98. Il salto del cavallo (Un problema di teoria dei grafi)

di Gabriella Zammillo

SUNTO Il salto del cavallo è un problema esprimibile sia in termini di grafi euleriani sia in termini di grafi hamiltoniani. In questo articolo si presenta il problema e si esaminano le sue possibilità di soluzione. Si comprende quindi perché si può disegnare un cammino chiuso, in cui tutte le possibili mosse siano tracciate una sola volta, nel caso in cui il cavallo si muove su una scacchiera $n \times n$ con $n = 3$; perché il cavallo può occupare tutte le caselle di una scacchiera $n \times n$ ritornando sulla casella da cui è partito solo nel caso $n \times n$ con $n \geq 6$ e pari; perché nel caso $n \times n$ con $n = 5$ il cammino non è chiuso ed inoltre quanti possibili cammini chiusi può descrivere il cavallo muovendosi su di una scacchiera $n \times n$ con n pari.

1 Introduzione

Il gioco, si sa, stimola la fantasia ma, presentato sotto forma di rompicapi e indovinelli, risulta un utile strumento d'apprendimento della matematica. Noto è infatti quanto gli argomenti di matematica ricreativa abbiano già in passato catturato l'interesse di grandi menti matematiche, da Eulero a Leibniz, da Hilbert ad Einstein e che alcune teorie matematiche abbiano avuto origine proprio dall'analisi e discussione di rompicapi.
È il caso della Teoria dei Grafi [B1], [F1], [O1] le cui origini risalgono al 1736 quando Eulero riuscì a spiegare l'impossibilità di soluzione del problema dei sette ponti di Könisberg, tormento di non poco conto per gli abitanti dell'antica cittadina prussiana. Così come, tormento fu, il rompicapo del salto del cavallo sulla scacchiera, sicuramente meno conosciuto, pur essendo stato trattato da Eulero già nel 1759 e poi da Legendre, Vandermonde ed altri.

In questo articolo, concepito con l'intento di sottolineare il valore del gioco nella didattica della matematica, ho cercato di presentare solo alcuni aspetti del problema e le relative soluzioni, con un linguaggio accessibile anche ai non addetti ai lavori che pure abbiano qualche interesse all'argomento rimandando per gli approfondimenti alla bibliografia.
È noto dalle regole del gioco degli scacchi che il cavallo salta sulla scacchiera spostandosi lungo la diagonale di un rettangolo composto da 3×2 caselle passando da una casella bianca ad una nera o viceversa come mostrato in figura 1.

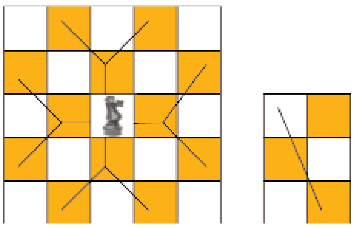

Figura 1. Il cavallo si muove sugli scacchi lungo la diagonale di un rettangolo 3 × 2, passando da una casella bianca ad una nera e viceversa.

Allora:

- Poiché esistono molte mosse diverse che consentono al cavallo di saltare da una casella all'altra, si può disegnare un cammino chiuso in cui tutte le possibili MOSSE siano tracciate una ed una sola volta?
- È possibile, per il cavallo, occupare tutte le CASELLE di una scacchiera $n \times n$ ciascuna esattamente una volta prima di ritornare sulla stessa casella da cui è partito?

Esprimiamoci in termini di teoria dei grafi.
Intuitivamente con la parola "grafo" intendiamo una struttura che ci permette di rappresentare gli elementi di un insieme e una relazione tra tali elementi detti rispettivamente "vertici" e "spigoli".

In altre parole:

DEFINIZIONE

Diciamo "grafo" una coppia ordinata (V(G), E(G)) tale che V(G) è un insieme non vuoto ed E(G) è un insieme di coppie non ordinate di elementi di V(G).

Pertanto, nel nostro caso specifico, i vertici sono rappresentati dai quadrati della scacchiera mentre gli spigoli dalle mosse del cavallo. Ogni mossa è quindi identificata dalla coppia (casella di partenza, casella d'arrivo). Poiché una sequenza alternata di vertici e spigoli definisce un "cammino", possiamo generalizzare il problema nel seguente modo:

PROBLEMA

Quanti possibili cammini chiusi diversi può descrivere il cavallo muovendosi su di una scacchiera $n \times n$ con n pari?

Si capisce bene che in base alle definizioni date di vertice e spigolo, i termini MOSSE e CASELLE consentono di tradurre il problema del "salto del cavallo" rispettivamente in termini di "grafi euleriani" e di "grafi hamiltoniani".
Per rispondere al quesito ispiriamoci allora a quanto fatto da Eulero col problema dei ponti di Könisberg.

1. Un problema di cammini euleriani

Il primo quesito riformulato, chiede in sostanza se è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo. Ricordiamo che un "cammino" è una sequenza finita ed alternata di vertici e spigoli; che un cammino è "chiuso" quando il primo e l'ultimo vertice coincidono e che un cammino è detto "euleriano" quando oltre ad essere un cammino chiuso, è individuato da una sequenza che contiene ogni spigolo del grafo una ed una sola volta. Al contrario, è detto cammino "semi-euleriano" quando, pur contenendo ogni spigolo del grafo una ed una sola volta, esso risulta non chiuso.
Eulero ci ha insegnato che affinché in un grafo sia possibile costruire un cammino euleriano, esso deve avere tutti i vertici di grado pari; se vogliamo costruire invece un cammino semi-euleriano, il grafo considerato deve contenere al massimo due vertici di grado dispari, dove per grado si intende il numero di spigoli uscenti dal vertice dato.
Torniamo ora alla nostra scacchiera. È evidente che si ha una risposta affermativa al problema prima esposto soltanto se il cavallo si muove su di una scacchiera $n \times n$ con $n = 3$. Infatti è soltanto in questo caso, la figura 2 ci aiuta a comprendere il motivo, che tutte le caselle occupate dal cavallo consentono due mosse: una in entrata, l'altra in uscita.

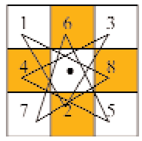

Figura 2. In una scacchiera 3 × 3 tutte le caselle occupate dal cavallo consentono una mossa in entrata e una in uscita.

Ciò vuol dire che ogni singolo vertice, contenuto nel grafo tracciato, ha grado 2 quindi, poiché è soddisfatta la condizione di Eulero, il cammino disegnato è proprio quello richiesto.
È altresì chiaro che la condizione di Eulero non potrà essere verificata per $n > 3$ infatti già in una scacchiera 4×4 esistono otto caselle dalle quali sono possibili 3 mosse, cioè il cavallo non potrà uscire da una di queste caselle dopo esservi entrato la seconda volta, vedi figura 3.

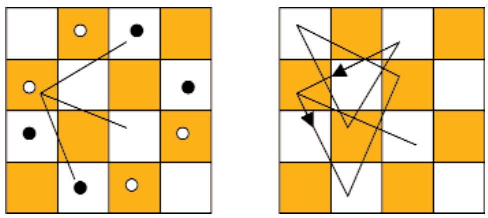

Figura 3. In una scacchiera 4 × 4 esistono otto caselle dalle quali il cavallo non potrà uscire dopo esservi entrato la seconda volta.

L'esistenza di un numero maggiore di 2 di caselle di questo tipo, e quindi l'esistenza di un numero maggiore di 2 di vertici di grado dispari, contraddice ovviamente l'ipotesi del teorema di Eulero ragion per cui il problema, già a partire da una scacchiera 4×4 per poi essere generalizzato ad una $n \times n$, non potrà mai avere soluzione proprio perché le otto caselle di grado dispari non solo continueranno ad esistere, ma continueranno anche ad essere adiacenti alle quattro caselle di grado 2 poste ai rispettivi quattro angoli della scacchiera, vedi figura 4.

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

Figura 4. In una scacchiera $n \times n$ ci sono sempre quattro caselle di grado 2 e 8 caselle di grado 3.

2. Un problema di grafi hamiltoniani

Chiedere se sia possibile muovere il cavallo su una scacchiera $n \times n$ occupando tutte le caselle esattamente una volta equivale a risolvere invece un problema di cammini hamiltoniani. Questione abbastanza delicata e tra l'altro tuttora aperta, quella dei cammini hamiltoniani, ma nel nostro caso ci avvaliamo del contributo dovuto a Conrad, Hindrinchs, Morsy e Wegener [C1] risalente al 1994 e contenente efficienti algoritmi per la costruzione dei cammini hamiltoniani.
Tradurre il problema in termini di grafi hamiltoniani significa chiedere se esiste nel grafo considerato un cammino chiuso detto "ciclo hamiltoniano" che contiene ogni vertice del grafo una ed una sola volta oppure un "cammino hamiltoniano" se il cammino dovesse risultare non chiuso pur contenendo sempre ciascun vertice una ed una sola volta.
È ovvio che nessuno dei due cammini potrà mai esistere nel caso in cui la scacchiera sia di tipo 3×3 oppure di tipo 4×4, perché il numero ridotto di caselle impedisce al cavallo di occuparle tutte con una ulteriore mossa. Com'è facile notare in figura 5, sono state tracciate tutte le possibili mosse del cavallo sulle scacchiere 3×3 e 4×4 ma, su nessuna delle due scacchiere è stato possibile descrivere il cammino richiesto.

1	6	3
4	?	8
7	2	5

?	13	8	3
7	4	11	14
12	9	2	5
1	6	15	10

Figura 5. Su nessuna delle due scacchiere è stato possibile stracciare un cammino hamiltoniano.

Tuttavia osserviamo che data una sequenza alternata di caselle bianche e nere, come in figura 6, sarà possibile costruire un ciclo hamiltoniano che le contenga tutte e alternativamente, una bianca ed una nera, solo nel caso in cui il loro numero sia pari, perché se fosse altrimenti, verrebbero ad essere adiacenti due caselle dello stesso colore contraddicendo le ipotesi.

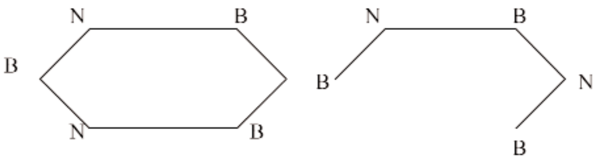

Figura 6. Affinché sia possibile un cammino hamiltoniano il numero di caselle deve essere pari.

È proprio sulla base di questa osservazione che si fonda il "criterio del colore" formulato da Conrad e gli altri per poter ammettere l'esistenza di un "cammino hamiltoniano", criterio secondo il quale un cammino hamiltoniano, da una casella contrassegnata s ad una casella contrassegnata t e distinta da s, esiste per $n \geq 6$ se e soltanto se n è pari ed s e t hanno colore differente, oppure n è dispari, ma s e t hanno colore bianco (supposto che agli angoli della scacchiera ci siano caselle bianche).
Dato quindi il grafo G_n come la coppia $G_n = (V_n, E_n)$ definita in precedenza, rappresentiamo la scacchiera $n \times n$, per la quale si considera il grafo G_n, attraverso un sistema di riferimento come mostrato in figura 6, in cui le coppie (i, j) con $1 \leq i, j \leq n$ individuano le caselle.

	1	2	3	i	n
1	B	N			
2	N	B			
3					
j				(i,j)	
n					

Figura 6. Il grafo G_n in un sistema di riferimento

Indichiamo con c la funzione colore tale che:

$c:(i,j) \rightarrow c(i,j)$ = bianco se $i+j$ è pari

$c:(i,j) \rightarrow c(i,j)$ = nero se $i+j$ è dispari

Posto allora $c(s) = c(i_s, j_s)$, $c(t) = c(i_t, j_t)$ Conrad definisce il "criterio del colore" per una generica scacchiera $n \times n$ con:

$$c(s) \neq c(t) \text{ se } n \text{ è pari}$$

$$c(s) = c(t) = \text{bianco se } n \text{ è dispari}$$

e prova il seguente teorema:

TEOREMA

i) Se $n \geq 6$. Un $s - t$ cammino hamiltoniano esiste se e solo se il "criterio del colore" è soddisfatto per s e per t.

ii) Se n=5. Un s - t cammino hamiltoniano esiste se e solo se il "criterio del colore" è soddisfatto per s e per t ed almeno uno dei vertici, s o t, è uno dei vertici-angolo della scacchiera individuati dalle coppie (1,1), (1,5), (5,1) oppure (5,5).

Alla soluzione ci si arriva attraverso un efficiente algoritmo detto "*backtracking algorithm*" applicato ad un numero finito di casi speciali tra cui anche a problemi su scacchiere rettangolari e non-rettangolari. Solo successivamente si ricorre alla strategia definita del "dividere e sormontare ostacoli".
La scacchiera $n \times n$ viene cioè suddivisa in sottoscacchiere più piccole così che il problema su una siffatta sottoscacchiera può essere risolto con più rapidità ed in maniera tale che le soluzioni di questi piccoli problemi possano poi essere combinate tra loro e costituire la soluzione per il problema più generale.
Al teorema segue un corollario.

COROLLARIO

G_n contiene un ciclo hamiltoniano se e solo se $n \geq 6$ con n pari.

DIMOSTRAZIONE

È ovvio che per $n \leq 4$ il grafo non conterrà mai un "ciclo hamiltoniano" perché l'esistenza di un siffatto cammino proverebbe l'esistenza di un "cammino hamiltoniano" contenuto in esso e ciò sappiamo essere assurdo.
Il "ciclo hamiltoniano" non sarà contenuto nel grafo neanche per n dispari perché, se un siffatto ciclo esistesse, i vertici iniziale e finale avrebbero colore differente contro la definizione di ciclo.
Il corollario è provato solo per $n \geq 6$ e pari infatti, tracciato un cammino hamiltoniano dalla casella contrassegnata (1,1) alla casella contrassegnata (2,3), tale cammino assieme alla mossa dalla casella (2,3) alla casella (1,1) definisce il ciclo hamiltoniano richiesto.
In virtù di quanto detto finora possiamo enunciare il seguente teorema:

TEOREMA

Il cavallo, saltando su una scacchiera $n \times n$, può occupare tutte le caselle ciascuna esattamente una volta descrivendo un cammino hamiltoniano se e solo se $n \geq 5$.

Di seguito sono date le soluzioni per le scacchiere 5×5, 6×6, 12×12 in figura 7 e figura 8.

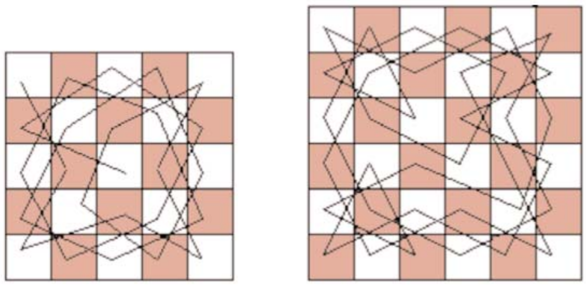

Figura 7. Soluzione del problema del salto del cavallo per la scacchiera 5 × 5 e 6 × 6

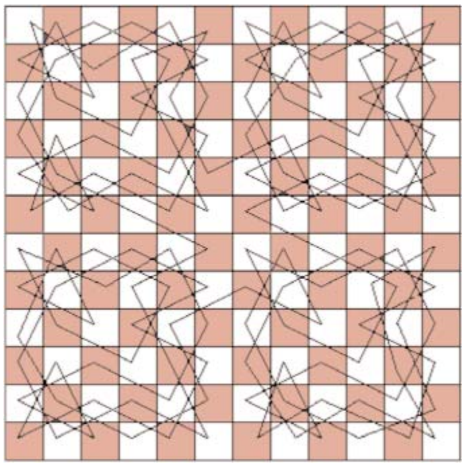

Figura 8. Soluzione del problema del salto del cavallo per la scacchiera 12 × 12.

Forse potrebbe apparire provocatorio chiedere di determinare il numero dei possibili cicli hamiltoniani descritti da un cavallo mosso su di una scacchiera $n \times n$ con n pari, ma se simili provocazioni sono utili a stimolare la creatività e la fantasia, se servono ad alimentare la sfida attraverso cui misurare le proprie capacità, allora ben vengano e vediamo a quali risultati hanno portato Kyek, Parberry e Wegener [K1] nel 1997.
Il numero richiesto è ovviamente uguale a 0 per $n = 2$ ed $n = 4$, pari invece a 9862 per $n = 6$. Per

$n = 8$ il miglior limite inferiore trovato (risultato dovuto a Kraitschik nel 1953) è pari a 122802512. In realtà sembra impossibile poter determinare il numero richiesto per n in generale.
Grazie alle ricerche condotte da Kyek, Parberry e Wegener possiamo conoscere un limite superiore trovato per il particolare caso $n = 8$ che viene stimato in 3.019×10^{22} possibilità.
Studiando il comportamento asintotico di questi valori, segue che il numero F_n dei cicli hamiltoniani che il cavallo può descrivere su una scacchiera (per n pari) è limitato superiormente da 4^{n^2} (per n=8 abbiamo un valore pari a 3.402×10^{38}). Questo risultato si basa sul seguente lemma.

LEMMA

Sia G un grafo con n vertici ed m spigoli. Sia scelto $k \in N$ tale che $(n-1)[m/(n-1)] + k = m$.
Allora il numero di cammini hamiltoniani che hanno inizio da un qualsiasi vertice v è limitato superiormente da $[m/(n-1)]^{n-1-k}\ [m/(n-1)+1]^k$.
Si osserva che il numero dei "cicli hamiltoniani" è al più la metà del numero dei "cammini hamiltoniani" che hanno inizio da un qualsiasi vertice.
Il grafo descritto dal cavallo su una scacchiera 8×8 ha 168 spigoli per cui il limite superiore ottenuto per il numero di cicli hamiltoniani su una siffatta scacchiera è $\frac{1}{2} \cdot 2^{21} \cdot 3^{42} \leq 1.148 \cdot 10^{26}$.
Tale limite superiore (per il particolare caso n=8) è stato tuttavia notevolmente migliorato infatti, attraverso l'uso di un calcolatore, studiando i differenti casi a cui le possibili mosse danno luogo ed esaminando i cammini di diversa lunghezza di conseguenza costruiti, si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA

Il numero di cicli hamiltoniani tracciati da un cavallo mosso su di una scacchiera 8×8 è al più pari a $F_n = 3.019 \times 10^{22}$.

Ricorrendo alla tecnica del "dividere e sormontare ostacoli", sappiamo che è possibile costruire differenti cicli hamiltoniani su di una scacchiera $n \times n$ suddividendo questa in sottoscacchiere. Supponiamo che dalla suddivisione si ricavino sottoscacchiere di dimensione 6×6, 6×8, 8×6 ed 8×8.
Scelto $\alpha \in [0,1/6]$ si ottengono pertanto $\alpha^2 n^2$ bordi di dimensione 6×6, $\frac{1}{8}\alpha\left(1-6\alpha\right)n^2$ bordi di dimensione 6×8 ed 8×6 mentre $\frac{1}{64}\left(1-6\alpha\right)^2 n^2$ bordi di dimensione 8×8.
Poiché a noi interessa stimare il numero dei differenti cammini hamiltoniani all'interno di tali sottoscacchiere, utilizzando i risultati raggiunti da Kyek e gli altri con l'aiuto di un calcolatore, osserviamo che relativamente al caso di una sottoscacchiera 8×8 esistono almeno $M_{8,8}$=19.610.000 cammini hamiltoniani, per una 6×6 abbiamo $M_{6,6}$=44670 mentre per una 6×8 ed 8×6 il numero è pari a $M_{6,8}=M_{8,6}$=1.800.000.
Il limite inferiore per il numero di cicli hamiltoniani è così pari a:

$$L^{\frac{1}{49}\left(\alpha n-\frac{1}{8}(1-6\alpha)n\right)^2} M_{6,6}^{\alpha^2 n^2} M_{6,8}^{\frac{1}{4}\alpha(1-6\alpha)n^2} M_{8,8}^{\frac{1}{64}\alpha(1-6\alpha)^2 n^2}$$

Tale limite assume il suo valore massimo per a = 1/6.
Poiché la partizione in bordi da 6×6 consente di ottenere il miglior limite inferiore in quanto $M_{6,6}$ rappresenta il valore stimato con più precisione rispetto agli altri, risulta che il limite inferiore per a = 1/6 è uguale a $\left(L^{\frac{1}{1764}} M_{6,6}^{\frac{1}{36}}\right)^{n^2}$.
e segue che:

TEOREMA

Il numero di cicli hamiltoniani descritti su di una scacchiera $n \times n$ è pari a $F_n = \Omega(1.3535\ n^2)$.

Bibliografia

[B1] J.A. Bondy - U.S.R. Murty: *Graph theory with application*, The Mac Millan Press LTD, Hong Kong 1976

[C1] A. Conrad – T.Hindrichs – H. Morsy – I. Wegener: *Solution of the k night's hamiltonian path problem on a chessboard,* Discrete Appl. Math. 50 (1994) 125-134

[F1] L.R. Foulds, *Graph theory application*, Springer-Verlag, New York 1992

[K1] O. Kyek – I. Parberry – I. Wegener: *Bounds on the numer of k night's tours*, Discrete Appl. Math. 74 (1997) 171-181

[O1] O.Ore: *Theory of graph*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island 1962

[Z1] G.C. Zammillo: *La passeggiata di Eulero sui sette ponti e i viaggi di Hamilton su un dodecaedro*, Tesi di Laurea – Università degli studi di Lecce, Dip. di Mat. "E. De Giorgi", Lecce 2000.