.
Sia (x,y,z) una soluzione della (21) e quindi : $\quad F(x,y,z) = 0 \quad$ e si ponga :

(22) $\qquad X = \rho\cdot x + \xi \;,\; Y = \rho\cdot y + \eta \;,\; Z = \rho\cdot z + \zeta$

dove ξ,η,ζ sono costanti arbitrarie intere e ρ un’incognita da determinarsi, in modo che le (22) forniscano una soluzione intera per la (21).

Dovrà essere : $\quad F(X,Y,Z) = \rho^2\left[ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz\right] +$

$$+\rho\cdot\left[2a\xi\cdot x + 2b\eta\cdot y + 2c\zeta\cdot z + d(\xi\cdot y + \eta\cdot x) + e(\xi\cdot z + \zeta\cdot x) + f(\eta\cdot z + \zeta\cdot y)\right] +$$
$$+\left[a\xi\xi + b\eta\eta + c\zeta\zeta + d\xi\eta + e\xi\zeta + f\eta\zeta\right] = 0$$

Ma il coefficiente di ρ^2 , uguale a $F(x,y,z)$, è nullo e il termine noto è $F(\xi,\eta,\zeta)$, sicché posto uguale a M (con $M \neq 0$ per l’arbitrarietà di ξ,η,ζ) il coefficiente di ρ della precedente risulta: $$\rho = -\frac{F(\xi,\eta,\zeta)}{M}$$

Di conseguenza : nota una soluzione intera della (21), se ne hanno infinite altre ponendo nelle (22), al posto di ρ, il valore ora trovato ; quindi, a meno del divisore M , si ha :

(23) $X = \xi \cdot M - xF(\xi,\eta,\zeta)$; $Y = \eta \cdot M - yF(\xi,\eta,\zeta)$; $Z = \zeta \cdot M - zF(\xi,\eta,\zeta)$

Queste ultime costituiscono le soluzioni generali della (21).

Per provarlo, faremo vedere che, scegliendo opportunamente ξ,η,ζ , le precedenti forniscono una soluzione della (21) data ad arbitrio.

Sia questa (*A,B,C*) , risulta intanto F(*A,B,C*)=0; se ora, nelle (23) poniamo $\xi = A$, $\eta = B$, $\zeta = C$ abbiamo : *X=AM; Y=BM ; Z=CM* soluzione che, a meno del fattore *M*, s'identifica con la data.

In conclusione: nota una soluzione intera (x,y,z) della (21) tutte le sue soluzioni intere primitive sono date dalle (23), a meno del divisore intero *M*.

Il processo appena descritto è dovuto essenzialmente a L. Euler.

Dopo queste premesse, applichiamo il metodo algebrico alla seguente relazione:

(24) $F(X_i) = X_2^2 - X_1^2 + X_4^2 - X_3^2 + X_5^2 - X_6^2 = 0 \qquad X_i \in \mathbb{N}$ e , *i=1,2,...,6*

Dal metodo algebrico, considerando la soluzione evidente (0,0,0,0,1,1) e sostituendo, per comodità, alle costanti intere $\xi,\eta,\zeta,..$ le seguenti altre $\ell_1,\ell_2,\ell_3,.....,\ell_6$ abbiamo :

$M = 2(\ell_5 - \ell_6)$; $F(\ell_i) = \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2 + \ell_5^2 - \ell_6^2$

Tenendo presenti le (23), le soluzioni della (24) sono date dalle relazioni :

$X_2 = 2\cdot\ell_2(\ell_5 - \ell_6)$; $X_3 = 2\cdot\ell_3(\ell_5 - \ell_6)$

$X_1 = 2\cdot\ell_1(\ell_5 - \ell_6)$; $X_4 = 2\cdot\ell_4(\ell_5 - \ell_6)$

$$X_5 = 2\ell_5(\ell_5 - \ell_6) - \ell_2^2 + \ell_1^2 - \ell_4^2 + \ell_3^2 - \ell_5^2 + \ell_6^2 = (\ell_5 - \ell_6)^2 - \ell_2^2 + \ell_1^2 + \ell_3^2 - \ell_4^2$$

$$X_6 = 2\ell_6(\ell_5 - \ell_6) - \ell_2^2 + \ell_1^2 - \ell_4^2 + \ell_3^2 - \ell_5^2 + \ell_6^2 = -(\ell_5 - \ell_6)^2 - \ell_2^2 + \ell_1^2 + \ell_3^2 - \ell_4^2$$

Osserviamo che, nel caso delle (24), da una soluzione $(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)$ se ne ottengono altre, cambiando di segno ad una, a due, o tutte le x_i .

Di conseguenza posto $L = (\ell_5 - \ell_6)$, si ha : $X_2 = 2\ell_2 L$; $X_3 = 2\ell_3 L$;

$X_1 = 2\ell_1 L$; $X_4 = 2\ell_4 L$; $X_5 = (L)^2 - \ell_2^2 + \ell_1^2 + \ell_3^2 - \ell_4^2$

e cambiando di segno : $X_6 = (L)^2 + \ell_2^2 - \ell_1^2 - \ell_3^2 + \ell_4^2$

Arrivati a questo punto, allo scopo di uniformare la notazione simbolica, sostituiamo *L* con ℓ_5 ed abbiamo le seguenti : (25) $X_i = 2\ell_i\,\ell_5$ (*i=1,2,...,4)*

$$X_5 = \ell_5^2 - \ell_2^2 + \ell_1^2 - \ell_4^2 + \ell_3^2 \quad ; \quad X_6 = \ell_5^2 + \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2$$

Da queste si otterrà una classe particolare di soluzioni intere soddisfacenti la (24), che possono risultare primitive dando agli ℓ_i valori interi e primi tra di loro (a meno di scambi delle X_i tra loro). - Ora, se si vogliono ottenere tutte le soluzioni intere e primitive, soddisfacenti la (24), è necessario introdurre un ulteriore parametro t razionale $\Big[$ conseguenza diretta del divisore intero M, di cui si è fatto "a meno" nelle (23) $\Big]$, come fattore moltiplicativo delle (24).

Più precisamente le formule risolutive generali sono :

(26) $X_i = t \cdot 2\ell_i \ell_5 \, (i=1,2,3,4)$; $X_5 = t \cdot \left(\ell_5^2 - \ell_2^2 + \ell_1^2 - \ell_4^2 + \ell_3^2\right)$; $X_6 = t \cdot \left(\ell_5^2 + \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2\right)$

dove gli ℓ_i sono interi primi tra di loro e dove t è un numero razionale tale che le quantità X_i siano intere.

Una classe particolare di soluzioni di un'equazione diofantea

Consideriamo la seguente relazione tra numeri interi : (27) $X + Y = Z$ con $X, Y, Z \in \mathbb{N}$

dove X, Y, Z sono primi tra di loro e l'intero pari sia un multiplo di 4.

Sotto tali condizioni è sempre possibile associare all'equazione (27) una equazione diofantea omogenea di II grado, ovvero:

(28) $F\left(X_i\right) = X_2^2 - X_1^2 + X_4^2 - X_3^2 + X_5^2 - X_6^2 = 0 \qquad X_i \in \mathbb{N}$ e , $i=1,2,...,6$

con $X = X_2^2 - X_1^2$; $Y = X_4^2 - X_3^2$ e $Z = X_6^2 - X_5^2$.

Premesso ciò, sfruttando l'opportunità di scambiare le varie soluzioni definite dalle espressioni parametriche riportate nelle (26) e modificando il segno in X_5, avremo per (28) che tutte le soluzioni intere possono essere fornite dalle espressioni:

(29) $X_i = t \cdot 2\ell_i \ell_5 \, (i=1,2,3,4)$; $X_5 = t \cdot \left(\ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2 - \ell_5^2\right)$; $X_6 = t \cdot \left(\ell_5^2 + \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2\right)$

dove gli ℓ_i sono interi primi tra di loro e dove t è un numero razionale tale che le quantità X_i siano intere.

Consideriamo le seguenti scomposizioni per le tre variabili X,Y e Z , ove per semplicità abbiamo ipotizzato X pari (multiplo di 4) e Y e Z dispari.

$$X = \left[\left(\frac{X}{4}+1\right)\right]^2 - \left[\left(\frac{X}{4}-1\right)\right]^2 = X_2^2 - X_1^2 \qquad Y = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(Y+1\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(Y-1\right)\right]^2 = X_4^2 - X_3^2$$

$$Z = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(Z+1\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(Z-1\right)\right]^2 = X_6^2 - X_5^2$$

Dalle prime due di (29) associate all'indeterminata pari X è senz'altro possibile constatare che, essendo i termini contenuti in parentesi quadre numeri interi primi tra di loro, risulta:

(30) $t = \dfrac{1}{2\ell_5}$

Questo valore implica che l'equazione (28), ovvero $X_2^2 - X_1^2 + X_4^2 - X_3^2 = X_6^2 - X_5^2$ ammette la seguente risoluzione in termini dei parametri interi ℓ_i con (i=1,2,...,5):

$$\ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2 = \left[\frac{1}{2\ell_5}\left(\ell_5^2 + \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2\ell_5}\left(\ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2 - \ell_5^2\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4\ell_5^2}\left(2\ell_5^2\right)\left(2\ell_2^2 - 2\ell_1^2 + 2\ell_4^2 - 2\ell_3^2\right) = \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_4^2 - \ell_3^2$$

Tale identità pone certamente in risalto l'importanza dello studio effettuato sulla rappresentazione di un numero naturale come somma algebrica di quattro quadrati di interi .
Dalla scomposizione adottata per **Z**, otteniamo invece per differenza tra X_6 e X_5 il seguente notevole risultato: $1 = t \cdot 2\ell_5^2$

Ora tenendo presente la (30) possiamo determinare univocamente tanto ℓ_5 quanto t .

Più precisamente avremo: $\ell_5 = 1$ e $t = \frac{1}{2}$

Questo risultato è interessante poiché di fatto dimostra come sia possibile trattare tutte le soluzioni dell'equazione (27), attraverso un' equivalente equazione diofantea di II grado, considerando per le sue soluzioni, definite dalle espressioni (29) un solo valore del parametro t e proprio $\frac{1}{2}$.

Nota dell'autore

Tale lavoro è il risultato di uno studio condotto dal sottoscritto su di una collezione di saggi sulle equazioni indeterminate di L. Euler [8] .
Leonhard Euler affermava giustamente che la rappresentazione di numeri interi con una forma $X^2 + NY^2$ è un problema di natura moltiplicativa che andrebbe studiato prima di tutto nel caso di un numero primo.

[8] Rudio F., *Opera Omnia di Eulero*, serie I, volume 2 , Leipzig, 1915.

Un metodo per la risoluzione di integrali fratti

di Alexander Pigazzini

Lo scopo a cui mira questo articolo è quello di mettere in evidenza una via alternativa alla risoluzione degli integrali fratti probabilmente non conosciuta da tutti, dato l'ambito in cui generalmente si incontrano la teoria dei residui e la teoria della trasformazione di Laplace (vedi Analisi complessa).

Supponiamo quindi di voler integrare una funzione fratta $f(x)$ (ovvero un rapporto tra due polinomi) tra due estremi generici x e y, la quale si presenta sotto forma non immediatamente integrabile; come si può procedere? L'analisi di seguito proposta ci dimostra la possibilità di scomporre la funzione fratta di partenza in una somma di frazioni "elementari", ossia elementarmente integrabili; l'obiettivo è quello di mostrare l'applicabilità del Teorema dei residui (uno dei metodi utilizzati per determinare l'antitrasformata di Laplace) come tecnica di scomposizione di una funzione fratta $f(x)$. Il metodo in questione richiede, per la sua applicazione, alcune condizioni:

1) considerare la funzione fratta $f(x)$ in esame come se fosse una trasformata di Laplace, quindi da qui in poi la chiameremo $f(s)$ (con s viene generalmente indicata la variabile complessa di Laplace);

2) $f(s)$ deve ammettere un numero finito di poli;

3) $f(s)$ deve rispettare le condizioni della formula **integrale di Bromwich** e del rispettivo contorno, di seguito richiamata.

Teorema: *Sia f=L(F), essendo L la trasformazione di Laplace; allora F è data dalla formula integrale*

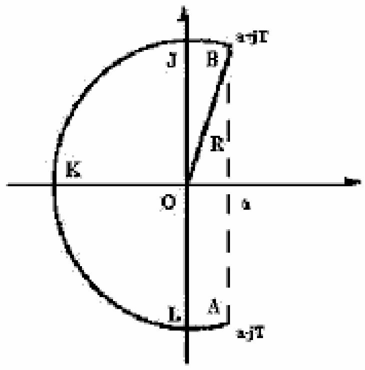
$$F(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_c e^{st} f(s)ds$$

se t>0, e 0 altrimenti, essendo c la retta verticale nel piano complesso di parte reale costantemente pari ad a, dove a si trova alla destra di tutte le singolarità della funzione f.

In pratica l'integrale indicato sopra viene calcolato prendendo l'integrale di contorno

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C e^{st} f(s)ds$$

dove C è il contorno in figura:



Questo contorno è detto **contorno di Bromwich** ed è composto dal segmento AB e dall'arco BJKLA del cerchio di raggio R e centro O. Se si indica l'arco BJKLA con c segue che, essendo

$$T = \sqrt{R^2 - a^2}$$

se t>0, si ha

$$F(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi j}\int_{a-jT}^{a+jT} e^{st} f(s)ds = \lim_{R\to+\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_C e^{st} f(s)ds - \frac{1}{2\pi j}\oint_c e^{st} f(s)ds\right]$$

Sappiamo ora che f presenta come singolarità solo poli, che possiamo pensare situati tutti a sinistra della retta s=a. Si supponga inoltre che l'integrale lungo c tenda a 0 per R che tende all'infinito; allora per il Teorema dei residui

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi j}\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_C e^{st} f(s)ds - \frac{1}{2\pi j}\oint_c e^{st} f(s)ds\right]$$

si può scrivere come somma dei residui di $e^{st}f(s)$ nei poli di f. Per far ciò una condizione sufficiente è la seguente: esistono M,k>0 tali che su c si abbia

$$f(s) \le \frac{M}{R^k}$$

e tale condizione si verifica sempre se $f(s)$=$P(s)/Q(s)$ con P e Q polinomi tali per cui deg$P$<deg$Q$. Il passo successivo è quello di saper trovare quindi le radici del denominatore, e di scomporre quindi

$$Q(s) = (s-a_1)^{n_1}(s-a_2)^{n_2}...(s-a_m)^{n_m}$$

dove gli esponenti rappresentano gli ordini dei poli di f. Denotando con $R(t)_{a_i}$ i residui di $e^{st}f(s)$ nei poli di f si ha dunque

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} R(t)_{a_i}.$$

Finalmente per riottenere f applichiamo la trasformazione di Laplace ad F:

$$L(F)(s) = \int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{m} R(t)_{a_i} e^{-st}dt = \sum_{i=1}^{m}\int_0^{+\infty} R(t)_{a_i} e^{-st}dt = \sum_{i=1}^{m} r(t)_{a_i}(s)$$

avendo denotato con $r(t)_{a_i}(s)$ la trasformata di Laplace del residuo $R(t)_{a_i}$.

Concludiamo con un esempio nell'intento di porre maggiore chiarezza a quanto spiegato.

Esempio: Ci proponiamo di integrare tra due punti generici x e y la funzione fratta

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$$

ovvero di voler calcolare

$$\int_x^y \frac{1}{s^3 - s^2} ds.$$

Consideriamo anzitutto la funzione come una trasformata di Laplace, e quindi la riscriviamo come

$$f(s) = \frac{1}{s^3 - s^2}$$

ed osserviamo che il denominatore $Q(s)$ si fattorizza come

$$Q(s) = s^2(s-1)$$

per cui f ha due poli: s=0 di ordine 2 ed s=1 di ordine 1. Il grado di $P(s)$ che è 0 è minore del grado di $Q(s)$ che vale 3. Passiamo al calcolo dei residui di $e^{st} f(s)$ nei due poli s=0 ed s=1; si ha

$$R(t)_0 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \frac{s^2 e^{st}}{s^2(s-1)} = -t-1;$$

$$R(t)_1 = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{s \to 1} \frac{(s-1)e^{st}}{s^2(s-1)} = e^t.$$

Ne segue che

$$F(t) = e^t - t - 1$$

per ogni t>0. Finalmente trasformiamo e abbiamo:

$$r(t)_0 = \int_0^{+\infty} (-t-1)e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

e

$$r(t)_1 = \int_0^{+\infty} e^t e^{-st} dt = \frac{1}{s-1}.$$

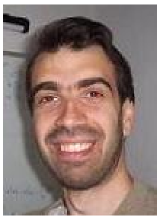
Ne segue che

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

risultato che ora permette una integrazione immediata.

La matematica d'oggi

di Luca Lussardi



Metodi variazionali per il trattamento di immagini

Scopo di questo breve articolo è di illustrare, in termini elementari, uno dei possibili approcci matematici al problema del trattamento e della ripulitura di un'immagine digitale disturbata. In particolare si pone l'attenzione sui modelli di tipo variazionale, e si cerca di motivare l'esempio che ha inaugurato l'uso di tali metodi per il trattamento matematico di immagini.

I problemi relativi al trattamento di immagini digitali sono di estrema attualità, e fanno anche parte ormai della letteratura ingegneristica. Spesso accade che la ricezione di immagini digitali viene fatta in condizioni molto disagiate: si pensi ad immagini mediche di organi interni, o ad immagini meteo effettuate nello spazio da satelliti artificiali o ancora da apparecchiature che si trovano su altri pianeti.

L'immagine risultante, in questi casi, arriva a noi molto disturbata e necessita di una pulizia dal rumore estraneo. Nella letteratura ingegneristica sono presenti molti metodi di *filtering* atti ad una ripulitura dal rumore: molti sono basati su metodi numerici, approssimativi ma funzionali, altri ancora su tecniche di tipo *convolutivo* (rimpiazzare localmente una zona disturbata dell'immagine con una sorta di media attorno alla zona disturbata stessa).

In questi approcci è naturale aspettarsi un appoggio sostanziale di tecniche matematiche: ad esempio molti modelli di filtering vengono implementati attraverso trattamento numerico di opportune equazioni alle derivate parziali.

Un approccio matematicamente diverso ma che fornisce, a detta degli esperti del settore, risultati soddisfacenti, è un approccio di tipo *variazionale:* all'immagine ricevuta viene associata un'energia, solitamente rappresentata da un funzionale di tipo integrale, quello che si fa è tentare di ricostruire l'immagine minimizzando l'energia associata. Come deve essere fatta questa energia?

Anzitutto l'immagine finale, già ricostruita, che minimizza quindi l'energia data, deve essere "vicina" all'immagine iniziale, questo per non stravolgere il contenuto dell'immagine stessa.

Dunque come primo termine dell'energia si deve prendere un termine che tenga conto di una sorta di distanza tra l'immagine ricevuta e quella che si vuole ottenere. Tale termine viene detto termine di *fedeltà*, e dal punto di vista matematico è il termine più banale che appare nell'energia stessa, in quanto ci sta solo dicendo che l'immagine che minimizza l'energia dovrà essere il più vicina possibile a quella iniziale, compatibilmente con il resto dell'energia stessa, che invece giocherà il ruolo sostanziale.

La parte restante è per l'appunto più delicata, e, per capire come completare l'energia, partiamo da un caso facile. Supponiamo che l'immagine ricevuta sia a due colori solamente, bianco e nero. In tal caso l'immagine risulta completamente individuata dal comportamento di una funzione u a due valori, 0 e 1, che presenta il suo insieme di discontinuità sul *bordo* dell'immagine, ovvero da quella curva che delimita, per esempio, la regione dove il colore è nero dalla regione dove il colore è bianco.

Avere un immagine "pulita" per noi potrebbe significare avere anzitutto un bordo che è costituito da una bella curva liscia, e non da una curva molto frastagliata, o peggio ancora anche da punti singolari isolati: tali anomalie sono proprio dovute alla presenza del disturbo. Dunque un'immagine ripulita dovrebbe avere un bordo che è una curva molto vicina al bordo dell'immagine iniziale (fedeltà) e di lunghezza più piccola possibile, in modo da evitare un frastagliamento dovuto al disturbo.

Nella zona invece dove vorremmo un colore uniforme, la funzione u dovrebbe valere identicamente 1 o 0 a seconda che si tratti di una zona di colore nero o bianco, per esempio; di conseguenza chiederemo che in tale zona u sia una funzione prossima ad una funzione costante, o, più in generale, ad una funzione affine (questo ci servirà per permettere sfumature graduali).

Abbiamo con ciò capito come modellizzare l'energia; quello che va fatto è solo scrivere l'energia stessa come funzionale di tipo integrale. Denotiamo con g la funzione che descrive il colore dei punti dell'immagine ricevuta, quella con presenza di disturbo. Andiamo a scrivere anzitutto il termine di fedeltà, che abbiamo detto essere un termine che tiene conto della distanza tra l'immagine ricevuta e quella che vogliamo ottenere. Supponiamo che l'immagine stia in un dominio piano Ω; allora definiamo, come termine di fedeltà il termine dato da

$$\int_\Omega |u(x)-g(x)|^2 dx.$$

Quello che abbiamo scritto è una distanza tra la funzione u e la funzione g; più precisamente si tratta di quella che in Analisi Matematica si chiama *distanza L2* tra u e g (in realtà la vera distanza L2 si ottiene come radice quadrata dell'oggetto scritto, ma ai fini della minimizzazione l'uso di un'espressione invece dell'altra non comporta problemi).

Dobbiamo poi dire che la funzione u salta, cioè è discontinua, su un insieme che è una curva abbastanza regolare, e che è lunga il minimo possibile; dunque basterà tenere conto del termine

$$\ell(S_u)$$

che denota la lunghezza dell'insieme di salto di u, ovvero dell'insieme su cui u è discontinua. In realtà su questo punto rimane aperto un dettaglio, non di poco conto: non è detto che l'insieme di discontinuità di u sia una curva, potrebbe essere qualcosa di più strano e anomalo, per una funzione qualunque; a tal fine quello che si farà sarà definire l'energia su uno spazio di funzioni opportuno. Infine va scritto il fatto che la u, dove è regolare, deve essere circa una funzione affine o costante, ovvero la pendenza deve essere circa costante. Aggiungeremo quindi un termine che scriveremo come

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx.$$

La presenza dell'esponente 2 deriva da un fatto puramente matematico, che serve per garantire che l'energia che così scriveremo avrà effettivamente almeno un punto di minimo assoluto. Riassumendo, data la funzione g che descrive il colore dell'immagine ricevuta, l'immagine ripulita sarà quella che minimizza il funzionale

$$E(u)=\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx+\ell(S_u)+\int_\Omega |u(x)-g(x)|^2 dx$$

definito su un opportuno spazio funzionale di funzioni discontinue, “regolari” al di fuori di un insieme detto di discontinuità (che dipende dalla funzione stessa) e tali per cui l'insieme di discontinuità è “qualcosa di simile” ad una curva regolare.

Quello che abbiamo scritto è il celebre *funzionale di Mumford-Shah*, il primo modello variazionale studiato ed implementato per la *segmentazione* delle immagini (1985-1989, in una serie di lavori di D. Mumford, J. Shah, e altri).

Tale funzionale ha chiaramente senso anche se la funzione di ingresso g (detta *livello di* *grigio* dell'immagine) non assume solo valori 1 o 0, ovvero se l'immagine è sfumata, o a colori.

Tutta l'argomentazione in tal caso si ripete tale e quale: vogliamo una funzione approssimante *u* che abbia discontinuità (cambio brusco di colore) in prossimità di curve regolari, e altrove sia invece più regolare possibile, simile ad una funzione affine, ovvero che l'immagine sfumi regolarmente.

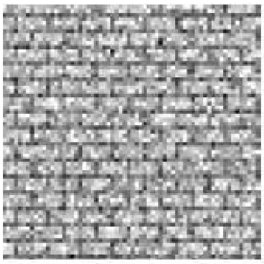
Ultimo problema: come andare a trovare quindi l'immagine ripulita?

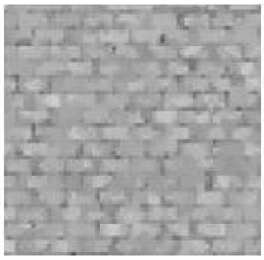
Tale problematica è di carattere prettamente numerico: sono stati studiati vari algoritmi che implementano metodi di discesa infinita verso il punto di minimo dell'energia scritta.

Tali metodi funzionano, ben inteso, solamente se è nota, a priori, l'esistenza di almeno un punto di minimo dell'energia data: questo, come si diceva anche sopra, è il motivo sostanziale per il quale si sceglie di definire l'energia su opportuni spazi funzionali, tali da poter applicare i *metodi diretti del Calcolo delle variazioni*, mediante i quali, in modo astratto, si deduce l'esistenza di almeno una soluzione del problema di minimo per E.

Il lettore ha quindi compreso quanta matematica ci sia sotto questo tipo di problematiche; oltre al Calcolo delle variazioni (lo studio dei problemi di minimo in generale) c'è un'ampia dose di Analisi funzionale di spazi di funzioni adatte a descrivere situazioni e modelli di questo tipo, funzioni che possono saltare su insiemi "non troppo brutti", e altrove sono invece "regolari": lo spazio utilizzato per questi scopi è lo spazio delle *funzioni a variazione limitata.*

Per concludere riportiamo la seguente figura che illustra un esempio di applicazione di un metodo variazionale analogo a quello qui illustrato: la figura di sinistra mostra l'immagine disturbata, e la figura di destra mostra il risultato ottenuto dopo un'implementazione del metodo variazionale (le immagini sono tratte dal lavoro *On image denoising methods,* di Baudes-Coll-Morel, 2005):





Il risultato non è ovviamente del tutto limpido e soddisfacente, ma si tenga conto che esso in realtà non rappresenta il punto di minimo di E, bensì un'approssimazione di esso ottenuta con un algoritmo di discesa infinita verso il minimo dell'energia stessa.

È comunque notevole la differenza tra l'immagine disturbata e quella ottenuta ripulendola; molto spesso, soprattutto per immagini provenienti da controlli medici, avere una ripulitura approssimativa di questo tipo è di fondamentale importanza per diagnosi corrette.

Bibliografia essenziale

- D. Mumford - J. Shah: *Boundary detection by minimizing functionals I*, Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (San Francisco, 1985).
- D. Mumford - J. Shah: *Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. Pure Appl. Math 42 (1989), pp. 577-685.
- L.Ambrosio – N.Fusco – D.Pallara: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems,* Oxford University Press, 2000.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

di Flavio Cimolin

Ammettiamolo pure: l'analisi matematica, ovvero quella parte di matematica che viene introdotta in maniera spesso troppo frettolosa nell'ultimo anno delle scuole superiori, per poi venir ampliata a dismisura nelle facoltà universitarie scientifiche, è in linea generale noiosa. Una serie pressoché interminabile di postulati, lemmi, teoremini e teoremoni - con relative dimostrazioni - vengono propinati uno in fila all'altro allo studente, che solo con abbondante dose di esercizio e di costanza riuscirà alla fine (probabilmente quasi a sua insaputa) ad apprendere il tutto.

Chi ha studiato la materia starà sorridendo nel constatare che è avvenuto proprio questo, ma del resto non potrebbe essere altrimenti, vista l'importanza degli strumenti di calcolo che l'analisi mette a disposizione di tutti coloro che dovranno in qualche modo occuparsi di scienza o tecnologia. E' quasi paragonabile all'insegnamento delle quattro operazioni ai bambini delle elementari, che non può che essere portato avanti attraverso ripetuti esercizi tutti uguali: è troppo importante che essi imparino a contare! Mentre sulle quattro operazioni siamo tutti (spero) ferratissimi, ben più difficile è cogliere appieno i principi fondamentali dell'analisi matematica, che talvolta possono sfuggire anche a coloro che la usano sovente come puro strumento di calcolo.

Dato che fra l'ingente mole di conquiste tecniche è possibile individuarne alcune di notevole eleganza matematica, cerchiamo di passare in rassegna alcuni concetti di base in modo da arrivare a cogliere il risultato più importante, che non a caso viene chiamato "Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale". Quanto discuteremo non può certo avere la pretesa di insegnare nozioni di analisi matematica, ma va pensato come una "passeggiata" finalizzata a riuscire a cogliere l'essenza del risultato più importante. Spesso l'arte o la musica sono difficili da apprezzare se non si possiede il giusto *background* culturale, basti pensare ai quadri astratti e alla musica contemporanea. In matematica questo effetto si amplifica infinitamente, dato che gli oggetti con cui si opera diventano inevitabilmente sempre più complessi e soprattutto astratti. Nel nostro caso sarà quindi come essere obbligati a dare un'occhiata ad alcune opere minori prima di poter apprezzare appieno la statua più bella di una mostra! E' indubbio infatti che, se osservato nell'ottica giusta, il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale non può che apparire come uno dei più bei contributi che la matematica abbia mai regalato alle scienze applicate.

Proprio a causa della meccanicità con cui certi concetti vengono assimilati, talvolta si rischia di perdere di vista quelli che sono gli aspetti matematicamente più rilevanti e - questa è la cosa più di nostro interesse - eleganti da un punto di vista astratto. Nel caso dell'analisi matematica le pietre miliari sono tre: le definizioni di limite, derivata e integrale. A partire da questi concetti si possono poi sviluppare un'enormità di nozioni, tecniche di calcolo e applicazioni di varia natura, indirizzate sia verso la matematica pura sia verso le applicazioni concrete alle scienze di tipo ingegneristico.

La definizione di *limite*, più basilare di tutte, è uno splendido capolavoro di artificiosità matematica. Basti pensare che, da quando essa è stata intuita per la prima volta dai padri del calcolo infinitesimale, è stato necessario oltre un secolo affinché potesse essere formalizzata definitivamente da Augustin Louis Cauchy, un matematico francese particolarmente devoto al rigore e al formalismo. Sarebbe fuori luogo discuterne più ampliamente, ma non bisogna mancare di rendere onore ai matematici che, prima e dopo Cauchy, hanno studiato e perfezionato l'importantissimo concetto di limite. Per noi sarà sufficiente pensare al limite come a quel valore, finito o infinito, che una certa funzione assumerebbe in un punto in cui in realtà essa non è definita (ad esempio se l'argomento della funzione vale più o meno infinito).

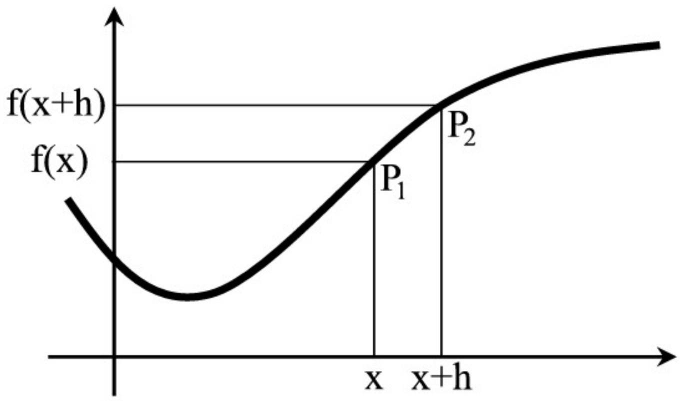
Il concetto di *derivata* di una funzione è una misura della sua variabilità, ed è talmente legato alla sua interpretazione fisica da confondersi spesso con essa. Data una funzione di una variabile reale *f(x)*, la sua derivata, solitamente indicata con le due scritture equivalenti *f'(x)* o *df/dx* (la prima derivante dalla scuola anglosassone di Newton, la seconda da quella tedesca di Leibniz), è una funzione che in ogni punto rappresenta il tasso di variazione della funzione originaria *f*.

Nel formalismo cinematico, ad esempio, la *velocità istantanea* è una grandezza derivata in quanto rappresenta il tasso di variazione dello *spazio* percorso rispetto al *tempo*. L'*accelerazione*, che a sua volta esprime una variazione di velocità, risulta di conseguenza una *derivata seconda* dello spazio rispetto al tempo. Se volessimo poi analizzare delle variazioni di accelerazione dovremmo ricorrere alle derivate terze, quarte, e così via ... (non crediate che si tratti di speculazioni teoriche: i progettisti di ascensori le tengono sotto controllo per fornire il massimo confort a tutti noi che li dovremo usare!).

Da un certo punto di vista, si potrebbe affermare che praticamente tutta la fisica non è altro che una modellazione della realtà in cui si studiano dipendenze fra variabili differenti, che sono spesso legate tra loro tramite operazioni di derivazione. Quando le relazioni fra tali variabili diventano complicate, le quantità desiderate possono essere ottenute solo tramite la risoluzione di quelle che vengono chiamate *equazioni differenziali*, da cui sorgono alcuni fra i problemi più difficili da trattare di tutta la matematica applicata.

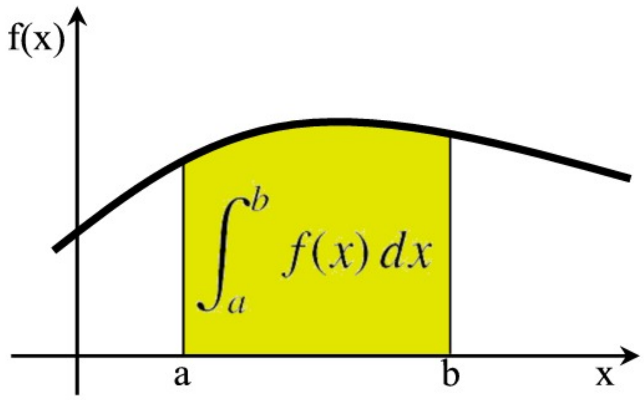
La derivata di una funzione può essere espressa in formule matematiche come il limite del rapporto fra la differenza dei valori della funzione calcolata in due punti sempre più vicini fra loro e la distanza degli stessi (proprio come nel senso comune si intende la velocità: il rapporto fra lo spazio percorso e il tempo impiegato per farlo):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Alla derivata di una funzione si può anche dare una interessante interpretazione geometrica: essa rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto stesso. E' semplice vederlo nella figura sopra: se tracciamo la retta passante per i punti P_1 e P_2 otteniamo, in prossimità di essi, un'approssimazione della curva che diventa tanto migliore quanto più avviciniamo i punti (ovvero quanto più facciamo decrescere *h*).

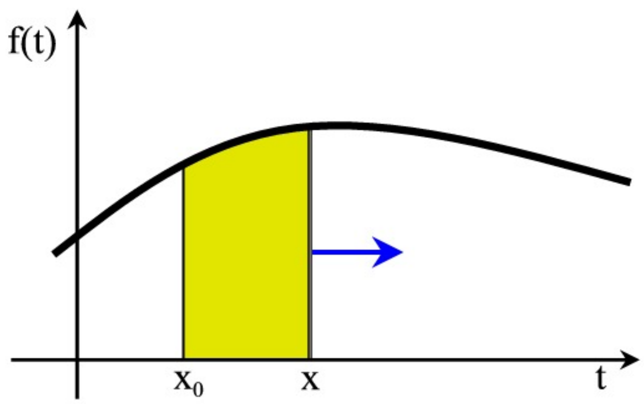
E l'integrale, ovvero quello strano simbolo a forma di S allungata che incute un certo timore in tutti coloro che lo vedono per la prima volta (e in verità non solo a loro!), da dove salta fuori? Stranamente la sua origine è abbastanza diversa da quella dei precedenti concetti, tanto che solo alla luce del Teorema Fondamentale sarà possibile scoprirne il legame. Data una funzione *f(x)* come quella rappresentata nella figura qui sotto, chiamiamo *integrale definito* della funzione fra gli estremi *a* e *b* il valore dell'area compresa fra la curva e l'asse x nell'intervallo stabilito. Indichiamo quest'area con il simbolo rappresentato all'interno della porzione indicata:



Il calcolo dell'area per una funzione generica e un intervallo qualsiasi costituisce un problema decisamente complicato da trattare, e fu risolto con brillanti artifici solo per funzioni molto particolari come x^2 (Archimede), x^a, $a>0$ (Pierre de Fermat), $1/x$ (Nicholaus Mercator). Un modo per farlo è utilizzare il *metodo di esaustione*, che consiste nel misurare una superficie ricoprendola con figure di area nota (come rettangoli, triangoli, trapezi) aggiungendone di sempre più piccole fino ad "esaurire" tutta l'area richiesta. Il genio di Archimede fu in grado, già intorno al 225 a.C., di misurare l'area sottesa ad un arco di parabola inserendovi una serie infinita di triangolini, la cui somma risultava uguale ai 2/3 dell'area del triangolo avente la stessa base e gli stessi vertici. Tra l'altro egli non si limitò a questo, ma fu il primo a calcolare un'approssimazione dell'area del cerchio, del volume e dell'area della sfera, del cono e di vari altri solidi di rotazione, sempre per mezzo di tecniche di tipo esaustivo.

Tutto questo prima che Isaac Newton e Gottfried Leibniz, verso la fine del XVII secolo, scoprissero indipendentemente l'uno dall'altro quello che oggi va sotto il nome di *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*. In sintesi questo risultato afferma che l'integrale è intimamente legato alla derivata, tanto da costituirne, in un senso che ci accingeremo subito a precisare, l'operazione inversa.
Alla luce della definizione di integrale definito come area sottesa ad una curva, possiamo definire la *funzione integrale* $F(x)$ come l'integrale definito della funzione $f(t)$ fra un punto fisso x_0 e la variabile x scelta (abbiamo cambiato in t il nome della variabile indipendente della funzione f solo per distinguerla dalla nuova funzione F, che avrà come argomento x). In formule avremo:

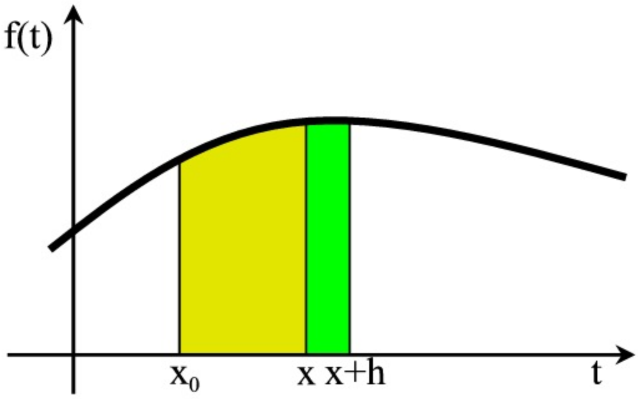
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$



La funzione integrale non fa altro che misurare l'area sotto la curva dal punto prefissato al punto x scelto. Mano a mano che si trascina in avanti il punto x si include nella funzione integrale una porzione di area sempre maggiore. E' quindi facile vedere che, se la funzione f non scende mai sotto lo zero, la funzione integrale F risulterà crescente. La posizione del punto x_0 non è importante ai fini dell'andamento della funzione integrale, infatti se spostassimo più indietro o più avanti il punto dovremmo semplicemente sommare o sottrarre al risultato ottenuto un certo valore costante (cioè l'area fra x_0 e il nuovo punto di origine).

Funzioni di questo genere appaiono sovente quando si vuole modellare fisicamente un fenomeno, dato che l'area sotto la curva può essere interpretata come la somma di infiniti rettangolini corrispondenti ai valori della funzione moltiplicati per l'ampiezza dell'intervallo considerato. La definizione formale di integrale (quello che viene chiamato integrale di Riemann) deriva proprio da questo principio e non a caso il suo simbolo appare come una S allungata che sta per "somma infinita". Esempi concreti di uso della funzione integrale sono il calcolo dello spazio percorso se sul grafico è rappresentata la velocità in funzione del tempo, oppure il lavoro compiuto da un sistema termodinamico se sono rappresentati la pressione in funzione del volume.

Proviamo ora ad applicare la definizione di derivata alla funzione integrale appena definita: dobbiamo calcolare il suo valore in due punti vicini x e $x+h$, fare il rapporto tra questa differenza e l'ampiezza h dell'intervallo considerato, e infine far tendere h a zero.



E' facile convincersi che, se h è piccolo, la differenza fra $F(x+h)$ e $F(x)$ è approssimabile con l'area di un rettangolino di altezza $f(x)$ e ampiezza h. L'approssimazione risulterà tanto migliore quanto più piccolo sarà il passo h scelto. Applicando il processo di limite si può dimostrare rigorosamente che il valore della derivata della funzione F nel punto x risulta proprio $f(x)*h/h = f(x)$. La derivata della funzione integrale in un qualsiasi punto coincide esattamente con la funzione oggetto di integrazione. Ecco il grande risultato che il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ci fornisce: se prima integriamo una funzione e poi la deriviamo, otteniamo di nuova la funzione di partenza!

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x)}$$

Dopo aver letto con attenzione le righe precedenti, ci si accorge che tutto sommato il risultato è quasi ovvio. Del resto in matematica è così: dopo aver visto la soluzione di un problema sembra sempre che essa fosse semplicissima! Le due operazioni di derivazione e integrazione, che apparivano inizialmente slegate tra loro, possono ora essere lette come due elementi "complementari" di una teoria più grande. E' come se il restauro di un vecchio affresco in cui si intravedevano soltanto due piccoli particolari portasse improvvisamente alla luce un meraviglioso quadro che non avevamo mai potuto osservare prima. Ed è incredibile quante porte abbia spalancato in matematica questa scoperta compiuta oltre trecento anni fa.

Ecco che all'improvviso anche il calcolo dell'area sottesa ad una funzione diventa quasi elementare e può venire esteso ad una gamma estremamente ampia di funzioni, anche se purtroppo non a tutte. Una volta individuata una funzione che, una volta derivata, fornisca la funzione di partenza (in gergo essa è chiamata *primitiva*), per ottenere l'area fra i punti a e b sarà sufficiente sottrarre al valore della primitiva in b quello della stessa primitiva in a (la dimostrazione di questo risultato è molto semplice e costituirà un esercizio di facile risoluzione per il lettore che abbia seguito le spiegazioni precedenti). Visto che, come abbiamo detto, la fisica è intrinsecamente piena zeppa di integrali e di equazioni differenziali, ecco che immediatamente ci vengono in soccorso tutta una serie di strumenti in grado di risolverle, grazie ai quali abbiamo buone probabilità di individuare gli esatti legami fra le variabili in gioco.

Un'ultima considerazione la merita quel simbolino dx che sta a chiusura del simbolo di integrale e che compare nella definizione di derivata di Leibniz. Una differenza fra due valori in matematica viene solitamente indicata con la notazione Δx. Avvicinando i due valori fino a farli quasi coincidere, la 'Δ' diventa un incremento infinitesimale 'd', e su di esso deve essere svolto il calcolo. Ma come si fa a fare un calcolo finito quando compaiono quantità infinite o infinitesime? Leggendo gli scritti di Leibniz, che oltre che matematico fu anche un grande filosofo, è curioso osservare in che modo egli inquadrava i nuovi concetti. Riguardo a cosa fosse quel dx scriveva così:

> *dx significa un elemento, vale a dire un incremento o un decremento (istantaneo) della quantità x (continuamente) crescente. Lo si chiama anche differenza, vale a dire la differenza tra due x prossime che differiscono per un elemento (ossia per un inassegnabile).*

Anche se misteriosa, la notazione si rivelò illuminante, tanto da condurlo ad esplicitare il Teorema Fondamentale nel modo seguente:

> *Le differenze e le somme sono tra loro reciproche, vale a dire che la somma delle differenze della successione è il termine della successione, mentre la differenza delle somme della successione è lo stesso termine della successione. La prima affermazione la enuncio così: $\int dx=x$, la seconda così: $d\int x=x$.*

Solo grazie alle tecniche dell'algebra lineare moderna siamo recentemente riusciti ad *assegnare* un significato preciso all'*inassegnabile* di Leibniz. Oggi esso viene chiamato *forma differenziale* e, potendosi maneggiare tramite matrici o altre tecniche ancora più potenti, consente di risolvere agevolmente integrali su linee, superfici curve, volumi o qualsivoglia oggetto astratto.

Sotto questa prospettiva nessuno potrà negare la grandezza del risultato matematico che il Teorema Fondamentale è stato in grado di portare alla luce, così come la sottile eleganza della formula matematica che esplicita la simmetria fra i concetti di derivazione e integrazione. Senza i simboli di integrale e di derivata, che dentro di sè racchiudono secoli di ricerche dei più grandi matematici della storia, indubbiamente il nostro mondo sarebbe stato infinitamente più povero. Detto questo, torniamo pure a riempire pagine e pagine di calcoli a testa bassa, chi per studio, chi per lavoro, chi per passione ... in fin dei conti l'analisi consiste in questo, no?

Spicchi di cielo

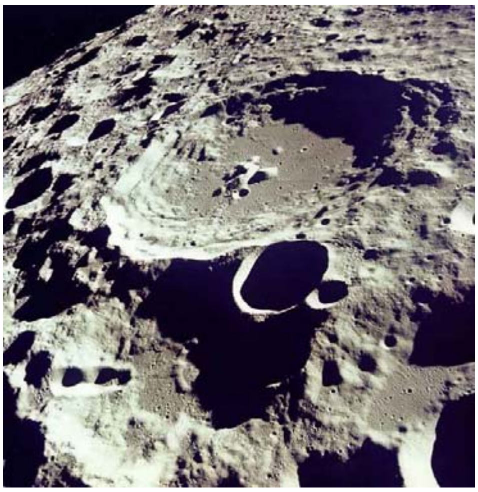
di Domenico Licchelli
http://www.cosmos2001.info

I vicini che non vorremmo avere

In una notte calma e senza vento dirigiamo il nostro fidato telescopio verso il primo quarto di luna. Nell'oculare balza subito all'occhio il grande bacino circolare del *Mare Serenitatis* interamente ricoperto di lava, nonostante i quasi 700 km di diametro. In direzione opposta, verso il polo sud lunare, un'incredibile selva di crateri di tutte le dimensioni ricopre completamente la regione.

Aumentando gli ingrandimenti, anche quelle zone che in precedenza sembravano lisce, si rivelano essere una moltitudine di piccoli crateri addossati gli uni agli altri.

I più antichi sono stati quasi del tutto demoliti dai nuovi arrivati che hanno saturato completamente ogni spazio disponibile, distruggendo gli originali terrazzamenti e riempiendo a forza le platee, quasi vigesse una sorta di *horror vacui* che richiama alla mente certe architetture barocche salentine o siciliane.



Il cratere lunare Dedalo, fotografato dall'Apollo 11.

Oggi sappiamo che questi crateri sono stati generati da impatti di un gran numero di asteroidi e di meteoriti con la superficie del nostro satellite, soprattutto nelle prime fasi dell'evoluzione del Sistema Solare. Anzi, la Luna stessa si è, con molta probabilità, formata dalla collisione tra la giovane Terra e un *planetoide* delle dimensioni di Marte.

Anche il nostro pianeta ha sicuramente sperimentato questa fase di bombardamento cosmico dalle conseguenze più o meno catastrofiche che, seppur diradandosi progressivamente col passare del tempo, non è mai cessato del tutto.

Almeno in un caso, circa 65 milioni di anni fa, si ha ormai la quasi certezza che la caduta di un asteroide di qualche chilometro di diametro abbia portato ad una delle più grandi estinzioni di massa nella storia evolutiva della biosfera, la ben nota scomparsa dei dinosauri.

Per la verità, secondo autorevoli studiosi, i mammiferi, compresi noialtri, devono la loro esistenza proprio all'immane catastrofe che seguì l'impatto e che spazzò via, in un colpo solo, i giganteschi rettili che avevano regnato incontrastati fino a quel momento.

Tuttavia, lo stesso meccanismo che ha forse permesso la nostra esistenza potrebbe un giorno, si spera mai, portare alla nostra estinzione. Gli asteroidi possono essere una grave minaccia per la sopravvivenza della nostra specie.

In particolare, è diventato evidente che è di vitale importanza individuare tutti quei corpi che, per le loro caratteristiche dinamiche, possono entrare in rotta di collisione con la Terra, i cosiddetti PHAs (*Potential Hazardous Asteroids*) e studiarne le caratteristiche, soprattutto la struttura interna e la loro composizione chimica e mineralogica, al fine di poter approntare le eventuali contromisure con cognizione di causa.

Un impatto di un asteroide metallico avrebbe, infatti, conseguenze ben più catastrofiche di quello di un analogo roccioso, costituito da un aggregato incoerente di frammenti tenuti assieme dalla gravità. Alla data del 1 Marzo 2007, i PHA conosciuti sono 846, ed hanno dimensioni che variano da poche decine di metri di diametro fino a qualche chilometro.

I PHAs sono una piccolissima frazione della più numerosa famiglia dei NEO *(Near Earth Object),* costituita da una popolazione piuttosto eterogenea di corpi minori comprendente asteroidi, comete attive ed estinte e corpi progenitori di alcune classi di meteoriti.

Provengono da tutte le regioni del Sistema Solare e sono caratterizzati dall'avere orbite caotiche e instabili che, nel volgere di pochi milioni di anni, concludono la loro esistenza cadendo sul Sole o impattando uno dei pianeti interni, se non sono finiti nel frattempo su orbite che li portano ad essere espulsi dal Sistema Solare.

La loro breve esistenza, su tempi scala cosmici, implica che la popolazione di NEO che osserviamo ai giorni nostri non può certamente essere la stessa che avremmo trovato anche solo qualche centinaio di milioni di anni fa.

L'asteroide Eros, uno fra i NEO più grandi, ripreso in un incontro ravvicinato dalla sonda NEAR.

Deve perciò esistere un qualche meccanismo che rifornisce continuamente la popolazione dei NEO, compensandone le perdite e mantenendo relativamente alta nel tempo la probabilità che uno di essi finisca col prenderci di mira.

Sono state individuate varie sorgenti che possono iniettare questi oggetti verso il Sistema Solare interno, portandoli ad intersecare o quantomeno ad avvicinarsi all'orbita terrestre. La parte del leone sembra svolta dalle potenti *risonanze* esistenti nella Fascia Principale degli Asteroidi, in particolare quelle con Giove, e dagli incontri ravvicinati con Marte.

Per valutare correttamente le probabilità di un eventuale impatto è fondamentale conoscere con grande precisione i parametri orbitali. Se sulla base di accurate misure astrometriche sembra che il rischio di collisione non sia trascurabile, osservazioni condotte con potenti radiotelescopi possono indicare le reali possibilità.

Il fascio ad alta potenza emesso da un radar (di 1 megawatt nel caso del radiotelescopio di 305 metri di Arecibo) è estremamente coerente, cosicché la fase dell'onda elettromagnetica è la stessa su tutto il fronte d'onda.

Sfruttando la tecnica del *time-delay*, ossia della misura del tempo che intercorre tra l'emissione del fascio e la ricezione dell'eco, è possibile determinare la distanza del *target* con una precisione attorno ai cento metri e stimare la componente della velocità lungo la linea di vista, con un margine d'errore dell'ordine del millimetro al secondo, come dire che si potrebbe ricostruire il moto di una formica che si arrampica su un muro.

L'analisi dell'eco permette anche di determinare le proprietà fisiche della superficie dell'asteroide. La rugosità superficiale influenza il modo in cui l'onda radar è riflessa: una superficie liscia tende a mantenere la coerenza del fascio al contrario di una scabra, mentre una metallica riflette molto più intensamente di una rocciosa coperta da regolite.

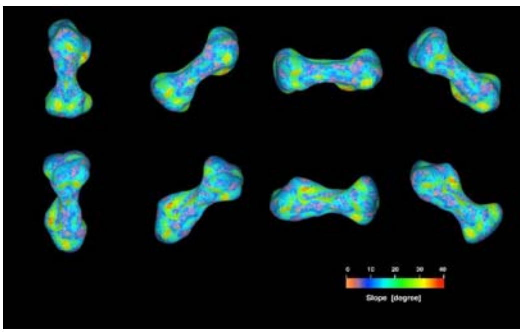
Inoltre, siccome l'oggetto è in moto, la frequenza dell'onda riflessa è diversa da quella incidente, per *effetto Doppler*. Un'accurata analisi di queste variazioni consente di ricostruire la forma dell'asteroide con sorprendente precisione, ottenendo una sorta di fotografia, tanto più dettagliata quanto più l'oggetto è vicino.

La potenza dell'eco ricevuta è, infatti, inversamente proporzionale alla quarta potenza della distanza dell'oggetto, il che spiega come mai i NEO, transitando in certi casi a distanza inferiore a quella Terra-Luna, sono i candidati ideali per questo tipo di indagini.

Solo di recente si è iniziato a studiare anche gli oggetti della Fascia Principale. La prima osservazione di questo tipo è stata quella di *216 Kleopatra*, un asteroide lungo circa 217 km e largo 94 km, dalla caratteristica forma ad osso. Le osservazioni sono state condotte ad Arecibo, quando l'asteroide si trovava ad oltre 170 milioni di km di distanza da Terra; il fascio radar impiegava circa 19 minuti per raggiungerlo e tornare al ricevitore.

Non sarà sfuggito a nessuno che quanto detto finora è pervaso dalla matematica fin negli angoli più remoti. Proviamo a fare una piccola panoramica limitandoci alle applicazioni principali:

1. le immagini astronomiche sono sostanzialmente fotoni convertiti in una matrice di numeri cui poter applicare decine di algoritmi e funzioni di trasferimento per evidenziare i particolari più interessanti;



Ricostruzione dell'asteroide Kleopatra fatta col radiotelescopio di Arecibo

2. la determinazione delle orbite passa attraverso accurate misure di posizione fatte sulle immagini precedenti. Queste misure vengono poi elaborate alla ricerca di quelle orbite che fittano meglio i dati disponibili;
3. la stabilità nel tempo delle orbite stesse dipende dalle complicatissime interazioni gravitazionali tra i miliardi di oggetti che compongono il Sistema Solare, il famoso problema degli *N*-corpi;
4. le immagini radar sono frequenze di onde elettromagnetiche convertite in immagini tridimensionali tramite opportuni software di modellizzazione.

Come si può vedere, c'è materiale sufficiente per tenere impegnati centinaia di ricercatori per molti decenni a venire.

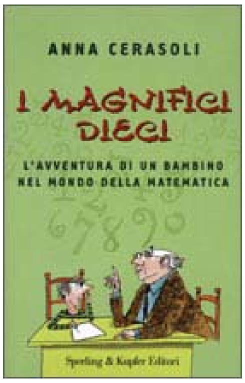
Negli ultimi tempi, l'oggetto più interessante seguito ad Arecibo è l'asteroide *(99942) Apophis*, allo stato attuale il più pericoloso in assoluto tra i PHA e potenziale impattore con la Terra nel 2036. Nei prossimi numeri della rubrica ne racconteremo la storia, particolarmente istruttiva sotto molti punti di vista.

Riferimenti:

- IAU: Minor Planet Center
  http://cfa-www.harvard.edu/iau/mpc.html
- Eros e la NEAR
  http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/near.html
- Kleopatra da Arecibo
  http://www.news.cornell.edu/releases/May00/Arecibo.Kleopatra.deb.html

Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo



I magnifici dieci, L'avventura di un bambino nel mondo della matematica, *Sperling & Kupfer Editore, 2001*
di Anna Cerasoli

La sorpresa dei numeri, Un viaggio alla scoperta della matematica simpatica, *Sperling & Kupfer Editore, 2003*
di Anna Cerasoli

Mr quadrato, A spasso nel meraviglioso mondo della geometria, *Sperling & Kupfer Editore, 2006*
di Anna Cerasoli

Anna Cerasoli ha insegnato per diversi anni matematica nella scuola secondaria, ha scritto diversi manuali e da alcuni anni si dedica a 'raccontare' la matematica in un modo tutto suo.

Protagonista di questa trilogia è Filippo, detto Filo, "un bambino di otto anni, magro magro, con due incisivi da criceto e le mani perennemente colorate da pennarelli e cera pongo". Filo passa molto del suo tempo con il nonno, professore di matematica in pensione, che ha trovato nel nipotino un vero e proprio discepolo al quale tramandare il 'pensiero matematico'. I due hanno formato una sorta di setta pitagorica, parlano spesso di matematica e guardano il mondo attraverso la lente dei numeri e della geometria. Il terzo vertice del triangolo è rappresentato Grazia, insegnante ufficiale di matematica del piccolo Filo.

Filo non è un genio, è un bambino normale alle prese con i problemi di tutti i bambini: lavarsi, giocare, fare i compiti, barattare figurine con i compagni scuola. Si confronta spesso con il nonno e nella sua logica sfrutta le conoscenze del nonno per capire come vincere al totocalcio, come riuscire a saltare la doccia, come creare linguaggi cifrati per il suo club. Il nonno approfitta delle situazioni che ogni giorno si presentano per infiltrare pillole di saggezza matematica.

Filo ha fatto affari al baratto mattutino a scuola, ha scambiato elastici con un metro a nastro e ora misura tutta la casa. Quale migliore occasione per il professore in pensione per giocare con il nipotino e allo stesso tempo insegnarli cosa vuol dire misurare?

Filo sta ripassando la lezione di geografia sui fiumi più lunghi e le montagne più alte ed ecco la domanda fatidica "…nonno, come si fa a misurare l'altezza di una montagna? Deve esserci un modo veramente ingegnoso, per non doverla perforare da cima a fondo". Nel nonno scatta la molla dell'insegnante e comincia la discussione su Talete e la similitudine.

Filo e il nonno devono apparecchiare tavola ed ecco che il dialogo comincia dalla corrispondenza uno a uno per finire sull'infinito e l'infinitamente piccolo.

E' il compleanno della mamma, Filo e il nonno si mettono a preparare la torta e tra gli ingredienti si trova tanta matematica: teglie rettangolari e tonde, perimetro e area, fagioli secchi e griglie. E se non basta, per trovare l'area del cerchio si prende un centrino tondo della bisnonna, lo si taglia con le forbici e si ottiene un triangolo di fili.

La signora Ghilarducci, "grassa ma felice", va a fare visita nel pomeriggio con un vassoio di pasticcini; la poverina presa dalla sua golosità ci vede solo pasticcini nel vassoio. Il nonno e Filo, dopo aver mangiato i pasticcini, cominciano a ragionare di matematica e ci vedono strutture importantissime: triangolo di Tartaglia, calcolo combinatorio, calcolo delle probabilità, …

Filo ha comprato un 'bomber', un giaccone imbottito, di cui è orgoglioso ma il nonno dice che ha le maniche un po' cortine … oppure è Filo che ha le braccia un po' più lunghe della media? Ma Filo dice che quando nella sua classe si mettono in fila in ordine di altezza lui si trova proprio a metà. Quindi Filo è il mediano della classe ma come ha fatto la casa produttrice a stabilire la giusta lunghezza delle maniche del giaccone? E' il momento di capire come funziona la statistica!

Lo zio Mauro ha piastrellato il bagno facendo disporre le piastrelle in diagonale: "Vedi che le mattonelle della parete non combaciano con quelle del pavimento? Forse può sembrarti un fatto insignificante, ma è proprio a causa di ciò che si è consumata una tragedia." Quale tragedia? "Avrà litigato con il piastrellista!" pensa Filo, ma per fortuna è un fatto antico, un pitagorico ucciso per colpa delle piastrelle che non combaciano.

Filo mostra una foto della propria squadra: "Marco somiglia moltissimo ai suoi fratelli Gianni e Giulio che, essendo gemelli, sono proprio uguali spiccicati. Andrea, che è soltanto cugino, ha alcune cose in comune con loro: i capelli rossi le lentiggini e un po' il naso. Io, invece, ho solamente la loro stessa maglia!" Il nonno fa notare: "Dall'essere gemelli, fratelli, cugini e amici le somiglianze diminuiscono, ma qualcosa resta. Sai a cosa mi fa pensare questa situazione?" L'invenzione di Anna Cerasoli sta proprio nel cogliere somiglianze, affinità, relazioni della vita di tutti i giorni di un ragazzo vivace per raccontare la matematica della vita reale, quella matematica che a scuola talvolta si fa fatica a insegnare. L'autrice mostra una via semplice, non necessariamente rigorosa e formale, ma capace di trasmettere quegli elementi di base da cui poi gli insegnanti istituzionali possono cominciare.

I racconti di Filo sono tradotti in varie lingue, in Italia sono uno dei pochi successi editoriali nella divulgazione matematica. L'autrice ha saputo trovare un proprio modo di raccontare, facendo divertire, anche con un pizzico di umorismo, e affrontando la matematica con coraggio, senza riverenze, senza paure. I libri sono ricchi di simpatiche illustrazioni, pensati per ragazzi ma leggibili anche dagli adulti.

* * *

Aritmetica: un approccio computazionale,
Springer, 2007
di Giulio Cesare Barozzi

Lo studio dell'aritmetica sembrava ormai relegato alla scuola di base. In tempi recenti la crittografia e la generazione di codici di difficile decifratura hanno riportato in auge alcuni temi legati all'aritmetica elementare, come la scomposizione in fattori primi dei numeri interi. Il libro del prof. Barozzi, scritto in una prospettiva didattica più che di ricerca, è un contributo all'analisi di argomenti classici della teoria elementare dei numeri.

Il libro come ogni buon manuale, comincia da zero, ossia dagli assiomi di Peano per i numeri interi naturali e di ogni tema, anche di quelli elementari, presenta un listato commentato in TI-BASIC (il linguaggio delle calcolatrici grafico-simboliche della Texas Instruments) e un diagramma di flusso. Nel primo capitolo (Numeri interi) sono presentati diversi algoritmi per il calcolo del MCD e del mcm. Il secondo capitolo è dedicato all'aritmetica modulare particolarmente utile nella crittografia: x è congruente a y modulo m se la loro differenza è un multiplo di m. Vengono presentati gli algoritmi per il calcolo del reciproco di un numero modulo m, ossia del numero s per il quale sn≡1 (mod m); per il teorema cinese dei resti che permette di individuare un numero a partire dai suoi resti; per il calcolo della potenza di un numero modulo m.

Il terzo capitolo è dedicato ai numeri primi: il problema della distribuzione dei numeri primi, la funzione π(n) definita come il numero di numeri primi non superiori a n; alcuni algoritmi sulla scomposizione in fattori primi di un numero. In questo capitolo sono descritti anche i principi di base della crittografia a chiave pubblica messa a punto nel 1977 da R.L. Rivest, A. Shamir e L.M. Adleman.

Questi ricercatori osservarono che era possibile basare un sistema crittografico che si basa sulla difficoltà di scomporre in fattori primi un numero molto grande, ad esempio un numero ottenuto dal prodotto di due primi ciascuno dei quali è costituito da un centinaio di cifre. A chiave pubblica significa che lo strumento per la codifica dei messaggi (la chiave appunto) può essere reso di pubblico dominio perché per decodificare il codice occorre possedere un'informazione aggiuntiva che sebbene contenuta nelle informazioni pubbliche richiede poi tempi proibitivamente lunghi per poter essere dedotta. Un qualunque messaggio può essere trasformato in una stringa di cifre (lo si può per esempio trasformare secondo il codice ASCII). Questa lunga stringa di cifre può essere suddivisa in sottostringhe in modo tale che ciascuna di esse non superi per lunghezza di cifre un numero naturale prefissato.

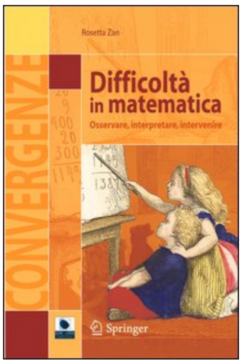
Il problema diventa allora quello di inviare numeri naturali non superiori a un massimo prefissato n, per il quale n=pq, con p e q due numeri primi distinti. Sia *a* la stringa da trasmettere. Per l'estensione di Eulero del teorema di Fermat sappiamo che $a^{(p-1)(q-1)+1} \equiv a \bmod n$. Supponiamo di poter scrivere (p-1)(q-1)+1 come prodotto di due interi b e c, allora $a^{bc} = a^{(p-1)(q-1)+1}$. A questo punto il mittente invia a^b mod n il ricevente calcola a^{bc} mod n che corrisponde ad *a*. A questo punto il problema della crittografia diventa quello di ottenere numeri primi grandi, con centinaia di cifre, a un 'basso costo' di calcolo.

Nel libro sono indicati i teoremi e gli algoritmi di base dei cosiddetti test di primalità dei numeri.

Il quarto capitolo del libro è dedicato ai numeri razionali. In appendice sono riportati listati in TI-basic e una sintesi dei principali comandi relativi alla teoria dei numeri in Derive, Maple, Mathematica.

Il libro per la chiarezza espositiva e la rigorosità della trattazione è consigliato anche ai tanti appassionati dilettanti di calcolo dei numeri primi.

* * *



Difficoltà in matematica
Osservare, interpretare, intervenire
Springer, 2007
di Rosetta Zan

Rosetta Zan raccoglie in questo corposo volume la sintesi del suo lungo percorso di ricerca, di insegnamento e di attività di formazione degli insegnanti. Le argomentazioni proposte ruotano attorno ad alcune 'scene' di cui sono protagonisti studenti di diversi livelli scolastici, dalle elementari all'università. Qualche breve esempio:

Azzurra, terza media, deve trovare il perimetro di un triangolo che ha i lati di 12cm e 8cm. La ragazza moltiplica 12 per 8. L'insegnante le dice: "Ma perché moltiplichi? Devi trovare il perimetro...". E Azzurra: "Divido?"

Marco, quarta liceo scientifico, deve moltiplicare $x+1$ per $x+2$. Scrive così: $x+1(x+2)$ ma esegue così $x^2+2x+x+2=x^2+3x+2$.

Nell'azione didattica quotidiana gli allievi si comportano diversamente nei confronti delle difficoltà in matematica, gli insegnanti tentano di attuare interventi su chi incontra maggiori difficoltà. Purtroppo queste azioni mirate non solo non producono l'effetto sperato ma paradossalmente aumentano le differenze tra gli studenti bravi e quelli meno bravi, aggravando il problema originario: la ripetizioni degli argomenti, la correzione degli errori, l'attenzione posta agli errori tipici, anziché ridurre, allargano la forbice fra gli allievi con difficoltà, in quanto sembrano essere solo gli allievi 'bravi' a trarne vantaggio. E' ciò che l'autrice chiama 'antinomia dell'insegnante'. In realtà, osserva Zan, anche il vantaggio degli studenti 'bravi' è puramente fittizio e a volte si trasforma in danno in quanto molti ragazzi si convincono che l'apprendimento della matematica non richiede uno studio specifico ma basta stare attenti in classe.

L'autrice parte dalla definizione e dal senso da dare all'espressione 'difficoltà in matematica', quindi tratta la problematica dell'errore, partendo dai temi filosofici generali per arrivare al significato da dare in ambito più strettamente didattico. Dalla comprensione dell'errore la discussione passa all'interpretazione dell'errore e alle motivazioni che sottostanno, quindi si arriva alla comprensione e interpretazione dei comportamenti fallimentari e di certi insuccessi nelle azioni di recupero.

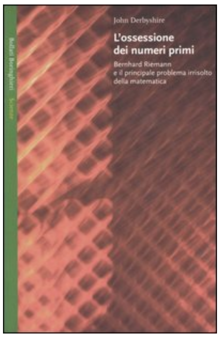
Un'interpretazione, osserva l'autrice, non è giusta o sbagliata: è un'ipotesi di lavoro ed in quanto tale funziona o non funziona. E' importante quindi che l'insegnante abbia un repertorio di interpretazioni possibili per i comportamenti degli allievi, che suggerisca possibili ipotesi di lavoro su cui fondare eventuali interventi di recupero.

L'articolazione di questo percorso, che qui è stato esposto in maniera sintetica, è arricchito da temi di particolare attualità e interesse come l'aspetto costruttivo dell'apprendimento della matematica, l'importanza del contesto e l'approccio pragmatico al linguaggio. Secondo la teoria costruttivista, la conoscenza è in gran parte costruita dal discente, che non si limita ad aggiungere nuove informazioni al suo magazzino di conoscenze ma crea collegamenti e costruisce nuove relazioni tra queste informazioni. Questo punto di vista permette di spiegare molti errori in matematica in modo alternativo rispetto a quello tradizionale secondo il quale l'errore è semplicemente dovuto a mancanza di conoscenze e abilità.

Molta attenzione è dedicata anche alla metodologia del *problem solving*, alle difficoltà nell'attuarla in classe e nel reperire problemi adeguati da proporre. Nel libro sono indicate alcune risorse disponibili in rete.

Il libro è rivolto in maniera specifica agli insegnanti di matematica, a ricercatori e formatori in didattica della matematica.

* * *



L'ossessione dei numeri primi
Boringhieri, 2006
di John Derbyshire

Negli ultimi anni l'ipotesi di Riemann è venuta prepotentemente alla ribalta e ha iniziato ad essere conosciuta da un numero sempre più elevato di persone, non soltanto matematici di professione, ma anche semplici appassionati e in qualche caso perfino profani della materia.

Questa diffusione a macchia d'olio è dovuta principalmente a ragioni di carattere storico, le quali hanno avuto anche l'effetto di dare un forte impulso a una produzione letteraria di tipo divulgativo. Appena qualche anno fa, nel 2000, ricorreva il centenario della sfida lanciata da David Hilbert, che l'8 agosto 1900, durante il secondo Congresso internazionale di matematica tenutosi a Parigi, propose una lista di ventitré problemi da risolvere nel corso del secolo che stava per iniziare. Non erano problemi scelti a caso, ma rappresentavano l'ultima frontiera delle varie branche della matematica di allora, cosicché la risoluzione di ciascuno di essi avrebbe dato un significativo contributo alla ricerca.

Dopo cento anni esatti, quasi tutti quei problemi erano stati risolti; a dire il vero solo uno di essi continuava ad essere un mistero. E proprio nel 2000, in occasione del centenario di quella colossale sfida, l'istituto americano Clay ha rinnovato la competizione: quell'unico problema di Hilbert ancora insoluto è stato affiancato da sei nuovi enigmi per un totale di sette problemi per il nuovo millennio ormai alle porte; ma, per rendere la sfida più interessante, l'istituto Clay ha messo in palio un milione di dollari per ogni quesito risolto.

La clamorosa notizia dei premi da un milione di dollari ha consentito una diffusione del fenomeno anche oltre la ristretta e chiusa cerchia dei matematici; contemporaneamente l'interesse si è concentrato in modo particolare su quell'unico problema che aveva resistito a ogni tentativo di soluzione durante tutto il XX secolo: l'ipotesi di Riemann.

Ecco le ragioni che spiegano la diffusione, in tempi recenti, di libri di divulgazione riguardanti i "Problemi del millennio" (così sono ormai conosciuti i sette enigmi) e l'ipotesi di Riemann in particolare. Questa "ipotesi" non è altro che una proposizione asserita nel 1859 dal matematico tedesco Bernhard Riemann e che ad oggi non è stata né dimostrata né tuttavia confutata. A questo enunciato sono legati i nomi dei più grandi matematici dalla seconda metà dell'Ottocento fino a tutto il Novecento: da Hilbert a Connes, passando per Hardy, Littlewood, Ramanujan, Selberg… giusto per citarne qualcuno, ma si sappia che non c'è alcun matematico di un certo rilievo, tra quelli vissuti nel XX secolo, il cui nome non sia anche solo minimamente legato all'ipotesi di Riemann; ciascuno di essi è riuscito a dare un contributo per nuove scoperte legate, direttamente o indirettamente, all'ipotesi, ma nessuno è stato in grado di trovare una soluzione.

"L'ossessione dei numeri primi" racconta la straordinaria storia della congettura di Riemann, descrivendola in modo semplice, affinché possa essere capita da un profano, ma anche ricco e preciso, affinché chi ha qualche conoscenza in più possa entrare nel vivo dell'ipotesi stessa. Tuttavia non vengono discussi soltanto i dettagli tecnici: sono presenti molte notizie storiche accurate inerenti la vita e l'attività di molti matematici e non mancano digressioni su temi importanti legati al contesto in cui i fatti narrati avvenivano. Per fondere al meglio la matematica e la storia e rendere il discorso più omogeneo, l'autore John Derbyshire ha avuto una singolare idea: i capitoli con numero dispari contengono un'esposizione matematica, mentre i capitoli con numero pari contengono i fondamenti storici e biografici. Per i non addetti ai lavori sono presenti, nei capitoli più "tecnici", richiami di analisi e algebra, necessari per poter introdurre determinati concetti; i lettori più esperti possono tuttavia saltarli.

Ma cosa affermò Riemann di tanto complicato da neutralizzare i tentativi di tutti i grandi matematici da 150 anni a questa parte? Ci sarebbe da aspettarsi un enunciato lungo e difficile perfino da spiegare a parole… invece la formulazione dell'ipotesi, almeno nella sua sostanza, è di una semplicità a dir poco assurda. Ecco dunque l'ipotesi di Riemann: *tutti gli zeri non banali della funzione zeta hanno parte reale pari a 1/2*. Anche a chi non sa come è definita la funzione zeta, questa proposizione non dovrebbe apparire affatto difficile. Basti sapere che già all'epoca di Riemann era nota una funzione, la funzione zeta appunto, definita per ogni numero reale maggiore di 1. Nella sua formulazione originaria, la suddetta funzione si mostra come una somma di infiniti termini (nondimeno però tale somma può essere finita!).

Qualcuno poi ha pensato di estendere la funzione zeta al campo complesso, in modo tale che essa possa assumere valori ben definiti in corrispondenza di qualunque numero complesso, eccezion fatta per il numero 1, che resta l'unico valore per cui la funzione zeta non è definita. La nuova versione della funzione zeta può assumere dunque valori complessi e si annulla in alcuni punti; in particolare essa assume valore nullo in corrispondenza di tutti i numeri interi pari negativi. Per questo motivo i numeri -2, -4, -6, -8,… sono zeri per la funzione, ma non sono di grande importanza ai fini dell'ipotesi di Riemann e perciò sono detti "zeri banali". Ma oltre a questi, esistono altri valori che annullano la funzione zeta? E se sì quali sono? Ecco dunque la risposta, la cui veridicità non è ad oggi certa, proposta da

Riemann: *tutti gli zeri non banali della funzione zeta hanno parte reale pari a 1/2*. Tutto qui.

Spesso si accosta il nome di Eulero alla funzione zeta. I motivi di questo accostamento sono diversi e tra essi figura sicuramente un'intuizione del matematico svizzero, che riuscì a rappresentare la funzione zeta sotto forma di prodotto di infiniti termini. Abbiamo detto poc'anzi che la funzione zeta fu originariamente definita come somma su un numero infinito di termini. E fu proprio partendo da questa semplice osservazione, cioè uguagliando il risultato della somma e del prodotto infiniti, che Riemann riuscì a costruire la sua celebre proposizione.

L'ipotesi di Riemann comparve per la prima volta in un documento scritto nell'agosto del 1859, quando il giovane matematico Bernhard Riemann presentò un saggio all'Accademia di Berlino, secondo l'usanza del tempo; Riemann era stato difatti nominato membro corrispondente dell'Accademia e per l'occasione preparò un lavoro sulle attività di ricerca in cui era impegnato. Il titolo del saggio era *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, che in italiano vuol dire "Sul numero dei numeri primi minori di una certa grandezza". Come!? Numeri primi? Cosa hanno a che vedere i numeri primi con l'ipotesi di Riemann e con la funzione zeta?

Ebbene, l'importanza dell'ipotesi di Riemann risiede nel fatto che, qualora si dimostrasse vera, consentirebbe di calcolare il numero di numeri primi inferiori a un certo numero fissato. Questo è un risultato sorprendente e alla luce di ciò è facile adesso spiegarsi perché questo problema sia considerato da sempre uno dei più grandi misteri della matematica: fin dall'antichità i matematici hanno cercato di scoprire la chiave di lettura dei numeri primi… da sempre si è cercato di trovare un ordine all'interno della distribuzione apparentemente aleatoria degli "atomi" della matematica.

Sicuramente una eventuale dimostrazione dell'ipotesi di Riemann costituirebbe un evento eccezionale, che avrebbe ripercussioni in molti settori, non soltanto nella semplice speculazione matematica… è stato provato che gli zeri della funzione zeta hanno uno stretto legame con la fisica quantistica ad esempio… inoltre si pensi ai numeri primi usati in crittografia… e chissà quanti altri misteri legati all'ipotesi potrebbero essere celati in attesa di venire scoperti!

Il nesso tra gli zeri della funzione zeta e i numeri primi, a dire il vero, non è affatto immediato e richiede elevate conoscenze matematiche per essere compreso appieno, anche se Derbyshire, da buon matematico, è riuscito a semplificare molto il discorso e renderlo quantomeno accessibile.

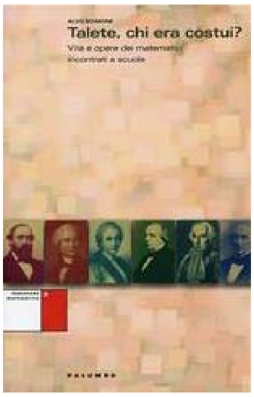
Probabilmente, la cosa più curiosa di tutta la narrazione è la scarsa considerazione che Riemann stesso ebbe all'inizio nei confronti della propria congettura, considerandola solo una parte marginale del saggio che presentò all'Accademia. Nel testo originale che redasse si poteva leggere, in riferimento alla propria ipotesi:

Sarebbe auspicabile senza dubbio che si avesse una dimostrazione rigorosa di questa proposizione: tuttavia per il momento ho lasciato questa ricerca da parte dopo qualche breve tentativo infruttuoso, poiché essa mi appare superflua per gli scopi immediati dei miei studi.

Qualcuno direbbe: "Le ultime parole famose"…

Andrea Vitiello

* * *



Talete, chi era costui?
Vita e opere dei matematici incontrati a scuola
Palumbo, 2006
di A. Scimone

Umberto Eco nella sua scherzosa storia in versi della filosofia ci racconta che: "*Un tempo lontano quando gli Argivi/ nudi correvan beati per boschi e per campi/ alcuni messeri si chieser pensosi: di che è fatto il mondo?/ Un tal di Mileto di nome Talete...*". Fu l'inizio di una straordinaria avventura intellettuale etichettata dai posteri come attività filosofica e matematica.

Da lì proviene il regalo più grande che la grecità abbia dato al mondo: la necessità di dimostrare anche le argomentazioni che sembrano verissime per la loro ovvietà. Talete stesso inaugurò un principio che ha avuto enorme fortuna nella millenaria storia dell'umano pensiero: "massimo numero di fatti, minimo numero di ipotesi". Nei nostri verdi anni liceali, seguendo Manzoni, ci chiedevamo: *Carneade, chi era costui*? Domanda retorica che non richiedeva risposta.

Invece dopo aver letto, con stupita attenzione, il bel libro di Aldo Scimone sappiamo non soltanto chi fu Talete, ma anche cosa hanno fatto i tanti matematici che lo hanno seguito nel cammino della storia. La lettura del testo ci conduce per mano nell'affascinante storia del pensiero matematico, incarnato nei suoi massimi epigoni. Appare chiaro da un'attenta analisi il filo rosso che lega la matematica greca alla nostra matematica, nonostante il cambiamento dei paradigmi che hanno accompagnato il cammino bimillenario di questa disciplina. Tuttavia l'Autore non cade nel tranello dello "hysteron proteron": una figura retorica con cui si attribuiscono al passato le conquiste intellettuali dei moderni.

Si va dall'oggetto "nominato" dei greci, un oggetto che non preesiste alle sue proprietà all'oggetto cartesiano che vive nelle equazioni e dunque preesiste alle sue proprietà. Un fatto, quest'ultimo, che ha permesso, come fu detto, l'industrializzazione della matematica. In effetti l'Autore dà giusto risalto alle grandi ed epocali figure della matematica greca, da Euclide di Alessandria, cui vengono dedicate trenta pagine che riassumono gli imponenti *Elementi*, ad Archimede, che gli antichi chiamarono l'Omero della geometria, insuperabile ed insuperato maestro della geometria di misura.

Le sedici pagine, dedicate a Pitagora, il cui teorema domina ancora la matematica ed ha echi profondi nella matematica novecentesca, ne dipanano con chiarezza la figura, non tralasciando la sua tendenza mistica ed esoterica che trasformò il numero intero positivo in una fede religiosa. Anche le tre pagine dedicate a Pascal ne mettono in risalto la singolare e irripetibile figura di "genio portentoso" come lo definì Chateaubriand. Leggendo e rileggendo il libro ci si rende conto come abbia il dolce suono della verità la celebre frase, da tutti poi ripetuta, del monaco medievale Bernardo di Chartres: "Noi siamo nani, ma stando sulle spalle di giganti possiamo vedere più lontano di loro".

Il libro consta di 63 biografie da Abel, geniale, ma sfortunato matematico danese, a Zenone di Elea i cui paradossi sono ancora oggi oggetto di scientifico dibattito. Ogni biografia dà rapido conto della vita del soggetto trattato per poi illustrare con chiarezza le sue scoperte matematiche. Seguono tre appendici su: gustosi aforismi ed apoftegmi di matematici ed intellettuali di varia estrazione, una breve cronologia storica e alcune schede didattiche utili ai docenti. Infine un'incisiva seppur scarna bibliografia e l'elenco di alcuni siti web che meritano di essere visitati. In definitiva, un testo che merita di essere letto e meditato dalle persone colte e dagli studenti cui non fa difetto una sana curiosità scientifica affinché apprendano che "nella perenne giovinezza del pensiero creativo, l'umanità non conosce vecchiaia".

Antonino Gentile

Recen… siti

a cura di Antonio Bernardo

"Rudi Mathematici". *Matematica, Giochi Matematici, Problemi, Indovinelli e Farneticazioni*
*Indirizzo:*http://www.rudimathematici.com/

Più che un sito è una rivista elettronica in formato pdf, praticamente un nostro concorrente, ma noi gli facciamo pubblicità lo stesso. Per la verità il primo numero risale al febbraio 1999 e attualmente sono arrivati al n. 99, perciò tanto di cappello per la costanza. La prima cosa che si nota leggendo la rivista è l'elevato grado di umorismo degli autori … a volte fanno anche ridere! Un assaggio? "Marshall ASTOR ha costruito un cubo di Rubik in bronzo massiccio perfettamente funzionante che ci pare risolva due problemi in un colpo solo. Per prima cosa, comunque lo ruotiate è sempre "risolto"; inoltre, se in un momento di frustrazione decidete di tirarlo in testa a qualcuno, la soddisfazione è sicuramente maggiore." Il nomignolo di rivista di matematica ricreativa se lo meritano tutto, a parte qualche 'farneticazione' degli autori, in realtà divagazioni interessanti sulla matematica, la rivista contiene una serie di problemi di difficoltà diverse. Ai numeri d'ordine di tipo 12n-1 (praticamente il numero di dicembre) è allegato un calendario a sfondo matematico.

"Matematica e scuola"
Indirizzo: http://www.matematicaescuola.it

E' il sito personale del prof. Luigi Lecci, insegnante di matematica nel liceo scientifico a indirizzo PNI di Tricase (LE). Nei numerosi anni di attività didattica d'avanguardia con studenti di liceo e di università il prof. Lecci ha raccolto tanto materiale didattico pregevole che ora mette a disposizione di tutti. Trovate principalmente esercizi risolti e compiti in classe svolti per tutte le classi del liceo scientifico ma anche per il biennio dell'università. Nel sito trovate anche materiale didattico relativo ad esperienze di laboratorio di fisica (che ahimè non tutti gli insegnanti frequentano): legge di Boyle, dinamica rotazionale, pressione atmosferica, … Infine segnaliamo il lavoro sul campo magnetico terrestre della prof. A. M. Abatianni.

"Treccani Scuola, Matematica" *a cura di W. Maraschini*
indirizzo: http://www.treccani.it/site/Scuola/nellascuola/area_matematica

Ogni mese il prof. Maraschini raccoglie una serie di interventi a tema. Il numero di marzo è dedicato alle funzioni: "Le funzioni sono uno dei modelli matematici privilegiati per lo studio di aspetti diversi della realtà e rappresentano un concetto centrale nella formazione matematica." Di funzione tuttavia si parla praticamente ogni volta che si parla di matematica, le sfumature di significato sono tante e le formulazioni matematiche altrettante. Gli interventi presentati in questo numero possono aiutare a districarsi tra i diversi significati e rappresentazioni. I numerosi esempi di funzioni relativi a situazioni reali suggeriscono che "la precisione concettuale debba essere accompagnata e vivificata dal riferimento a situazioni reali".

Recen… *Soft*

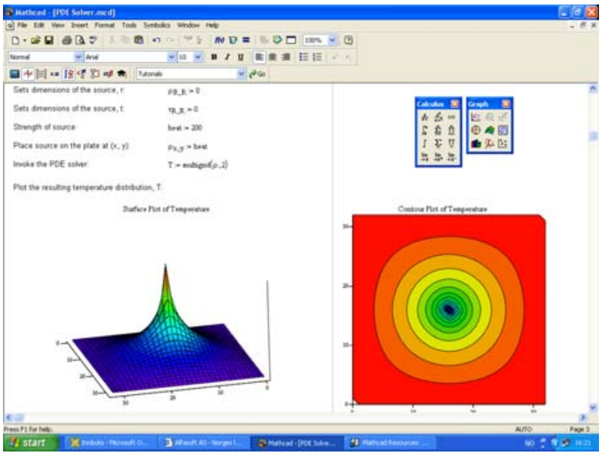
di Carlo Elce

Come lavora Mathcad,

Mathcad può essere pensato come un word processor che conosce la matematica oppure può essere pensato come un foglio di brutta copia che riesce a gestire sia parole che numeri. Mathcad può leggere e capire la matematica nella stessa maniera in cui la si vede scritta o stampata nei libri, ed inoltre, per alcuni versi, ha anche un suo linguaggio.

Regioni Matematiche e Regioni di Testo

Esistono due tipi di campo in Mathcad: campi per la matematica e campi per il testo. Non hanno nulla a che fare l'uno con l'altro. A meno che siano stati spenti, i campi matematici sono attivi: Mathcad cerca di comprenderli. I campi di testo dall'altra parte sono "inattivi" e Mathcad li ignora. I grafici sono considerati campi matematici perché sono attivi; immagini importate sono invece "inattive"come le regioni di testo.



Il calcolatore a pieno schermo

Il cuore di Mathcad è il calcolatore a tutto schermo. In qualche modo funziona come i calcolatori grafici con cui probabilmente alcuni dei lettori lavorano, ma è molto più potente e flessibile. Mathcad fa matematica proprio come a scuola, con variabili e funzioni, e usare variabili e funzioni è la chiave per ottenere il massimo da Mathcad. Ecco un piccolo esempio.

Supponete di voler trovare l'area di un cerchio di raggio 7. Conoscete la formula per l'area, su una superficie qualunque del vostro foglio di lavoro inserite l'espressione per l'area. Il simbolo lo ottenete dagli strumenti matematici. Quando digitate =, Mathcad vi mostra la risposta:

$$\pi \cdot 7^2 = 153.938$$

Fino a qui è come un qualunque calcolatore. Ma mettiamo il caso che dobbiate risolvere lo stesso problema per tanti valori diversi del raggio. Quando dovete ripetere un calcolo per valori diversi, pensate alle variabili. Definite una variabile che rappresenta il raggio e scrivete la formula dell'area in funzione di r

$$r := 7$$

$$\pi \cdot r^2 = 153.938$$

La risposta è la stessa, ma ora potete ottenere l'area per qualunque raggio semplicemente modificando il valore di r. Vi siete costruito una piccola macchina per risolvere questo specifico problema. Provate a selezionare il 7, cliccando e trascinando il cursore su di esso, e inserite un numero qualsiasi. Appena cliccate, Mathcad vi mostra il valore della nuova area.

Bello, ma se avete un foglio di lavoro lungo e dovete usare la formula dell'area in posti diversi diventa noioso dover tornare continuamente indietro per riprendere il calcolo. Ogni volta che serve avere una formula a portata di mano, pensate in termini di funzioni. Definite l'area in funzione di r. Mathcad vi lascia usare qualunque nome voi vogliate. Vale la pena sceglierlo in modo tale da ricordarlo facilmente:

$$\mathrm{area}(r) := \pi \cdot r^2$$

Ora ogni volta che avete bisogno dell'area usate questa funzione:

$$\mathrm{area}(12) = 452.389$$

$$\mathrm{area}(33.27 \cdot \mathrm{cm}) = 0.348\ \mathrm{m}^2$$

E potete inserirla anche in altri calcoli. Se avete bisogno, per esempio, di sapere di quanto un cerchio di raggio 10 è più grande di un cerchio di raggio 6, ecco come chiederlo a Mathcad:

$$\mathrm{area}(10 \cdot \mathrm{m}) - \mathrm{area}(6 \cdot \mathrm{m}) = 201.062\ \mathrm{m}^2$$

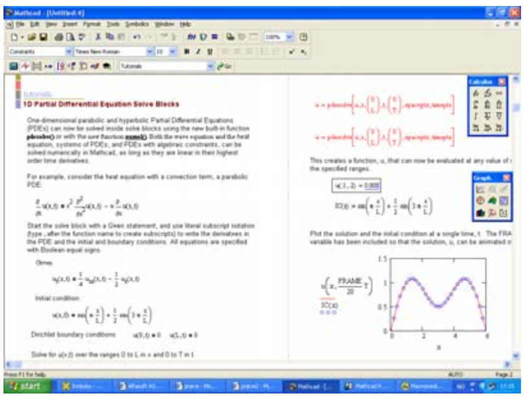
Ed ecco la risposta. Potete usare la vostra funzione di area nella definizione di altre funzioni. Supponete di avere dei problemi nel trasformare aree circolari in aree quadrate della stessa superficie. Avrete bisogno di conoscere il lato di un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio di dato raggio. Così potreste definire una nuova funzione

$$\mathrm{lato}(r) := \sqrt{\mathrm{area}(r)}$$

per cui:

$$\mathrm{lato}(2 \cdot \mathrm{m}) = 3.545\ \mathrm{m}$$

Matematica Viva



Il vostro foglio di lavoro tiene conto di tutto quel che fate. Così se volete cambiare qualche input o definizione non dovete tornare indietro e reinserire tutto da capo, come dovreste fare con quasi tutti i calcolatori. Invece, basta modificare il foglio lavoro e Mathcad aggiornerà qualunque risposta per la quale è avvenuta una modifica. Chiamiamo questa caratteristica "matematica viva". Per molti calcoli aritmetici il calcolo è così veloce che è difficile accorgersi delle modifiche a meno che non prestiate molta attenzione alle risposte. Quando il calcolo richiede più tempo, il puntatore del mouse diventa una lampadina, segno che Mathcad sta lavorando al vostro problema.

Troverete che questo calcolo automatico è una delle caratteristiche migliori di Mathcad. Vi risparmierà tantissimo tempo e vi aiuterà a capire bene i vostri calcoli. Avete visto della matematica viva quando avete cambiato il raggio nell'esempio dell'area del cerchio. Ecco un altro esempio semplicissimo.

Definite alcune variabili:

a:=6

b:=2.5

c:=10

Costruite qualche espressione che dipenda da queste variabili e trovate il loro valore:

$$\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}=3.074$$

$$\frac{a^2+b}{2c+10}=1.283$$

Ora cambiate il valore di una delle variabili, selezionate per trascinamento il lato destro della definizione e immettete un nuovo valore. Vedrete che i due valori dell'espressione si aggiornano. Provate a modificare una delle formule scambiando, per esempio, la "c" con la "b". Di nuovo il risultato viene immediatamente aggiornato. Questa è la matematica viva al lavoro.

Retroazione

Mathcad reagisce continuamente a qualunque cosa voi stiate facendo. La retroazione più importante è l'indicatore rosso di errore: quando Mathcad non riesce a capire qualcosa che avete digitato, lo colorerà di rosso, e se cliccate su un'espressione che contiene una variabile o un operatore in rosso, vedrete un messaggio che vi dice cosa c'è di sbagliato. Per esempio, cliccando sull'espressione qui sotto:

$$p+q=\blacksquare$$

Mathcad ci dice che non sa quali valori usare nel computo dell'espressione, questo perché non abbiamo definito le variabili.

Se non state ottenendo il risultato che vi aspettavate, potrebbe essere perché qualcosa, che avete inserito, si trova un po' più in alto rispetto alla posizione corretta.

Qualche volta Mathcad vi darà l'informazione retroattiva in una finestra di dialogo. Per esempio, cliccate su una delle due x nell'equazione qui sotto e scegliete **Variable/Solve** dal menù **Symbolics**.

$$x=x+2$$

"Nessuna soluzione trovata," dice il messaggio, e ciò è ragionevole, poiché questa equazione non ha soluzione!

Tre Tipi di Segni di Uguale

Variabili, funzioni ed equazioni sono la base della matematica di Mathcad. Nella matematica e nella scienza il segno uguale viene usato in vari modi. Normalmente viene usato per attribuire, o definire una variabile o funzione, o per calcolare un risultato, e ancora per esprimere la condizione di eguaglianza: cioè per rappresentare una equazione.

Mathcad ha tre diversi segni di uguale per questi tre scopi. Ecco come adoperarli, come si presentano e come digitarli sulla tastiera.

Per assegnare un valore ad una variabile, si usa :=

Per calcolare un risultato, si usa =

Per immettere una equazione da risolvere, si usa **=**, ottenuto premendo [Ctrl] e =

Esiste anche un "uguale globale" che si usa per creare una variabile globale, una variabile che Mathcad legge come se fosse all'inizio del documento e rimane tale per tutto lo sviluppo del documento. Non ne avrete quasi mai bisogno ma potrebbe risultare utile in alcuni casi.

Il Simbolo Due punti-Uguale

$$a:=4$$

$$b:=\pi$$

$$f(x):=x^2$$

Le equazioni qui sopra esemplificano l'uso del simbolo due punti-uguale all'interno di Mathcad. Potete inserirlo premendo il tasto due punti sulla tastiera, o cliccando sul pulsante specifico.

Il simbolo due punti-uguale assegna un valore ad una variabile o definisce una funzione. Così il simbolo due punti-uguale in Mathcad si legge letteralmente come, "d'ora in poi, la variabile (o funzione) tal dei tali sarà posta uguale a così e così." Negli esempi sopra, la variabile a è posta uguale a 4, b uguale a π e la funzione f(x) uguale al quadrato di x.

Se si definisce una variabile due volte, Mathcad sostituirà il primo valore con il nuovo valore appena raggiunge la nuova definizione nel documento:

$$k:=7$$

$$k=7$$

$$k:=-4$$

$$k=-4$$

La seconda definizione sarà effettiva d'ora in poi su questo foglio di lavoro, a meno che non venga ridefinita. Va bene riutilizzare il nome di variabili in un foglio lavoro, ma state attenti. Mathcad non si confonderà invece voi potreste confondervi.

Espressioni e Funzioni

In matematica, un'espressione è un "frammento di calcolo" che non include un segno di uguale. In altre parole, non è un'equazione completa. Quelle che seguono sono tutte espressioni:

$$x^2$$

$$3\cdot c\cdot v^2$$

$$\sqrt{7}$$

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

Un'espressione sta ad una equazione come una frase sta ad un periodo nella lingua parlata. Un'espressione può implicare numeri, varabili, funzioni o una combinazione di questi. In matematica cos'è una funzione? Puoi considerarla come un confronto, in quanto confronta un numero con un altro numero. Oppure confronta un'intera famiglia di numeri con un'altra famiglia di numeri. In matematica e in Mathcad, le funzioni sono scritte con le parentesi tonde, in questo modo:

$$f(x):=x^2-4$$

$$\text{altezza}(v_{iniziale}, t) := v_{iniziale} \cdot t - g \cdot t^2$$

(altezza è una funzione di due variabili)

Come si può vedere, sia le funzioni che le variabili all'interno di Mathcad possono avere nomi che sono lettere o parole intere. Potete dargli il nome che volete, anche se occasionalmente a Mathcad potrà non piacere un nome o una lettera già impiegati per un altro scopo. La lettera g, per esempio, viene usata in Mathcad (come usualmente viene usata in fisica) come la costante associata alla accelerazione gravitazionale della terra. Se viene usata anche come funzione potrebbero crearsi delle confusioni.

Ottenere Soluzioni: Il Segno Uguale

Per calcolare una soluzione numerica, come sul calcolatore basta usare il segno uguale sulla tastiera oppure il pulsante = tra gli strumenti matematici. Ecco alcuni esempi:

$$2 + 2 = 4$$

$$\sin(10 \cdot deg) = 0.174$$

$$\text{altezza}\left(0 \cdot \frac{m}{sec}, 4 \cdot sec\right) = -156.906\ m$$

Potete chiedere a Mathcad di eseguire un calcolo che richiede un tempo lungo, come questo, che somma gli inversi del primo milione di numeri interi:

$$\sum_{n=1}^{1000000} \frac{1}{n} = 14.393$$

Mentre Mathcad sta calcolando vedrete una lampadina al posto del puntatore, e l'espressione che Mathcad sta elaborando verrà coperta da un tratteggio. Se non avete pazienza o vi rendete conto che in fondo non avete bisogno di questa soluzione, si può interrompere il calcolo premendo [Esc]. Quando date l'OK per l'interruzione, una parte dell'espressione diventerà rossa per indicarvi che il calcolo non è completo. Per riprendere, basta cliccare sull'espressione e premere [F9]. Provateci con la somma qui sopra.

Il Segno Uguale Simbolico

L'altro segno uguale in Mathcad viene usato per esprimere la condizione di eguaglianza. Questo è un modo fantasioso per dire: immettere equazioni. Se si vuole risolvere un'equazione si lavorerà col processore simbolico di Mathcad: la parte più bassa del menu **Symbolics**. Il segno uguale per risolvere equazioni viene immesso digitando [Ctrl] =, o premendo  per accedere alla tastiera degli operatori dei confronti e poi premendo =.

Viene visualizzata in neretto:

$$x^3 + 3x + 5 = x^2$$

$$F = m \cdot a$$

Questo segno uguale viene detto qualche volta logico, o segno uguale Booleano. Altri simboli che potreste usare nelle equazioni sono i simboli di disuguaglianza > e <. Questi simboli si trovano nella sezione disequazioni degli Strumenti matematici.

Si può usare il segno uguale in grassetto per mostrare un'equazione, senza chiedere a Mathcad di valutarla, o di risolverla per soluzioni simboliche o esatte, come 3p/2. In altre parole, vedere la risposta in termini di numeri e variabili anziché di soli numeri. Per ulteriori informazioni sul segno uguale in grassetto, andate alla sezione Risolvere equazioni. Come anteprima, risolveremo la prima equazione scritta sopra selezionando "c" e scegliendo **Variable/Solve** dal menù **Symbolics**

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{d}{a}$$

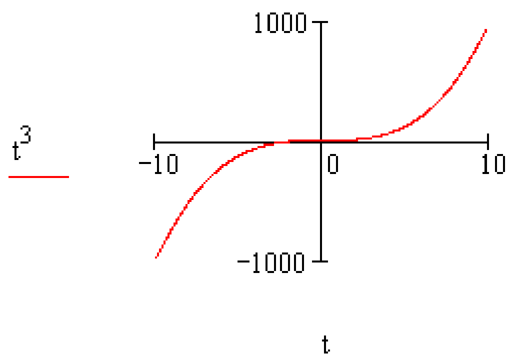
ha come soluzione

$$\frac{a^2+a\cdot b-d^2}{d}$$

Nota che è necessario ricordarsi cosa si sta risolvendo. Mathcad dà solamente la risposta per c.

Fare grafici

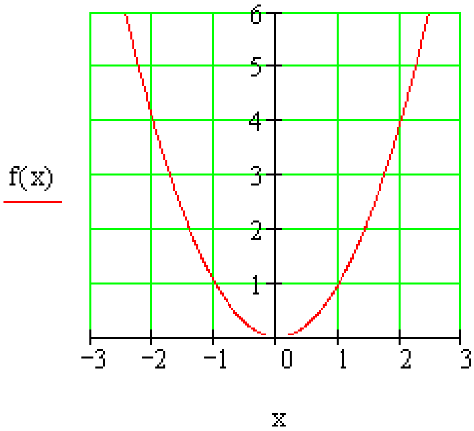
Fin qui abbiamo considerato Mathcad come una calcolatrice e come risolutore di equazioni. Mathcad è anche un versatile strumento per grafici, chiamati plottaggi. Ecco come creare un grafico: in un campo matematico (qualunque spazio bianco del vostro documento), scrivete l'espressione che vi piacerebbe vedere rappresentata con un grafico, come per es. t3 . Poi cliccate il tasto per i grafici sugli strumenti matematici e cliccate il tasto in alto a sinistra per un grafico x-y. Per finire cliccate ovunque al di fuori dalla zona del grafico. Ecco quel che vedrete.



Invece di prendere questa scorciatoia, si può assegnare una Variabile intervallo per specificare il campo di variabilità all'interno del quale volete il grafico della funzione. Prendiamo la funzione; come la rappresentereste nel campo da -3 a 3?

$$f(x):=x^2$$

$$x := -3,-2.99..3$$



Definire la funzione, assegnare un campo di variabilità da –3 a 3 con intervalli di .01, specificare 6 intervalli di griglia su ogni asse, ed ecco ciò che vedrete. Altre opzioni si trovano nella sezione **Grafici**.

Array: Vettori e Matrici

Le variabili possono essere scalari (cioè variabili normali) oppure array. Un array in matematica consiste di righe e colonne. Un array che è solo una riga o una colonna viene chiamata vettore. In Mathcad, si immettono i vettori come colonne. Se ci sono almeno due o più colonne viene chiamata matrice**.** Potete dare qualsiasi nome a un vettore o a una matrice, come alle altre variabili. Le variabili di matrici sono spesso denominate con lettere maiuscole.

$$v := \begin{pmatrix} \pi \\ e \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Array come queste possono essere create in due modi: usando la finestra di dialogo Matrice (battere **[Ctrl] m**), o con una variabile intervallo. Per esempio:

$i:=1..3$ rappresenta una variabile intervallo.

$C_i:=1$ assume tre diversi valori 1, 2, e 3 così il vettore ha tre componenti. Riuscite a vedere cosa è successo? Usare un campo di variabilità come deponente indicizzato implica la creazione di un vettore.

$$C_2 = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usare la parentesi quadra sinistra **[** per creare un deponente indicizzato come pedice.

Si può usare un secondo campo di variabilità per creare una matrice

$$j := 1..3 \qquad D_{i,j} := i + j \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Per approfondimenti, vedi la sezione "Vettori e matrici".

Pedici Letterali

Questo tipo di pedice, il deponente indicizzato, è diverso dai pedici che puoi aver visto come v_{iniziale} o A_{sfera}, che si chiamano pedici letterali. Per scrivere un pedice letterale in Mathcad, digita un punto **v.init** o **A.sphere**.

Quanto è Intelligente Mathcad?

Mathcad è piuttosto intelligente ma non riesce a leggervi nella mente. In matematica, si può scrivere 3x o 4x2 che significa 3 per x , o 4 per x al quadrato. Viene chiamata moltiplicazione implicita perché noi sappiamo che c'è il segno di moltiplicazione, ma non possiamo vederlo. Si sa che c'è. Normalmente Mathcad riesce a leggere la moltiplicazione implicita, ma a volte sarà necessario segnalarla col tasto di asterisco o usare il simbolo di moltiplicazione sugli strumenti matematici. Per esempio, la moltiplicazione si indicherà come un punto, così: a.b Altrimenti, Mathcad potrebbe pensare che si sta parlando di una variabile chiamata ab.

Altra questione è il processore simbolico: cliccate su un'espressione e scegliete **Symbolics/Simplify** per valutarla. Normalmente sarete in grado di semplificare un'espressione o risolvere un'equazione con successo. Tuttavia, a volte, il processore simbolico vi restituirà la stessa cosa che gli avete chiesto di valutare (il terzo esempio sotto) — o non troverà alcuna risposta. Così, quando userete il processore simbolico, ricordatevi che è uno strumento utile ma non è il massimo per risolvere problemi matematici. Provate e vedete cosa succede. Osservate le tre colonne qui sotto:

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2$	$\left(x^2\right)^3$	$\sin(a+b)$
si semplifica in	si semplifica in	si semplifica in
1	x^6	$\sin(a+b)$

Nel terzo caso, Semplifica ha restituito ciò che le era stato dato. Ma Espandi produce l'identità nota, come ci si aspettava:

$\sin(a+b)$ espandi $\sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b)$

Infine, quando vi aspettate che una soluzione dia zero può succedere che dia invece un numero piccolissimo, come $4.56\cdot10^{-15}$

Oppure, quando vi aspettate infinito, potrete trovare un numero molto grande come 10^{307}

(Il numero più grande in Mathcad.) Usate sempre il buon senso e prendete i numeri piccolissimi o molto grandi per quello che sono. Per altro su questi limiti e l'uso dei numeri, vedete la sezione "Numeri e precisione".

Sommario

Mathcad legge sempre un documento dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra. Su un normale foglio di brutta sareste sempre (o quasi) in grado di leggere quel che avete scritto nell'ordine giusto, a prescindere da dove l'avete scritto. Con Mathcad dovrete prestare attenzione a che i campi scorrano nell'ordine giusto.

I documenti in Mathcad consistono di campi di matematica e campi di testo. Per vedere i campi in modo chiaro, scegliere Visualizza/Campi. I campi di matematica sono "vivi", cioè il computer cerca di capirli e risolverli ogni volta che c'è un segno di uguale. Il segno uguale in grassetto viene riservato per il processore simbolico. Si usa per visualizzare matematica che non si vuole che il computer modifichi o valuti; oppure si usa assieme al menu **Symbolics** per fare algebra, trigonometria, o analisi matematica.

Le variabili possono essere scalari o array. Gli array possono essere grandi quanto si vuole. Per lavorarci è a disposizione una tastiera per Vettori e Matrici negli strumenti matematici — segnalata dall'icona di una matrice.

Per creare un grafico, scrivete la funzione che volete rappresentare graficamente, poi cliccate sul tasto grafico x-y sulla tastiera Grafici. Usate gli appositi marcatori per specificare i limiti degli assi. I grafici possono essere spostati e ridimensionati: posizionate il mouse su una maniglia (vedrete il cursore diventare una piccola doppia freccia), cliccare e trascinare per ridimensionare. Posizionate il puntatore sul bordo (vedrete una manina) cliccare e trascinare per spostare tutto il grafico.

Se si lavora con Mathcad serve anche il buon senso poiché il programma non è sempre sveglio come voi. Un numero piccolissimo, per esempio, può voler dire zero e un numero molto grande può voler dire infinito.

Giochi matematici

di Luca Barletta

Slot machine

Una slot machine ha 5 finestre; da ogni finestra si può affacciare uno dei 6 simboli possibili. All'inizio tutti i simboli sono diversi; lo scopo è quello di ottenere tutti i 5 simboli uguali nelle finestre, avvalendosi di 3 giocate consecutive.

Dopo ogni giocata si può decidere di bloccare alcune finestre, in modo tale che non vengano modificate dalla giocata successiva. Le finestre possono anche essere sbloccate in una giocata successiva.

La slot machine non è truccata, vale a dire che in ogni giocata tutti i simboli della stessa finestra (non bloccata) sono equiprobabili. Inizialmente non si possono bloccare le finestre.

Qual è la probabilità di avere 5 simboli uguali dopo le 3 giocate, ipotizzando di usare sempre la migliore strategia di gioco?

Inviare la soluzione a luca.barletta@tele2.it, le risposte ritenute più interessanti saranno pubblicate sul prossimo numero della rivista.

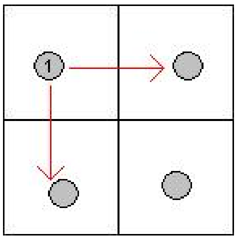
Soluzione del gioco del numero precedente: Il setaccio

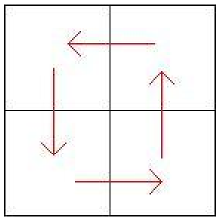
Osserviamo dapprima che il setaccio è costituito da 25,5/0,5=51 quadratini e supponiamo di numerarli in maniera progressiva come segue:

1	2	3	4	…
52	53	…		
…				

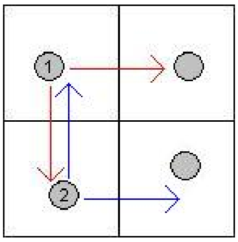
Ne consegue che sul setaccio due quadratini adiacenti sono contrassegnati da numeri di parità diversa: pari o dispari. Ma in un setaccio con un numero dispari di quadratini, come nel nostro caso, il numero di quadratini etichettati da un numero pari di ciascuna fila orizzontale o verticale è diverso da quello dei quadratini etichettati da un numero dispari di quella stessa fila. Se ne deduce, quindi, che la probabilità richiesta è nulla.

Una soluzione corretta pervenuta è quella di Eva Malecore la quale, dopo avere osservato che i quadratini a disposizione sono 51x51 quadratini, nota che un sassolino per occupare un quadratino adiacente a quello che occupava prima del lancio può fare uno spostamento orizzontale oppure uno spostamento verticale.

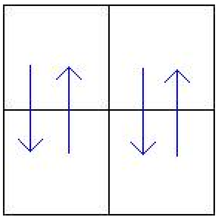




Il sassolino che occupava la posizione su cui va a collocarsi il primo sassolino, a sua volta può fare uno spostamento verticale oppure uno spostamento orizzontale.



Fatto sta che per avere una nuova disposizione dei sassolini in cui ciascuno occupi un quadratino adiacente a quello che occupava in precedenza, è necessario costruire un cammino chiuso di spostamenti orizzontali e verticali, oppure suddividere la scacchiera in tanti cammini chiusi minori.



Ora, poiché il cammino deve essere chiuso, a ciascun spostamento verso destra deve corrispondere uno spostamento verso sinistra o viceversa e a ciascun spostamento verso l'alto deve corrispondere uno spostamento verso il basso o viceversa. Il numero di spostamenti totale deve quindi essere pari e ciò significa che è possibile costruire un cammino chiuso (o analogamente suddividere in cammini chiusi minori l'intera scacchiera) solo nel caso in cui la scacchiera sia formata da un numero pari di quadratini. Poiché il quadrato di un numero dispari è ancora un numero dispari, nel caso di una scacchiera

51x51 (=2601) il problema è impossibile e quindi la probabilità che si verifichi ciò che è richiesto dal testo è nulla.

Il crucinumero

a cura di Luciano Sarra

1	2	3	4			5	6	7	
■	8			■	■	9			■
10	■	11		12	13			■	14
15	16	■	17				■	18	
19			■	20		■	21		
22		■	23			24	■	25	
	■	26					27	■	
■	28			■	■	29		30	■
31									

ORIZZONTALI - 1. Parte decimale di Nepero - 8. Primo multiplo di 7 oltre il 200 - 9. La laurea al massimo - 11. Anno e mese in cui crollò il muro di Berlino - 15. Assieme al 18 orizzontale dà per somma 39 e prodotto 378 - 17. L'anno in cui Yukawa vinse il Nobel - 18. Vedi 15 orizzontale - 19. Velocità di caduta di un corpo da un'altezza di 42320 m - 20. Media geometrica fra 7 e 700 - 21. 41°C nella scala termodinamica della temperatura assoluta - 22. I suoi 3/4 superano di 5 la sua metà - 23. Somma dei primi 45 numeri interi - 25. Numero di giri di un disco con accelerazione costante di 5 rad/sec^2 dopo 7 secondi - 26. Il fattoriale di 9 - 28. Altezza di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio pari a 234 cm - 29. E' 5 nel calcolatore - 31. Decimali aurei.

VERTICALI - 2. La somma delle sue cifre è 3 - 3. L'anno prima fu incoronato Carlo Magno - 4. Da 2390 per induzione - 5. Una quarta potenza di un numero primo unita ad un altro primo - 6. Numero primo oltre il 200 - 7. Anni dell'"edonismo reganiano" - 10. La somma dei quadrati dei primi 50 numeri - 12. Prodotto fra due numeri consecutivi aumentato di 2 - 13. Serie di numeri che diminuiscono di 1 simmetricamente attorno a niente - 14. La somma dei cubi dei primi 16 numeri - 16. Angolo supplementare a quello di un triangolo equiangolo - 18. Divisibile per 3 e 37 - 23. Venne pubblicato il "Nuncius Sidereus" - 24. I secondi in un'ora, 36 minuti e 59 secondi - 26. I primi tre numeri della serie …., …, …, 12, 17, 23, … - 27. L'erede di Sean Connery - 28. San Silvestro - 30. Era politico negli esami universitari.

Soluzione del cruciverba del n°1

					[1]E	[2]N	[3]N	[4]I	[5]O	[6]D	[7]E	[8]G	[9]I	O	[10]R	G	[11]I
					[12]S	P	E	C	I	F	I	C	O	■	A	■	D
					P	■	W	■	L	■	N	■	[13]T	[14]O	N	[15]D	E
					[16]O	T	T	O	■	[17]A	S	[18]S	A	G	G	I	O
					N	■	O	■	[19]O	■	■	U	■	[20]N	O	■	G
[21]R	[22]A	[23]D	[24]I	[25]C	E	■	[26]N	[27]O	T	[28]E	[29]V	O	[30]L	I	■	[31]E	R
[32]I	N	T	O	R	N	[33]O	■	[34]E	T	T	A	R	I	■	[35]U	S	A
[36]D	A	■	N	■	[37]Z	E	[38]R	O	■	[39]N	O	■	[40]M	[41]O	D	E	M
[42]U	L	[43]T	I	[44]M	I	■	F	■	[45]S	A	■	[46]D	I	V	■	[47]M	M
[48]R	I	C	C	I	A	■	■	[49]S	E	■	■	[50]S	T	A	[51]M	P	A
[52]S	S	■	[53]O	B	L	[54]I	[55]Q	U	I	■	[56]A	N	E	L	L	I	■
[57]I	I	O	■	■	[58]E	U	R	O	■	[59]G	G	■	■	[60]E	V	O	■

BERNA

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

I contributi da proporre devono riguardare i seguenti temi: storia della matematica e della fisica, didattica della matematica e della fisica, novità dal mondo della ricerca matematica, curiosità matematiche, matematica e cultura.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato Word, carattere Times New Roman, 12 pt, formato della pagina A4, interlinea 1. Le formule possono essere in Microsoft equation editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati. Le immagini devono essere sia nel file Word sia fornite a parte come singoli file. Eventuale materiale scannerizzato deve essere salvato in formato TIF alla risoluzione di 300 dpi.

Nella prima pagina andranno obbligatoriamente indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale, istituzione o ambiente professionale di appartenenza.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (3-6 righe), e dovrà terminare con una bibliografia ed, eventualmente, una sitografia finale. Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia. In ogni caso, i contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. All'autore non saranno inviate bozze di alcun tipo.

La responsabilità del contenuto scientifico degli articoli pubblicati è esclusivamente degli autori.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

www.matematicamente.it

* * *

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Antonio Bernardo, Luca Lussardi,
Flavio Cimolin, Luca Barletta,
Michele Mazzucato

Hanno collaborato a questo numero

Luca Barletta, Antonio Bernardo, Tiziana Bindo, Anna Cerasoli, Mauro Cerasoli, Flavio Cimolin, Carlo Costabile, Carlo Elce, Luigi Lecci, Domenico Licchelli, Luca Lussardi, Andrea Ossicini, Fioravante Patrone, Alexander Pigazzini, Luciano Sarra, Andrea Vitiello

Le immagini della Luna sono di D. Licchelli
http://www.cosmos2001.info

Progetto grafico e impaginazione

Mario Menichella

Il numero 1 ha avuto 20307 download

Rivista di matematica per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito *www.matematicamente.it*

Anno 1 Numero 2 - Aprile 2007
Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Dir. resp. Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it