113. Coordinate geografiche di un qualsiasi luogo del globo terrestre ricavate dalla misura di angoli orizzontali di una tripletta stellare

di Michele T. Mazzucato

Nella pratica topografica il problema di Snellius-Pothenot [1] è sicuramente uno dei più noti e maggiormente studiato. Si tratta di una intersezione inversa o all'indietro (in quanto il rilevamento viene effettuato dal punto incognito) di tipo composto (in quanto riferito a più di due punti noti) che permette, nota la posizione di tre punti, di determinare la posizione di un quarto punto, dal quale si effettuano soltanto misure angolari collimando ai tre punti.

Il geodeta fiammingo Willebrord van Royen Snell (Leiden 1580 – 1626) (fonte: www-history.mcs.st-and.ac.uk)

Il problema, noto anche come problema dei tre punti o problema del vertice di piramide piano, prende il nome da Willebrord van Royen Snell (1591-1626), latinizzato in Snellius, e da Laurent Pothenot (1650-1732). Il matematico e geodeta fiammingo Snell, ideatore della moderna triangolazione e della misura delle basi geodetiche, descrisse il problema nell'opera *Eratosthenes Batavus. De Terrae ambitus vera quantitate* (1617) nella quale pubblicò i dati della triangolazione per la misura dell'arco di meridiano fra Alkmaar e Bergen Op Zoom e la base geodetica di Leiden. *"Trium locorum intervallis inter se datis, quarti distantiam ab omnibus unica statione definire"* è la formulazione originaria del problema data da Snellius. Mentre, il matematico e accademico (1682-1699) di Francia Pothenot pubblicò la soluzione del problema in una memoria redatta per l'Académie des Sciences nel 1692 (ben 75 anni dopo quella di Snell che rimase, per lungo tempo, sconosciuta) avente come titolo *Problème de Géometrie Pratique. Trouver la position d'un lieu que l'on ne peut voir des principaux points d'où l'on observe* (Memoires de l'Academie Royale des Sciences Depuis 1666 jusqu'à 1699 Tome X Année 1730 pp. 221-224). Tra le numerose soluzioni numeriche del problema Snellius-Pothenot risulta interessante il metodo di Jacques Cassini (Cassini II) (1677-1756) particolarmente adatto al calcolo con elaboratori elettronici.

Il problema di Snellius-Pothenot insieme al problema di Hansen o dei due punti inaccessibili, dal nome dell'astronomo danese Peter Andreas Hansen (1795-1874), sono casi particolari del problema di Marek o dei quattro punti inaccessibili trattato da Johann Marek nell'opera *Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters* (1875). Altri autori si sono interessati al problema trovandone anche soluzioni analitiche o grafiche alternative: ricordiamo Collins (1671), Lambert (1765), Cagnoli (1786), Bessel (1813), Gauss (1823), Burchkardt (1825), Galkiewicz (1935), Gerling (1840) e, in tempi più recenti, Attilio Selvini, Renato Righi e Fabrizio Casotto.

Sulla falsa riga del problema topografico di cui sopra, l'ing. Giuseppe Matarazzo [2] ha studiato una soluzione numerica, basata su di un sistema di tre equazioni trascendenti non lineari a tre incognite, per determinare le coordinate geografiche (latitudine e longitudine) di una qualsiasi località sul globo terrestre con la sola misura di tre angoli orizzontali di tre stelle di coordinate note (ascensione retta e declinazione).

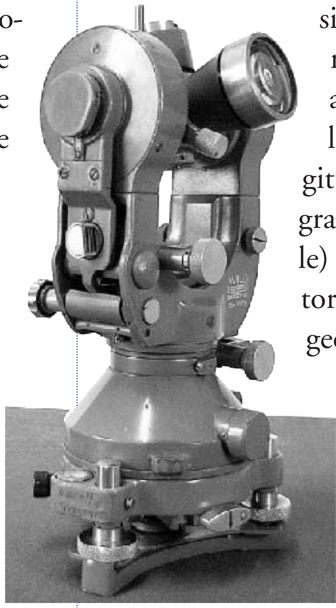
Operativamente si tratta di collimare tre stelle dal luogo incognito mediante uno strumento (bussola magnetica, tacheometro, teodolite, geodimetro, etc.) effettuando le letture al cerchio graduato orizzontale e annotando i rispettivi tempi di rilevamento con un orologio (meglio se di tipo radio-controllato).

Lo scarto tra le coordinate geografiche trovate con quelle reali sarà molto minore (nullo nel caso teorico) quanto maggiore sarà la precisione dei dati misurati (angoli e tempi) e dal tipo di strumentazione utilizzata. Si avrà cura, inoltre, di eliminare preventivamente gli errori grossolani e ripetere l'operazione con una tripletta stellare differente come riprova.

Inoltre, rispetto al tradizionale e consolidato metodo utilizzato nella navigazione astronomica delle rette d'altezza [3] con sestante e cronometro definito dallo statunitense Thomas Hubbard Sumner (1807-1876) nell'opera *A New and Accurate Method of Finding a Ship's Position at Sea, by Projection on Mercator's Chart* (1843 su lavori e scoperte del 1837) e dal francese Adolph Laurent Anatole Marcq de Blond Saint-Hilaire (1832-1889) con le *Note on the Determination of Position* (1873) e *Calculation of the Observed Position* (1875), non effettuando misure di altezza degli astri si ha il vantaggio di non dover effettuare correzioni per la rifrazione atmosferica.
In particolare, la procedura da seguire è la seguente:
1) si sceglie una tripletta stellare visibile dal luogo incognito (con declinazioni, preferibilmente, non superiori a ±80° e con posizioni relativamente distanti fra loro) dal catalogo stellare astrometrico FK5/J2000.0 [4];

2) si collima ciascuna stella misurandone l'angolo orizzontale (la cui origine, la stessa per tutte le misure angolari, può essere un riferimento qualsiasi arbitrariamente scelto) e annotando, contemporaneamente, il tempo di rilevamento (al secondo) necessario per la determinazione del Tempo Siderale Medio a Greenwich TSMG e per la correzione precessionale;

3) si predispongono i valori da utilizzare e si inseriscono i dati (tre ascensioni rette, tre declinazioni, i tre angoli orizzontali nonché i valori iniziali della latitudine, longitudine e l'azimut origine della graduazione del cerchio orizzontale) nel programma fornito dall'autore [2] ottenendo le coordinate geografiche del luogo incognito.



Teodolite ottico-meccanico Wild T2 (Heerbrugg, Svizzera) dal costruttore Heinrich Wild (1877-1951) (Università di Pisa – Dipartimento di ingegneria civile, topografia e fotogrammetria)

Per quanto riguarda le coordinate astronomiche equatoriali (ascensione retta e declinazione) bisogna considerare che quelle fornite dai cataloghi stellari (riferite per un'epoca e un equinozio definiti) devono essere trasformate nelle corrispondenti all'epoca ed equinozio medi della data del rilevamento, tenendo conto dell'effetto della precessione e dell'effetto del moto proprio della stella. Pertanto, per ogni oggetto della tripletta stellare scelta, si procede alla riduzione delle coordinate. Di seguito si riporta un esempio. Dal Fifth Fundamental Catalogue FK5 Basic [4] si sceglie la stella

α Aquilae (Altair) 745 FK5 125122 SAO 187642 HD
posizione media della stella per epoca ed equinozio J2000.0:
AR_{2000} 19h 50m 47.002s δ_{2000} +08° 52' 06.03"
moto proprio annuo riferito per epoca ed equinozio J2000.0:
+0.03629s in AR +0.3863" in δ

Ridurre le coordinate all'epoca e all'equinozio medi all'istante 12.12 dicembre 2020 (ossia 12 dicembre 2020 alle ore 2h 52m 48s corrispondente al tempo rilevato con l'orologio nel momento della misura dell'angolo orizzontale):

Calcolo del Julian Day JD (formula di Jean Meeus [5]), con Y = anno, M = mese e D.d = giorno.frazione

se M > 2 allora Y=Y e M=M
se M=1 o 2 allora Y=Y-1 e M=M+12
se Y.MDd ≤ 1582.1015 (calendario gregoriano) allora A=INT(Y/100) e B=2-A+INT(A/4)
se Y.MDd < 1582.1015 (calendario giuliano) allora A=B=0
Per gli anni a.C., Y è negativo.

$$JD_0 = INT[365.25(Y+4716)] + INT[30.6(M+1)] + D + B - 1524.5$$
$$JD_{data} = INT[365.25(Y+4716)] + INT[30.6(M+1)] + D.d + B - 1524.5$$

Da cui

$$JD_0 = 2459195.5$$
$$t = (JD_0 - 2451545.00_{2000})/36525 = +0.209459274 \text{ secoli giuliani}$$
$$= 20.9459274 \text{ anni giuliani}$$

$$JD_{data} = 2459195.620$$
$$t_{data} = (JD_{data} - 2451545.00_{2000})/36525 = +0.20946256 \text{ secoli giuliani}$$
$$= 20.94625599 \text{ anni giuliani}$$

Calcolo effetto del moto proprio

$$+0.03629s \times 20.94625599 = +0.760s \text{ in AR}$$
$$+0.3863'' \times 20.9465599 = +8.092'' \text{ in } \delta$$

Coordinate della stella per l'equinozio medio J2000.0

$$AR_0 \; 19h\ 50m\ 47.002s + 0.760s = 19h\ 50m\ 47.762s$$
$$(= 19.84660056h \times 15° = 297.6990083°)$$
$$\Delta_0 \; +08°\ 52'\ 06.03'' + 8.092'' = +08°\ 52'\ 14.122''$$
$$(= 8.103922778°)$$

Coordinate della stella per l'equinozio medio J2020.0 ed epoca 12.12 dicembre 2020 (formule precessionali di Simon Newcomb 1835-1909, *A Compendium of Sherical Astronomy*, Macmillan New York USA 1906 con valori relativi al nuovo sistema standard FK5/J2000.0 dovuti al lavoro degli astronomi Jay Henri Lieske, Trudpert Lederle, Walter Ernst Fricke e Bruno Morando [5] [6])

$$\eta = 2306.2181t + 0.30188t^2 + 0.017998t^3 =$$
$$= +483.0798'' = +483.0798'' / 3600'' = +0.134189°$$
$$z = 2306.2181t + 1.09468t^2 + 0.018203t^3 =$$
$$= +483.1145'' = +483.1145'' / 3600'' = +0.134198°$$
$$\theta = 2004.3109t - 0.42665t^2 - 0.041833t^3 =$$
$$= +419.8090'' = +419.8090'' / 3600'' = +0.116614°$$

$$A = \cos\delta_0 \sin(AR_0+\eta) = -0.873733492$$
$$B = \cos\theta\cos\delta_0\cos(AR_0+\eta) - \sin\theta\sin\delta_0 = +0.460999782$$
$$C = \sin\theta\cos\delta_0\cos(AR_0+\eta) + \cos\theta\sin\delta_0 = +0.155141823$$

$$AR_f = z + \mathrm{arctg}(A/B)$$
$$\delta_f = \arcsin(C)$$

Se l'oggetto è in vicinanza dei poli celesti (com δ_0 maggiore di ±80°) sarà opportuno utilizzare, in alternativa, δ_f=arccos$(A^2+B^2)^{0.5}$

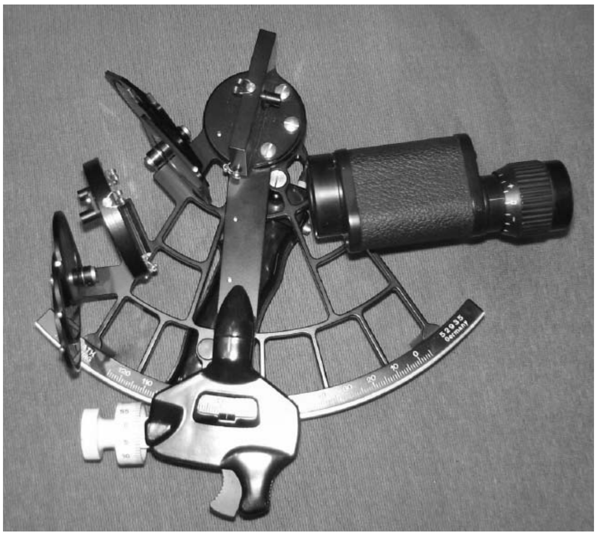
$$AR\text{-}z = \mathrm{arctg}(A/B) = -62.18294807° = 297.8170519°$$
$$AR_{2020}= +297.8170519° + z = +297.9512499° / 15° = 19.86341666h = 19h\ 51m\ 48.300s$$
$$\delta_{2020}= +8.925021612° = +8°\ 55'\ 30.078''$$

Per quanto riguarda il Tempo Siderale Medio di Greenwich TSMG esso si può ottenere mediante la seguente formula [5]:

$$TSMG' = 0.279057273+(100.002139038+0.000001078t-0{,}000000000071t^2)*t$$
$$TSMG_0=[TSMG'-\mathrm{intero}(TSMG')]*24$$

che, per i valori di JD_0= 2459195.5 e t= +0.209459274 ricavati in precedenza, fornisce il valore di 21.225432862 *rivoluzioni* per il TSMG'. La parte frazionaria moltiplicata per 24 fornisce il $TSMG_0$ del 12 dicembre 2020 a 0h ossia 5h 24m 37.39s. Per ottenere il TSMG all'istante della data (ossia alle 2h 52m 48s) si moltiplica per 1.00273790935 (= 2.887885178 da cui 2h 53m 16.39s) ottenendo il risultato cercato di 8h 17m 53.78s.

Per la determinazione sia del TSMG sia delle coordinate precessate alla data, come in precedenza visto, è possibile utilizzare il seguente foglio di calcolo [7].



Sestante Plath (Hamburg, Germania)
dal costruttore Carl Christian Plath (1825-1910)
(collezione Gaetani Brancadori)

Benché oggi la determinazione delle coordinate geografiche avviene speditamente con l'uso del GPS si tratta pur sempre di una interessante alternativa al metodo classico col sestante unita alla potenza dei moderni elaboratori elettronici.

RIFERIMENTI

[1] Costantini, Pier Francesco. *Il problema di snellius-Pothenot* www.itgcanova.it/docenti/prof_costantini/Snellius-Pothenot.pdf
[2] Matarazzo, Giuseppe. *Coordinate geografiche di una località noti gli angoli orizzontali di tre stelle* (2004) http://astrodinamica.altervista.org/PDF/3az.pdf
[3] Flora, Ferdinando. *Astronomia nautica (Navigazione astronomica)*, Hoepli, Milano 5ª ed. 1982 pp. 406-494
[4] Fifth Fundamental Catalogue FK5 Basic Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg n. 32 (1988) www.ari.uni-heidelberg.de/publikationen/vhd/vhd032/vhd032.htm
[5] Meeus, Jean. *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Richmond Virginia USA 1991 pp. 59-66, pp 83-85 e pp.123-130
[6] Magni, Tiziano. "Le formule per il calcolo rigoroso della precessione", *l'Astronomia* 121/1992 pp.46-47
[7] Mazzucato, T. Michele. *Modulo per il calcolo della riduzione delle coordinate equatoriali (AR, δ) dall'epoca J2000.0 alla data in esame e Modulo per il calcolo del Tempo Siderale Medio a Greenwich TSMG alla data in esame* (2008) www.matematicamente.it/approfondimenti/astronomia/modulo_per_il_calcolo_della_riduzione_delle_coordinate_equatoriali_200804053024/