

Metallica 6

100. Triangolo di Tartaglia in un giorno di sciopero.

di Anna Cerasoli



BES Photos, Student Teacher

Dunque era quello l'appuntamento fisso delle sei. Metallica, ogni giorno, metteva a disposizione del Centro di Servizi per il Volontariato un'ora del suo tempo. E in quell'ora faceva matematica. Sia che si trattasse di spiegazioni a bambini in ospedale, sia che si trattasse di doposcuola a ragazzi stranieri o in difficoltà, lei era a disposizione.

Sono tornato a casa pensando che se non fossi passato per quella piazza non avrei mai saputo del suo impegno civile. Tutto nel suo stile: fare senza apparire.

Ero appena entrato quando è squillato il telefono. Era lei: 'Cosa ne dici se, dopo cena, ciascuno per conto proprio, ci ripassiamo un pezzo del Calcolo Combinatorio? Domani pomeriggio ci vediamo e in poco tempo ognuno ripete all'altro quello che ha ripassato, così ci sbrighiamo e possiamo stare un po' insieme. Non parliamo mai di noi...'

Eccolo il tuffo al cuore! Ho dovuto aspettare qualche secondo prima di riuscire a proferire verbo: 'Sì, va bene, io l'ho già fatto un po' di ripasso... sono arrivato ai coefficienti binomiali e al Triangolo di Tartaglia'. E poi, con un po' di coraggio ho aggiunto 'Sono contento se riusciamo a stare un po' insieme... Oggi, quando ti ho vista con il tuo amico, ho avuto un pugno nello stomaco... ho pensato che fosse il tuo ragazzo... cioè, non so... è il tuo ragazzo?' 'No, è un amico, viene anche lui al Centro. Fa il clown. Allora, a domani'.

Prima di mettermi a studiare ho respirato profondamente e rinviato a più tardi tutti i pensieri e le fantasticherie su cosa le dirò e cosa mi risponderà. So, comunque, che prima di tutto faremo un po' di esercizi e non voglio proprio sbagliarli. Perciò ho ripreso il quaderno di mate. Sono arrivato a ripassare i problemi in cui bisogna trovare il numero di tutti i sottoinsiemi di un insieme. Il primo era questo: davanti a un vaso con 5 pasticcini, in quanti modi ci si può servire? Ovviamente si può prenderne nessuno, oppure uno, o due... insomma quanti e quali si vuole, compreso il prenderli tutti. Si tratta, perciò, di calcolare quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme di 5 elementi.

Quando il prof ce l'ha spiegato io ho capito veramente che cosa è la creatività matematica, ho capito come, partendo da cose che già sai e che metti insieme, riesci a creare un nuovo schema di risoluzione.

Lui ci ha suggerito di immaginare la scena in cui, realmente, stiamo scegliendo quanti e quali pasticcini mangiare. Potremmo fare così: prendiamo in considerazione uno dei pasticcini e decidiamo se mangiarlo o no; se sì, scriviamo una S, altrimenti una N. Fatto questo per tutti i pasticcini, avremo scritto una parola, lunga 5, con l'alfabeto (S,N). È proprio questa parola a identificare il sottoinsieme di pasticcini che vorremo mangiare.



Fig.1 Avendo a disposizione cinque pasticcini in quanti modo ci si può servire?

Ma, allora, il problema di trovare tutti i sottoinsiemi si riduce a trovare tutte le parole, lunghe 5, con l'alfabeto (S,N). E queste sappiamo trovarle perché conosciamo il modello 'quante parole'. Sono m^n , in cui m è il numero dei caratteri dell'alfabeto e n è quello della parola.

Perciò nel nostro caso sono

$$2^5$$

A me è piaciuta molto questa spiegazione! Si vede la potenza delle idee matematiche, che creano schemi comuni per situazioni tanto diverse.

Poi abbiamo ragionato in generale: il numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente n elementi è 2^n .

A quel punto il prof ci ha fatto verificare la formula sul triangolo di Tartaglia.

						1								1	2^0		
					1	+	1							2	2^1		
				1	+	2	+	1						4	2^2		
			1	+	3	+	3	+	1					8	2^3		
		1	+	4	+	6	+	4	+	1				16	2^4		
	1	+	5	+	10	+	10	+	5	+	1			32	2^5		

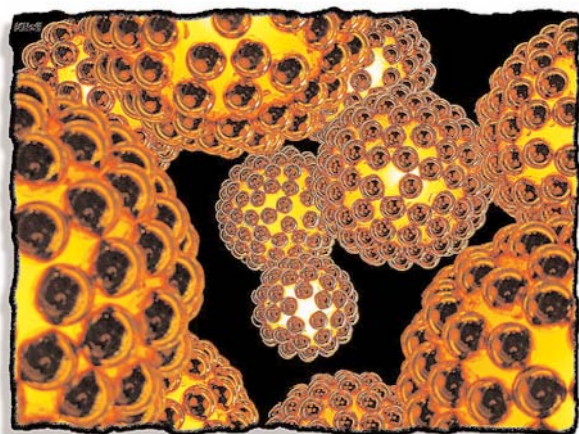
Fig. 2 Il triangolo di Tartaglia e le potenze del 2

Poiché i termini di ogni riga corrispondono proprio ai numeri dei vari sottoinsiemi, è bastato calcolare la loro somma per avere il totale di tutti i sottoinsiemi. E infatti, per ogni riga, abbiamo ottenuto proprio 2^n .

Come esercizio c'era da cercare esempi di problemi analoghi. Uno simpatico era quello del giorno di sciopero: in quanti diversi modi un professore, arrivando in una classe di 22 alunni, in un giorno di sciopero, può trovare gli studenti presenti in aula? Ci possono essere tutti, o nessuno, o soltanto uno... insomma si tratta sicuramente di tutti i sottoinsiemi di un insieme di 22 elementi. Perciò sono 2^{22} . (In realtà, nella nostra classe, ultimamente, prima di uno sciopero facciamo sempre l'assemblea e decidiamo di entrare tutti o nessuno...)



Athena, Empty Classroom



Kliefi, Bakterien Lampe

Poi il prof ci ha detto un'altra cosa che mi ha aiutato a capire meglio perché questi problemi si risolvono con una potenza di 2: se nella classe arriva un 23-esimo allievo, i sottoinsiemi raddoppiano, diventano 2^{23} . Si tratta dei 2^{22} sottoinsiemi precedenti, in cui s'inserisce anche il nuovo allievo che ha deciso di scioperare, aggiunti ad altrettanti sottoinsiemi in cui il nuovo allievo non compare perché ha deciso di non scioperare. E per ogni allievo in più, si ha un nuovo raddoppio.

Abbiamo calcolato 2^{22} ed è venuto 4194304. Più di quattro milioni di possibilità! Una caterva! D'altra parte la potenza non si chiama così per caso...

Mi è rimasta impressa la storia dei batteri. Un batterio si riproduce dividendosi a metà e dando vita a due batteri. Perciò ogni generazione è doppia della precedente. Sembra incredibile ma, fatti i calcoli, da un solo batterio che si riproduce ogni venti minuti, si ha, in 48 ore, una quantità di batteri il cui peso è quattromila volte quello del nostro pianeta. E c'è da dire che per fare un grammo di batteri ce ne vogliono un milione di milioni! Per fortuna le condizioni ambientali non permettono una tale crescita... altrimenti!

Ma non devo divagare. Devo trovare un po' di esempi concreti in cui si tratta di calcolare il numero totale dei sottoinsiemi di un insieme. Vorrei trovarne di originali, perché vedo che faccio un certo effetto su Metallica quando mi trova 'geniaaale!'

ESERCIZI

1. Vuoi dare una mano al protagonista cercando esempi? Scrivili nei commenti all'articolo
2. La potenza di 2 è presente in molti problemi. Uno famoso è quello degli scacchi. Si racconta che l'inventore del gioco chiedesse come ricompensa 1 chicco di grano per la prima casella, 2 per la seconda, 4 per la terza, e così raddoppiando fino alla sessantaquattresima casella. Non fu possibile ricompensarlo perché, a conti fatti, risultò che quella quantità di grano non esisteva nemmeno in tutti i granaia del mondo. Sai dimostrare che la somma di tutti quei chicchi è $2^{64}-1$?

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DEL N. PRECEDENTE

2. 126

3. 56

4. 15

5. $\binom{50}{2} \binom{25}{2} = 367500$

6. Dal punto di vista dei sottoinsiemi, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ perché, nell'insieme di n elementi, per ogni sottoinsieme di k elementi, ne resta uno di $n-k$ elementi (il complementare).