

• Numero 12 – Aprile 2010 •



PaintMonkey, Faith, logic and departure ii
http://www.flickr.com/photos/epac_island/189731267/

EUCLIDE E IL TEOREMA MANCANTE – LOGICA E COSTRUZIONE – FAMIGLIE
DI SEGMENTI – MATEMATICA E SCACCHI – ORTOGONALITA' E TERRITORIO
– IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

Hanno collaborato a questo numero

Antonio Bottaro, Cosimo De Mitri, Luca Francesca, Domenico Lenzi, Massimiliano Leoni, Luca Lussardi, Michele Mazzucato, Fabrizio Minuti, Maurizio Rosina, Bruno Sanchini, Andreana Zucco.

Sommario

130. Euclide e il teorema mancante.	5
Cosimo De mitri e Domenico Lenzi	
131. Quando la logica va oltre la costruzione.	10
Luca Francesca, Massimiliano Leoni e Luca Lussardi	
132. Famiglie di segmenti nel piano e nello spazio	14
Bruno Sanchini	
133. Miti, leggende, racconti, automi e matematica negli scacchi	25
Michele T. Mazzucato	
134. Misure di ortogonalità di poligoni desunti da dati territoriali	32
Maurizio Rosina, Antonio Bottaro, Fabrizio Minuti	
135. Soluzioni geometriche del problema isoperimetrico	46
Andreana Zucco	
136. Lo scaffale dei libri: Login.	55

Editoriale

Chiudiamo il numero di aprile, quando ormai aprile è passato da un pezzo. Ci scusiamo con i nostri lettori abituali, tuttavia mantenere la ‘puntualità’ non è cosa semplice. Nè probabilmente riusciamo a mantenere per quest’anno l’uscita di quattro numeri.

In questo numero, Cosimo Di Mitri e Domenico Lenzi ci raccontano di un probabile teorema di Euclide andato perso negli anni e che spiegherebbe alcune affermazioni dello stesso grande matematico greco. Luca Francesca, Massimiliano Leoni e Luca Lussardi affrontano un tema particolarmente delicato, e non solo dal punto di vista didattico: è vero che le dimostrazioni matematiche sono tutte ugualmente valide? A guardare con attenzione alcune classiche dimostrazioni sembrerebbe proprio di no. Bruno Sanchini ci presenta un’altra serie di figure geometriche segmentate che possono essere utili nella modellazione matematica di forme geometriche tutto sommato comuni ma alle quali è difficile attribuire un’espressione analitica compatta. Maurizio Rosina, Antonio Bottaro e Fabrizio Minuti ci presentano una problematica di ingegneria: stabilire un modo per misurare la distanza tra ciascun poligono originario ed un corrispondente poligono ortogonale che lo approssima. Infine Andreana Zucco ci racconta le soluzioni geometriche del problema isoperimetrico, un problema che, secondo la leggenda, risalirebbe a Didone, la fondatrice di Cartagine nell’ 800 a.C. Chiude il numero una presentazione del romanzo *Login* scritto da G. Pettarin, C. Pradella, E. D’Amico; un romanzo per gli adolescenti, per metterli in guardia dai nuovi media di comunicazione e per gli adulti che possono conoscere meglio il modo dei loro figli ‘nativi digitali’; un simpatico giallo dal finale a sorpresa.

Antonio Bernardo

130. Euclide e il teorema mancante

Cosimo De Mitri, Domenico Lenzi

cosimo.demitri@unisalento.it, domenico.lenzi@unisalento.it

[Dip. Mat. Uni. Salento]

Sunto

In questo articolo – senza pretesa alcuna di originalità ma con un intento principalmente divulgativo, al solo scopo di sottolineare ancora una volta l'importanza dell'opera di Euclide – ci occupiamo di una piccola *falla* presente nella dimostrazione della Proposizione 24 degli *Elementi*; proposizione che qui, per ragioni evocative che si chiariranno in seguito, noi chiamiamo *Teorema del compasso*.

È noto che uno dei più importanti studiosi della produzione euclidea fu Proclo – nato a Bisanzio, ma cresciuto a Xanto (in Licia, onde fu soprannominato *Licio*) – che intorno alla prima metà del VI secolo d.C. si occupò in maniera approfondita degli *Elementi* di Euclide (si veda [Pr]), in particolare del Libro I e della sua Prop. 24 (che egli identifica come Teorema XV). Però Proclo in proposito fa un'analisi di tipo diverso rispetto a quella fatta qui da noi. Egli infatti scrive [Pr, pp. 271-272]: [...] *esaminiamo la costruzione di questo teorema data dall'Autore degli Elementi e aggiungiamo ciò che in essa manca* [...].

La *manca* che lo studioso Licio attribuisce a Euclide è di una certa gravità, poiché egli imputa al sommo Maestro il fatto di non aver preso in considerazione – nella dimostrazione della Proposizione 24 – ben due casi. In verità Proclo non è nuovo a questo genere di rilievi, così azzardati, su alcuni punti dell'opera euclidea; rilievi che gli hanno attirato le critiche di vari studiosi. Si veda ad esempio [Pr, p.190, nota 40], dove il riferimento è alla Proposizione 2 degli Elementi. A proposito della Proposizione 2, segnaliamo tutta una serie di casi citati da Proclo [Pr, pp.190 e segg.]; i quali si rivelano inutili, nel senso che sono facilmente riconducibili al caso considerato da Euclide.

La falla euclidea ipotizzata da noi relativamente alla Proposizione 24 di Euclide è diversa da quella presunta da Proclo, proprio perché quest'ultima ci appare in contrasto con la meticolosità e la precisione con cui Euclide ha affrontato le dimostrazioni delle sue proposizioni (compatibilmente con le *nozioni comuni* e gli *assiomi taciti*, di cui egli si serve spesso). Questa indiscutibile accuratezza ci porta a pensare che la mancanza segnalata da noi corrisponda piuttosto a un teorema di Euclide andato perduto: una sorta di *anello mancante* nella costruzione della geometria euclidea.

1. Introduzione

Nel V secolo a. C. la matematica, prima con Talete e poi con Pitagora (forse suo allievo), iniziò il suo lento, ma inesorabile e inarrestabile cammino come disciplina scientifica, che l'avrebbe portata a diventare ancella e regina indiscussa di ogni scienza. In proposito sono significative le parole di D. J. Struik, che ebbe a dire [S, p. 53]: «*La matematica contribuì a trovare l'ordine nel caos, a disporre le idee in catene logiche, a trovare principi fondamentali. Era la più razionale di tutte le scienze*».

In questo percorso uno dei momenti più significativi fu rappresentato da Euclide, che con i suoi *Elementi* riuscì a dare alla matematica un carattere particolare dal punto

di vista del rigore dimostrativo. Il che, tra l'altro, ha portato gli *Elementi* a essere per molti secoli il libro più letto dopo la Bibbia ⁽¹⁾.

In realtà, i matematici del periodo ellenistico citati precedentemente, ma non solo essi, per i loro studi trassero ispirazione da una cultura popolare – se così si può dire – ed artigianale, che portava ad usare in modo del tutto ovvio e naturale molti di quelli che sarebbero diventati degli importanti principi matematici. Si pensi al teorema di Pitagora che, soprattutto nella sua forma inversa, attraverso le terne pitagoriche – ad esempio (3, 4, 5) oppure (5, 12, 13), forse le più famose – consentiva di costruire facilmente triangoli rettangoli, estremamente importanti da un punto di vista artigianale ⁽²⁾.

Il riferimento più antico alle terne pitagoriche pare che risalga al 1900/1600 a.C., con la *tavoletta Plimpton 322* – una delle centinaia di migliaia di tavolette babilonesi di argilla, molte delle quali di contenuto matematico – rinvenuta in Mesopotamia all'inizio del secolo XIX e conservata negli USA presso la Columbia University. Il reperto contiene quindici righe che riportano alcune terne pitagoriche scritte in una forma dalla quale traspare un tentativo di rappresentazione in base sessagesimale.

2. Il Teorema mancante

Strumento significativo nell'ambito della cultura popolare – poi diventato patrimonio della geometria attraverso le circonferenze – è certamente il compasso, antichissimo strumento artigianale e da disegno, in uso da tempo immemorabile.

Una delle proprietà – indiscusse e indiscutibili da un punto di vista intuitivo – che vengono attribuite al compasso (non necessariamente a bracci eguali) è che le sue punte si avvicinano o si allontanano a seconda che lo si stringa o lo si allarghi.

Orbene, se noi consideriamo i bracci del compasso come i due lati di un triangolo, nel quale il terzo lato è quello i cui estremi corrispondono alle punte, si vede subito che la proprietà citata prima si traduce nel seguente enunciato, che noi – come si è detto – per ragioni evocative chiamiamo *il Teorema del Compasso*:

Siano dati due triangoli in cui due lati dell'uno siano rispettivamente uguali a due lati dell'altro. Allora il terzo lato è maggiore nel triangolo in cui tale lato si oppone ad angolo maggiore (e viceversa).

Si tratta di una proprietà a cui lo stesso Euclide rivolse la sua attenzione. E non poteva essere diversamente. Anche se, nei riguardi dell'opera del grande maestro, successive e attente riflessioni, intervenute dopo molti secoli, hanno portato a intravedere – benignamente sottolineate da innumerevoli studiosi ⁽³⁾ – alcune piccole crepe che, durante il periodo ellenistico, in una esposizione che riguardava un tipo di matematica profondamente radicata nel concreto, sarebbe stato difficile percepire.

Furono riflessioni acute e sottili da cui nacquero, tra l'altro, le geometrie non euclidee, con la messa in discussione del V postulato euclideo (quello delle parallele).

⁽¹⁾ Pare, addirittura, che la loro traduzione in cinese, promossa dal gesuita Matteo Ricci – di cui quest'anno ricorre il quarto centenario dalla morte – sia stato uno dei meriti che fecero concedere a Li Madou (“Ricci Matteo” in cinese) la sepoltura nella terra dei Ming (si veda [F]).

⁽²⁾ Per fare un esempio, forse banale, si pensi a un falegname che deve trovare il modo di costruire una porta rettangolare.

⁽³⁾ Tra queste ricordiamo quella relativa alla proprietà di continuità delle curve – forse una delle più citate – che compare già nella Proposizione 1 del Libro I a proposito dell'intersezione di due circonferenze (si veda [E], pp. 77 e 78).

Postulato che qualcuno ha ventilato possa aver suscitato dei dubbi nello stesso Euclide, che lo applicò soltanto a partire dalla Proposizione 29 del primo Libro dei suoi *Elementi*. Tuttavia noi siamo portati a pensare che in Euclide – nella dimostrazione di un teorema – abbia giocato un ruolo importante soprattutto la necessità di utilizzare un assioma soltanto quando non se ne poteva fare a meno.

E furono quelle riflessioni che spinsero David Hilbert ad approntare i suoi *Grundlagen*, [H], che costituiscono una significativa revisione – ma, certamente, non una contestazione – dell’opera euclidea.

Ma in quale fase dello sviluppo della geometria di Euclide si colloca *il Teorema del Compasso*? In realtà lo si ritrova molto presto, come Proposizione 24 del primo Libro degli *Elementi*. Perciò possiamo affermare che questo teorema in realtà si colloca nell’ambito della Geometria Assoluta, che è caratterizzata dal fatto di adoperare solo i primi quattro postulati euclidei. Infatti, come si è detto precedentemente, l’uso del V postulato negli *Elementi* compare solo a partire dalla successiva Proposizione 29.

Tuttavia, oltre a presentare alcuni aspetti “discutibili”, a cui ci ripromettiamo di dedicare un successivo intervento – aspetti d’altra parte giustificabili, in quanto in linea con quella visione concreta della matematica a cui si è accennato precedentemente – la dimostrazione che Euclide fa della Proposizione 24 (di cui la Proposizione 25 è semplicemente l’ovvia proposizione inversa) pecca di una “mancanza” che appare come una stonatura rispetto all’impostazione che ha portato il nostro grande matematico a far precedere la proposizione qui in discussione dalle precedenti ventitre.

In [E] la Proposizione 24, con linguaggio leggermente involuto, è espressa così:

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.

Invece nel testo di Proclo [Pr, p. 271] leggiamo:

Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ma gli angoli compresi dalle rette eguali uno maggiore dell'altro, avranno anche una base maggiore dell'altra.

La Proposizione 24 in [E] è illustrata da una immagine che è grosso-modo riprodotta nella seguente Fig. 1 (dove i due triangoli dell’enunciato euclideo sono ABC e DEF). L’angolo EDG viene costruito da Euclide sfruttando la precedente Proposizione 23, in modo tale che il lato DG sia uguale a ciascuno dei due lati AC e DF . Di conseguenza, per la sua Proposizione 4, la base BC è uguale alla base EG .

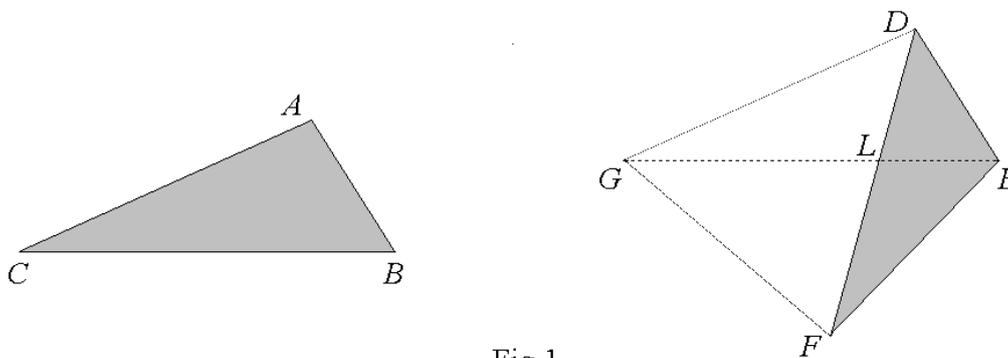


Fig. 1

Nota Bene. Fig. 1 – presa da [E], p. 115 – fa presumere che Euclide abbia considerato il lato AB minore/uguale rispetto al lato AC , e quindi il lato DE minore/uguale rispetto al lato DG . Altrimenti potrebbe verificarsi una situazione simile a quella illustrata nella parte destra della Fig. 2 seguente, dove si vede che il lato DF potrebbe non fuoriuscire dal triangolo GDE ; il che, invece, nel caso di Fig. 1 è scongiurato in base al successivo *Teorema Mancante*.



Fig. 2

Nel caso da noi illustrato nella parte destra di Fig.2, è falso che l'angolo FGE sia una parte dell'angolo FGD ed è anche falso che l'angolo DFG sia una parte dell'angolo EFG , come Euclide tacitamente arguisce, avendo però in mente la parte destra di Fig. 1. Perciò, in riferimento alla situazione descritta in Fig. 2, l'argomentazione euclidea su cui regge la dimostrazione della Proposizione 24 verrebbe a cadere.

Sottolineiamo il fatto che quello descritto in Fig. 2 è uno dei due casi che Proclo afferma essere stati trascurati nella dimostrazione di Euclide, l'altro caso essendo quello in cui il punto F è situato sul segmento GE . Ma, come abbiamo già detto nel Sunto, ci sembra azzardato pensare che l'autore degli *Elementi* sia stato così sprovvisto da non accorgersi che c'erano altri due casi da discutere. A nostro parere quei due casi nel testo euclideo non sono presi in considerazione proprio perché non si possono presentare quando il lato AB è minore/uguale rispetto al lato AC .

Si noti che la parte destra di Fig. 1 (insieme a quella riportata in [E], nella quale l'angolo GDE non è ottuso) appare come una rappresentazione “fedele” di ciò che si vuol descrivere – sottintendendo il fatto che il lato AB sia minore/uguale rispetto al lato AC – soltanto se essa è preceduta dal seguente teorema; che è quello che – a nostro avviso, in un'impostazione coerente con quella euclidea – manca in [E].

Teorema 1 (*il Teorema Mancante*). *Sia dato un triangolo GDE , in cui il lato GD sia maggiore/uguale rispetto al lato DE . Allora un segmento DL , che congiunga il vertice D con un punto L del lato opposto GE , è minore del lato DG .*

Dimostrazione. Infatti, l'angolo DLG è maggiore dell'angolo DEG (*teorema dell'angolo esterno maggiore*, applicato al triangolo DLE ; corrispondente alla Proposizione 16 di [E]), che a sua volta è maggiore/uguale rispetto all'angolo DGE (Prop. 18 e 5, applicate al triangolo DEG). Perciò il segmento DL è minore del lato DG (Prop. 19 applicata al triangolo DGL). ■

Facciamo notare che il punto L presente sul lato GE di Fig. 1, che però Euclide non utilizza esplicitamente, è quello che garantisce (in un'ottica coerente con l'atteg-

giamento ellenistico, legato al concreto) che il punto F si trova dall'altra parte rispetto al lato GE , poiché – grazie al teorema mancante – DF è più lungo di qualsiasi segmento che congiunga D con un punto del lato GE . Ciò fa sì che il lato GE sia contenuto nell'angolo FGD .

Osservazione 2. Ora – procedendo secondo l'impostazione euclidea, e quindi facendo riferimento alla Fig. 1 – proseguiamo con la dimostrazione della Proposizione 24 di [E].

Facciamo presente che – per costruzione di Euclide – gli angoli EDG e BAC sono uguali; inoltre sono uguali i lati DG e AC , nonché i lati AB e DE . Di conseguenza, anche i due lati BC ed EG sono uguali. Perciò basta provare che il lato EF è minore del lato EG .

Ragionando sul triangolo EGF , ciò risulta ovvio. Infatti l'angolo FGE è una parte dell'angolo FGD , perciò il primo è minore del secondo. Inoltre, l'angolo FGD , essendo uguale all'angolo GFD , è minore dell'angolo GFE . Di conseguenza, l'angolo FGE è minore dell'angolo GFE . Il che comporta che il lato EF è minore del lato EG (Prop. 19 applicata al triangolo EFG). ■

E' importante notare che nella dimostrazione del Teorema 1 e nell'Osservazione 2 sono state utilizzate soltanto proposizioni anteriori alla Prop. 24 di [E], cosicché la collocazione di questa nello sviluppo della trattazione euclidea rimane comunque invariata.

Bibliografia

- [E] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccione (1970).
- [En] Enriques F., L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco ...; in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, a cura di F. Enriques, Zanichelli, Bologna (1983).
- [F] Fontana M., *MATTEO RICCI un gesuita alla corte dei Ming*, Mondadori, Milano (2005).
- [H] Hilbert D., *Fondamenti della geometria* (con introduzione di Carlo F. Manara), Feltrinelli, Milano (1970). Traduzione da: *Grundlagen der Geometrie*, T. B. Teubner, Stuttgart (1968).
- [K] Kline M., *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino (1999).
- [L] Lenzi D., *Euclide, questo sconosciuto*, Periodico di Matematiche, n. 3 (2002).
- [L1] Lenzi D., *David Hilbert e i suoi primi assiomi della geometria, con un'appendice dedicata a Moritz Pasch*, Periodico di Matematiche, n. 4 (2003).
- [M] Maracchia S., *La matematica come sistema ipotetico-deduttivo*, Le Monnier, Firenze (1975).
- [P] Peano G., I principi di Geometria logicamente esposti; in *Opere scelte*, a cura dell'UMI, Cremonese, Vol. II (1958).
- [Pr] Proclo, *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini ed., Pisa (1978).
- [S] Struik D. J., *Matematica: un profilo storico*, il Mulino, Bologna (1981).
- [T] Trudeau R., *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino (1991).

131. Quando la logica va oltre la costruzione

Luca Francesca, Massimiliano Leoni e Luca Lussardi¹

E' vero che le dimostrazioni matematiche sono tutte "uguali" dal punto di vista della loro validità logica? Certamente sì: infatti se la dimostrazione segue una deduzione logica corretta che dall'ipotesi, assunta vera, giunge a concludere che anche la tesi oggetto del teorema è vera, allora la dimostrazione è da considerarsi valida a tutti gli effetti. Non tutti però la pensano così: per alcuni, ci sono dimostrazioni e dimostrazioni. Più precisamente i cosiddetti costruttivisti ritengono che per dimostrare l'esistenza di un certo oggetto matematico si debba necessariamente indicare una procedura di tipo costruttivo la quale, almeno in linea di principio, permette di costruire l'oggetto del quale si vuole dimostrare l'esistenza. In un certo senso per un costruttivista l'esistenza di un oggetto matematico coincide con la possibilità di poterlo costruire, almeno teoricamente.

E' utile non confondere il costruttivismo con un suo parente, l'intuizionismo. L'intuizionismo è solo una forma particolare di costruttivismo; più precisamente gli intuizionisti ritengono che i fondamenti della matematica stiano nella nostra intuizione personale, ma così facendo c'è il rischio che la matematica si riduca ad un'attività per lo più soggettiva e individuale. Il costruttivismo, invece, si trova in piena sintonia con una visione oggettiva della matematica.

L'atteggiamento del matematico costruttivista talvolta è molto limitante; si pensi che il costruttivista rifiuta sistematicamente l'uso di oggetti infiniti, ad esempio c'è il rifiuto delle successioni come oggetti a sé stanti (ciò implica in particolare che il costruttivista non può accettare la classica costruzione dei numeri reali basata sul completamento di \mathbb{Q}). A tal proposito il celebre matematico D. Hilbert (1862-1943) in una sua famosa citazione disse che l'eliminazione del principio del terzo escluso (cosa contemplata nella logica costruttivista) equivale a togliere il telescopio ad un astronomo. Tuttavia nel 1967 un matematico americano di nome E. Bishop (1928-1983) scrisse un'opera dal titolo *Foundations of Constructive Analysis* recuperando tanta analisi tradizionale per via costruttiva, anche se in modo molto complicato. L'atteggiamento attuale nei confronti del costruttivismo non è di condanna, infatti la maggior parte dei matematici odierni accetta la logica del non costruttivismo, rispettando comunque la logica del costruttivismo.

Lo scopo di questo breve articolo non è però quello di discutere sul costruttivismo e sul non costruttivismo, né di schierarsi a favore dell'una o dell'altra forma di logica, bensì quello di toccare con mano alcuni esempi di dimostrazioni costruttive e non costruttive, al fine di poter capire quando la logica può diventare, per così dire, più potente della costruzione.

Effettivamente molti teoremi di esistenza in matematica sono di tipo costruttivo, ovvero la dimostrazione stessa dei teoremi, o almeno una delle tante possibili, è di

¹ Fakultät für Mathematik, Technische Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44227 Dortmund (Germania).

tipo costruttivo (per questo sarebbe meglio dire dimostrazione costruttiva anziché teorema costruttivo). Un classico esempio di dimostrazione costruttiva è la più semplice dimostrazione del ben noto teorema degli zeri per una funzione continua:

Una funzione continua $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, con a, b reali, $a < b$, tale per cui si ha $f(a) \cdot f(b) < 0$ ammette almeno uno zero in (a,b) , ovvero esiste (almeno un) x appartenente ad (a,b) tale per cui si ha $f(x)=0$.

Si tratta quindi di un teorema che asserisce, sotto certe condizioni, l'esistenza di un oggetto matematico, x in questo caso. La classica dimostrazione è di tipo costruttivo. Infatti basta considerare una successione numerica in (a,b) opportunamente costruita che si dimostra convergere ad uno zero della funzione f . Detto x_1 il punto medio di (a,b) basta scegliere uno tra gli intervalli (a, x_1) e (x_1, b) , e precisamente scegliere quello tale per cui f agli estremi assume valori di segno opposto. Si ripete quindi il procedimento e si seleziona il punto medio x_2 del nuovo intervallo trovato, e si itera il ragionamento. Così facendo si trova una successione x_n che si dimostra convergere ad uno zero di f .

Il teorema degli zeri è quindi un esempio di teorema che può essere dimostrato esibendo una procedura esplicita che consente di costruire l'oggetto del quale il teorema afferma l'esistenza. Va da sé che si possono anche dare dimostrazioni non costruttive del teorema degli zeri, per esempio per assurdo.

La dimostrazione per assurdo è proprio il tipico esempio di dimostrazione non costruttiva. L'esempio più elementare e importante di dimostrazione per assurdo è la celebre dimostrazione di Euclide (300 a.C. circa) del fatto che i numeri primi sono infiniti (*Proposizione 20, libro IX*). Il grande matematico greco procede per assurdo: supponiamo che vi sia un numero primo N più grande di tutti, allora considero il numero $N!+1$ che altri non è che il numero dato da

$$N!+1 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 + 1$$

Se dividiamo questa quantità per ogni numero n compreso tra 2 e N otteniamo come resto 1. Ma per il Teorema di fattorizzazione unica (che Euclide ha già dimostrato) $N!+1$ deve fattorizzarsi come prodotto di primi distinti, con eventuale molteplicità, e questo contraddice il fatto che N sia il primo più grande di tutti.

La dimostrazione di Euclide è entrata nella storia della matematica come esempio di eleganza della dimostrazione per assurdo e della potenza di essa; il grande matematico inglese G. H. Hardy (1877-1947) nel suo celebre libro *Apologia di un matematico* scrive:

“La *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. È un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre la partita.”

Vi sono invece dei casi in cui la dimostrazione proposta di un certo fatto addirittura coinvolge pochi oggetti completamente espliciti, e tuttavia resta non costruttiva. Un classico esempio è il seguente problema:

Dimostrare che esistono due numeri irrazionali a e b tali per cui a^b è razionale.

La soluzione di questo quesito mostra quanto potente sia, in questo caso, l'utilizzo della pura logica. Consideriamo infatti $a = b = \sqrt{2}$. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ fosse razionale

avremmo già finito: la soluzione per l'appunto sarebbe $a = b = \sqrt{2}$. Se invece $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ fosse irrazionale, consideriamo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$; allora a e b sono entrambi irrazionali, poiché stiamo supponendo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrazionale, ma in tal caso si ha $a^b = 2$, che conclude la dimostrazione, essendo 2 razionale.

Questa dimostrazione, incredibile per la sua semplicità, nasconde una questione più complicata, che è l'irrazionalità di $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, dimostrata nel 1934 in modo indipendente da Gel'fond (1906-1968) e Schneider (1911-1988). Dunque effettivamente la "vera" soluzione al problema è la seconda scelta. Tuttavia osserviamo che la dimostrazione proposta è completamente autosufficiente, dal momento che mostra in modo logicamente corretto che la soluzione al problema dato deve essere una delle due proposte, per cui l'esistenza della soluzione è dimostrata in ogni caso pur non sapendo se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale o razionale, e quindi senza invocare un difficile teorema di teoria dei numeri.

A parte questo divertente esempio, ci sono teoremi molto più importanti in matematica per i quali le sole dimostrazioni note sono di tipo non costruttivo; in ciò che segue non entreremo troppo nel dettaglio, essendo ciò che diremo di natura non elementare.

Un primo classico esempio è rappresentato dal teorema di esistenza di una base per uno spazio vettoriale: infatti l'esistenza di una base per uno spazio vettoriale generico, e quindi non necessariamente finitamente generato, discende dall'assioma della scelta, o meglio da una sua formulazione equivalente tanto cara agli analisti: il lemma di Zorn. In tal caso, la trattazione è poco elementare, per cui tralasciamo i dettagli; basti sapere che l'assioma della scelta, rifiutato dai costruttivisti, postula l'esistenza di una cosiddetta funzione di scelta.

Allo stesso modo tralasciamo i dettagli su un altro classico teorema la cui dimostrazione fa uso anch'essa del lemma di Zorn: la forma analitica del teorema di Hahn-Banach, uno dei più bei risultati di analisi funzionale lineare:

Dato X spazio vettoriale reale e dato un suo sottospazio Y , ogni funzionale lineare $L: Y \rightarrow \mathbb{R}$ si estende ad un funzionale lineare $T: X \rightarrow \mathbb{R}$ (si può fare anche per spazi vettoriali su \mathbb{C}).

Anche quest'ultimo teorema ha una grande importanza in analisi matematica: non accettarlo vorrebbe dire rinunciare a praticamente l'intera analisi convessa, branca dell'analisi matematica che studia le proprietà delle funzioni convesse, soprattutto nel caso della dimensione infinita.

Sebbene la logica costruttivista sia interessante, porta con sé un grosso problema. Due grosse rinunce della logica costruttivista sono quella della dimostrazione per assurdo e, legata a questa, l'implicazione tra doppia negazione e l'affermazione della logica classica.

Senza dimostrazioni per assurdo, perderemmo una buona parte delle dimostrazioni semplici di algebra o analisi a cui siamo abituati e, sebbene valga una forma diversa di "gioco" di negazioni, anche questo colpo sarebbe una forte folata nel nostro castello della logica.

Anche Brouwer (1881-1966), uno dei capostipiti di un'altra scuola non classica, quella intuizionista, nella dimostrazione del suo famoso teorema sul punto fisso (uno dei molti) sembra quasi andare contro i suoi principi e segue logiche classiche.

Insomma, sebbene abbiano offerto molti spunti in un'epoca di crisi delle fondamenta e abbiano i propri lati positivi, le logiche non classiche non sono oggi così largamente utilizzate come era loro iniziale intento.

Volendo tirare una conclusione potremmo dire, costruttivisti (o non classicisti che sia) o no che siamo, che la potenza della logica talvolta può essere superiore alla potenza del costruttivismo, e portare molto avanti la matematica.

Come il buon senso però suggerisce, conviene non abusare di una o dell'altra: insomma, è giusto essere un po' costruttivisti e un po' logici.

132. Famiglie di segmenti nel piano e nello spazio

Bruno Sanchini
 brunosanchini@yahoo.it

1 Introduzione

Questa ricerca viene suddivisa in due parti. Nella prima parte, si ricercano le equazioni di alcune superfici piane di segmenti, in particolare, grandi famiglie di curve segmentate. Ognuna di queste famiglie è formata da infiniti segmenti, inclinati sull'asse delle x di angoli uguali. Nella seconda parte, si fanno ruotare nello spazio alcune curve segmentate per ottenere una superficie costituita da infinite superfici laterali di tronchi di cono e da due superfici laterali di due coni. È operando su tutte queste superfici laterali che si troveranno le equazioni di alcune loro porzioni o superfici uguali. L'arbitrarietà della scelta di una famiglia di curve segmentate, fatta mediante una 'scelta oculata' dei valori dei parametri che la caratterizzano consente di ottenere delle equazioni di superfici che sono, graficamente, le più fantasiose possibili.

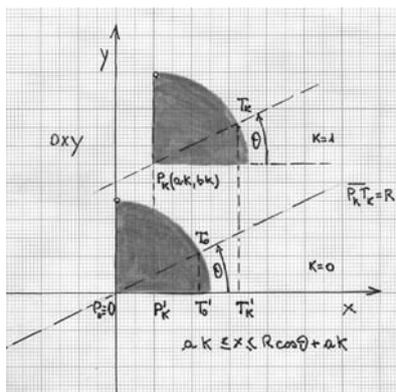
2 Superfici e curve di segmenti

Se consideriamo in un sistema di riferimento Oxy ($\widehat{xy} = 90^\circ$) una generica retta passante per il punto $P_k(a_k, b_k)$ con $a \geq 0$ e $b \geq 0$, non contemporaneamente uguali a zero, e $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ che spazza nel piano un angolo $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ (rispetto al semiasse positivo delle x), nonché una retta $x = h$, con $ak \leq h \leq R \cos \theta + ak$, si può asserire che al variare di θ con $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ e di h con $ak \leq h \leq R \cos \theta + ak$, essendo $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ le due famiglie di rette, intersecandosi, individueranno una superficie ($\overline{P_k T_k} = R$). Infatti, se $\overline{P_0 T'_0} = R \cos \theta$, $\overline{T_0 T'_0} = R \sin \theta$ e più in generale: $\overline{P_0 T'_k} = R \sin \theta + ak$; $\overline{T_k T'_k} = R \sin \theta + bk$, le coordinate dei punti di questa famiglia sono le soluzioni del sistema:

$$(a) \begin{cases} y = \tan \theta (x) + k (b - a \tan \theta) & * \\ ak \leq x \leq R \cos \theta + ak & k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \end{cases}$$

che rappresenta nel piano cartesiano ortogonale Oxy (I quadrante) una figura che è formata da infiniti segmenti, tali da formare infiniti settori circolari (uno per ogni valore di k) di raggio R . Si può, inoltre, affermare che la superficie è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate verificano il sistema (a) con θ , parametro variabile. Di seguito riportiamo la figura:

* $y - bk = \tan \theta (x - ak) \rightarrow y = \tan \theta (x) + k (b - a \tan \theta)$



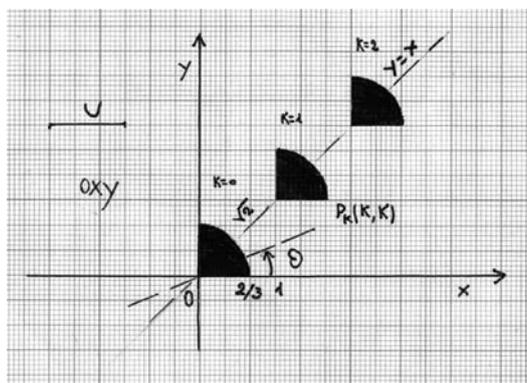
Se $a = b = 1$ e quindi $P_k(k, k)$, si potrà dire:

“Se $R < \sqrt{2}$ i settori sono distinti; se $R \geq \sqrt{2}$ i settori hanno una parte di essi in comune, due a due (magari un punto, quando $R = \sqrt{2}$)”.

Seguono alcuni esempi e per ciascun esempio, il sistema è il diagramma:

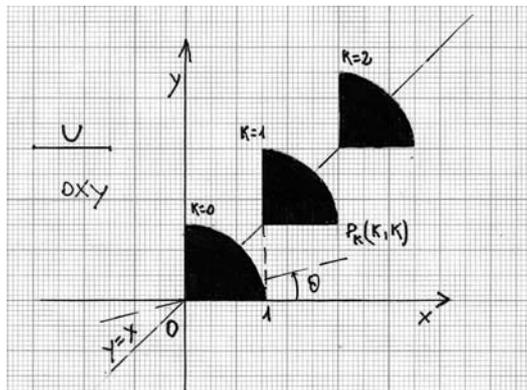
(1) per $R = \frac{2}{3} < \sqrt{2}$ il sistema:

$$\begin{cases} y = \tan \theta (x) + k (1 - \tan \theta) \\ k \leq x \leq \frac{2}{3} \cos \theta + k \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ, \end{cases}$$



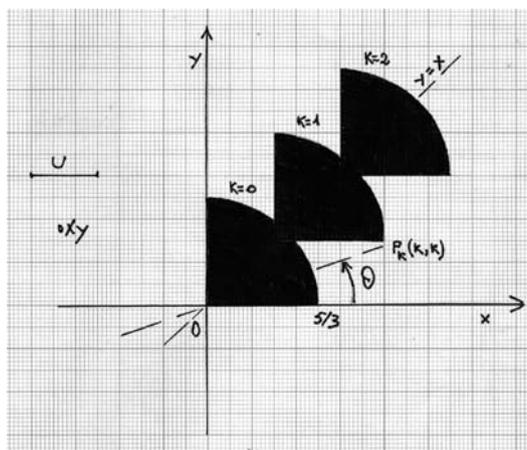
(2) per $R = 1 < \sqrt{2}$, il sistema :

$$\begin{cases} y = \tan \theta (x) + k (1 - \tan \theta) \\ k \leq x \leq \cos \theta + k \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \end{cases}$$



(3) per $R = \frac{5}{3} > \sqrt{2}$, il sistema :

$$\begin{cases} y = \tan \theta (x) + k (1 - \tan \theta) \\ k \leq x \leq \frac{5}{3} \cos \theta + k \end{cases}$$



$$k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ,$$

Il sistema (a) può essere generalizzato in quest'altro sistema che indico con (b) :

$$(b) \begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta |x| + k (b - a \tan \theta) \right] \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos \theta + ak)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ,$$

Nel piano cartesiano Oxy questo sistema rappresenta una superficie simmetrica rispetto all'asse delle x e delle y (quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi) perché $y(x) = -y(x)$ e $y(x) = y(-x)$ per gli stessi valori di x .

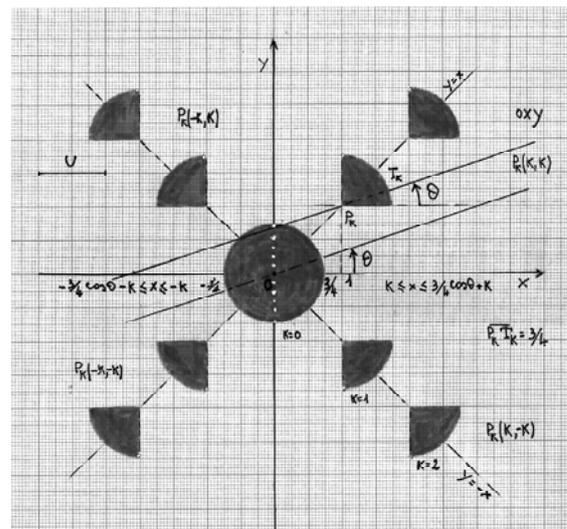
Seguono due illustrazioni, e per ciascuna di esse, il sistema e il corrispettivo diagramma:

1) Se $a=1; b=1; R=3/4$,

Il sistema:

$$\begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta |x| + K (1 - \tan \theta) \right] \\ k^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{3}{4} \cos \theta + k \right)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ,$$

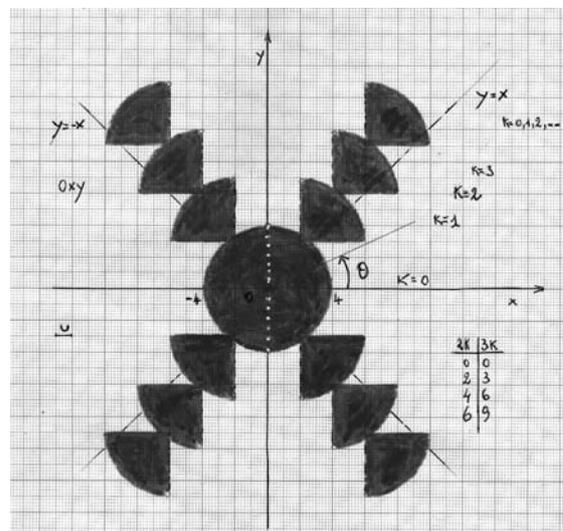


2) Se $a=2; b=3; R=4$,

il sistema :

$$\begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta |x| + K (3 - 2 \tan \theta) \right] \\ (2k)^2 \leq x^2 \leq (4 \cos \theta + 2k)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ,$$



Ora, se poniamo $\overline{P_k T_k}(\theta) = R \cos^{n-1} \theta$ con n intero ≥ 1 (per $n \geq 1$ il valore massimo di $\overline{P_k T_k}(\theta)$ al variare di $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ è R , essendo il $\cos^{n-1} \theta \leq 1$), e rileviamo che la proiezione ortogonale sull'asse delle x di $R \cos^{n-1} \theta$ è $R \cos^n \theta$, il sistema (b), a sua volta, viene generalizzato nel sistema (c):

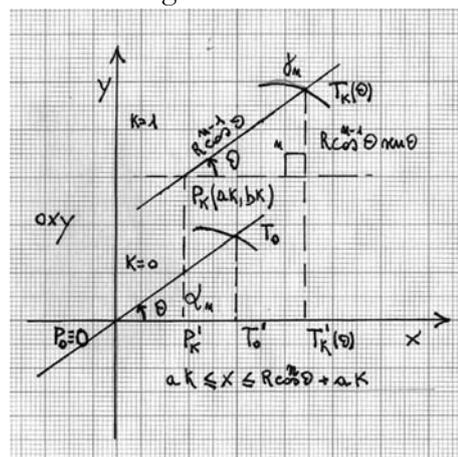
$$(c) \begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta |x| + k (b - a \tan \theta) \right] \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta + ak)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ.$$

Quando $n = 1$, $\overline{P_k T_k}(\theta)$ non dipende da θ e $\overline{P_k T_k} = R$. Vedi la figura sotto.

Anche qui le due famiglie di rette, intersecandosi, individueranno un luogo geometrico che sarà una superficie α_n . Per vedere di quale superficie α_n trattasi, è necessario trovare la curva γ_n che è l'insieme dei punti $T_k(\theta)$, curva questa (formata da infiniti rami) che delimita la α_n e che è anche parte del suo contorno (non rettilineo).

Questa curva γ_n è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate x e y sono le soluzioni del sistema che ricaveremo da (c) quando $x = \pm (R \cos^n \theta + ak)$, ossia:



$$\begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta |x| + k (b - a \tan \theta) \right] \\ x = \pm (R \cos^n \theta + ak) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta (R \cos^n \theta + ak) + k (b - a \tan \theta) \right] \\ x = \pm (R \cos^n \theta + ak) \end{cases}$$

quindi le equazioni parametriche della curva γ_n :

$$\begin{cases} x = \pm (R \cos^n \theta + ak) \\ y = \pm (R \sin \theta \cos^{n-1} \theta + bk) \end{cases} \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ.$$

Le equazioni della curva γ_n si potranno scrivere anche così:

$$\begin{cases} |x| = R \cos^n \theta + ak \\ |y| = R \sin \theta \cos^{n-1} \theta + bk \end{cases} \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ.$$

Ma se si osserva che l'equazione (già studiata al computer):

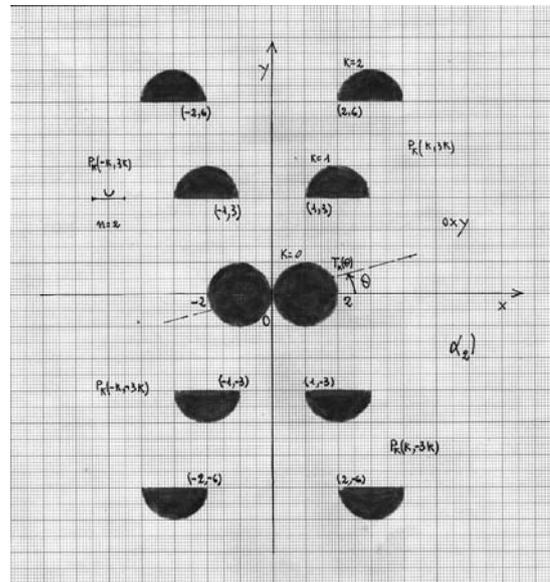
Esempio due:

Appresso, quando i parametri di (c) si sostituiscono con i valori : $a=1$; $b=3$; $R=2$; $n=2$, ottengo il sistema di α_2 :

$$\begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta |x| + k (3 - \tan \theta) \right] \\ k^2 \leq x^2 \leq (2 \cos^2 \theta + k)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots ; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ,$$

quindi il suo diagramma, delimitato dalla curva γ_2 di cui l'equazione è stata considerata, appunto, per gli "stessi valori dei parametri" di α_2 (vedere "l'esempio uno").



Se considero il sistema (c) quando $\theta = \theta_0$ ($0^\circ \leq \theta_0 < 90^\circ$), il nuovo sistema:

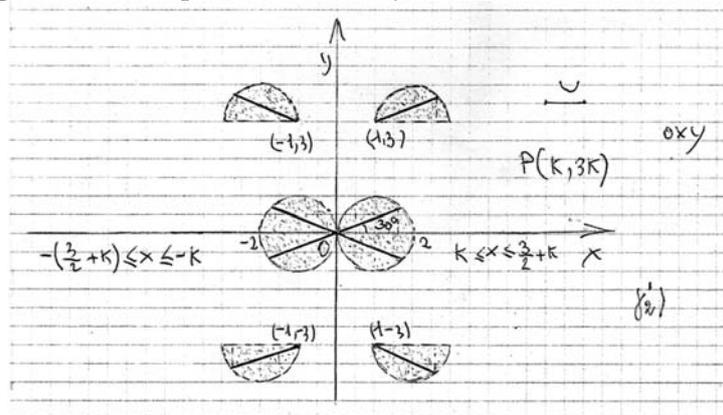
$$(d) \begin{cases} y = \pm \left[\tan \theta_0 |x| + k (b - a \tan \theta_0) \right] \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2 \\ \text{con } k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

rappresenterà nel piano una curva (γ_n') formata da infiniti segmenti, inclinati sull'asse delle x di θ_0 e simmetrica rispetto agli assi cartesiani ortogonali. Esempio:

se $\theta_0=30^\circ$; $n=2$; $a=1$; $b=3$; $R=2$, avremo il sistema :

$$\begin{cases} y = \pm \left[\tan 30^\circ |x| + k (3 - \tan 30^\circ) \right] \\ k^2 \leq x^2 \leq (2 \cos^2 30^\circ + k)^2 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

quindi, la rappresentazione geometrica della γ_2' .



Trattasi di una curva simmetrica rispetto all' asse delle x e all' asse delle y .

Ritornando alla (d), se si fa ruotare la curva γ_n' di $1/2$ giro attorno all' asse delle x , si ottiene una superficie costituita da infinite superfici laterali di tronchi di cono e da

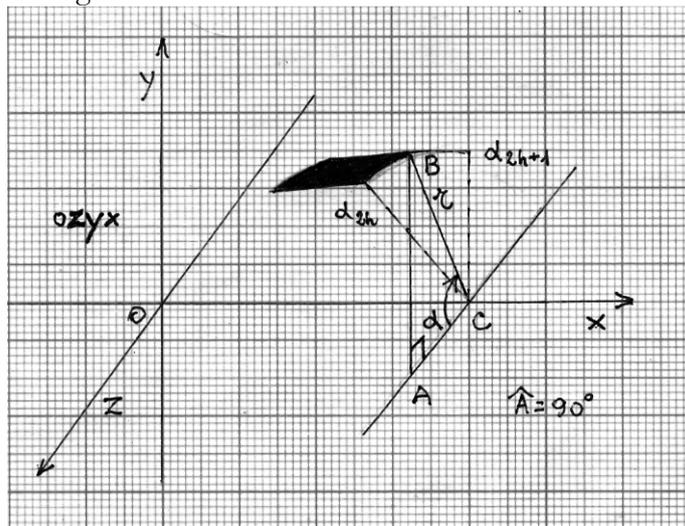
due superfici laterali di due coni, poiché ogni coppia di punti della γ_n' , simmetrici rispetto all'asse delle x , genera una circonferenza.

Ora se queste circonferenze le suddivido in $2N$ archi uguali di ampiezza $\alpha=180^\circ/N$, con $N \geq 2$, sarà grazie ai valori di α :

$$\alpha \begin{cases} \alpha_{2h} = 2h \frac{180^\circ}{N} \\ \alpha_{2h+1} = (2h+1) \frac{180^\circ}{N} \end{cases}$$

con $h=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ ($N \geq 2$) che si individueranno gli estremi degli N archi uguali (un arco sì, uno no), e quindi, con $\alpha_{2h} \leq \alpha \leq \alpha_{2h+1}$ ed il raggio, i punti di ciascun arco.

La conoscenza di “questi archi uguali” ci aiuta a considerare su ogni superficie laterale le “ N porzioni o superfici uguali” di cui ciascuna (di queste porzioni) contiene uno degli N archi (una porzione sì, una no, come per gli archi). Sarà, a seguito di ciò, che passeremo ad esprimere analiticamente queste “ N superfici uguali”. In quanto alla loro rappresentazione sarà opportuno osservare che i punti simmetrici della curva γ_n' rispetto all'asse delle x nella rotazione generano una circonferenza di raggio $r = |y| = \tan \theta_0 |x| + k(b - a \tan \theta_0)$, mentre il punto B (vedere la figura qui sotto) descrive su una generica circonferenza di ciascuna superficie laterale, gli N archi uguali.



Il sistema che rappresenta le “ N porzioni o superfici uguali” sarà il seguente:

$$(e) \begin{cases} y = [\tan \theta_0 |x| + k(b - a \tan \theta_0)] \sin \alpha \\ z = [\tan \theta_0 |x| + k(b - a \tan \theta_0)] \cos \alpha \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta_0 < 90^\circ$$

$$2h \frac{180^\circ}{N} \leq \alpha \leq (2h+1) \frac{180^\circ}{N} \quad ; \quad h=0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (N \geq 2)$$

A chiarimento di ciò, il seguente esempio:

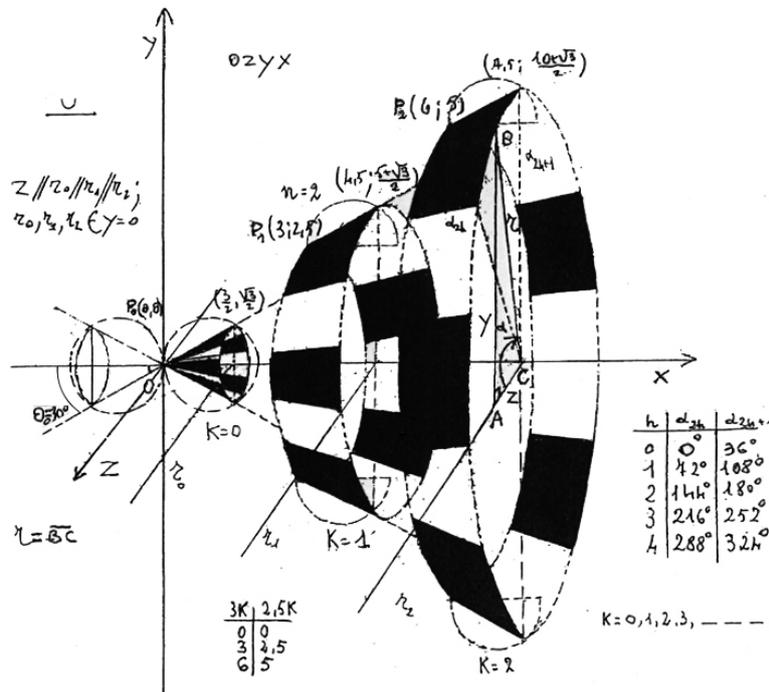
$$a=3 ; b=2,5 ; R=2 ; n=2 ; \theta_0=30^\circ \text{ ed } N=5$$

(per il calcolo dell'intervallo dei valori di α ,parametro variabile) quindi, appresso, il sistema :

$$\begin{cases} y = [\tan 30^\circ |x| + k(2,5 - 3 \tan 30^\circ)] \sin \alpha \\ z = [\tan 30^\circ |x| + k(2,5 - 3 \tan 30^\circ)] \cos \alpha \\ (3k)^2 \leq x^2 \leq (\frac{3}{2} + 3k)^2 \end{cases}$$

dove $72^\circ h \leq \alpha \leq (2h+1) 36^\circ$ con $h=0, 1, 2, 3, 4$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

quindi la superficie che se ne ricava:



Il diagramma è stato limitato a tre gruppi di superfici (uno per ogni superficie laterale), sebbene di questi gruppi ce ne siano infiniti.

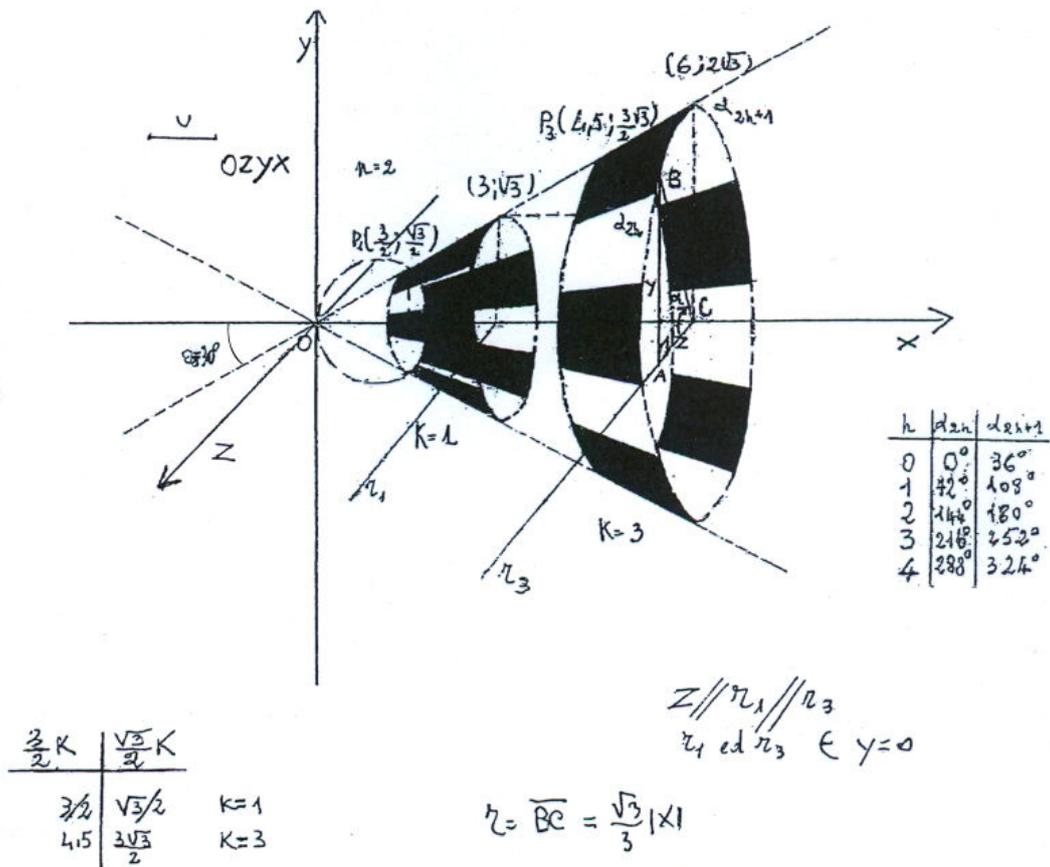
Questa superficie è simmetrica rispetto al piano $x = a$.

Segue un caso particolare del sistema precedente, quando $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $R=2$; $n=2$; $\theta_0=30^\circ$ con $N=5$ (per il calcolo dell'intervallo dei valori di α) quindi, appresso, e cioè il sistema :

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3} |x| \sin \alpha \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3} |x| \cos \alpha \\ (\frac{3}{2} k)^2 \leq x^2 \leq [\frac{3}{2} (1+k)]^2 \end{cases}$$

$72^\circ h \leq \alpha \leq (2h+1) 36^\circ$; $h=0, 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 3, 5, \dots$,

e quindi, la superficie che rappresenta :



Il diagramma è stato limitato a due gruppi di superfici (uno per ogni superficie laterale), sebbene di questi gruppi ce ne siano infiniti.

Anche questa superficie è simmetrica rispetto al piano $x = 0$.

Del sistema (e) si potrebbero considerare altri casi particolari, ad esempio: uno di $a = 0$ e l'altro di $b = 0$ che però, per mancanza di spazio, rinuncio a trattare.

La capacità di scelta di alcuni valori dei parametri del sistema rispetto ad altri sarà fondamentale per trovare dei casi particolari del sistema molto interessanti.

Complementi

Mi propongo di trovare il diagramma della superficie α_{12} (di α_n) nel caso, appunto, di $n = 12$, con $a = 1$; $b = 3$; $R = 2$.

Quindi, previa semplice sostituzione dei parametri con i predetti valori, ricavo dal sistema (c) il sistema seguente :

$$\begin{cases} y = \pm [\tan\theta |x| + k(3 - \tan\theta)] \\ k^2 \leq x^2 \leq (2\cos^2\theta + k)^2 \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots ; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ,$$

che rappresenta la superficie cercata. Dirò che il diagramma della superficie α_{12} sarà quello delimitato dal contorno della curva γ_{12} con $n=12$; $a=1$; $b=3$; $R=2$ di equazione :

$$\begin{cases} x = \pm (2 \cos^{12} \theta + k) \\ y = \pm (2 \sin \theta \cos^{11} \theta + 3k) \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots ; \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ .$$

Lo studio, quindi, della superficie α_{12} dipenderà dallo studio del diagramma γ_{12} . Sarà necessario rifarsi alla “tabella allegata”, in particolare alla curva di equazione :

$$\begin{cases} x = \cos^{12} \theta \\ y = \sin \theta \cos^{11} \theta \end{cases} \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \quad (\text{I quadrante}),$$

per disegnare la curva γ_{12} .

Appresso, il diagramma della curva γ_{12} ed, infine, il grafico della superficie α_{12} (di α_n).
Diagramma della curva γ_{12} , simmetrica rispetto al punto 0 (origine degli assi cartesiani ortogonali) :

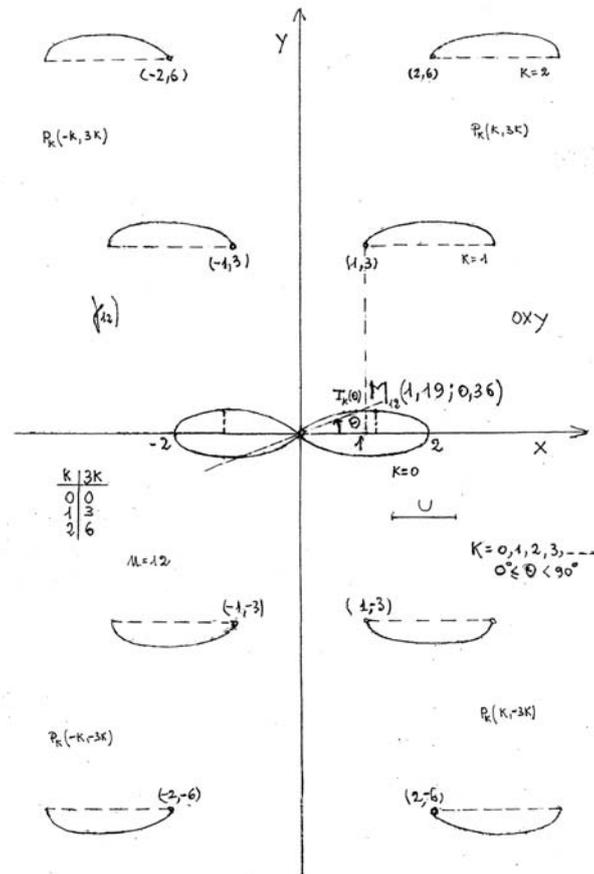
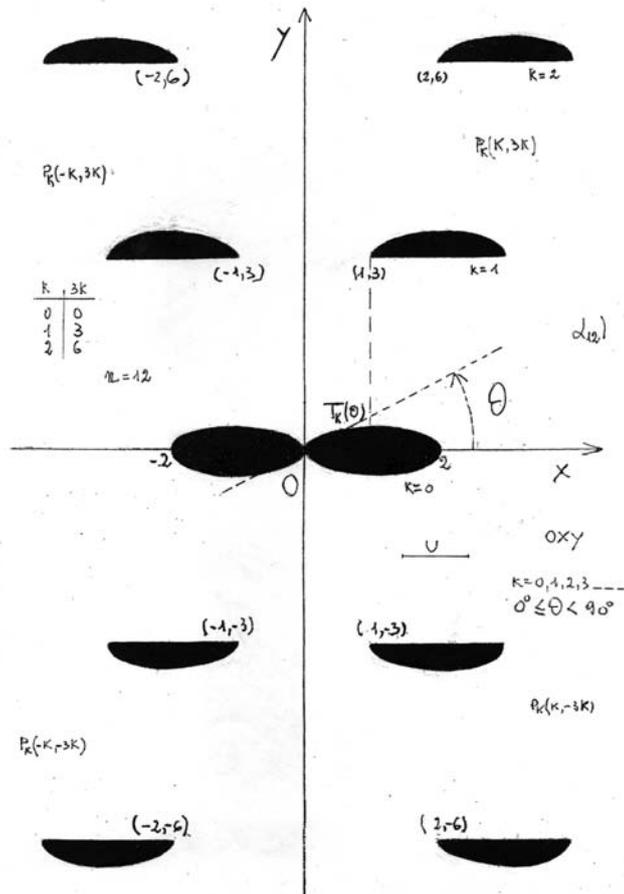


Grafico della superficie α_{12} , simmetrica all'origine degli assi cartesiani ortogonali :



N.b. Per individuare meglio nel piano cartesiano il diagramma della γ_{12} , avrei potuto migliorare lo studio della funzione con la determinazione delle coordinate di un maggiore numero di punti.

133. Miti, leggende, racconti, automi e matematica negli scacchi

di Michele T. Mazzucato

*Il gioco degli scacchi
è l'arte che esprime
la scienza della logica.*

Michail [Mischa] Moiseevic Botvinnik (1911-1995)
Campione del Mondo 1948-1957; 1958-1960; 1961-1963

Le origini del gioco degli scacchi, opinione condivisa e indubbia, proviene dal mondo orientale. Risultato di una lenta e progressiva evoluzione di forme di gioco precedenti quali il *chatrang* (scacchi persiani), il *chaturanga* (da *chatur* = quattro e *anga* = parti di un tutto) (scacchi indiani), lo *shatranj* (scacchi arabi) e lo *zatrikion* (scacchi greci) dal cui termine, ripreso nel XII secolo d.C. da Anna Comnena (1083-1148) nell'opera *Alexias* dedicata all'Imperatore d'Oriente Alessio I Comneno (1048-1118), suo padre, è nato il termine *zatrichiologia* per indicare un ramo degli studi scacchistici a indirizzo prevalentemente storico-letterario.

Principalmente introdotto dalle crociate e dai rapporti commerciali con l'oriente, nel X secolo d.C. la sua diffusione nel mondo occidentale era già un fatto compiuto. Nel proseguo dei tempi il gioco si è assestato nella forma oggi a noi nota. La letteratura scacchistica è ricca di miti, leggende, storie e connessioni alla matematica dilettevole. Vediamone qualche notevole esempio.

Il mito di Caissa

Il nome Caissa appare per la prima volta nel poema omonimo, scritto nel 1763 e pubblicato a Oxford nel 1772, dell'orientalista inglese William Jones (1746-1794). Un lavoro ispirato dalla lettura dello *Scacchia Ludus* (1559) del poeta e umanista cremonese Marco Antonio "Girolamo" Vida (1485-1566). L'opera del Jones venne inclusa nei

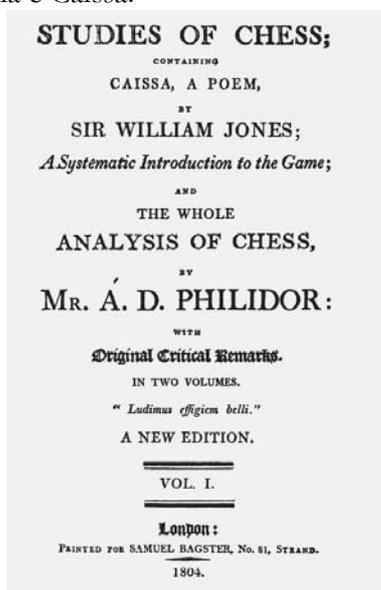
Studies of Chess (1803) di Peter Pratt (1799-1823) mentre nel *Chess and Chessplayers* (1850) di George Walker (1803-1879) e nei *The Chess Monthly* (1857-1861), editi da Willard Daniel Fiske (1831-1904) e Paul Charles Morphy (1837-1884), contribuirono alla diffusione del nome Caissa e la sua attribuzione quale ninfa protettrice del gioco degli scacchi. Nel poema a versi di Jones il dio Marte è innamorato, ma non ricambiato, della driade tracia Caissa che per conquistarla inventa, con l'aiuto di Eufrone (o Sport) fratello di Amore, il gioco degli scacchi, il cui nome è eponimo della ninfa stessa, e gliene fa dono. Caissa è così descritta:



La driade (custode dei boschi) Caissa

“Una amabile driade corre per le foreste della Tracia, il suo viso è incantevole, il suo aspetto dolce. Il suo passatempo è la caccia

del saltante cervo, avversata da Imene e dal figlio di Ciprigna. Per monti e per valli la sua bellezza è famosa, e il nome della vezzosa fanciulla è Caissa.”



L’opera in due volumi *Studies of Chess* (1803) di William Jones, in una nuova edizione del 1804.

La leggenda di Sissa

Sussa ibn Dahir al-Hindi (Sissa) è il saggio che chiese al re di Persia Khusraw II Parwiz, quale premio per l’invenzione del gioco degli scacchi, dei chicchi di grano.

La storia, confermata da molti testi scritti in lingua pahlavica (persiano antico) è ripresa in un altro testo molto antico, il *Vicarism i catrang ut nihisn i nevartaxser* (Spiegazione del gioco degli scacchi e invenzione del gioco del nard) composto verso il VII secolo d.C. Nel libro si legge: “La spiegazione del principio del Chatrang [degli scacchi] è questa: è cosa mediante intelligenza, in conformità a quanto è stato detto ai saggi, la vittoria su chi è potente è da riportare con la mente.”

Alla leggenda, tratta dal libro *Kitab-as-satrang* (oggi proprietà del British Museum di Londra), allude anche Dante Alighieri (1265-1321) nella sua universalmente nota *Commedia* [il termine Divina venne aggiunto nel 1555 dal poligrafo veneziano Lodovico Dolce (1508-1568)] quando Beatrice spiega a

Dante i nove cerchi degli ordini angelici e per dire che il numero degli angeli è infinito, crive (Paradiso, XXVIII, 91-93): *L’incendio suo seguiva ogni scintilla; ed eran tante, che ‘l numero loro più che ‘l doppiar delli scacchi s’innilla.*

Dante probabilmente apprese tale leggenda dalle opere di ibn Rushd Averroè (1126-1198) il celebre commentatore di Aristotele, e dal *Liber Abaci* (1202) di Leonardo Fibonacci da Pisa (XII-XIII secolo d.C.) matematico alla corte di Federico II di Svevia (1194-1250) a Palermo.

In definitiva, Sissa chiese semplicemente un numero di chicchi di grano derivante dalla somma così ottenuta: uno sulla prima casa, due sulla seconda, quattro sulla terza, otto sulla quarta, sedici sulla quinta, trentadue sulla sesta e così via sempre raddoppiando sino a raggiungere la sessantaquattresima casa. Il re promise il premio, ma poi si avvide che non aveva grano sufficiente per mantenere tale promessa.

Infatti, la somma è un numero molto grande $2^{64}-1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$

Questo numero deve essere moltiplicato per il peso medio di un chicco di grano (circa 0,0648 grammi), si ottiene il ragguardevole peso di circa 1000 miliardi di tonnellate.

Non si conosce la conclusione della faccenda. Alcuni narrano che il re nomina Sissa suo consigliere e compagno di scacchi altri che il re fece tagliare la testa a Sissa per nascondere la vergogna di non aver potuto tenere fede alla propria parola. Sicuramente Sissa non ebbe quello che chiedeva.

2 ⁰	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷
2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰	2 ¹¹	2 ¹²	2 ¹³	2 ¹⁴	2 ¹⁵
2 ¹⁶	2 ¹⁷	2 ¹⁸	2 ¹⁹	2 ²⁰	2 ²¹	2 ²²	2 ²³
2 ²⁴	2 ²⁵	2 ²⁶	2 ²⁷	2 ²⁸	2 ²⁹	2 ³⁰	2 ³¹
2 ³²	2 ³³	2 ³⁴	2 ³⁵	2 ³⁶	2 ³⁷	2 ³⁸	2 ³⁹
2 ⁴⁰	2 ⁴¹	2 ⁴²	2 ⁴³	2 ⁴⁴	2 ⁴⁵	2 ⁴⁶	2 ⁴⁷
2 ⁴⁸	2 ⁴⁹	2 ⁵⁰	2 ⁵¹	2 ⁵²	2 ⁵³	2 ⁵⁴	2 ⁵⁵
2 ⁵⁶	2 ⁵⁷	2 ⁵⁸	2 ⁵⁹	2 ⁶⁰	2 ⁶¹	2 ⁶²	2 ⁶³

Leonardo Fibonacci nel *Liber Abaci* (1202) per ottenere la somma totale dei chicchi di grano procede con il calcolare dapprima i primi otto numeri della prima riga della scacchiera (ossia 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 e 128) la cui somma 255 è minore di un'unità del numero successivo 256. Moltiplica 256×256 ottenendo 65536 minore di un'unità della somma dei numeri delle prime due righe. Moltiplica 65536×65536 ottiene 4294967296 minore di un'unità della somma dei numeri delle quattro righe. Infine, moltiplica

$$4294967296 \times 4294967296 = 18446744073709551616$$

che supera di un'unità la somma di tutti i numeri (e quindi i chicchi di grano) della scacchiera.

Racconto di Natale

“Al Circolo d'Ixe in val di Zeta venne giocata alcuni anni or sono una memorabile partita di scacchi. Nella notte di Natale 189..., cosa straordinaria, inverosimile, una scacchiera era posata, con tutti i pezzi al loro posto, su di una tavola. Un uomo, avvilluppato in un grande mantello, passeggiava per la sala guardando dalla finestra, tutta spalancata malgrado il freddo. Ad un tratto apostrofò un personaggio di fuori:

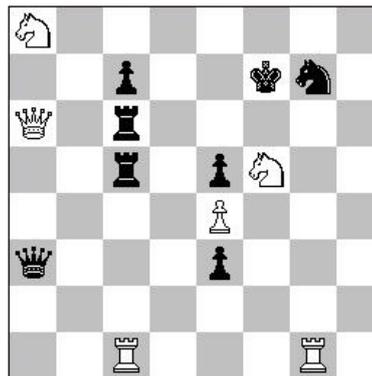
«Ohè! Volete fare una partita a scacchi?»

«Grazie! – rispose questi- ho da fare la mia distribuzione»

«Oh! Ci avete tempo. Una partita leggera?»

«Va bene, sia pure: ma una sola»

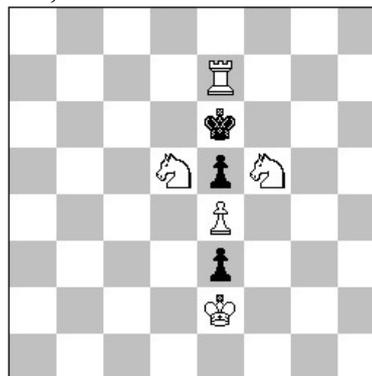
Il personaggio interpellato dall'uomo dal mantello altri non era che il buon vecchio Natale, facilmente riconoscibile per la lunga barba bianca e per la gerla ancora tutta piena. I due giocatori si sedettero davanti alla scacchiera ed a domanda dell'uomo dal mantello fissarono una posta per la partita. Quella del buon vecchio Natale fu la sua gerla con il contenuto. La partita, giocata rapidamente da ambedue, presentava dopo un quarto d'ora la posizione:



L'uomo dal mantello, che aveva il Bianco, annunciò matto in sette mosse e giocò:

1. T:g7+ Il vecchio Natale rispose Rf6. Seguirono
2. D:c6+, T:c6 3 T:c6+, Dd6
4. T:d6+, c:d6 5. Cc7, d5
6. C:d5+, Re6.

L'uomo dal mantello prese in mano la Torre, ma al momento in cui la posava in e7 pronunciando «scacco matto!», scomparve, non lasciando dietro di sé che un caratteristico odore di zolfo, mentre il pezzo, leggermente abbruciato, cadeva sulla scacchiera.



L'uomo dal mantello era Satana, che aveva progettato di impedire al buon vecchio Natale di fare la sua solita distribuzione. Il buon vecchio era stato molto imprudente ed anche colpevole; ma la Provvidenza vegliava. Nei suoi disegni imperscrutabili, ai quali noi prestiamo la parola di «caso», essa aveva voluto che, per il matto, i pezzi raffigurassero una Croce, e l'apparizione di questo segno aveva ricacciato Satana in fondo all'inferno.

Perché questa storia potesse illustrare una teoria della giustizia umana, sarebbe stato sufficiente che la sua autenticità fosse

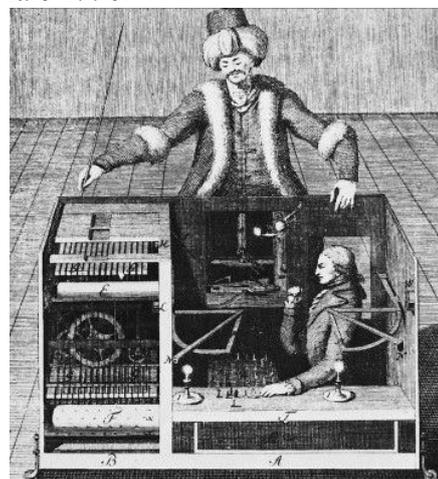
indiscutibile. Ora al Circolo d'Ixe in val di Zeta vi mostreranno la Torre leggermente carbonizzata. E' certo in ogni caso, però, che in quell'anno, come negli altri, i fanciulli trovarono nelle loro piccole scarpe i regali incantatori, fra i quali si mescola qualche pezzo di carbone, come per insegnarci fin dai nostri primi anni che non vi è vita di piacere o di gioia, in cui non si infiltri un pò di dolore.”

Il racconto è tratto da *Il libro completo degli scacchi* (Mursia, 5^a ed. 1973, pp.453-454) dei maestri internazionali Adriano Chicco (1907-1990) e Giorgio Porreca (1927-1988). Il problema scacchistico fu ideato da Godfrey Charles Gumpel (1835-1921) mentre la novella, scritta da L. Bonet, fu pubblicata per la prima volta sul bollettino francese del *Cercle Philidor* a Parigi nel dicembre 1905.

Automi scacchistici

Il fisco ungherese Wolfgang von Kempelen (1734-1804) costruì l'automa giocatore di scacchi, denominato *Il Turco*, nel 1769. Nel 1836 Edgar Allan Poe (1809-1849) pubblica un articolo sul *Southern Literary Messenger*, che diventerà racconto nel 1850, dove spiega il falso meccanismo. La macchina verrà distrutta in un incendio a Philadelphia nel 1854. Il grande successo di pubblico e curiosità portarono alla realizzazione di altri marchingegni simili. Quello dell'italiano Giuseppe Morosi (1772-1840) del 1797 per il duca di Toscana Ferdinando III d'Asburgo-Lorena (1769-1824) e di Daniel Walker del 1827 denominato *The American Chessplayer automaton*. Seguì quello costruito dall'inglese Charles Arthur Hooper (1825-1900) del 1865: una copia del *Il Turco* che chiamo *Ajeeb* che andò distrutto, anch'esso in un incendio, a Coney Island nel 1929. Nel 1876 l'alsaziano Godfrey Charles Gumpel (1835-1921), l'autore del problema di Natale, creò l'automa scacchistico *Mephisto* che a differenza dei precedenti, azionati da un giocatore posto nel loro interno, veniva manovrato, tramite un collegamento elettromeccanico, da un giocatore situato in una

stanza vicina. Siamo nel 1912 quando Leonardo Torres y Quevedo (1852-1936) realizza *El Ajedrecista*, ancora oggi possibile vederla (nella versione migliorata dal figlio Gonzalo nel 1920) in azione al Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos di Madrid. Usa elettromagneti e riesce a giocare autonomamente alcuni finali. Dopo questi primordi si arriva nell'era degli elaboratori elettronici con *Maniac 1* (1950) e, dagli anni Sessanta del XX secolo, ai sempre più potenti programmi scacchistici (*Fritz*, *Deep Blue*, *Deep Junior*, etc.). *Deep Blue* fu il primo computer a vincere una partita a scacchi contro l'allora Campione del Mondo l'azerbaigiano Garry Kasparov: era il 10 febbraio 1996.



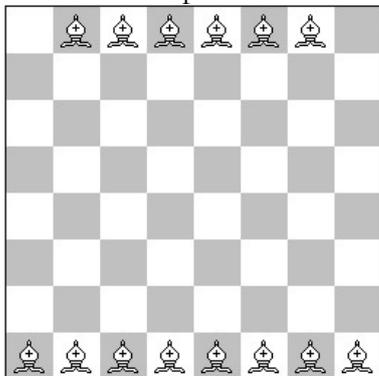
L'automa scacchistico *Il Turco* (1769)



L'automa scacchistico *Ajeeb* (1865)

Problema degli alfieri pacifici

Il numero massimo di alfieri che si possono porre su di una normale scacchiera 8x8 senza minacciarsi reciprocamente è 14.

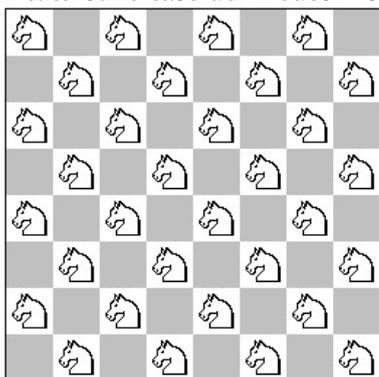


La soluzione del problema degli alfieri:
a1 b1 b8 c1 c8 d1 d8 e1 e8 f1 f8 g1 g8 h1

Per una generica scacchiera di $n \times n$ case la soluzione è data da $2n-2$ alfieri. Il numero massimo delle distinte combinazioni per $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ alfieri è rispettivamente 1, 4, 26, 260, 3368, 53744, 1022320, 22522960, ...

Problema dei cavalli pacifici

il numero massimo di cavalli che si possono porre su di una normale scacchiera 8x8 senza minacciarsi reciprocamente è 32. Basta piazzarli tutti sulle case del medesimo colore.

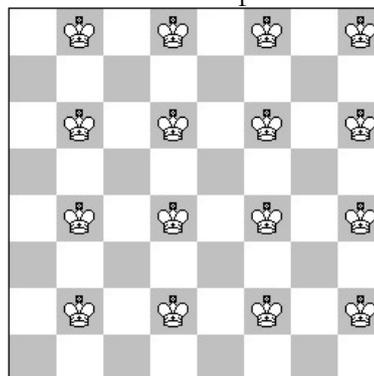


La soluzione del problema dei cavalli:
a2 a4 a6 a8 c2 c4 c6 c8 e2 e4 e6 e8 g2 g4 g6 g8
b1 b3 b5 b7 d1 d3 d5 f1 f3 f5 f7 h1 h3 h5 h7

Per una generica scacchiera di $n \times n$ case la soluzione è data da $\frac{1}{2}n^2$ (se $n > 2$ pari) oppure $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$ (se $n > 1$ dispari) cavalli.

Problema dei re pacifici

Per i re, il numero massimo di re che si possono porre su di una normale scacchiera 8x8 senza minacciarsi reciprocamente è 16.



La soluzione del problema dei re:

b2 b4 b6 b8 d2 d4 d6 d8 f2 f4 f6 f8 h2 h4 h6 h8

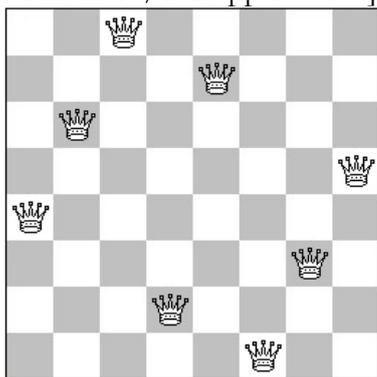
Per una generica scacchiera di $n \times n$ case la soluzione è data da $\frac{1}{4}n^2$ (se n pari) oppure $\frac{1}{4}(n+1)^2$ (se n dispari) re.

Problema delle regine pacifiche

Qual è il numero massimo di regine che si possono porre su di una normale scacchiera 8x8 senza minacciarsi reciprocamente? La risposta è 8. Il quesito venne posto per la prima volta nel 1848 allorquando la rivista tedesca *Schachzeitung* pubblicò la richiesta del filologo classico tedesco August Nauck (1822-1892) che propose anche a Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss, in collaborazione con l'astronomo Heinrich Christian Schumacher (1780-1850), impiegò un paio d'anni di lavoro. Servendosi della teoria dei gruppi trovarono le seguenti 12 posizioni base che risolvono il problema:

- a4 b1 c5 d8 e2 f7 g3 h6
- a4 b1 c5 d8 e6 f3 g7 h2
- a4 b2 c5 d8 e6 f1 g3 h7
- a4 b2 c7 d3 e6 f8 g1 h5
- a4 b2 c7 d3 e6 f8 g5 h1
- a4 b2 c7 d5 e1 f8 g6 h3
- a4 b2 c8 d5 e7 f1 g3 h6
- a4 b2 c8 d6 e1 f3 g5 h7
- a4 b6 c1 d5 e2 f8 g3 h7
- a4 b7 c5 d2 e6 f1 g3 h8
- a4 b8 c1 d5 e7 f2 g6 h3
- a4 b6 c8 d2 e7 f1 g3 h5

Ad eccezione della dodicesima soluzione base simmetrica che origina altre tre sole soluzioni derivate, ciascuna soluzione base ne fornisce altre tre per rotazione della scacchiera e altre quattro per riflessione su uno dei quattro lati portando il totale delle possibili soluzioni differenti a 92. Il problema venne studiato anche dall'inglese James Whitbread Lee Glaisher (1848-1928) dell'università di Cambridge e il tedesco Gunther dell'università di Lipsia che fornirono, nel 1874, una dimostrazione basata sulla teoria dei determinanti. Dimostrando così che queste 92 soluzioni sono le uniche possibili. Del problema si occuparono anche gli italiani Libero Puccio [*Le permutazioni condizionate ed il gioco delle otto regine*, Periodico delle Matematiche n. 5/1925 pp.31-39] e Giuseppe Sforza [*Una regola per il gioco delle n regine quando n è primo*, Periodico delle Matematiche n. 18/1925 pp.107-109].



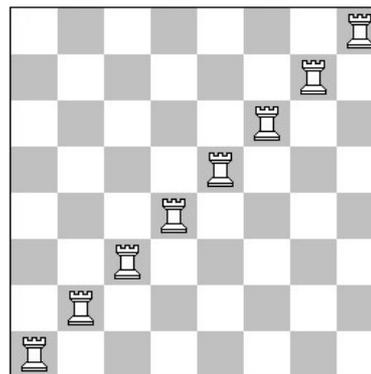
Una delle soluzioni del problema della Regina. La soluzione base a4 b6 c8 d2 e7 f1 g3 h5.

Per una generica scacchiera di $n \times n$ case la soluzione è data da n regine (con $n \geq 4$). Il numero dei differenti modi con i quali possono essere posizionate le regine è dato dalla sequenza: 1, 0, 0, 2, 10, 4, 40, 92, 352, 724, 2680, 14200, ... mentre il numero delle distinte rotazioni e riflessioni è dato dalla sequenza: 1, 0, 0, 1, 2, 1, 6, 12, 46, 92, 341, 1787, ...

Problema delle torri pacifiche

Per le torri, il numero massimo di torri che si possono porre su di una normale scacchiera

8x8 senza minacciarsi reciprocamente è 8 e le possibili soluzioni sono $8!$ ossia 40320.



Una soluzione del problema delle torri:
a1 b2 c3 d4 e5 f6 g7 h8

Per una generica scacchiera di $n \times n$ case la soluzione è data da n torri. Il numero totale di combinazioni è dato da $n!$. Il numero di rotazioni e riflessioni è dato dalla sequenza 1, 1, 2, 7, 23, 115, 694, 5282, 46066, 456454, 4999004, 59916028, ...

Per il numero minimo del pezzo in esame necessario ad attaccare od occupare tutte le case di una scacchiera 8x8 abbiamo invece:

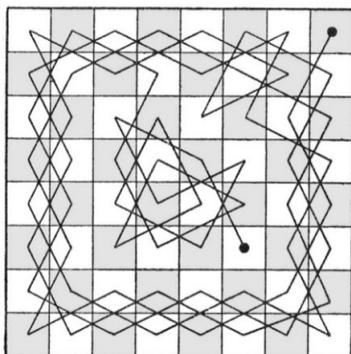
	numero massimo	numero minimo
alfieri	14	8
cavalli	32	12
re	16	9
regine	8	5
torri	8	8

Giro completo del cavallo

L'antichissimo problema del giro del cavallo consistente nel far percorrere al cavallo tutte le 64 case della scacchiera transitandovi una sola volta fu proposto per la prima volta dal matematico indiano Brahmagupta (VI-VII secolo d.C.). Il giro viene detto chiuso se la casa di arrivo è a distanza di salto di cavallo da quella di partenza, aperto nel caso contrario. Molte soluzioni originano figure geometriche oltre dei quadrati semimagici. Ricordando che un quadrato magico si ha quando la somma dei numeri in ogni linea (orizzontale, verticale e nelle due diagonali principali) è sempre la stessa e corrisponde

alla costante magica $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$ con n l'ordine del quadrato in considerazione, ancora oggi non si è ottenuto un quadrato magico completo per una scacchiera 8x8 la cui costante è 260.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	48	34	59
68	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	56	33
1	26	16	20	7	32	43	22
18	19	8	25	14	21	6	31
27	2	47	10	29	4	23	32
15	9	28	3	24	11	30	6



Esempio di figure geometriche generate dal giro completo del cavallo.

Il giro completo del cavallo ammette un numero elevato di soluzioni il cui valore ancora oggi non è noto. Tuttavia, viene calcolato che il numero di soluzioni possibili sia inferiore al numero delle combinazioni di 168 oggetti presi 63 a 63, ma è superiore al numero 122802512.

Molti matematici e scacchisti si sono cimentati nello studio del problema del giro di cavallo. Tra i più rilevanti si menzionano Leonhard Euler (1707-1783) [*Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse* (1766) su lavori del 1759], Alexandre Theophile Vandermonde (1735-1796) [*Problems of Situation* (1774) su lavori del 1771], H.C. Warnsdorff [*Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung* (1823)], Karl Andreevic Friedrich von Jänisch (1813-1872)

[*Traité des Applications de l'Analyse mathématique au jeu des echecs* (1862)], De Hijo, Peter Mark Roget (1779-1869) nel 1840, Parmentier, Teodoro Ciccolini [*Del cavallo degli scacchi per opera di Teodoro Ciccolini marchese di Guardigliare* (1836)], Cosimo Alessandro Collini (1727-1806) [*Solution du Problème du Cavalier au Jeu des Echecs* (1773)], Paolo Volpicelli (1804-1879) [*Soluzione completa e generale mediante la geometria di situazione del problema relativo alle corse del cavallo sopra qualunque scacchiera* (1872)], Ugo Papa [*Il problema del cavallo degli scacchi* (1920)], Maurice Kraitchik (1882-1957) [*La mathématique des jeux ou récréations mathématiques* (1930)] e del farmacista G. D'Hooghe [*Les secrets du Cavalier* (1962)].

Per finire: il numero dei quadrati che si possono vedere su una scacchiera $n \times n$ è data dalla somma di quadrati degli n numeri naturali, ossia

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

che per una scacchiera 8x8 equivale a $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$.

Bibliografia

- AA.VV. *L'Italia Scacchistica* Rivista fondata nel 1911 a Milano
- Alighieri D., *La Divina Commedia*, Testo critico della Società Dantesca Italiana, Hoepli, Milano XXI ediz. 1979
- Chicco A.; Porreca G., *Il libro completo degli scacchi*, Mursia, Milano 1973
- De Toffoli D. – Colovini L., *Il grande libro degli scacchi*, Sperling & Kupfer, Milano 2009
- Gheri I., *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano 1986
- Shenk D., *Il gioco immortale. Storia degli scacchi*, Oscar Mondadori, Milano 2009
- Weisstein Eric
<http://mathworld.wolfram.com/Chess.html>
- White A.C., *Sam Loyd e i suoi scacchi*, Messaggerie Scacchistiche, Brescia 2000.

134. Misure di ortogonalità di poligoni desunti da dati territoriali

Maurizio Rosina, Antonio Bottaro, Fabrizio Minuti
Sogei – Società Generale di Informatica – Roma

Introduzione

Operando su dati di sintesi vettoriali rappresentati da poligoni monociclici piani non intrecciati desunti da dati territoriali, si vuole proporre un metodo che ne permetta un loro ordinamento sulla base di una misura correlata alle perpendicolarità insite nella loro forma; ovvero ne permetta un ordinamento sulla base di una metrica che fornisce una misura (normalizzata) della distanza tra ciascun poligono originario ed un corrispondente poligono ortogonale che lo approssima. Il calcolo della misura della distanza verrà sviluppato sulla base di poligoni ortogonali, denominati nel seguito Orthogonal Bounded Polygons – OBP, che approssimano i poligoni originari. Verranno proposte due diverse tipologie di OBP: gli Orthogonal Bounded Wrapped Polygons – OBWP, ottenuti tramite operazioni locali condotte sui singoli spigoli di ciascun poligono originario e gli Orthogonal Bounded convex Hull Polygons – OBHP, che avranno le caratteristiche di contenere al proprio interno sia tutte le concavità presenti nei poligoni originari che i rispettivi poligoni OBWP. L'applicazione di una metrica rigorosa a specifiche coppie di poligoni permetterà inizialmente di giungere a determinare quanto ciascun poligono ortogonale OBWP è distante rispetto al poligono originario. Successivamente, il calcolo della misura della distanza tra i poligoni OBWP e OBHP relativi ad uno stesso poligono originario, permetterà di avere conoscenza di quanto l'aver voluto includere tutte le concavità presenti nel poligono originale nel poligono OBHP ha comportato in termini di distanza tra i due poligoni OBHP e OBWP. Tutte le tecniche proposte, sia per il calcolo dei poligoni ortogonali associati ai rispettivi poligoni originali che in merito alla metrica adottata, sono state individuate con lo scopo di poter essere implementate tramite un kernel applicativo che fruisce di funzionalità ed algoritmi standard - o di facile implementazione - di manipolazione di poligoni, ovvero di algoritmi e metodi robusti, molti dei quali già presenti nei principali package geometrico/cartografici.

Gli Orthogonal Bounded Polygons

La tecnica utilizzata per ottenere un poligono ortogonale che approssima un poligono originario monociclico orientato e non intrecciato, è stata quella di calcolare per ciascuno spigolo del poligono originario il relativo minimo box di contenimento orientato [3]. Per *minimo box di contenimento orientato di uno spigolo* si intende il minimo rettangolo contenente lo spigolo, che presenta i quattro lati rispettivamente paralleli agli assi del sistema di riferimento e che risulta essere orientato in verso antiorario (Minimum Bounding Oriented Rectangle – MBOR) [cfr. Figura 1].



Figura 1 - esempio di MBOR di uno spigolo

Dato un poligono originale monociclico orientato e non intrecciato p , composto da n vertici ed e_i , $i=1,n$; $n \geq 3$ spigoli, la procedura utilizzata nel calcolo del poligono ortogonale $OBWP(p)$ che lo approssima e che sempre lo contiene risulta la seguente [cfr. Figura 2]:

- calcolare il minimo box di contenimento orientato $MBOR(e_i)$ per ciascuno spigolo e_i , escludendo dal calcolo gli spigoli che risultano già essere paralleli agli assi del sistema di riferimento;
- calcolare il poligono unione di tutti gli $MBOR$ calcolati: $SBOX = \bigcup_{i=1,k} MBOR(e_i)$; $k \leq n$;
- calcolare il poligono $OBWP(p)$ come unione tra il poligono originario p e il poligono $SBOX$: $OBWP(p) = p \cup SBOX$.

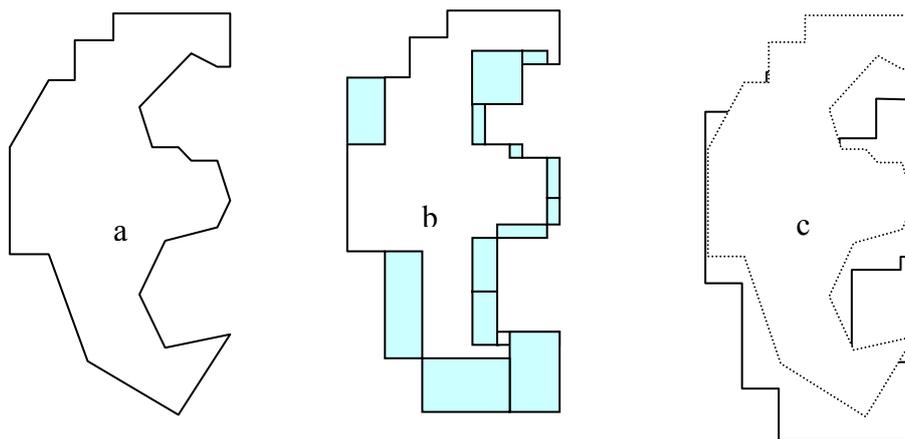


Figura 2 – a) il poligono originario; b) i box di contenimento costruiti sugli spigoli; c) il poligono ortogonale $OBWP$ risultante, sempre contenente il poligono originario

Nel caso di presenza di spigoli del poligono originario paralleli agli assi coordinati il poligono $SBOX$ può divenire un poligono policiclico composto da più isole. Si noti, inoltre, che qualora il poligono originario p sia già totalmente ortogonale, il poligono $OBWP(p)$ risulta essere uguale al poligono originario. Inoltre il poligono $OBWP(p)$, che può risultare anche policiclico con laghi/buchi (holes) al proprio interno, ha la proprietà di contenere sempre il poligono originario, ovvero: $p \subseteq OBWP(p)$.

Una seconda tipologia di poligoni ortogonali è quella che abbiamo definita come *Orthogonal Bounded convex Hull Polygons* – $OBHP$. Dato un poligono originario p del quale abbiamo calcolato il relativo $OBWP(p)$, vogliamo giungere ad individuare un ulteriore poligono ortogonale, che chiameremo $OBHP(p)$, che contenga sempre sia tutte le eventuali concavità presenti nel poligono originale che il poligono $OBWP(p)$.

Dato un poligono originale monociclico, orientato e non intrecciato p , composto da n vertici, con $n \geq 3$, la procedura per ottenere il poligono $OBHP(p)$ risulta essere la seguente:

- calcolare il poligono convex-hull $H(p)$ sulla base dei vertici del poligono originario p ;
- calcolare il poligono $OBWP$ del poligono convex-hull appena ottenuto, applicando i passi a, b e c precedentemente descritti al poligono $H(p)$, ovvero $OBHP(p) = OBWP(H(p))$.

Il poligono $OBHP(p)$ così ottenuto ha la caratteristica di contenere sempre il poligono $OBWP(p)$ [cfr. Figura 3], ovvero $OBWP(p) \subseteq OBHP(p)$, valendo l'eguaglianza nel caso il poligono originario sia un poligono convesso. Infatti se il poligono originario è un poligono convesso, il

suo convex-hull risulta essere il poligono stesso, ed i poligoni ortogonali $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ risultano anch'essi tra loro uguali. Si noti, inoltre, che il poligono $OBHP(p)$ assorbe - ovvero contiene sempre al proprio interno -, eventualmente esaltandone l'area, le concavità presenti nel poligono $OBWP(p)$.

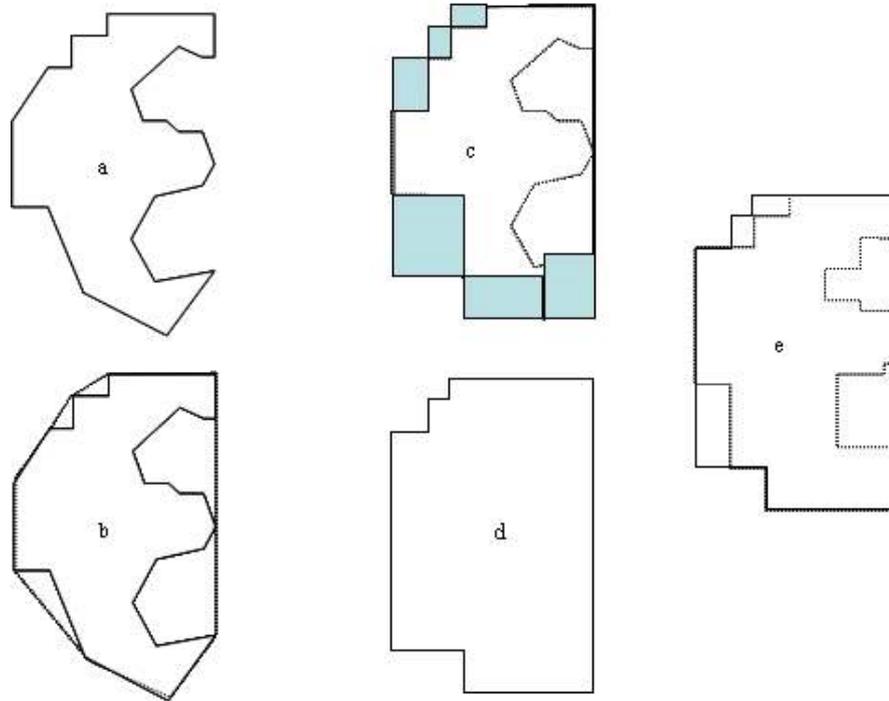


Figura 3 - a) il poligono p originario; b) il convex-hull di p , ovvero $H(p)$; c) la costruzione del poligono $OBWP(H(p))$ contenente il poligono originario; d) il poligono $OBHP(p)$ ottenuto; e) il poligono $OBHP(p)$ con evidenziato all'interno il poligono $OBWP(p)$

Il poligono $OBHP(p)$ si propone quindi come una *semplificazione*, sempre ortogonale, del poligono $OBWP(p)$ [cfr. Figura 3 - e)].

Verifica e validità di predicati calcolati sugli OBWP

Le tecniche di verifica di predicati su oggetti *semplificati* che approssimano l'oggetto originale, con i risultati immediatamente validi anche per gli oggetti originali, sono estremamente diffuse. Si pensi, ad esempio, alla tecnica di verifica della possibile intersezione tra segmenti di retta attuata tramite semplici confronti operati sui relativi rispettivi minimi box di contenimento. Utilizzeremo tali tecniche, applicate ai poligoni $OBWP$ e $OBHP$ per ottenere risultati validi anche per i rispettivi poligoni originali.

Dati due poligoni p e q , qualora risultasse verificato che $OBWP(p) \cap OBWP(q) = \emptyset$, ne conseguirebbe che sicuramente $p \cap q = \emptyset$. Quindi se risulta *verificato* il predicato di intersezione vuota tra i $OBWP$ di due poligoni qualsiasi, tale predicato risulta anche *automaticamente verificato* per l'intersezione dei due poligoni originali, ciò in quanto i due $OBWP$ contengono sempre i due rispettivi poligoni originari. Viceversa qualora risultasse che $OBWP(p) \cap OBWP(q) \neq \emptyset$, i poligoni originari p e q sarebbero solamente *candidati* ad avere anch'essi intersezione non vuota. Inoltre qualora risultasse verificato che la differenza simmetrica tra il poligono p ed il poligono $OBWP(p)$ fosse l'insieme vuoto, ovvero $p \Delta OBWP(p) = (p - OBWP(p)) \cup (OBWP(p) -$

$p) = \emptyset$ ne conseguirebbe l'eguaglianza tra il poligono originario e il corrispondente $OBWP(p)$, ovvero l'essere il poligono originario già ortogonale. Viceversa, qualora la differenza simmetrica risultasse diversa dall'insieme vuoto, ovvero $p \Delta OBWP(p) \neq \emptyset$ ciò indicherebbe la presenza di parti non comuni tra il poligono p originario ed il corrispondente poligono ortogonale $OBWP(p)$, ovvero indicherebbe che i due poligoni sono *differenti*. Proprio una *misura* normalizzata di tale differenza verrà nel seguito utilizzata per l'ordinamento dei poligoni originari.

Sulla coppia di poligoni $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ possono, infine, essere condotte e valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle formulate per la coppia dei poligoni p e $OBWP(p)$ in merito ai predicati di intersezione e di differenza simmetrica.

L'Orientamento del Poligono Originario

L'intento è quello di giungere a poligoni $OBWP$ che replichino, quanto più possibile, i parallelismi e le perpendicolarità tra gli spigoli che risultano già presenti nel poligono originale. D'altronde la costruzione dei poligoni $OBWP$ è dipendente dagli orientamenti dei poligoni originari, ovvero da quanti e quali spigoli dei poligoni originali risultano paralleli agli assi coordinati. A tal fine è conveniente premettere al calcolo dei poligoni $OBWP$ e $OBHP$ una fase che permetta di individuare un nuovo orientamento, tramite una opportuna rotazione, del poligono originale. Un criterio per l'individuazione della rotazione da applicare al poligono originario è quello di individuare un nuovo orientamento del poligono originale rispetto al quale risulti massima la somma delle lunghezze degli spigoli del poligono perpendicolari e paralleli agli assi coordinati. Individuato tale angolo α di rotazione, la matrice $R(-\alpha)$ sarà quella da applicarsi alle coordinate del poligono p originario, espresse come vettori riga in coordinate omogenee normalizzate, per ottenere il voluto nuovo orientamento del poligono originario (cfr. Nota 1). Il poligono $p^* = pR(-\alpha)$ risulterà quindi quello ruotato in modo ottimale al fine di poter successivamente giungere a costruire un poligono ortogonale $OBWP(p^*)$ che replichi, quanto più possibile, i parallelismi e le perpendicolarità tra gli spigoli che risultano già presenti nel poligono originale.

L'Orientamento degli Orthogonal Bounded Polygons

I poligoni $OBWP(p^*)$ e $OBHP(p^*)$, costruiti sul poligono originario opportunamente ruotato, devono comunque essere assoggettati ad una trasformazione di rotazione uguale ed opposta per posizzarli coerentemente al poligono originario. [cfr. Figura 4].

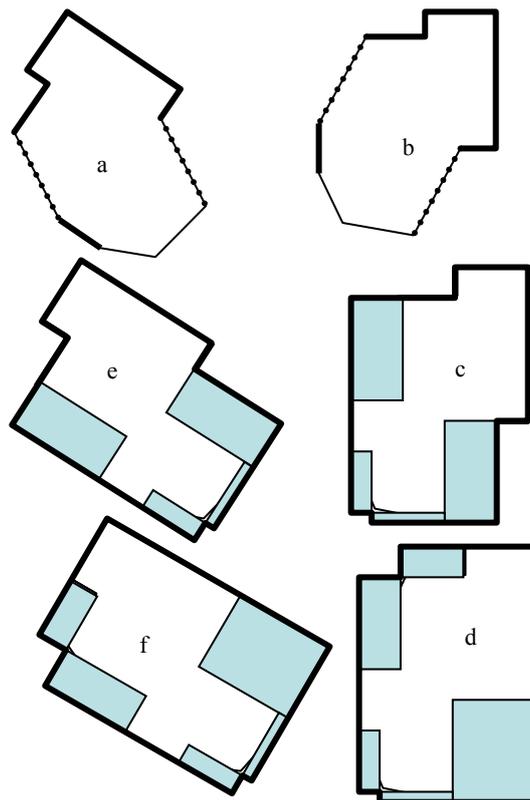


Figura 4 - a) il poligono originario con evidenziati gli spigoli tra loro paralleli ed ortogonali; b) il poligono originale ruotato; c,d) la costruzione dei poligoni $OBWP(p^*)$ e $OBHP(p^*)$; e,f) i poligoni $OBWP(p^*)$ e $OBHP(p^*)$ ruotati tramite la matrice di rotazione inversa della precedente, quindi orientati coerentemente con il poligono originario

Essi divengono, quindi, poligoni che hanno la proprietà di presentare spigoli tra loro tutti paralleli o perpendicolari, ed i predicati precedentemente individuati sulle varie coppie di poligoni originali e rispettivi poligoni ortogonali $OBWP$ e $OBHP$, continuano a valere anche quando i poligoni $OBWP$ e $OBHP$ sono coerentemente orientati come i rispettivi poligoni originari, ciò in quanto continuano a valere le proprietà che il poligono originario è sempre contenuto nel proprio $OBWP$ e che il poligono $OBWP$ è sempre contenuto nel proprio $OBHP$, ovvero che $P \subseteq OBWP(p) \subseteq OBHP(p)$.

Per tali ragioni nel seguito si utilizzerà la dizione di poligoni $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ sia che tali poligoni siano effettivamente ortogonali, sia che siano solamente poligoni con spigoli tutti tra loro paralleli e perpendicolari coerentemente orientati come i rispettivi poligoni originari. Ovvero la dizione di poligoni $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ comprenderà sempre impliciti i vari processi relativi:

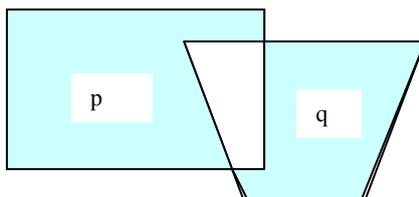
- all'orientamento del poligono originario in modo da massimizzarne, rispetto agli assi coordinati, i parallelismi e le perpendicolarità presenti nella forma;
- alla creazione, sul poligono originale ruotato, dei due poligoni ortogonali $OBWP$ e $OBHP$;
- all'orientamento dei due poligoni ortogonali $OBWP$ e $OBHP$ in modo coerente con il poligono originario.

La metrica

Il concetto di metrica in matematica è strettamente correlato al concetto di distanza. Dati due poligoni p e q è possibile definirne una distanza così definita:

$$d(p, q) = \text{area}((p - q) \cup (q - p)) / \text{area}(p \cup q)$$

La distanza $d(p, q)$ è data quindi dal valore (normalizzato nell'intervallo $[0 \dots 1]$, estremi compresi) della somma delle aree delle parti non comuni dei due poligoni p e q , essendo le parti non comuni ottenibili tramite l'operatore di differenza simmetrica tra i due poligoni [cfr. Figura 5].



$$p \Delta q = (p - q) \cup (q - p)$$

Figura 5 – La differenza simmetrica tra due poligoni

Tale metrica è conosciuta come *Normalized Area of Symmetric Differences* – NASD [2], ed è una metrica effettiva in quanto, per ogni possibile scelta di tre poligoni qualsiasi p , q e z , la distanza sopra definita soddisfa le proprietà di:

- non negatività: $d(p, q) \geq 0$;
- uguaglianza ed unicità: $d(p, q) = 0$ se e solo se $p = q$;
- simmetria: $d(p, q) = d(q, p)$;
- validità della disuguaglianza triangolare: $d(p, q) \leq d(p, z) + d(q, z)$.

La NASD presenta, inoltre, ulteriori caratteristiche, assai importanti soprattutto qualora debba essere utilizzata nel contesto di poligoni ottenuti da dati rilevati ed affetti da rumore e/o da imprecisione e/o inaccuratezza nella presa. In particolare tale metrica possiede le caratteristiche di essere poco sensibile a piccole variazioni nel bordo dei poligoni e di essere invariante rispetto a trasformazioni di rotazione, traslazione e di scala.

L'utilizzo della metrica sugli Orthogonal Bouded Polygons

Dato un insieme composto da poligoni piani, monociclici, orientati e non intrecciati, la metrica NASD applicata alle varie coppie composte dal poligono originale e dal suo corrispondente poligono ortogonale OBWP, permette di ordinare i poligoni sulla base delle rispettive distanze rilevate, in un intervallo di valori di distanza normalizzato tara $[0 \dots 1]$, estremi compresi; con la distanza interpretabile come la misura della mancanza di ortogonalità (*orthogonal deficiency*) del poligono originale *rispetto al poligono* OBWP¹. Ad una distanza $d(p, \text{OBWP}(p)) = 0$ corrisponde una eguaglianza tra i due poligoni, in quanto vi è assenza di parti non comuni. Il crescere della

¹ La dizione di *orthogonal deficiency* è stata mutuata dalla definizione di *convex deficiency*. Dati un poligono p ed il corrispondente poligono $H(p)$ rappresentativo della sua copertura convessa, la *convex deficiency* del poligono p , indicata come $D(p)$, è definita come $D(p) = H(p) - p$. Nel nostro caso la *orthogonal deficiency* del poligono p *rispetto al poligono* OBWP(p), indicata come OW(p), è calcolata come la differenza tra i due poligoni, ovvero $\text{OW}(p) = \text{OBWP}(p) - p$. Si noti che mentre la *convex deficiency* è univocamente definita per un poligono, altrettanto non vale per la *orthogonal deficiency*, in quanto il poligono OWBP non risulta essere la univoca minima copertura ortogonale del poligono originario.

distanza sarà dovuto ad un crescere della consistenza (dell'area) delle parti non comuni tra i due poligoni, sino a poter teoricamente giungere ad un valore massimo della distanza, eguale ad 1, indicativo di due poligoni disgiunti, ovvero tutti composti di parti non comuni. Tale valore massimo è, nel nostro caso, un valore solamente teorico; infatti i poligoni a cui verrà applicata la NASD saranno sempre poligoni per i quali varrà che $p \subseteq OBWP(p) \subseteq OBHP(p)$, ovvero non potranno sussistere, nel nostro caso, poligoni disgiunti.

La differenza simmetrica, su cui si basa la NASD, applicata ai poligoni p e $OBWP(p)$ risulta $p \Delta OBWP(p) = (p - OBWP(p) \cup OBWP(p) - p)$, che si riduce al solo secondo termine $OBWP(p) - p$ ricordando che p è sempre contenuto in $OBWP(p)$, ovvero che $p \subseteq OBWP(p)$, da cui ne discende che $p \Delta OBWP(p) = OBWP(p) - p$. La distanza calcolata tramite la NASD quindi diviene $d(p, OBWP(p)) = (\text{area}(OBWP(p)) - \text{area}(p)) / \text{area}(OBWP(p))$. Il valore $d(OBWP(p), p) * 100$ nel nostro caso quindi rappresenta la differenza percentuale di area tra $OBWP(p)$ e p , ovvero la variazione in percentuale subita dell'area del poligono originario nella sua trasformazione nel poligono ortogonale $OBWP(p)$. Discorso analogo può essere condotto per la coppia di poligoni $OBHP(p)$ e $OBWP(p)$. La $d(OBHP(p), OBWP(p)) * 100$ rappresenta la differenza percentuale di area tra $OBHP(p)$ e $OBWP(p)$.

In ciascun sottoinsieme una distanza notevole tra il poligono $OBHP(p)$ ed il rispettivo $OBWP(p)$ sarebbe, quindi, indicativa della possibilità di utilizzare il poligono $OBHP(p)$ solamente a scale di presentazione molto piccole, ovvero a scale rappresentative di grandi porzioni di territorio, potendo a tali scale essere in ogni caso efficace la rappresentazione del manufatto tramite il poligono semplificato $OBHP(p)$. La presenza di distanze assai contenute tra il poligono p ed il poligono $OBWP(p)$ e tra tale poligono ed il poligono $OBHP(p)$ indicherebbe, viceversa, la possibilità di utilizzare direttamente il poligono $OBHP(p)$ a qualsiasi scala di rappresentazione. Sia nel caso dei poligoni $OBWP$ che dei poligoni $OBHP$ in ogni caso è garantito che i predicati in merito ad intersezioni e differenze simmetriche, risultano validi anche per i rispettivi poligoni originari (ad es. se due $OBHP$ non si intersecano, non si intersecano i due rispettivi $OBWP$ e non si intersecano neppure i due rispettivi poligoni originali).

Nel seguito verranno proposti i risultati di una sperimentazione condotta su poligoni monociclici semplici, desunti da dati territoriali. Sui poligoni in esame verrà operata una sorta di classificazione lessicografica, ordinandoli inizialmente in più sottoinsiemi sulla base di più intervalli di valori di distanza tra i poligoni originari ed i rispettivi poligoni $OBWP$, e successivamente, nell'ambito di ciascun sottoinsieme, ordinandoli ulteriormente sulla base della distanza tra i rispettivi poligoni $OBHP$ e $OBWP$ (cfr. Nota 2).

I Risultati Ottenuti

L'elaborazione è avvenuta su di un campione composto da 185.932 poligoni desunti da dati territoriali, ovvero su di un campione composto da poligoni aventi forme prossime a quelle con le quali vengono descritti e/o rilevati i manufatti localizzati sul territorio. Le immagini riportate nel seguito [cfr. Figura 6 e Figura 7] presentano graficamente i risultati conseguiti su alcuni dei poligoni elaborati.

² Si noti come, nel nostro caso, la differenza simmetrica risulti eguale a quella che è stata precedentemente denominata come *orthogonal deficiency* del poligono originario p rispetto al poligono $OBWP(p)$, infatti $p \Delta OBWP(p) = OBWP(p) - p = OW(p)$, e quindi come la misura della distanza tra i poligoni p e $OBWP(p)$ tramite la NASD fornisca una misura della mancanza di ortogonalità del poligono originario rispetto al poligono $OBWP(p)$.

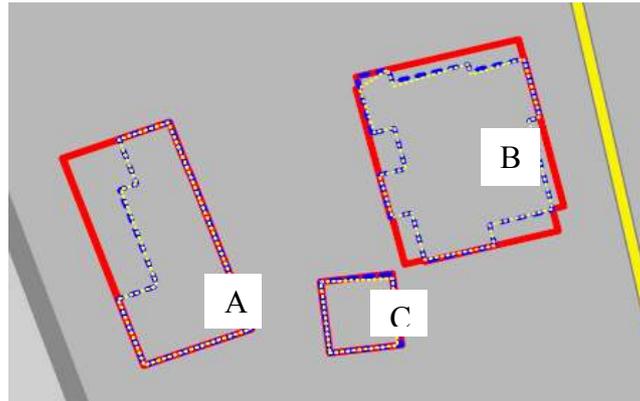


Figura 6 – una visione di sintesi, a piccola scala, di alcuni poligoni originali (bordo in colore giallo puntinato) con sovrapposti i rispettivi poligoni OBWP (bordo blu tratteggiato) e OBHP (bordo rosso); il dettaglio dei manufatti A, B e C è proposto nella figura successiva.

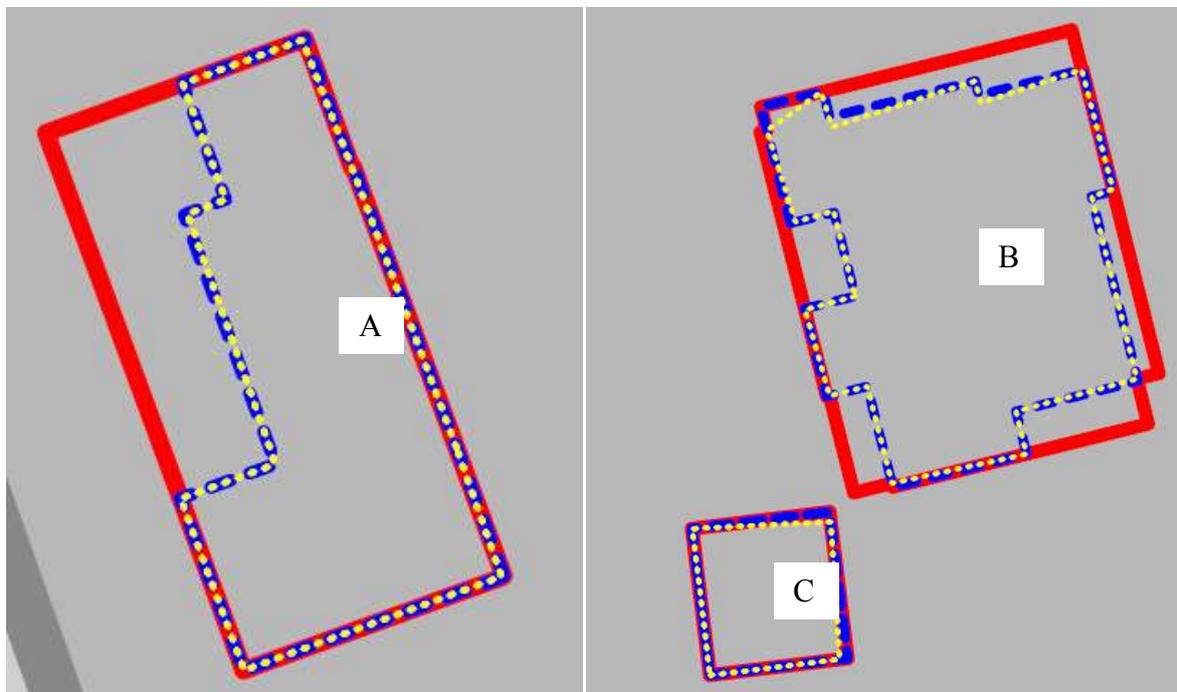


Figura 7 – una visione di sintesi, a grande scala, di tre poligoni originali (bordo giallo puntinato) con sovrapposti i relativi OBWP (blu tratteggiato) e OBHP(rosso).

Per giungere a definire un ordinamento e classificazione dei poligoni sulla base della metrica adottata, si sono inizialmente calcolate le distanze $d(p,OBWP(p))$ e $d(OBHP(p),OBWP(p))$. Il calcolo delle distanze tra i poligoni originari e i rispettivi poligoni OBWP sul campione ha evidenziato [cfr. Figura 8] che circa 58.000 poligoni OBWP presentano una distanza dai poligoni originari minore o uguale a 0,02, ovvero propongono una variazione percentuale subita dell'area del poligono originario nella sua trasformazione nel poligono ortogonale $OBWP(p)$ minore o uguale al 2%, e complessivamente circa 170.000 poligoni rientrano in una variazione percentuale dell'area minore o uguale al 15%.

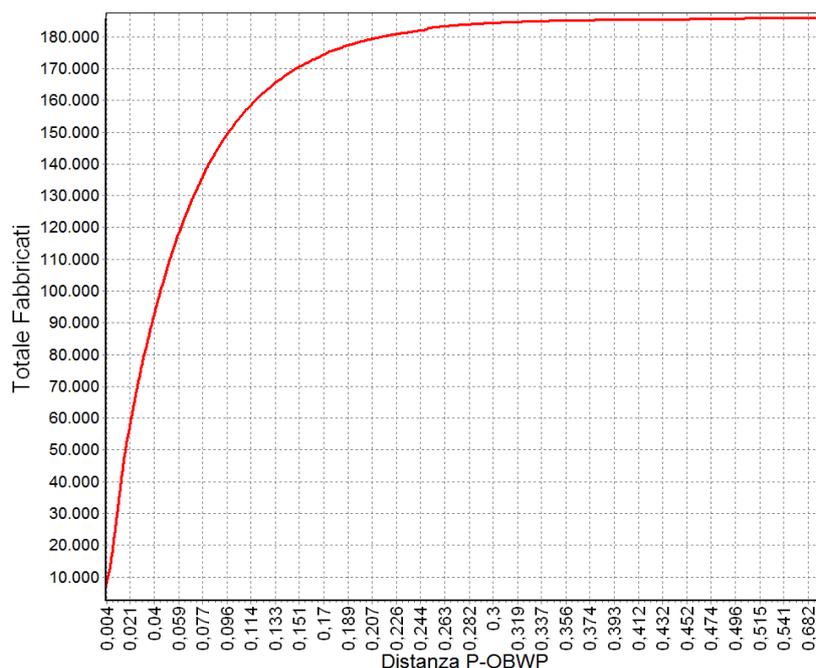


Figura 8 – le distanze tra i poligoni originali e i rispettivi OBWP

Il calcolo delle distanze tra i poligoni OBWP e i rispettivi poligoni OBHP ha evidenziato [cfr. Figura 9] che oltre 100.000 poligoni OBHP presentano una distanza dai rispettivi poligoni OBWP bel al disotto del valore 0,02, ovvero propongono una variazione percentuale subita dell'area del poligono OBWP nella sua trasformazione nel poligono OBHP minore del 2%. Superata tale soglia di numerosità la distanza cresce molto velocemente, permanendo comunque al di sotto di una soglia del 15,1% sino ad una numerosità di circa 150.000 poligoni.

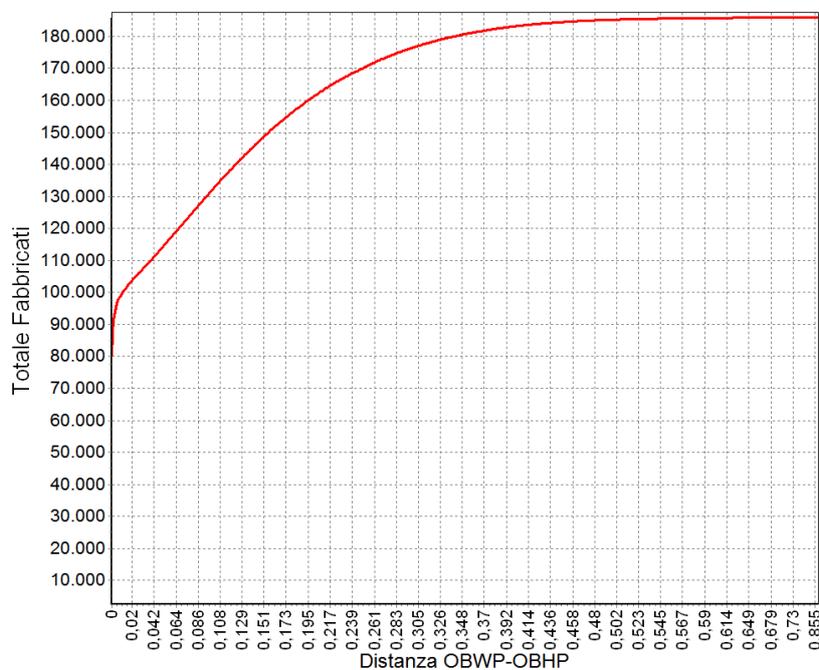


Figura 9 – le distanze tra i poligoni OBWP e i rispettivi OBHP

Una prima disamina dei risultati precedenti permette di affermare che qualora l'ente detentore del dato originario ammettesse una soglia di tolleranza nella variazione dell'area sino al 2%, oltre il 31% dei poligoni originari del campione potrebbe essere sostituito con i rispettivi poligoni OBWP, e qualora l'ente ammettesse una tolleranza di variazione dell'area sino al 15%, oltre il 90% dei poligoni del campione potrebbe essere rimpiazzato dai rispettivi poligoni OBWP. L'analisi della distribuzione delle distanze tra i poligoni OBWP e OBHP permette di dedurre, per il campione in esame, che oltre 100.000 poligoni rappresentativi di manufatti (generalmente fabbricati) sono stati rilevati come poligoni praticamente convessi (variazione dell'area minore del 2%), mentre circa 5.900 poligoni originari propongono una differenza di area tra i rispettivi poligoni OBWP e OBHP maggiore del 34,8%, indicativa della presenza di concavità di una qualche consistenza nel rilievo del poligono originario.

Conclusioni

Nel presente lavoro si sono inizialmente individuate due particolari tipologie di poligoni ortogonali, gli *Orthogonal Bounded Wrapped Polygons* (OBWP) e gli *Orthogonal Bounded convex Hull Polygons* (OBHP), che approssimano i poligoni originari e si sono espresse le proprietà ed i predicati a cui soddisfano. Si è, quindi, introdotta una metrica, la *Normalized Area of Symmetric Differences* (NASD), che ha permesso di condurre un calcolo rigoroso della misura della distanza tra coppie di poligoni. L'attuale lavoro fornisce quindi un corredo completo, sia metodologico che algoritmico, per poter affrontare la tematica della ortogonalizzazione di poligoni semplici e la verifica della distanza tra i poligoni originali ed i rispettivi poligoni ortogonali tramite una metrica rigorosa. Il tutto con la garanzia che i poligoni ortogonali creati contengano sempre i poligoni originari e che i poligoni OBHP contengano sempre i rispettivi poligoni OBWP, ovvero vengano sempre rispettate le condizioni necessarie e sufficienti per poter garantire che specifici predicati una volta verificati sui poligoni ortogonali valgano anche per i rispettivi poligoni originari.

L'analisi condotta su di un campione di dati di sintesi vettoriali di elevata numerosità, relativi a 185.932 poligoni aventi forme prossime a quelle con le quali vengono descritti e/o rilevati i manufatti localizzati sul territorio, ha permesso di ordinare e classificare i poligoni originari sulla base di risultati ottenuti applicando la metrica NASD, evidenziando come oltre il 31% dei poligoni del campione propone una differenza di area rispetto ai relativi poligoni OBWP minore o uguale al 2%, e come oltre il 90% dei poligoni del campione propone una differenza di area rispetto ai relativi poligoni OBWP minore o uguale al 15%.

Gli sviluppi del presente lavoro includono sicuramente la possibilità di una ulteriore classificazione dei poligoni ortogonali OBWP in base alla loro forma confrontata rispetto a pattern predefiniti di forme ortogonali, ovvero rispetto ai cosiddetti *grid orthogonal polygons* (*grid n-gons*) [4]. Lo sviluppo di tale ulteriore classificazione, abbinata ad una banca dati di pattern di *grid n-gons* continuamente automaticamente aggiornata sulla base di sempre nuovi pattern individuati, permetterebbe di giungere ad una quasi pressoché automatica classificazione dei manufatti rilevabili su base territoriale e dotati di elevati parallelismi e perpendicolarità tra gli spigoli.

NOTA 1

La prima problematica da affrontare è quella di individuare gli spigoli del poligono originario che risultano tra di loro paralleli o perpendicolari. Cominciamo con l'osservare che dato un vettore u applicato nell'origine, un qualsiasi altro vettore v applicato nell'origine risulta essere parallelo o perpendicolare ad u se e solo se:

$$|\alpha_u - \alpha_v| = k \quad \text{con } k = 0 \text{ o multiplo di } 90 \quad (1)$$

in cui $0 \leq \alpha_u < 2\pi$ rappresenta l'angolo, orientato in verso antiorario ed espresso in gradi sessadecimali, compreso tra l'asse x ed il vettore u , e $0 \leq \alpha_v < 2\pi$ rappresenta l'angolo, orientato in verso antiorario ed espresso in gradi sessadecimali, compreso tra l'asse x ed il vettore v [cfr. Figura 10]

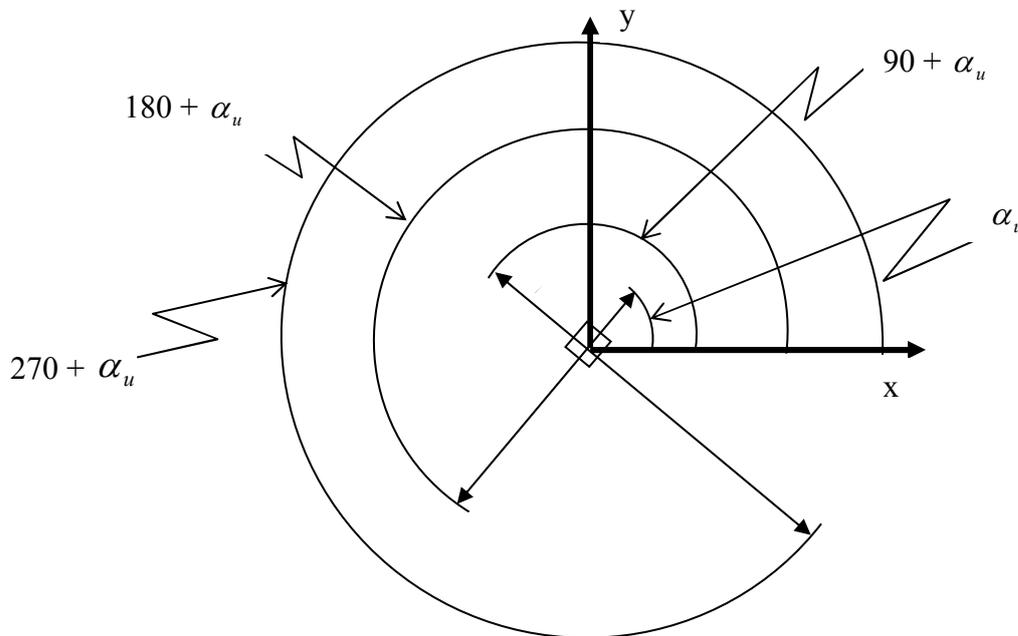


Figura 10 – gli angoli orientati in verso antiorario che l'asse x forma con quattro vettori applicati nell'origine tra loro perpendicolari e paralleli

Dalla (1) discende che dati gli angoli α_u ed α_v , orientati in verso antiorario ed espressi in gradi sessadecimali, che l'asse x forma con due vettori u e v applicati nell'origine, i due vettori risultano tra loro paralleli o perpendicolari se:

$$\alpha_u - \text{int}(\alpha_u / 90) * 90 = \alpha_v - \text{int}(\alpha_v / 90) * 90 \quad (2)$$

La (2) ci fornisce un metodo semplice per determinare il parallelismo e la perpendicolarità tra due vettori applicati nell'origine, comparandone gli angoli antiorari, ricondotti al primo quadrante, che l'asse x forma con i due vettori.

Il calcolo dell'angolo che l'asse x forma con un vettore e , rappresentativo del generico spigolo di un poligono orientato, può essere condotto tramite il calcolo del prodotto scalare tra i versori dei vettori x ed e , ovvero:

$$\text{vers}(x) \bullet \text{vers}(e) = \cos \mathcal{G}_e \text{ da cui ne discende } \mathcal{G}_e = \arccos(\mathcal{G}_e) \quad (3)$$

in cui $0 \leq \mathcal{G}_e \leq \pi$.

Poiché il prodotto scalare tra due vettori individua sempre l'angolo convesso compreso tra i due vettori, tale angolo risulta quello da noi cercato - ovvero l'angolo α_e orientato in verso antiorario che l'asse x forma con il vettore e - solamente quando il $\text{vers}(e)$ giace nel semipiano $y \geq 0$, ed in tal caso $\alpha_e = \mathcal{G}_e$. Quando, viceversa, il $\text{vers}(e)$ giace nel semipiano $y < 0$ il prodotto scalare

individua l'angolo in verso orario che l'asse x forma con il vettore e , quindi l'angolo in verso antiorario da noi cercato è l'esplementare di quello individuato tramite il prodotto scalare, ovvero

$$\alpha_e = 360 - \vartheta_e \text{ [cfr. Figura 11]}. \quad (4)$$

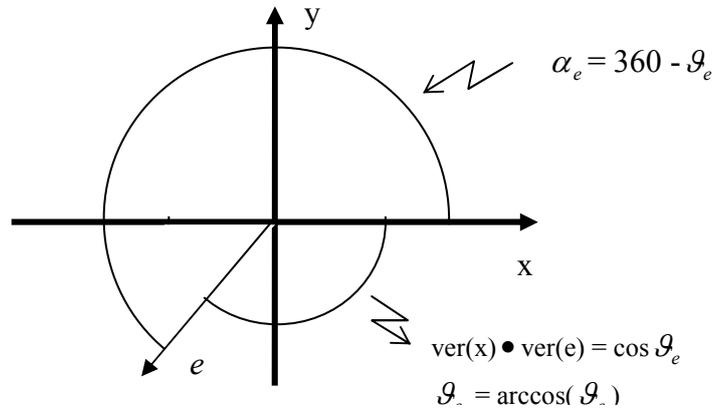


Figura 11 – il calcolo dell'angolo esplementare quando il vettore e giace nel semipiano $y < 0$

Dato un poligono piano p monociclico, orientato in verso antiorario, non intrecciato e composto di n spigoli, l'individuazione degli spigoli che risultano tra di loro paralleli e perpendicolari può quindi essere condotta calcolando per ciascuno spigolo, visto come un vettore orientato, l'angolo orientato in verso antiorario che l'asse delle x forma con esso (cfr. (3)) e verificando se tale angolo è quello cercato o ne deve essere considerato l'esplementare (cfr. (4)). Quindi tramite la (2) si individuano gli spigoli che risultano tra loro paralleli e perpendicolari e si sommano le relative lunghezze. L'angolo rispetto al quale la somma delle lunghezze è massima è quello rispetto al quale il poligono deve essere ruotato affinché risulti massima la somma delle lunghezze degli spigoli del poligono ruotato che risulteranno perpendicolari e paralleli agli assi coordinati. Infine individuato l'angolo α ottimale basterà ruotare il poligono originario p dell'angolo $-\alpha$ per orientarlo in modo tale giungere ad ottenere il relativo poligono OBWP che replichi, quanto più possibile, i parallelismi e le perpendicolarità tra gli spigoli già presenti nel poligono originale [cfr. figura 12].

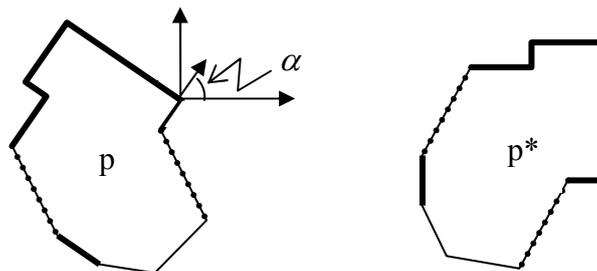


Figura 12 – p) il poligono originario supposto orientato in verso antiorario, con evidenziati gli spigoli tra loro paralleli e perpendicolari e l'angolo ottimale di rotazione α , già ricondotto al primo quadrante; p*) il poligono ruotato dell'angolo $-\alpha$.

La matrice $R(-\alpha)$ da applicarsi alle coordinate del poligono p originario, espresse come vettori riga in coordinate omogenee normalizzate, che realizza la rotazione desiderata [1] risulterà quindi:

$$R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) & 0 \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti, infine, come in presenza di un poligono originario privo di spigoli paralleli o perpendicolari venga individuato quale angolo ottimale di rotazione quello relativo allo spigolo di lunghezza maggiore, e come il criterio proposto tenda a trascurare piccoli disturbi casuali nella regolarità delle figure in quanto privilegia, ad esempio, un unico spigolo *lungo* (che non ha altri spigoli paralleli e perpendicolari) rispetto a numerosi spigoli *molto corti* ancorché tra loro perpendicolari e paralleli (purché ovviamente la somma delle lunghezze degli spigoli corti non ecceda quella dello spigolo lungo), spigoli molto corti sovente dovuti, nel caso di poligoni ottenuti da dati rilevati, da rumore e/o da imprecisione e/o da inaccuratezza nella loro presa.

NOTA 2

Si noti che il procedimento di ortogonalizzazione per giungere ad ottenere i poligoni OBWP opera in modo *locale* su ciascuno spigolo del generico poligono originario, ovvero opera rendendo ortogonale *localmente* ogni singolo spigolo non ortogonale del generico poligono originario [cfr. Figura 2]. Tale procedimento locale non è, quindi, in grado di globalmente *assorbire* eventuali consistenti concavità presenti nel poligono originario. I poligoni OBHP, viceversa, assolvono proprio tale funzione, ovvero permettono di assorbire/contenere le convessità *globalmente* presenti nel poligono originario, ciò in quanto il relativo procedimento di ortogonalizzazione opera sulla minima copertura convessa del poligono originario, ovvero su di un poligono originario reso globalmente convesso avendone *assorbito* le concavità. I poligoni OBHP risultano, quindi, generalmente più *semplificati* e più *compatti* rispetto ai corrispondenti poligoni OBWP, dovendo però talvolta, dipendentemente dalla consistenza delle concavità e dalla tipologia e dall'orientamento del bordo del poligono che le descrive, pagare lo scotto di proporre una elevata distanza sia dal poligono originario che dal poligono OBWP [cfr. Figura 3 - e) e Figura 13].

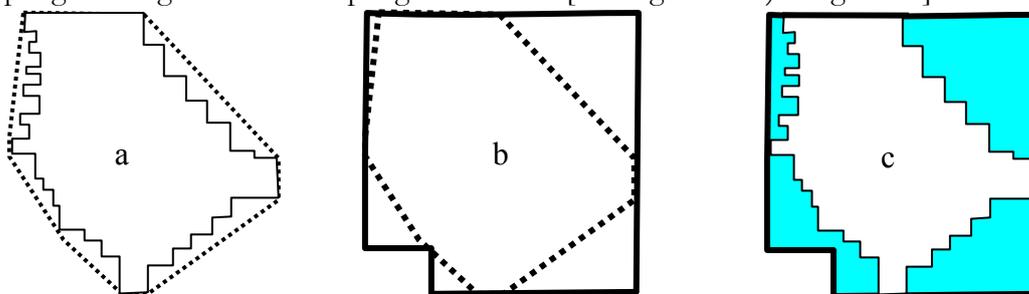


Figura 5 – a) il poligono p originario, supposto già totalmente ortogonale- quindi uguale al suo OBWP(p) - dotato di un bordo particolarmente frastagliato, con tratteggiata la sua minima copertura convessa; b) il poligono ortogonale OBHP(p) costruito sul convex-hull; c) ombreggiata la differenza tra il poligono OBHP(p) ed il poligono OBWP(p)

Solo qualora un poligono originario p fosse già tutto composto di spigoli tra loro perpendicolari e paralleli il suo corrispondente OBWP(p) risulterebbe essere uguale al poligono originario, e quindi la distanza $d(p,OBWP(p))$ risulterebbe essere pari a zero. Inoltre, solo nel caso di un poligono originario p totalmente privo di concavità, ovvero di un poligono originario convesso, i relativi poligoni OBWP(p) e OBHP(p) risulterebbero uguali e la loro distanza risulterebbe essere uguale a zero.

Bibliografia

- [1] Foley, van Dam, Feiner, Highes - *Computer Graphics - Principles and practice* - second edition - pp. 220-221 - Addison-Wesley, (1990)
- [2] Xu Yaowu, E. Saber, A.M. Tekalp – *Dynamic learning for multiple examples for semantic object segmentation and search* – Computer Vision and Image Understanding, Nro. 95, pp 334-353 – Elsevier, (2004)
- [3] V. Esperanca, H. Samet – *Orthogonal Polygons as Bounding Structures in Filter Refine Query Processing Strategies* – Proceeding of the 5th Symposium on Spatial Databases, SSD '97
- [4] A. P.Tomas, A.L.Bajuelos - *Generating Random Orthogonal Polygons* - Current Topics in Artificial Intelligence, Springer Berlin / Heidelberg, (2004)

135. Soluzioni geometriche del problema isoperimetrico

di Andreana Zucco

andreana.zucco@gmail.com

Narra la leggenda che Didone, regina dei Fenici, cacciata dal suo regno dal fratello Pigmalione, che le uccise anche il marito Sicheo, si rifugiò sulle coste libiche. Il re africano Iarba, per non venir meno al dovere dell'ospitalità e contemporaneamente non inimicarsi i Fenici, le concesse il permesso di insediarsi in quel territorio, ma solamente su tanta terra quanta ne poteva contenere una pelle di bue, sperando così di liberarsi della sgradita ospite. Didone rispose invece a suo favore la beffarda concessione ricorrendo ad un astuto stratagemma: non coprì semplicemente, come si aspettava il re, una inutile superficie di terreno con la pelle intera, ma la tagliò in sottilissime strisce, le congiunse in modo da ottenere un nastro, e cercò il modo di ottenere la massima area possibile. Per riuscire nel suo intento si pose su un tratto di litorale per avere uno sbocco al mare e delimitò un'area a semicerchio, avente come perimetro il nastro che aveva a disposizione. Ottenne così una superficie di terreno con la massima area sufficiente a fondare, nel 880 a.C., il primo nucleo della città di Cartagine.

Ora è consuetudine etichettare come problema di tipo Didone o di tipo isoperimetrico, ogni problema che consiste nel determinare il massimo o il minimo di funzioni che coinvolgono quantità come area, volume, perimetro ecc. Ma il classico problema isoperimetrico o problema di Didone, consiste nel trovare fra tutte le figure piane di dato perimetro, quella di area maggiore. È noto che si tratta del cerchio ed è talmente intuitivo che sembrerebbe superfluo darne la dimostrazione. Al contrario la dimostrazione esatta ha presentato grandi difficoltà per i matematici.

Per esprimere il problema indichiamo con S l'area di una generica figura piana di perimetro L . Fra queste c'è anche il cerchio di circonferenza L , che ha raggio $\frac{L}{2\pi}$ e quindi area:

$$\pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}.$$

L'affermazione che tra le figure piane di perimetro L il cerchio sia quella che ha area maggiore può essere espressa dalla disuguaglianza:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq 0.$$

Questa disuguaglianza è detta *disuguaglianza isoperimetrica* e la quantità $D = \frac{L^2}{4\pi} - S$ è detta *deficit isoperimetrico* della figura; per il cerchio il deficit isoperimetrico è ovviamente zero.

Questo antico problema ha affascinato gli studiosi da tempo immemorabile, se è vero che già Archimede ne fosse a conoscenza. Interessò fra gli altri Eulero, Keplero, Galileo, Giacomo Bernoulli. Contributi alla risoluzione furono dati nel 1800 da Schwarz, Steiner, Weierstrass. Tuttavia solo all'inizio del 1900 fu risolto con metodi dell'analisi da Hurwitz (1901), Minkowski (1903), Carathéodory e Study (1910), Blasche (1916). Esistono ottimi articoli sullo sviluppo storico di questo problema, fra i quali ricordiamo quello di Osserman [O1] e il più recente lavoro

di G. Talenti, *The standard isoperimetric theorem*, in [G-W].

In questo articolo vedremo come, con costruzioni geometriche elementari, è possibile dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica classica, anzi si può arrivare ad una disuguaglianza migliore, nel senso che fissata una figura diversa dal cerchio si prova che il suo deficit non solo non è negativo, ma è maggiore di una quantità positiva che dipende dalla configurazione della figura stessa.

Definizione 1. *Nel piano (seguendo Bonnesen) per figura s'intende un insieme chiuso di punti (ossia contenente per intero la sua frontiera), limitato (ossia si può racchiudere in un cerchio), ad interno non vuoto (ossia contenente al suo interno un cerchio di raggio non nullo). Una figura piana è detta anche corpo piano.*

Nel seguito useremo indifferentemente i due termini.

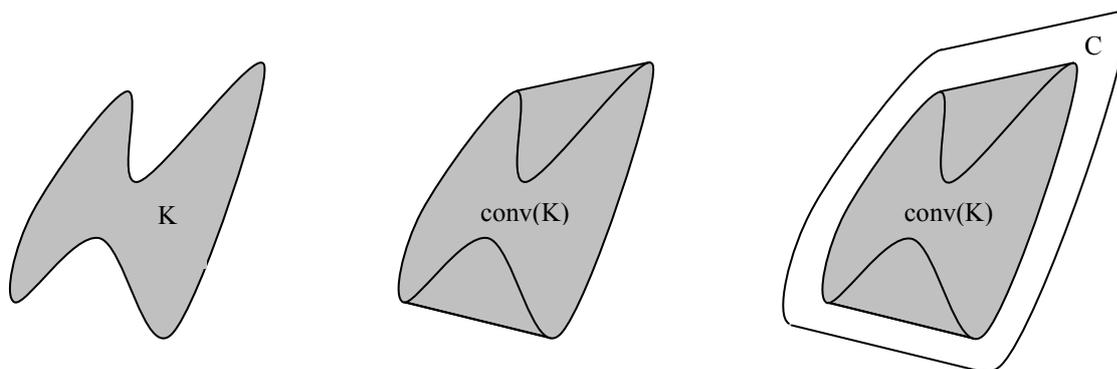
Sono esempi di figure piane l'insieme dei punti contenuti in un triangolo, in un'ellisse, in un cerchio; mentre non sono figure piane l'insieme dei punti contenuti in: un triangolo senza un lato, perché non è chiuso; una parabola, perché non è limitata; un segmento, perché ha interno vuoto. Poiché ci occuperemo sempre di insiemi del piano, parleremo semplicemente di figura o corpo intendendo che si tratta di figura piana o corpo piano.

Definizione 2. *Un insieme di punti del piano è detto convesso se contenendo due punti, contiene anche il segmento che li congiunge. Si dice inviluppo convesso di un insieme A e si scrive $\text{conv}(A)$ il più piccolo convesso che contiene A .*

Ad esempio un cerchio è convesso, mentre una corona circolare non lo è.

Osserviamo che nel cercare fra le figure di lunghezza assegnata L una di area massima, possiamo limitarci a considerare figure convesse; infatti fissata comunque una figura K di perimetro L non convessa, troviamo sempre una figura convessa C di perimetro L tale che l'area di C è maggiore dell'area di K .

Consideriamo $\text{conv}(K)$, si ha che il perimetro di $\text{conv}(K)$ è minore di L e l'area di $\text{conv}(K)$ è maggiore dell'area di K . Il convesso C cercato di perimetro L si ottiene da $\text{conv}(K)$ con una dilatazione. Risultando $\text{area}(C) > \text{area}(\text{conv}(K)) > \text{area}(K)$ segue la tesi.



Le definizioni di area e di perimetro di una figura convessa vengono qui trattate in modo intuitivo, mentre per una formulazione rigorosa rimandiamo ai testi di Analisi Matematica.

Se il corpo convesso è una figura base come il triangolo pieno od il quadrato pieno, allora l'area e il perimetro sono i numeri dati dalle formule della geometria elementare euclidea.

Più in generale se il corpo convesso C appartiene all'insieme P dei poligoni, il perimetro è la somma delle lunghezze dei suoi spigoli e scomponendolo si ricava facilmente l'area.

Generalizziamo questi concetti ad un qualsiasi corpo convesso piano C mediante la:

Definizione 3. Sia C una figura convessa nel piano euclideo: allora l'area di C ed il perimetro di C sono definiti rispettivamente dall'estremo superiore delle aree e dei perimetri dei poligoni inscritti in C , che coincidono rispettivamente con l'estremo inferiore delle aree e dei perimetri dei poligoni circoscritti a C .

Ciò posto vediamo come è stato risolto il problema isoperimetrico per vie geometriche elementari, da H. Lebesgue e T. Bonnesen, tenuto conto anche del tentativo di J. Steiner.

Un breve cenno storico sugli autori.

Jacob Steiner (1796-1863) figlio di contadini svizzeri, forse non ebbe modo di imparare a leggere e a scrivere prima dell'età di 14 anni. Andò poi a Berlino, mantenendosi dando lezioni private. La sua opera *Systematische Entwicklungen* pubblicata nel 1832, gli assicurò la fama, tanto che fu creata per lui nell'Università di Berlino, una cattedra di geometria che occupò fino alla morte. Molti termini matematici sono legati al nome di Steiner, noi lo ricorderemo per i tentativi per risolvere il problema isoperimetrico.

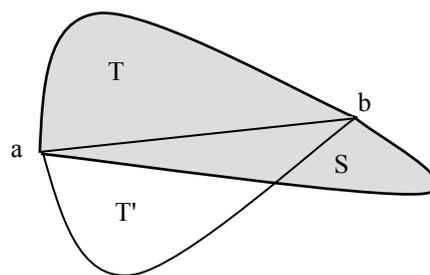
Henri Lebesgue (1875-1941) illustre matematico francese è famoso soprattutto per i suoi contributi alla teoria dell'integrazione. Tale sua teoria fu pubblicata per la prima volta nella sua tesi *Intégrale, longueur, aire* (Integrale, lunghezza, area) all'Università di Nancy nel 1902. Scrisse due libri e numerosi articoli. Per il nostro scopo ci riferiamo al suo lavoro del 1914 *Sur les problèmes des isopérimètres et sur les domaines de largeur constant*.

Tommy Bonnesen (1873-1935) nacque e morì a Copenaghen. Conseguì la laurea in matematica nel 1896. Durante gli studi superiori si interessò alla recitazione e nel 1897 debuttò al Teatro Regio di Copenaghen. Negli anni successivi abbandonò la carriera teatrale per interessarsi di matematica. Dal 1917 fu professore di geometria al politecnico di Copenaghen e fu autore di importanti ricerche sulla teoria dei corpi convessi. Tra le sue opere principali ricordiamo i libri *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (1929) e *Teorie der Konvexen Korpen* scritto in collaborazione con W.Fenchel.

Il tentativo di Steiner

Teorema. Dato un corpo convesso piano K che non sia un cerchio, esiste un altro corpo convesso K' con lo stesso perimetro ed area maggiore.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che r sia una retta che biseca il perimetro e divide l'area in parti disuguali. Siano S e T i due sottoinsiemi in cui r divide K e supponiamo che T abbia area maggiore di S . Riflettendo T su r , ossia considerando l'insieme dei punti simmetrici dei punti di T rispetto ad r , otteniamo T' . Ora $T \cup T'$ ha area maggiore di K e lo stesso perimetro, ma non è detto che sia convesso. Per trovare K' si può utilizzare $\text{conv}(T \cup T')$ e poi fare una dilatazione in modo da riottenere lo stesso perimetro.



Vediamo ora il caso rimanente. Supponiamo che ogni retta r bisechi sia il perimetro che l'area. Ricordiamo che vale la proprietà che fra tutti i triangoli aventi due lati di lunghezza fissata $[a,c]$ e $[c,b]$, ha area massima quello in cui tali lati sono ortogonali, come illustrato nel disegno.

Una sua caratterizzazione geometrica è la seguente:

Proprietà. *Il cerchio inscritto σ di una figura convessa F deve contenere o due punti della frontiera di F che sono estremi di un diametro del cerchio, oppure tre punti della frontiera di F che formano un triangolo acutangolo.*

Infatti se σ è racchiuso nella figura convessa F e non contiene punti della frontiera di F , σ non ha raggio massimo, perchè esiste un cerchio σ' racchiuso in F che ha raggio maggiore di quello di σ . Per disegnare σ' basta ingrandire il raggio di σ senza cambiare il centro, fino a toccare F in un suo punto A .

Se un cerchio σ di centro O , contenuto in F , tocca la frontiera solo in un punto A , basta spostare il cerchio σ nella direzione da A verso O , in modo che il punto A sia esterno al cerchio σ e come nel caso precedente si può costruire un cerchio σ' di raggio maggiore.

Infine, se il cerchio σ contenuto in F , tocca la frontiera di F solo in due punti A e B estremi di una corda non diametro, basta spostare σ perpendicolarmente al segmento AB , in modo che i punti diventino esterni al cerchio σ .

Sempre usando una piccola traslazione, se i punti comuni alla frontiera del corpo convesso F e al cerchio σ stanno su un arco minore di una semicirconferenza avente AB come corda, basta spostare σ perpendicolarmente alla corda AB e non ci sono più punti comuni di σ con la frontiera di F , come nel primo caso. Perciò la proprietà trovata può essere formulata nel modo seguente

Caratterizzazione del cerchio inscritto. *Siano F il corpo convesso e $\sigma(F)$ il cerchio inscritto: allora i punti che appartengono all'intersezione della frontiera di F con la frontiera del cerchio sono contenuti in un arco maggiore od uguale ad una semicirconferenza.*

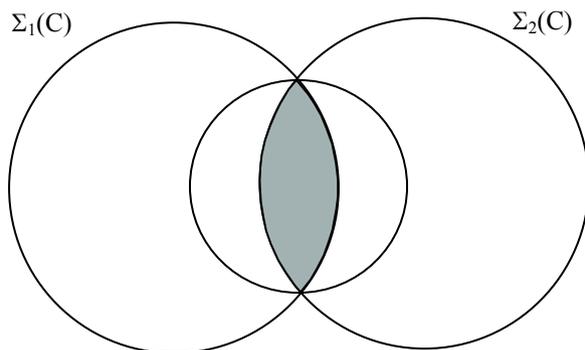
Il cerchio circoscritto

Fra tutti i cerchi contenuti una data figura convessa, quello di raggio minimo è detto cerchio circoscritto e il suo raggio è detto raggio circoscritto. Una dimostrazione dell'esistenza del raggio circoscritto si trova in [Bon].

Definizione 4. *Dato un corpo convesso piano C , il cerchio $\Sigma(C)$ contenente C ed avente come raggio il raggio circoscritto, si dice cerchio circoscritto a C .*

Tale cerchio è determinato in grandezza e posizione, quindi esiste ed è unico.

Siano infatti $\Sigma_1(C)$ e $\Sigma_2(C)$ due cerchi di ugual raggio circoscritti a C . Allora C è contenuto in $\Sigma_1(C) \cap \Sigma_2(C)$ e questa "lente" può essere inscritta in un cerchio di raggio Σ minore del raggio di $\Sigma_1(C)$ e $\Sigma_2(C)$, il che è assurdo.



La sua caratterizzazione geometrica è analoga a quella del cerchio inscritto:

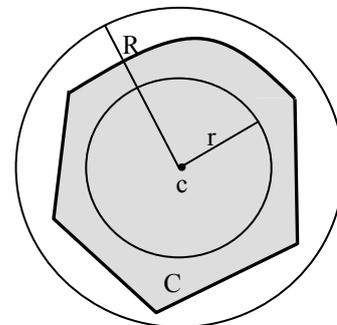
Caratterizzazione del cerchio circoscritto. *Siano F il corpo convesso e $\Sigma(F)$ il cerchio circoscritto: allora i punti che appartengono all'intersezione della frontiera di F con la frontiera del cerchio sono contenuti in un arco maggiore od uguale ad una semicirconferenza.*

Esempio. Consideriamo un triangolo ottusangolo ABC, avente AB come base. Il cerchio Σ che passa per i tre vertici non è il cerchio circoscritto secondo la definizione data, ma lo è il cerchio che ha il segmento AB come diametro.

La corona circolare minima di un corpo convesso

Per migliorare la disuguaglianza isoperimetrica, Bonnesen nel suo libro considera la corona circolare minima di un corpo convesso

Dato un corpo convesso C consideriamo le coppie concentriche di cerchi di raggi R ed r ($R > r$) tali che il cerchio di raggio R contenga C ed il cerchio di raggio r sia contenuto in C, come in figura.

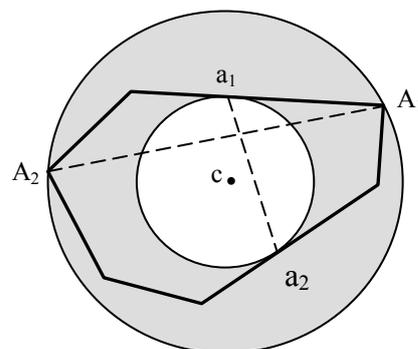


La quantità $R - r$ non è mai negativa, ha un limite che raggiunge, detto *spessore minimo*.

Quindi fra tutte le corone circolari associate ad un corpo convesso C, esiste una corona circolare di spessore minimo $R - r$, detta *corona circolare minima* o *anello minimale* oppure *minimal annulus*.

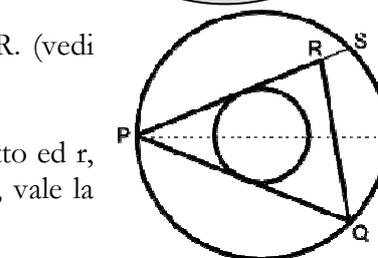
Caratterizzazione della corona circolare minima. Data una corona circolare (K_1, K_2) associata ad un corpo convesso C, dove K_1 è il cerchio di centro c e raggio r e K_2 è il cerchio di centro c e raggio $R > r$, è una corona circolare minima se vale ad esempio la seguente proprietà:

esistono due punti a_1, a_2 appartenenti alla frontiera di C e di K_1 e due punti A_1, A_2 appartenenti alla frontiera di C e di K_2 tali che i segmenti $[a_1, a_2]$ e $[A_1, A_2]$ hanno intersezione non vuota.



Esempio. Per un triangolo PQR si può facilmente costruire la corona circolare minima.

Sia $PQ \geq PR \geq QR$ sul prolungamento di PR costruiamo il punto S in modo che $PS = PQ$. Il triangolo PQS è isoscele ed è acuto in P. Il cerchio K_2 passante per P, Q, S ha centro sulla bisettrice dall'angolo in P. L'altro cerchio della corona circolare minima sarà il cerchio K_1 concentrico a K_2 e che tocca PQ e PR. (vedi disegno).



Osservazione. Detti r_i il raggio inscritto, R_c il raggio circoscritto ed r, R i raggi della corona circolare minima di una figura convessa C, vale la seguente relazione

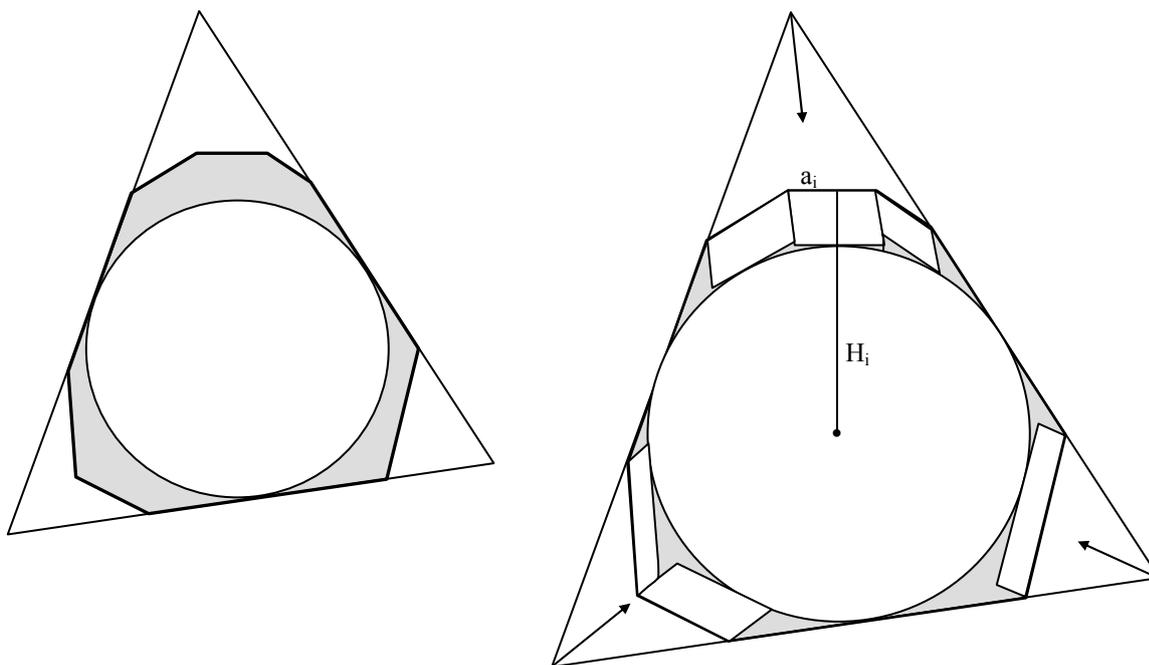
$$r \leq r_i \leq R_c \leq R$$

In generale, si tratta di numeri diversi, mentre per le curve a spessore costante, studiate da Lebesgue e dette orbiforme, la corona circolare minima è formata dal cerchio inscritto e dal cerchio circoscritto, in questo caso concentrici.

La disuguaglianza di Lebesgue

Proprietà. (Lebesgue 1914) - Siano F una figura convessa piana, L il suo perimetro, S la sua area ed r il raggio del suo cerchio inscritto. Risulta $S - rL + \pi r^2 \leq 0$.

Dimostrazione. Consideriamo una figura F e il suo cerchio inscritto e supponiamo che vi siano almeno tre punti di contatto non giacenti su una stessa semicirconferenza. Le tangenti in questi tre punti formano un triangolo circoscritto ad F.



Consideriamo solo il caso in cui che F sia un poligono di n lati e sia a_i il lato situato a distanza H_i dal centro del cerchio inscritto ($i = 1, \dots, n$). Spostiamo a_i parallelamente alla bisettrice di un angolo del triangolo fino ad essere tangente al cerchio. Procediamo allo stesso modo con tutti gli altri lati del poligono F . Otteniamo un poligono non convesso che contiene sempre il cerchio e quindi la sua area è maggiore dell'area del cerchio inscritto, cioè di πr^2 . L'area di tale poligono è la somma di tutti i triangoli di base a_i ed altezza H_i meno l'area di tutti i parallelogrammi di base a_i e di altezza $H_i - r$ cioè:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i - (H_i - r) a_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} H_i a_i + r a_i \right] = r \sum_{i=1}^n [a_i] - \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i \right] = r L - S \geq \pi r^2$$

ossia $S - rL + \pi r^2 \leq 0$.

Notiamo che l'uguaglianza si ottiene solo quando la figura coincide con il cerchio inscritto, mentre negli altri casi l'area della figura ottenuta è maggiore di quella del cerchio inscritto.

Nel caso in cui il più piccolo arco contenente tutti i punti di contatto sia una semicirconferenza, lo spostamento deve essere fatto nello stesso modo, ma parallelamente alla direzione comune delle tangenti al cerchio nei punti di contatto con F diametralmente opposti e la disuguaglianza vale ancora.

Osservazione. La disuguaglianza di Lebesgue si può anche scrivere

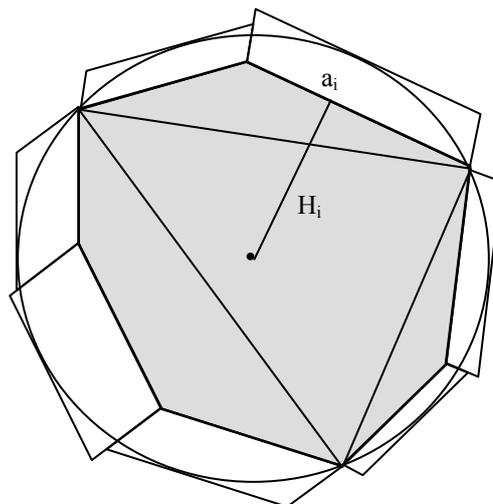
$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \pi \left(\frac{L}{2\pi} - r \right)^2. \tag{1}$$

La disuguaglianza di Bonnesen

Proprietà. (Bonnesen 1920) - Siano F una figura convessa piana, L il suo perimetro, S la sua area ed R il raggio del suo cerchio circoscritto. Risulta $S - RL + \pi R^2 \leq 0$.

Dimostrazione. E' analoga a quella della disuguaglianza di Lebesgue. Supponiamo che F sia un poligono e consideriamo il suo cerchio circoscritto. Supponiamo che il poligono abbia almeno tre punti di contatto con il cerchio circoscritto che formano un triangolo acutangolo.

Considerate le tre direzioni ortogonali ai lati del triangolo spostiamo i lati del convesso parallelamente a tali direzioni in modo che diventino tangenti al cerchio circoscritto. La figura così ottenuta (non convessa) contiene il cerchio e quindi avrà area maggiore di πR^2 . Se indichiamo con a_i ($i = 1, \dots, n$) la lunghezza di un lato generico e con H_i la sua distanza dal centro, l'area della nuova figura è la somma di tutti i triangoli di base a_i ed altezza H_i più l'area di tutti i parallelogrammi di base a_i ed altezza $R - H_i$ quindi:



$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i + (R - H_i) a_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[R a_i - \frac{1}{2} H_i a_i \right] = R \sum_{i=1}^n [a_i] - \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i \right] = R L - S \geq \pi R^2$$

ossia $S - R L + \pi R^2 \leq 0$.

Se ci sono due punti di contatto, diametralmente opposti, si ripete la stessa costruzione spostando i lati parallelamente alla direzione delle due tangenti in modo che diventino tangenti al cerchio. Notiamo che l'uguaglianza si ottiene solo quando la figura coincide con il cerchio circoscritto.

Osservazione. La disuguaglianza di Bonnesen si può scrivere:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \pi \left(R - \frac{L}{2\pi} \right)^2 \quad (2)$$

Proprietà. Considerata una figura convessa piana F di perimetro L ed area S ed indicati con r il raggio inscritto e con R il raggio circoscritto vale la seguente disuguaglianza:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4} (R - r)^2$$

che migliora la disuguaglianza isoperimetrica classica.

Dimostrazione. Per ottenere la disuguaglianza voluta basta sommare le relazioni (1) e (2) membro a membro e ricordando che $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2$ si ottiene:

$$2 \left(\frac{L^2}{4\pi} - S \right) \geq \left(\sqrt{\pi} R - \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 + \left(\frac{L}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{\pi} r \right)^2 \geq \frac{1}{2} (\sqrt{\pi} R - \sqrt{\pi} r)^2$$

da cui la tesi. □

Il Teorema di Bonnesen

Per migliorare la disuguaglianza del deficit isoperimetrico di una figura ottenuta nella proprietà precedente, occorre considerare ora come r ed R, i raggi della corona circolare minima e si ha il seguente risultato:

Teorema(Bonnesen). *Considerata una figura convessa piana F di perimetro L ed area S ed indicati con r ed R ($R > r$) i raggi dell'anello minimale vale la seguente disuguaglianza:*

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4}(R - r)^2.$$

Poiché il raggio r dell'anello minimale è minore od uguale al raggio inscritto ed il raggio R dell'anello minimale è maggiore od uguale al raggio circoscritto, la disuguaglianza trovata è migliore della precedente.

La dimostrazione del teorema è un po' più elaborata delle precedenti e si può trovare in [Bon] e con variazioni in [F-Z].

Testi consigliati

[Bon] T. BONNESEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthiers-Villars, Paris(1929)

[Bon-F] T. BONNESEN - W. FENCHEL, *Theory of convex bodies*, BCS Associates, Moscow, Idaho, USA (1987)

[Bu-Z] J. U. BURAGO – V. A. ZALGALLER, *Geometric inequalities*, Springer Berlin (1988)

[F-Z] P. FAVRO – A. ZUCCO, *Appunti di Geometria Convessa*, Quaderno didattico n.34, Dip. Matematica, Univ. Torino (2005).

[G-W] P. M. GRUBER - J. M. WILLS, *Handbook of Convex Geometry*, North Holland, Amsterdam (1993).

[O1] R. OSSERMAN, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. 84, 1182-1238 (1978).

[O2] R. OSSERMAN, *Bonnesen-style isoperimetric inequalities*, Amer.Monthly 86, 1-29 (1979).

[Y-Bol] I. M. YAGLOM – V. G. BOLTYANSKII, *Convex figures*, Holt, Rinehart e Winston, New York (1961)

136. Lo scaffale dei libri

G. Pettarin, C. Pradella, E. D'Amico, *Login*, Edizioni Il Foglio, 2010

Username... Password... Login... ed un nuovo mondo si apre davanti allo schermo del computer: un mondo del tutto personale, pronto ad essere inventato, creato, vissuto. Tutto prende una nuova forma: le maschere diventano il volto, nuove identità nascono da quel cliccare rapido, dalla nuova *web cam*.

Fla ed Efri sono due ragazze con la voglia di sentirsi più grandi, con il bisogno di parlare con qualcuno, di venire guardate con occhi diversi, più interessati, forse, per avviare ad un clima familiare rigido o fin troppo grigio, pieno di silenzi e di assenze, con la voglia di cercare una strada, un percorso, un ruolo, una nuova identità, per essere accettati. Ma il Web può diventare un labirinto senza uscita, che ti imprigiona ogni giorno di più, senza lasciarti il tempo di prendere coscienza, di riflettere prima di decidere, ti investe come un vortice nei suoi meandri. Ecco allora che un semplice gioco da adolescenti può trasformarsi in una trappola sessuale, il gioco che le ragazze pensavano di dominare diventa un tunnel senza via di uscita del quale non sono più le artefici ma le vittime.

“[Lube81] Hello baby! La tariffa? [LolitaSexyGirl] Solito, ricordi il mio account Paypal? [Lube81] Certo, ma non posso vedere di più? Eddai cocorita... [LolitaSexyGirl] Scemo! No, sai che arrivo fino alle tette per ora... Forse più avanti ci posso pensare... Se ti comporterai bene... [Lube81] ok, ok, sto per fare il pagamento!!! [LolitaSexyGirl] aspetto... finché non arriva il pagamento con paypal non parto.”

I segreti che non si possono svelare, la paura, il senso di colpa sono la rete che intrappola sempre di più le due ragazze. Il desiderio di tornare indietro, di rimettere le cose a posto come erano prima non è sufficiente. Per fortuna le ragazze si rendono conto che da sole non possono farcela.

Un romanzo pensato sia per gli adolescenti, per metterli in guardia, sia per i genitori, perché possano capire il mondo in cui vivono i loro figli.



MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 4 Numero 12 Aprile 2010

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it