111. Armonie matematiche

Ivano Bilotti, PhD[1]

Riassunto

In questo lavoro sono mostrate alcune correlazioni tra la matematica e la musica, riguardanti soprattutto il campo dell'armonia e dei temperamenti musicali. Molte questioni riguardanti la teoria musicale sono state comprese e chiarite grazie all'intervento della matematica, che ha permesso di capire meglio perché, ad esempio, certi suoni risultano piacevoli all'udito e altri sgradevoli (dissonanze). Non sono state approfondite le teorie usate di solito dai matematici per analizzare fenomeni periodici quale è la musica (ad esempio l'analisi di Fourier), ma è stata fatta una rassegna storica di come si sia evoluta la teoria dell'armonia musicale, evidenziando in particolare l'apporto che la matematica ha avuto in questo ambito nei vari periodi storici, mostrando parallelamente anche come si sia sviluppata la matematica nel tempo.

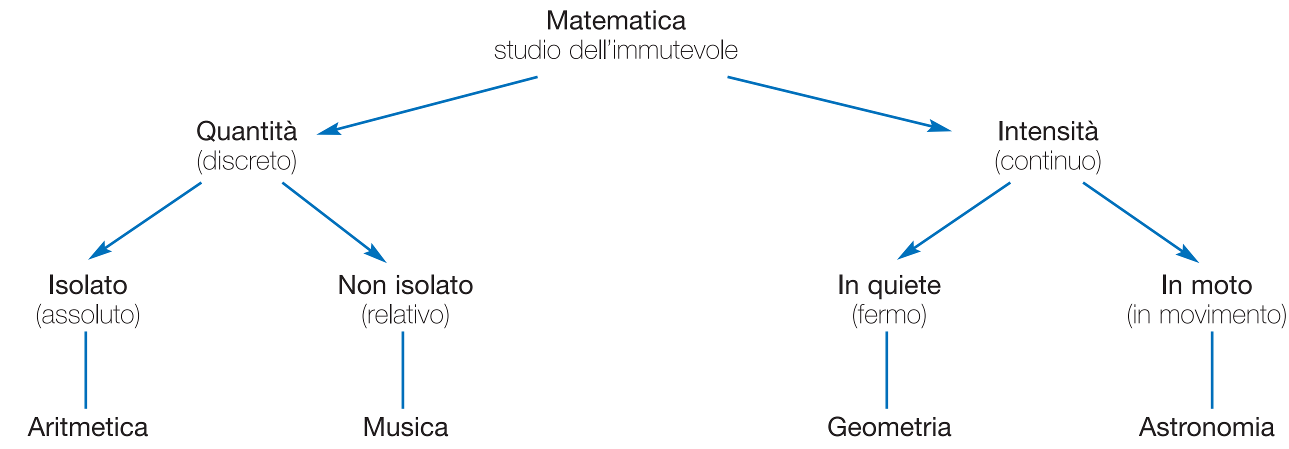
In this paper we analyze correlations between maths and music, investigating the fields of harmony and musical temperaments. Many topics regarding musical theory was been understood by mathematics, allow us why some sounds results pleasant and other unpleasant (dissonances). We don't show the classical theories used by mathematicians for the description of periodical phenomena, like music (i.e. Fourier analysis), but we made an historical overview of the evolution of musical harmony theory, drawing attention on the aid of maths in this area in the historical periods, showing also the growth of maths in centuries.

Armonie matematiche

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}?$$

La risposta alla domanda è abbastanza banale anche per le persone che non hanno molta familiarità con i numeri e con la matematica. Potrebbe capitare che non venga data sempre la stessa risposta come ci si aspetterebbe e, forse meno banalmente, non è detto che tra due risposte diverse una sia giusta e l'altra errata. Esiste infatti una "classe" di professionisti che, per "deformazione professionale", risponderebbero molto probabilmente istintivamente di no, pur essendo bravi in matematica!
Questi professionisti sono i musicisti: nella teoria musicale con le frazioni vengono infatti indicati solitamente i tempi dei brani musicali e in questo caso le due frazioni rappresentano due cose molto diverse tra loro, ben distinguibili anche da orecchi non specializzati nel settore.
Le radici comuni delle due discipline risalgono al medioevo, con l'istituzione del *trivium* (ambito umanistico: retorica, logica e grammatica) e del *quadrivium* (ambito scientifico), la matematica e la musica vennero accorpate in un unico gruppo relativamente alla formazione scolastica propedeutica a quella universitaria. Lo Schema 1 a pagina seguente mostra come in realtà la musica fosse una parte della matematica, la quale comprendeva tutte le discipline studiavano i fenomeni non mutevoli col tempo.

1 Collaboratore a progetto presso il Dipartimento di Chimica Fisica e Inorganica, Facoltà di Chimica Industriale, Università degli Studi di Bologna. ibilotti@ms.fci.unibo.it, ibilotti@gmail.com



Schema 1. La matematica comprendeva tutte le discipline che studiavano i fenomeni immutevoli nel tempo.

Nel corso dei secoli le correlazioni tra la matematica e la musica sono cambiate ma molte "questioni teoriche" riguardanti l'armonia musicale sono state "sbrogliate" grazie all'aiuto della matematica. Una delle più note è quella che riguarda i temperamenti, cioè l'accordatura degli strumenti atta a distribuire le dissonanze presenti tra i vari intervalli musicali su tutta la scala musicale; queste dissonanze derivano dalla natura fisica delle onde sonore e dalla loro "associazione" nelle composizione musicale.
Già dai tempi dei greci era noto che il rapporto tra la frequenza di una nota e quella dell'ottava superiore è 2:1 (se una canna lunga l emette, per esempio, un do, la canna lunga l / 2 emette il do dell'ottava superiore e quella lunga 2l il do dell'ottava inferiore).
Altri rapporti noti ai greci, oltre all'ottava, erano la *quinta perfetta (do-sol)*, che corrisponde ad un rapporto 3/2 tra le lunghezze e la *quarta perfetta (do-fa)*, (il rapporto in questo caso vale 4/3). Molti secoli dopo Tolomeo scoprì altri intervalli importanti per l'armonia musicale: quello di *terza maggiore (do-mi*, rapporto 5/4) e quello di *sesta maggiore (do-la*, rapporto 5/3).
Appare abbastanza evidente che tutti i principali intervalli coinvolti in accordi consonanti (cioè che risultano piacevoli all'udito) sono connessi a rapporti tra numeri interi ed in particolare risultano tanto più importanti quanto più piccoli sono i numeri. Supponendo che il do abbia frequenza unitaria, tramite alcune semplici divisioni si ottiene la scala completa dei rapporti coinvolti in un'intera ottava, come indicata nella tabella 1:

do	re	mi	Fa	sol	la	si	do'
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Tabella 1. Tabella dei rapporti in una ottava

Queste correlazioni matematiche non potevano passare inosservate ai pitagorici e fu per questo motivo che Pitagora nel 6 sec. a.C. propose una scala musicale basata parzialmente su tali rapporti: costruì un'altra scala musicale usando solo i rapporti tra le ottave e tra le quinte, quelli cioè considerati più consonanti. Nella tabella 2 sono riportate le frequenze ottenute supponendo che il do abbia frequenza unitaria; si ottiene:

do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
1	**9/8**	81/64	**4/3**	**3/2**	27/16	243/128	**2**

Tabella 2. Scala musicale di Pitagora

In grassetto sono indicate quelle coincidenti con la scala naturale dei greci. Per costruire la tabella si parte dalla frequenza del do, che supponiamo essere unitaria per semplicità, si moltiplica ogni volta per 3/2 e ci si sposta di una quinta; si aggiunge quindi al denominatore un fattore 2 ogni volta che si passa all'ottava superiore (o al numeratore se si passa a quella inferiore): fa-do-sol-re-la-mi-si. La frequenza del fa si ottiene per esempio partendo dal do e andando indietro di una quinta, quindi si divide per 3/2 e poi si moltiplica per 2 per riportarla alla giusta ottava.
Appare evidente la progressione geometrica di ra-

gione 9/8 tra i primi 3 termini (do-re-mi), così come tra il quarto, il quinto ed il sesto (fa-sol-la). Questo ha un analogo musicale sulla tastiera del pianoforte: i tasti bianchi. Gli intervalli fa-sol e si-do non corrispondono ai precedenti, ma sono correlati da un rapporto di 256/243 (in entrambi i casi!); anche questo ha lo stesso analogo sulla tastiera del pianoforte (tasti neri, ovvero dei semitoni). Possiamo perciò concludere che la scala pitagorica fu la prima a mostrare la differenza tra toni e semitoni. Se si prosegue la scala precedente tornando di nuovo al fa, si ottiene un valore di 729/512, diverso dal 4/3 indicato. Questo può essere generalizzato in quanto non è possibile coprire un esatto numero di ottave andando avanti o indietro per quinte. La cosa appare immediata trasponendo le note in numeri, ovvero dimostrando che l'equazione:

$$(3/2)^n = 2^m$$

non ammette soluzioni tra i numeri naturali, cioè non è possibile coprire esattamente un intervallo di ottave con quello di quinte. Questa disuguaglianza è alla base di quella che è nota come **spirale delle quinte**: in pratica non si riesce mai a chiudere una scala in maniera ciclica procedendo per quinte, graficamente vengono rappresentate in quella che è nota come spirale delle quinte:

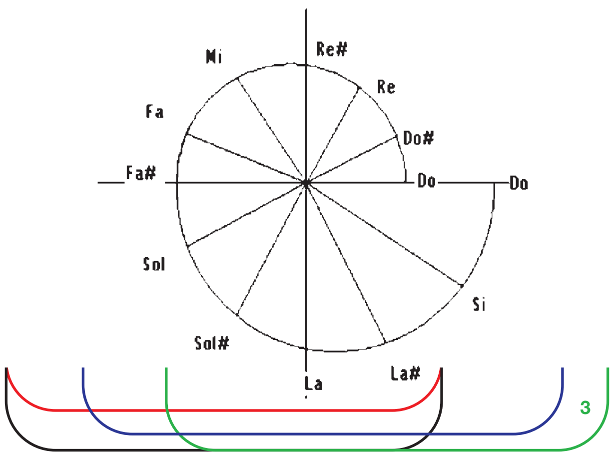


Figura 1. La spirale delle quinte.

Questa scoperta mise in crisi i pitagorici ed il sistema musicale di allora. Pitagora notò anche empiricamente la cosa, ma fu Archita (della stessa scuola) a farne una trattazione rigorosa, osservando che in 7 ottave ci sono 12 quinte, perché ci sono 12 semitoni in un'ottava e in una quinta 7; sperimentalmente osservò che dimezzando di 7 volte una colonna (o una corda) di uno strumento musicale si ottiene un suono nettamente diverso da quello ottenuto diminuendola di 12 volte di un terzo cioè, in termini teorici, salire di 12 quinte e scendere successivamente di 7 ottave non fa tornare al punto di partenza. La differenza risulta essere, in termini di frequenza, pari a:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.0136...$$

pari a circa un quarto di semitono nel temperamento "moderno", ben udibile al nostro orecchio, anche se non siamo direttori d'orchestra e non abbiamo l'orecchio assoluto. Si può giungere allo stesso risultato ragionando in maniera più "algebrica".
Da quanto detto precedentemente parlando della scala pitagorica, si deduce che salire di un tono in essa corrisponde a moltiplicare per 9/8 la frequenza della nota di partenza; ragionando quindi sempre per successioni geometriche, un semitono dovrebbe corrispondere alla radice quadrata del tono, ovvero:

$$\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \neq \frac{256}{243}$$

quindi salire di 2 semitoni non è come salire di un tono, e la differenza è:

$$\frac{9}{8}\left(\frac{243}{256}\right)^{2} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

come visto anche sopra.
Questa differenza viene chiamata **comma diatonico** o **pitagorico.**
Anche in questo caso, così come nella scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al suo lato, fu per cause correlate all'irrazionalità dei numeri (della $\sqrt{2}$ anche in questo caso!) a demolire le teorie pitagoriche basate sui numeri naturali.
La questione diventa ancora più complessa nel momento in cui si considerano le note alterate con diesis e bemolli (i greci non usavano le alterazioni). Riprendiamo la tabella 1 ed espandiamola moltiplicando o dividendo per 3/2 se ci si sposta rispettivamente verso destra o verso sinistra, come indicato nella tabella 3:

…	re^b	la^b	mi^b	si^b	fa	do	sol	re	la	mi	si	fa$^\#$	do$^\#$	…
…	32/243	16/81	8/27	4/9	2/3	1	3/2	9/4	27/8	81/16	243/32	729/64	2187/128	…

Tabella 3. Tabella dei rapporti con diesis e bemolli

Questi valori vanno poi corretti di un fattore 2 ogni volta che si passa da un'ottava ad un'altra. Prendendo in considerazione, per esempio, il rapporto tra re^b e do$^\#$, si ha:

$$\text{re}^b = \frac{32}{243}\cdot 8 = \frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$$

$$\text{do}^\# = \frac{2187}{128}\cdot\frac{1}{16} = \frac{2187}{2048} = \frac{3^7}{2^{11}}$$

quindi si ha:

$$\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{2^{11}}{3^7} = \frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{1}{comma}$$

cioè, tornando agli intervalli:

$$\text{re}^b + \text{comma} = \text{do}^\#$$

da questa relazione derivano 2 cose:
1) la differenza tra le 2 note è un comma;
2) il bemolle risulta più grave del diesis.

Questa trattazione si può generalizzare ad ogni nota alterata, ottenendo alla fine:

tono = bemolle + comma + diesis =
= semitono + comma + semitono

La scala pitagorica, per coprire completamente tutte le note alterate, richiederebbe quindi 21 tasti, invece dei 12 comuni: si devono sdoppiare tutti i tasti che differiscono di un semitono. La cosa sarebbe ancora più complessa qualora si dovessero considerare le doppie alterazioni, in quanto ciascuna singola alterazione dovrebbe essere nuovamente sdoppiata.

do-si$^\#$ re^b-do$^\#$ **re** mi^b-re$^\#$ fa^b-**mi fa**-mi$^\#$ sol^b-fa$^\#$
sol la^b-sol$^\#$ **la** si^b-la$^\#$ do^b-**si**

Scala pitagorica alterata

I problemi connessi alla scala pitagorica vennero affrontati dai teorici dell'epoca e uno dei più importanti cambiamenti fu apportato da Gioseffo Zarlino nel XVI sec., il quale modificò il sistema pitagorico, passando ad uno nuovo basato su 1:2:3:4:5:6 (quello pitagorico era basato sulla *tetrachys* pitagorica 1:2:3:4).
Il sistema zarliniano era quindi basato sulla scomposizione dell'intervallo di quinta perfetta $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ in uno di terza maggiore $\frac{5}{4}$ e uno di terza minore $\frac{6}{5}$. Facendo un rapido calcolo per confrontare i vari rapporti, si ottiene infatti:

$$1 : \frac{6}{5} : \frac{5}{4} : \frac{3}{2},$$

cioè:

$$20{:}24{:}25{:}30$$

che può essere visto come la suddivisione della quinta sia attraverso una serie aritmetica (20:25:30), in una terza maggiore più una terza minore, sia attraverso una serie armonica (20:24:30), in una terza minore più una terza maggiore.
Il sistema zarliniano sostituì la quarta del sistema pitagorico con una terza pura $\frac{5}{4}$, che non piaceva invece ai pitagorici perché nella loro scala la terza era dissonante, così come lo è in questo caso per la quarta.
La scala zarliniana era quindi basata su 3 intervalli fondamentali: ottava, quinta e terza:

intervallo	*Ottava*	*Quinta*	*terza*
Rapporto	2:1	3:2	5:4

Tabella 4. Parte della scala zarliniana

Partendo da questi, si può ottenere l'intera scala zarliniana:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Tabella 5. La scala zarliniana per intero.

Si parte ad esempio collegando tra loro sol-si-re (dell'ottava superiore), considerando che tra le prime 2 note si ha un intervallo di terza, mentre tra il sol e il re c'è una quinta. Il re dovrà poi essere riportato all'ottava sotto, dividendo per 2. Partendo invece dal do dell'ottava sopra, si scende di una quinta e si ottiene il fa e successivamente, da questo con una terza, si arriva al la.
Facendo ora un confronto con la scala pitagorica, si osserva che, confrontati con il do, i rapporti del re, del fa e del sol sono uguali nelle 2 scale, mentre quelli di mi, la e si risultano diversi. Le differenze risultano uguali tra loro e vengono chiamate **comma sintonico**, o **di Didimo** (Didimo fu il primo a studiare il sistema zarliniano):

$$\frac{81}{64}\cdot\frac{4}{5}=\frac{27}{16}\cdot\frac{3}{5}=\frac{243}{128}\cdot\frac{8}{15}=\frac{3^4}{2^4 5}\approx 1.0125$$

che differisce dal comma pitagorico di 0.0011, una quantità non apprezzabile al nostro orecchio.
La scala zarliniana risulta ben più complessa di quella pitagorica, in quanto presenta due diversi toni (definiti tono maggiore, corrispondente ad un rapporto di 9/8, e tono minore, corrispondente ad un rapporto di 10/9) e da un solo semitono (16/15); in questa scala inoltre, il semitono non corrisponde alla metà di nessuno dei toni presenti. Il comma sintonico aiuta a mettere un po' d'ordine in questa scala: sia la differenza tra il tono pitagorico (o il maggiore zarliniano) e quello minore zarliniano, che la differenza tra il semitoni delle 2 scale, corrisponde ad un comma sintonico; infatti si ha:

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}=\frac{243}{256}\cdot\frac{16}{15}=\frac{81}{80}=\text{ comma sintonico}$$

Un altro problema presentato da questa scala è che le quarte e le quinte non sono tutte perfette: ad esempio, il valore dell'intervallo re-la risulta essere:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{9}=\frac{40}{27}=1.\overline{481}\neq\frac{3}{2}$$

diverso dal 3/2 previsto per la quinta. Un esempio, ancora più noto forse, per quanto riguarda le quarte, è dato dall'intervallo fa-si:

$$\frac{15}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{45}{32}=\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}=\text{ tritono}$$

Il tritono era definito il *diabolus in musica* dai teorici del Medioevo, e quindi "proibito" nella teoria musicale dell'epoca.
La situazione si complica ulteriormente quando si considera la scala cromatica zarliniana, dovendo utilizzare ben 3 diversi rapporti tra le note alterate adiacenti, in quanto i rapporti tra diesis e bemolle cambiano se si tratta un tono maggiore, uno minore o un semitono, portando ad una tastiera a 21 tasti per esprimere tutte le alterazioni, come nella scala pitagorica.
Altri studi furono fatti nel corso dei secoli: Henry Arnaut, ad esempio, a metà del XV sec. cercò di costruire una scala "intermedia" tra la pitagorica e la zarliniana: mantenne tutte le quinte pure (come risultano nella scala pitagorica) eccetto una, scaricando su essa tutte le dissonanze (nella scala zarliniana le quinte sono dissonanti); il risultato fu che questa somma di dissonanze su un solo intervallo diventa così sgradevole per l'orecchio, da rendere quasi insopportabile il risultato, in quanto molto vicina all' ululato di lupo (si-fa$^{\#}$, detta appunto *quinta del lupo*).
Un passo avanti fu fatto distribuendo il comma sintonico presente nella scala zarliniana nella quinta re-la, anche su altre 3 quinte: fa-do, do-sol e sol-re, ottenendo quindi un comma che risulta essere un quarto di quello zarliniano:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{80}}=\frac{3}{2\sqrt[4]{5}}$$

essendo sempre in scala logaritmica, un quarto di comma viene "trasformato" nella radice quarta del comma pitagorico. Questo comma fu chiamato **comma mesotonico.**
Le quinte in questa nuova scala risultano quindi essere uguali ad una quinta pura meno un quarto di comma sintonico, ovvero:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}=\sqrt[4]{5}$$

Gli altri intervalli principali (ottava e terza) della scala zarliniana vengono invece lasciati immutati. Si ottiene quindi la seguente scala, detta scala mesotonica, o temperamento mesotonico:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	1	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$	$\sqrt[4]{5}$	$\frac{5}{2\sqrt[4]{5}}$	$\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$	2

Tabella 6. Scala mesotonica

I rapporti tra le note consecutive diventano così regolari, com'erano nella scala pitagorica e risolvendo i problemi (parzialmente, in realtà) della scala zarliniana. Si ha infatti:

intervallo	do-re	re-mi	mi-fa	fa-sol	sol-la	la-si	si-do
rapporto	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$

Tabella 7. Rapporti tra le note nella scala mesotonica

Un tono in questa scala corrisponde a:

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1-1}{2}=\phi-\frac{1}{2}$$

In cui:

$$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\text{sezione aurea.}$$

La sezione aurea era ben nota ai matematici per le sue numerose proprietà; era già conosciuta agli antichi greci, che la chiamarono così per l'armonia e la bellezza delle proporzioni che risultavano nelle costruzioni ogni volta che le lunghezze risultavano correlate tra loro dalla sezione aurea; scelsero infatti di indicarla con la lettera ϕ in onore di Phydia, che costruì il Partenone di Atene seguendo le proporzioni auree. Purtroppo in questo caso la sezione aurea non fu d'aiuto per i teorici della musica ed anche questa scelta fu abbandonata in breve tempo; infatti, un semitono non corrisponde alla metà di un semitono, quindi quando si costruisce la scala cromatica, si hanno ancora diesis e bemolli distinti.
Verso la fine del XVII sec. e nel secolo successivo, si svilupparono altri temperamenti con l'obiettivo principale di semplificare le scale cromatiche che ne risultano. Si fecero moltissimi tentativi (il più importante dei quali, probabilmente, fu quello di Workmeister, che sviluppò il cosiddetto *buon temperamento*), ma solo uno è quello attualmente usato nelle moderne scuole musicali e di liuteria: il **temperamento equabile**.
Ci sono in realtà tracce storiche di questo temperamento risalenti ai tempi dei greci (Aristosseno, VI sec.a.C) e sviluppato da Mersenne e Galilei (padre di Galileo) tra il XVI ed il XVII sec. Nel temperamento equabile, come si potrebbe dedurre dal nome, il comma sintonico viene ripartito su tutti i 12 semitoni presenti in un'ottava; si ha quindi:

$$\sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}=\frac{3}{2\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}}$$

Le quinte della scala temperata saranno quindi una quinta pura meno 1/12 di comma diatonico:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}}{3}=\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$$

ottenendo così la scala temperata:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	1	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{5}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$	2

Tabella 8. Scala temperata.

In questa scala i rapporti tra note consecutive risultano perfettamente regolari, così come d'altronde era per la scala mesotonica:

intervallo	do-re	re-mi	mi-fa	fa-sol	sol-la	la-si	si-do
rapporto	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\sqrt[12]{2}$

Tabella 9. Rapporti tra le note nella scala temperata.

In questo caso però, a differenza dei precedenti, un semitono corrisponde alla metà di un tono!
Questa regolarità nei rapporti tra semitoni consecutivi permette di rappresentare la scala temperata cromatica attraverso una spirale che, a differenza di quella del ciclo delle quinte, risulta logaritmica, grazie proprio alla regolarità degli intervalli.

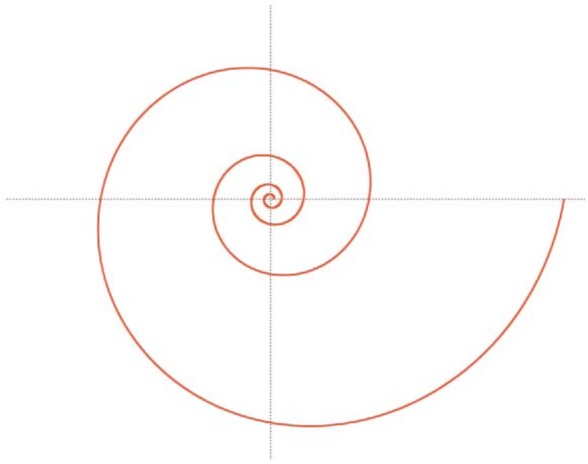


Figura 2. Spirale logaritmica.

La regolarità della scala temperata permette quindi di coprire tutti i semitoni presenti in un'ottava usando 2 diversi intervalli: le quarte e le quinte. Questa bivalenza ha di nuovo origini matematiche: in un'ottava ci sono 12 semitoni, in una quarta 5 e in una quinta 7. A primo avviso si potrebbe pensare che la cosa funzioni perché 12 = 5 + 7, mentre deriva dal fatto che 5 e 7 sono primi con 12 (ovvero non hanno alcun divisore in comune con 12, escluso 1), quindi muovendosi per quinte, ad esempio, si coprono 7 ottave per ottenere tutti i semitoni, poi si ha una ripetizione periodica della sequenza; in modo analogo si può fare con le quarte. Gli altri unici numeri ad essere primi con 12 sono 1 e 11, che corrispondono al salire (1) o scendere (11) di un semitono alla volta, corrispondenti alle soluzioni banali (in gergo matematico) del problema.

Dalle correlazioni tra i toni usate nel temperamento equabile deriva, ad esempio, la forma classica del pianoforte a coda e di molti altri strumenti anche non a corda (flauto di pan).

Esistono moltissime altre connessioni tra matematica e musica: considerando che la musica è fatta di suoni che si ripetono in modo regolare nel tempo, un potente strumento matematico per analizzarla è costituita dall'analisi di Fourier. Altre aree di sovrapposizione meno immediate si hanno, ad esempio, nel campo della simmetria, applicando quindi la teoria dei gruppi alle composizioni musicali, e trovando notevoli connessioni con le sensazioni ricavate a livello di ascolto, specialmente in ambito classico. Al giorno d'oggi, grazie allo sviluppo della tecnologia elettronica, molti strumenti musicali "classici" sono diventati "elettronici", sfruttando tutte le tecniche di codifica del segnale acustico sotto forma di segnale elettronico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Frova A., Fisica nella musica, Zanichelli, Bologna 1999

[2] Odifreddi P., Penna, pennello e bacchetta. Le 3 invidie del matematico, Laterza, Bari, 2005

[3] Hammel Garland T., Vaughan Kahn C., Math and music, harmonious connections, Dale Seymour Publications, Palo Alto, CA, USA 1995

INTERNET

[4] http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf

[5] http://fisicaondemusica.unimore.it/

[6] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/44/Logarithmic_spiral.png