

MAGAZINE

MATEMATICAMENTE.IT

*Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

• Numero 8 – Dicembre 2008 •



Benjamin Rossen, Home Made Minimalist Chess Set
<http://flickr.com/photos/equitus/2867744762/>

IL SALTO DEL CAVALLO (UN PROBLEMA DI TEORIA DEI GRAFI) - IL PROBLEMA
DEL BAGNINO CON GEOGEBRA - TRIANGOLO DI TARTAGLIA IN UN GIORNO
DI SCIOPERO - UN CRITERIO DI DIVISIBILITÀ GENERALIZZATO -
PERCORSI EULERIANI SULL'OTTAEDRO CON MATHEMATICA - MATEMATICA
CON LA BASH - 2009 ANNO INTERNAZIONALE DELL'ASTRONOMIA -
LO SCAFFALE DEI LIBRI - ENIGMISTICA E GIOCHI

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche sostanziali che devono essere fatte dall'autore.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .rtf o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail, CV sintetico (100-200 parole).

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo [3].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione. La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista *Matematicamente.it Magazine*; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it*

*Registrazione del 19.12.2006
al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449*

*Direttore responsabile
Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it*

*Vicedirettore
Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it*

*Redazione
Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto
Luca Barletta
Michele Mazzucato*

*Hanno collaborato a questo numero
Antonio Bernardo, Anna Cerasoli, Flavio Cimolin,
Luca Frangella, Paolo La Rocca, Vito Lecci,
Luciano Sarra, Gabriella Zammillo.*

*Progetto grafico
Anna Gangale*

SOMMARIO

98. <i>Il salto del cavallo (Un problema di teoria dei grafi)</i>	5
DI GABRIELLA ZAMMILLO	
99. <i>Il Problema del Bagnino con Geogebra</i>	10
A CURA DI LUCA FRANGELLA	
100. <i>Triangolo di Tartaglia in un giorno di sciopero.</i>	16
DI ANNA CERASOLI	
101. <i>Un criterio di divisibilità generalizzato</i>	19
DI PAOLO LA ROCCA	
102. <i>Percorsi Euleriani sull'ottaedro con Mathematica</i>	25
A CURA DI FLAVIO CIMOLIN	
103. <i>Matematica con la Bash</i>	34
DI LUCIANO SARRA	
104. <i>2009 anno internazionale dell'Astronomia</i>	42
DI VITO LECCI	
105. <i>Lo scaffale dei libri</i>	44
A CURA DI ANTONIO BERNARDO	
106. <i>Enigmistica e giochi</i>	46

EDITORIALE

Con questo numero si chiude il secondo anno di attività di Matematicamente.it Magazine, nel frattempo abbiamo superato 100 articoli pubblicati. Gabriella Zammillo ci parla del salto del cavallo, presentandolo come un problema di teoria dei grafi: in quale scacchiera il cavallo può ricoprire tutte le caselle percorrendole una sola volta? Luca Frangella mostra come affrontare il problema del bagnino con il software libero Geogebra: qual è il percorso più veloce tra spiaggia e mare che deve fare un bagnino per soccorrere un incauto bagnante? Anna Cerasoli, nella sesta puntata del racconto matematico Metallica, presenta il triangolo di Tartaglia e i semplici problemi di vita reale che con esso possiamo risolvere. Paolo La Rocca espone un criterio di divisibilità generalizzato che può essere applicato con il foglio di calcolo elettronico. Flavio Cimolin ha catalogato, con l'aiuto del sofisticato software Mathematica, tutti i possibili percorsi euleriani sull'ottaedro. Luciano Sarra ci mostra come usare la Bash per scrivere algoritmi matematici anche sofisticati. Vito Lecci ci ricorda che il 2009 è l'anno dedicato all'astronomia: tantissime iniziative in tutto il mondo e anche noi abbiamo voluto dare più spazio a questa scienza con un nuovo forum in cui si discute di osservazione del cielo. Per concludere, una proposta di una buona lettura adatta anche a bambini della primaria, Sono il numero 1, come mi sono divertito a diventare bravo in matematica di Anna Cerasoli, e il solito spazio a cruciverba e crucinúmero.

Antonio Bernardo

98. Il salto del cavallo

(Un problema di teoria dei grafi)

di Gabriella Zammillo

SUNTO Il salto del cavallo è un problema esprimibile sia in termini di grafi euleriani sia in termini di grafi hamiltoniani. In questo articolo si presenta il problema e si esaminano le sue possibilità di soluzione. Si comprende quindi perché si può disegnare un cammino chiuso, in cui tutte le possibili mosse siano tracciate una sola volta, nel caso in cui il cavallo si muove su una scacchiera $n \times n$ con $n = 3$; perché il cavallo può occupare tutte le caselle di una scacchiera $n \times n$ ritornando sulla casella da cui è partito solo nel caso $n \times n$ con $n \geq 6$ e pari; perché nel caso $n \times n$ con $n = 5$ il cammino non è chiuso ed inoltre quanti possibili cammini chiusi può descrivere il cavallo muovendosi su di una scacchiera $n \times n$ con n pari.

1 Introduzione

Il gioco, si sa, stimola la fantasia ma, presentato sotto forma di rompicapi e indovinelli, risulta un utile strumento d'apprendimento della matematica. Noto è infatti quanto gli argomenti di matematica ricreativa abbiano già in passato catturato l'interesse di grandi menti matematiche, da Eulero a Leibniz, da Hilbert ad Einstein e che alcune teorie matematiche abbiano avuto origine proprio dall'analisi e discussione di rompicapi.

È il caso della Teoria dei Grafi [B1], [F1], [O1] le cui origini risalgono al 1736 quando Eulero riuscì a spiegare l'impossibilità di soluzione del problema dei sette ponti di Königsberg, tormento di non poco conto per gli abitanti dell'antica cittadina prussiana. Così come, tormento fu, il rompicapo del salto del cavallo sulla scacchiera, sicuramente meno conosciuto, pur essendo stato trattato da Eulero già nel 1759 e poi da Legendre, Vandermonde ed altri.

In questo articolo, concepito con l'intento di sottolineare il valore del gioco nella didattica della matematica, ho cercato di presentare solo alcuni aspetti del problema e le relative soluzioni, con un linguaggio accessibile anche ai non addetti ai lavori che pure abbiano qualche interesse all'argomento rimandando per gli approfondimenti alla bibliografia.

È noto dalle regole del gioco degli scacchi che il cavallo salta sulla scacchiera spostandosi lungo la diagonale di un rettangolo composto da 3×2 caselle passando da una casella bianca ad una nera o viceversa come mostrato in figura 1.

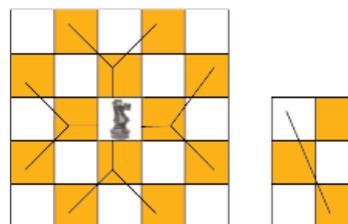


Figura 1. Il cavallo si muove sugli scacchi lungo la diagonale di un rettangolo 3×2 , passando da una casella bianca ad una nera e viceversa.

Allora:

- Poiché esistono molte mosse diverse che consentono al cavallo di saltare da una casella all'altra, si può disegnare un cammino chiuso in cui tutte le possibili MOSSE siano tracciate una ed una sola volta?
- È possibile, per il cavallo, occupare tutte le CASELLE di una scacchiera $n \times n$ ciascuna esattamente una volta prima di ritornare sulla stessa casella da cui è partito?

Esprimiamoci in termini di teoria dei grafi.

Intuitivamente con la parola “grafo” intendiamo una struttura che ci permette di rappresentare gli elementi di un insieme e una relazione tra tali elementi detti rispettivamente “vertici” e “spigoli”.

In altre parole:

DEFINIZIONE

Diciamo “grafo” una coppia ordinata $(V(G), E(G))$ tale che $V(G)$ è un insieme non vuoto ed $E(G)$ è un insieme di coppie non ordinate di elementi di $V(G)$.

Pertanto, nel nostro caso specifico, i vertici sono rappresentati dai quadrati della scacchiera mentre gli spigoli dalle mosse del cavallo. Ogni mossa è quindi identificata dalla coppia (casella di partenza, casella d’arrivo). Poiché una sequenza alternata di vertici e spigoli definisce un “cammino”, possiamo generalizzare il problema nel seguente modo:

PROBLEMA

Quanti possibili cammini chiusi diversi può descrivere il cavallo muovendosi su di una scacchiera $n \times n$ con n pari?

Si capisce bene che in base alle definizioni date di vertice e spigolo, i termini MOSSE e CASELLE consentono di tradurre il problema del “salto del cavallo” rispettivamente in termini di “grafi euleriani” e di “grafi hamiltoniani”.

Per rispondere al quesito ispiriamoci allora a quanto fatto da Eulero col problema dei ponti di Könisberg.

1. Un problema di cammini euleriani

Il primo quesito riformulato, chiede in sostanza se è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo. Ricordiamo che un “cammino” è una sequenza finita ed alternata di vertici e spigoli; che un cammino è “chiuso” quando il primo e l’ultimo vertice coincidono e che un cammino è detto “euleriano” quando oltre ad essere un cammino chiuso, è individuato da una sequenza che contiene ogni spigolo del grafo una ed una sola volta. Al contrario, è detto cammino “semi-euleriano” quando, pur contenendo ogni spigolo del grafo una ed una sola volta, esso risulta non chiuso.

Eulero ci ha insegnato che affinché in un grafo sia possibile costruire un cammino euleriano, esso deve avere tutti i vertici di grado pari; se vogliamo costruire invece un cammino semi-euleriano, il grafo considerato deve contenere al massimo due

vertici di grado dispari, dove per grado si intende il numero di spigoli uscenti dal vertice dato.

Torniamo ora alla nostra scacchiera. È evidente che si ha una risposta affermativa al problema prima esposto soltanto se il cavallo si muove su di una scacchiera $n \times n$ con $n = 3$. Infatti è soltanto in questo caso, la figura 2 ci aiuta a comprendere il motivo, che tutte le caselle occupate dal cavallo consentono due mosse: una in entrata, l’altra in uscita.

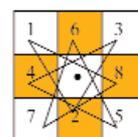


Figura 2. In una scacchiera 3×3 tutte le caselle occupate dal cavallo consentono una mossa in entrata e una in uscita.

Ciò vuol dire che ogni singolo vertice, contenuto nel grafo tracciato, ha grado 2 quindi, poiché è soddisfatta la condizione di Eulero, il cammino disegnato è proprio quello richiesto.

È altresì chiaro che la condizione di Eulero non potrà essere verificata per $n > 3$ infatti già in una scacchiera 4×4 esistono otto caselle dalle quali sono possibili 3 mosse, cioè il cavallo non potrà uscire da una di queste caselle dopo esservi entrato la seconda volta, vedi figura 3.

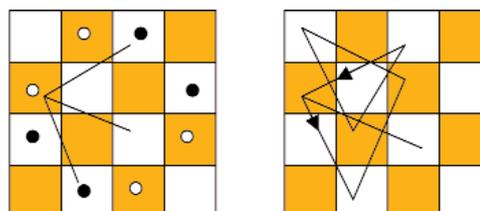


Figura 3. In una scacchiera 4×4 esistono otto caselle dalle quali il cavallo non potrà uscire dopo esservi entrato la seconda volta.

L’esistenza di un numero maggiore di 2 di caselle di questo tipo, e quindi l’esistenza di un numero maggiore di 2 di vertici di grado dispari, contraddice ovviamente l’ipotesi del teorema di Eulero ragion per cui il problema, già a partire da una scacchiera 4×4 per poi essere generalizzato ad una $n \times n$, non potrà mai avere soluzione proprio perché le otto caselle di grado dispari non solo continueranno ad esistere, ma continueranno anche ad essere adiacenti alle quattro caselle di grado 2 poste ai rispettivi quattro angoli della scacchiera, vedi figura 4.

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

Figura 4. In una scacchiera $n \times n$ ci sono sempre quattro caselle di grado 2 e 8 caselle di grado 3.

2. Un problema di grafi hamiltoniani

Chiedere se sia possibile muovere il cavallo su una scacchiera $n \times n$ occupando tutte le caselle esattamente una volta equivale a risolvere invece un problema di cammini hamiltoniani. Questione abbastanza delicata e tra l'altro tuttora aperta, quella dei cammini hamiltoniani, ma nel nostro caso ci avvaliamo del contributo dovuto a Conrad, Hindrichs, Morsy e Wegener [C1] risalente al 1994 e contenente efficienti algoritmi per la costruzione dei cammini hamiltoniani.

Tradurre il problema in termini di grafi hamiltoniani significa chiedere se esiste nel grafo considerato un cammino chiuso detto "ciclo hamiltoniano" che contiene ogni vertice del grafo una ed una sola volta oppure un "cammino hamiltoniano" se il cammino dovesse risultare non chiuso pur contenendo sempre ciascun vertice una ed una sola volta.

È ovvio che nessuno dei due cammini potrà mai esistere nel caso in cui la scacchiera sia di tipo 3×3 oppure di tipo 4×4 , perché il numero ridotto di caselle impedisce al cavallo di occuparle tutte con una ulteriore mossa. Com'è facile notare in figura 5, sono state tracciate tutte le possibili mosse del cavallo sulle scacchiere 3×3 e 4×4 ma, su nessuna delle due scacchiere è stato possibile descrivere il cammino richiesto.

1	6	3
4	?	8
7	2	5

?	13	8	3
7	4	11	14
12	9	2	5
1	6	15	10

Figura 5. Su nessuna delle due scacchiere è stato possibile stracciare un cammino hamiltoniano.

Tuttavia osserviamo che data una sequenza alternata di caselle bianche e nere, come in figura 6, sarà possibile costruire un ciclo hamiltoniano che le contenga tutte e alternativamente, una bianca ed una nera, solo nel caso in cui il loro numero sia pari, perché se fosse altrimenti, verrebbero ad essere adiacenti due caselle dello stesso colore contraddicendo le ipotesi.

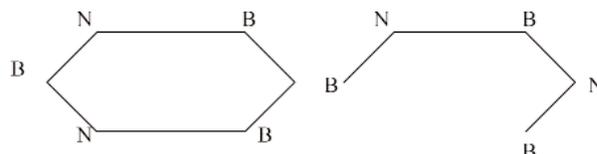


Figura 6. Affinché sia possibile un cammino hamiltoniano il numero di caselle deve essere pari.

È proprio sulla base di questa osservazione che si fonda il "criterio del colore" formulato da Conrad e gli altri per poter ammettere l'esistenza di un "cammino hamiltoniano", criterio secondo il quale un cammino hamiltoniano, da una casella contrassegnata s ad una casella contrassegnata t e distinta da s , esiste per $n \geq 6$ se e soltanto se n è pari ed s e t hanno colore differente, oppure n è dispari, ma s e t hanno colore bianco (supposto che agli angoli della scacchiera ci siano caselle bianche).

Dato quindi il grafo G_n come la coppia $G_n = (V_n, E_n)$ definita in precedenza, rappresentiamo la scacchiera $n \times n$, per la quale si considera il grafo G_n , attraverso un sistema di riferimento come mostrato in figura 6, in cui le coppie (i, j) con $1 \leq i, j \leq n$ individuano le caselle.

	1	2	3	i	n
1	B	N			
2	N	B			
3					
j				(i, j)	
n					

Figura 6. Il grafo G_n in un sistema di riferimento

Indichiamo con c la funzione colore tale che:
 $c : (i, j) \rightarrow c(i, j) = \text{bianco se } i+j \text{ è pari}$

$c : (i, j) \rightarrow c(i, j) = \text{nero se } i+j \text{ è dispari}$

Posto allora $c(s) = c(i_s, j_s)$, $c(t) = c(i_t, j_t)$ Conrad

definisce il “criterio del colore” per una generica scacchiera $n \times n$ con:

$$c(s) \neq c(t) \text{ se } n \text{ è pari}$$

$$c(s) = c(t) = \text{bianco se } n \text{ è dispari}$$

e prova il seguente teorema:

TEOREMA

i) Se $n \geq 6$. Un $s - t$ cammino hamiltoniano esiste se e solo se il “criterio del colore” è soddisfatto per s e per t .

ii) Se $n=5$. Un $s - t$ cammino hamiltoniano esiste se e solo se il “criterio del colore” è soddisfatto per s e per t ed almeno uno dei vertici, s o t , è uno dei vertici-angolo della scacchiera individuati dalle coppie $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$ oppure $(5,5)$.

Alla soluzione ci si arriva attraverso un efficiente algoritmo detto “*backtracking algorithm*” applicato ad un numero finito di casi speciali tra cui anche a problemi su scacchiere rettangolari e non-rettangolari. Solo successivamente si ricorre alla strategia definita del “dividere e sormontare ostacoli”.

La scacchiera $n \times n$ viene cioè suddivisa in sottoscacchiere più piccole così che il problema su una siffatta sottoscacchiera può essere risolto con più rapidità ed in maniera tale che le soluzioni di questi piccoli problemi possano poi essere combinate tra loro e costituire la soluzione per il problema più generale.

Al teorema segue un corollario.

COROLLARIO

G_n contiene un ciclo hamiltoniano se e solo se $n \geq 6$ con n pari.

DIMOSTRAZIONE

È ovvio che per $n \leq 4$ il grafo non conterrà mai un “ciclo hamiltoniano” perché l’esistenza di un siffatto cammino proverebbe l’esistenza di un “cammino hamiltoniano” contenuto in esso e ciò sappiamo essere assurdo.

Il “ciclo hamiltoniano” non sarà contenuto nel grafo neanche per n dispari perché, se un siffatto ciclo esistesse, i vertici iniziale e finale avrebbero colore differente contro la definizione di ciclo.

Il corollario è provato solo per $n \geq 6$ e pari infatti, tracciato un cammino hamiltoniano dalla casella contrassegnata $(1,1)$ alla casella contrassegnata $(2,3)$, tale cammino assieme alla mossa dal-

la casella $(2,3)$ alla casella $(1,1)$ definisce il ciclo hamiltoniano richiesto.

In virtù di quanto detto finora possiamo enunciare il seguente teorema:

TEOREMA

Il cavallo, saltando su una scacchiera $n \times n$, può occupare tutte le caselle ciascuna esattamente una volta descrivendo un cammino hamiltoniano se e solo se $n \geq 5$.

Di seguito sono date le soluzioni per le scacchiere 5×5 , 6×6 , 12×12 in figura 7 e figura 8.

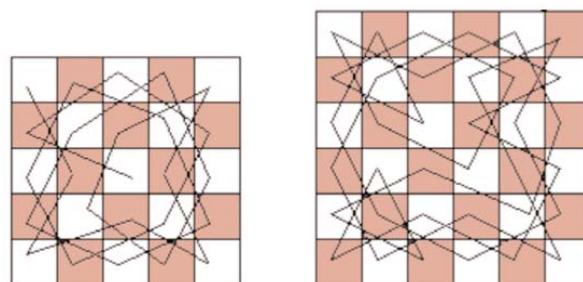


Figura 7. Soluzione del problema del salto del cavallo per la scacchiera 5×5 e 6×6

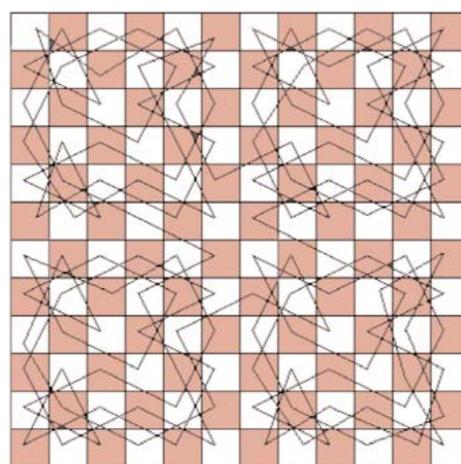


Figura 8. Soluzione del problema del salto del cavallo per la scacchiera 12×12 .

Forse potrebbe apparire provocatorio chiedere di determinare il numero dei possibili cicli hamiltoniani descritti da un cavallo mosso su di una scacchiera $n \times n$ con n pari, ma se simili provocazioni sono utili a stimolare la creatività e la fantasia, se servono ad alimentare la sfida attraverso cui misurare le proprie capacità, allora ben vengano e vediamo a quali risultati hanno portato Kyek, Parberry e Wegener [K1] nel 1997.

Il numero richiesto è ovviamente uguale a 0 per $n = 2$ ed $n = 4$, pari invece a 9862 per $n = 6$. Per

$n = 8$ il miglior limite inferiore trovato (risultato dovuto a Kraitchik nel 1953) è pari a 122802512. In realtà sembra impossibile poter determinare il numero richiesto per n in generale.

Grazie alle ricerche condotte da Kyek, Parberry e Wegener possiamo conoscere un limite superiore trovato per il particolare caso $n = 8$ che viene stimato in 3.019×10^{22} possibilità.

Studiando il comportamento asintotico di questi valori, segue che il numero F_n dei cicli hamiltoniani che il cavallo può descrivere su una scacchiera (per n pari) è limitato superiormente da 4^{n^2} (per $n=8$ abbiamo un valore pari a 3.402×10^{38}). Questo risultato si basa sul seguente lemma.

LEMMA

Sia G un grafo con n vertici ed m spigoli. Sia scelto $k \in N$ tale che $(n-1)[m/(n-1)] + k = m$.

Allora il numero di cammini hamiltoniani che hanno inizio da un qualsiasi vertice v è limitato superiormente da $[m/(n-1)]^{n-1-k} [m/(n-1) + 1]^k$.

Si osserva che il numero dei “cicli hamiltoniani” è al più la metà del numero dei “cammini hamiltoniani” che hanno inizio da un qualsiasi vertice. Il grafo descritto dal cavallo su una scacchiera 8×8 ha 168 spigoli per cui il limite superiore ottenuto per il numero di cicli hamiltoniani su una siffatta scacchiera è $\frac{1}{2} \cdot 2^{21} \cdot 3^{42} \leq 1.148 \cdot 10^{26}$.

Tale limite superiore (per il particolare caso $n=8$) è stato tuttavia notevolmente migliorato infatti, attraverso l’uso di un calcolatore, studiando i differenti casi a cui le possibili mosse danno luogo ed esaminando i cammini di diversa lunghezza di conseguenza costruiti, si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA

Il numero di cicli hamiltoniani tracciati da un cavallo mosso su di una scacchiera 8×8 è al più pari a $F_n = 3.019 \times 10^{22}$.

Ricorrendo alla tecnica del “dividere e sormontare ostacoli”, sappiamo che è possibile costruire differenti cicli hamiltoniani su di una scacchiera $n \times n$ suddividendo questa in sottoscacchiere. Supponiamo che dalla suddivisione si ricavino sottoscacchiere di dimensione 6×6 , 6×8 , 8×6 ed 8×8 .

Scelto $\alpha \in [0, 1/6]$ si ottengono pertanto $\alpha^2 n^2$

bordi di dimensione 6×6 , $\frac{1}{8} \alpha (1 - 6\alpha) n^2$ bordi di dimensione 6×8 ed 8×6 mentre $\frac{1}{64} (1 - 6\alpha)^2 n^2$ bordi di dimensione 8×8 .

Poiché a noi interessa stimare il numero dei differenti cammini hamiltoniani all’interno di tali sottoscacchiere, utilizzando i risultati raggiunti da Kyek e gli altri con l’aiuto di un calcolatore, osserviamo che relativamente al caso di una sottoscacchiera 8×8 esistono almeno $M_{8,8} = 19.610.000$ cammini hamiltoniani, per una 6×6 abbiamo $M_{6,6} = 44670$ mentre per una 6×8 ed 8×6 il numero è pari a $M_{6,8} = M_{8,6} = 1.800.000$.

Il limite inferiore per il numero di cicli hamiltoniani è così pari a:

$$L^{\frac{1}{49}(\alpha n - \frac{1}{8}(1-6\alpha)n)^2} M_{6,6}^{\alpha^2 n^2} M_{6,8}^{\frac{1}{4}\alpha(1-6\alpha)n^2} M_{8,8}^{\frac{1}{64}\alpha(1-6\alpha)^2 n^2}$$

Tale limite assume il suo valore massimo per $\alpha = 1/6$.

Poiché la partizione in bordi da 6×6 consente di ottenere il miglior limite inferiore in quanto $M_{6,6}$ rappresenta il valore stimato con più precisione rispetto agli altri, risulta che il limite inferiore per $\alpha = 1/6$ è uguale a $\left(L^{\frac{1}{1764}} M_{6,6}^{\frac{1}{36}} \right)^{n^2}$ e segue che:

TEOREMA

Il numero di cicli hamiltoniani descritti su di una scacchiera $n \times n$ è pari a $F_n = \Omega(1.3535 n^2)$.

Bibliografia

[B1] J.A. Bondy - U.S.R. Murty: *Graph theory with application*, The Mac Millan Press LTD, Hong Kong 1976

[C1] A. Conrad – T.Hindrichs – H. Morsy – I. Wegener: *Solution of the k night’s hamiltonian path problem on a chessboard*, Discrete Appl. Math. 50 (1994) 125-134

[F1] L.R. Foulds, *Graph theory application*, Springer-Verlag, New York 1992

[K1] O. Kyek – I. Parberry – I. Wegener: *Bounds on the numer of k night’s tours*, Discrete Appl. Math. 74 (1997) 171-181

[O1] O.Ore: *Theory of graph*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island 1962

[Z1] G.C. Zammillo: *La passeggiata di Eulero sui sette ponti e i viaggi di Hamilton su un dodecaedro*, Tesi di Laurea – Università degli studi di Lecce, Dip. di Mat. “E. De Giorgi”, Lecce 2000.

99. Il Problema del Bagnino con Geogebra

a cura di Luca Frangella¹

SUNTO L'argomento proposto in questo articolo è un classico problema di ottimizzazione, ideato dal fisico R. Feynman, che prelude al principio di Fermat e alla legge di Snell; ragion per cui è particolarmente indicato per la classe conclusiva di un Liceo Scientifico. Il problema viene affrontato con diversi metodi e da diversi punti. In particolare viene usato il free-software di geometria dinamica GeoGebra.

1 Formulazione generale del problema

Sulla riviera ligure un incauto bagnante che si trova a b metri dalla riva rischia di affogare e grida aiuto. Il bagnino, nel momento in cui si accorge del pericolo, si trova sulla spiaggia ad a metri dalla riva. In linea d'aria il bagnino e il bagnante distano inizialmente d metri, ma la linea immaginaria che li unisce non è perpendicolare alla riva. Il bagnino può correre sulla spiaggia con una velocità media di v_1 m/s, mentre in acqua può nuotare con una velocità media inferiore pari a v_2 m/s. Quale percorso deve compiere il bagnino affinché, a partire dalla sua posizione iniziale, arrivi nel più breve tempo possibile in soccorso del bagnante, evitando così che questi affoghi?

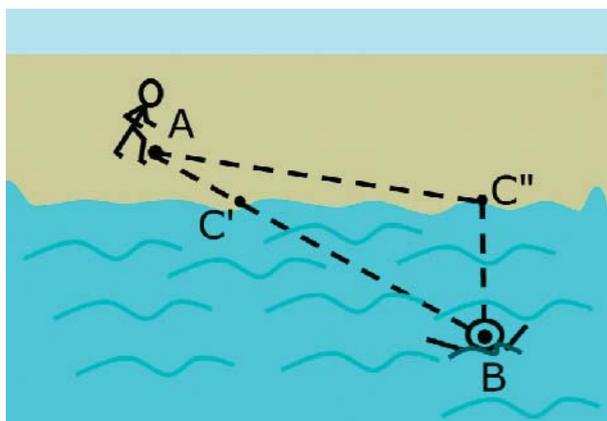


Figura 1. Il bagnino è in A, il bagnante in pericolo è in B.

Dal testo si ricavano le seguenti informazioni essenziali:

- Il bagnino si trova inizialmente ad a metri dalla riva.
- Il bagnante sta affogando a b metri dalla riva (BC").
- La distanza iniziale fra il bagnino e il bagnante è d metri (AB).
- La linea immaginaria che unisce la posizione iniziale del bagnino con quella del bagnante non è perpendicolare alla riva.
- Il bagnino corre sulla spiaggia ad una velocità media di v_1 m/s.
- Il bagnino nuota in mare con una velocità media di v_2 m/s.
- $v_2 < v_1$

L'obiettivo è quello di individuare il percorso che deve compiere il bagnino per raggiungere nel più breve tempo possibile il bagnante.

2 Schematizzazione e rappresentazione geometrica

Utilizziamo il software "GeoGebra" per rappresentare graficamente il problema.

- Tracciare una linea retta orizzontale che rappresenti la riva, ovvero la linea di separazione fra spiaggia e mare.
- Segnare il punto A distante a dalla riva, che corrisponde alla posizione iniziale del bagnino.
- Segnare il punto B distante b dalla riva e d dal punto A, in modo che il segmento AB, di misura d , non sia perpendicolare alla riva.

¹ Luca Frangella (lucafg@libero.it) è laureato in fisica, insegna Matematica e Fisica presso i Licei di Brescia, è stato esercitante dei corsi fisica per ingegneri ha pubblicato sul sito italiano di Geogebra [1] diverse applicazioni matematiche, si occupa anche di fumetto, a scuola, in radio Radio Onda d'Urto e sul web <http://www.distorsioni.net>.

- d) Tratteggiare le distanze a , b , d .
 e) Indicare con C e D rispettivamente le proiezioni dei punti A e B sulla riva.
 f) Indicare con J il punto di intersezione fra il segmento AB e la riva.
 g) Indicare con c la misura del segmento CD .
 h) Tratteggiare la retta parallela alla riva passante per B e la retta perpendicolare alla riva passante per A . Chiamare E il loro punto di intersezione.

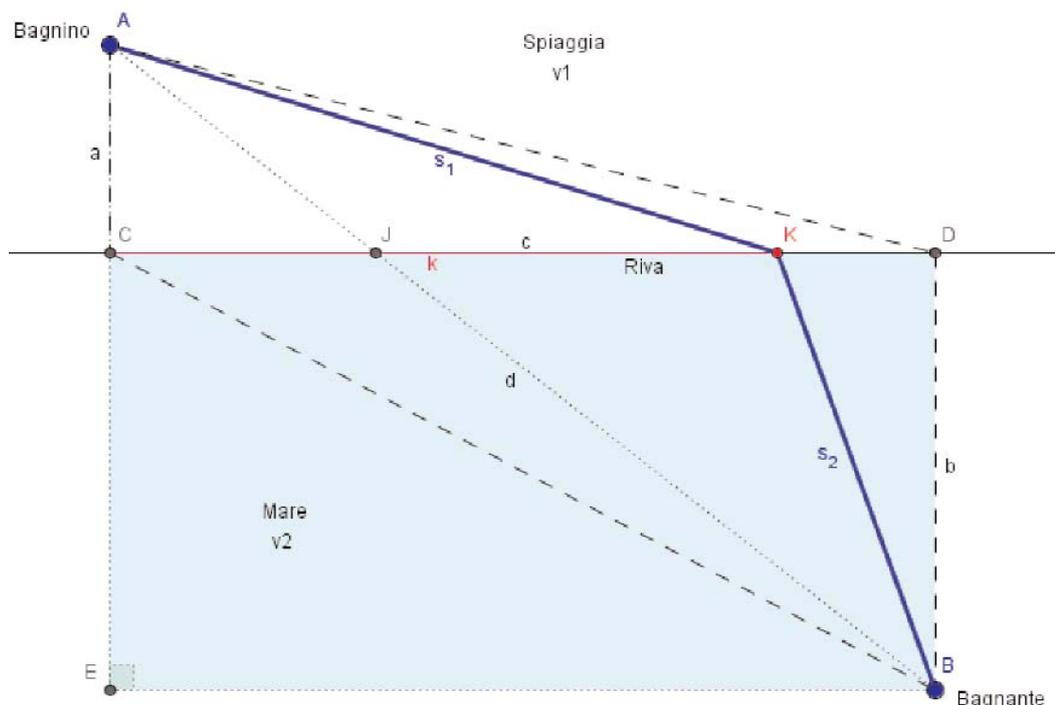


Figura 2. Una rappresentazione geometrica del problema del bagnino con Geogebra

Osserviamo che il segmento $AB = d$ rappresenta l'ipotenusa del triangolo rettangolo AEB avente come cateti $EB = CD = c$ e $AE = AC + CE = AC + BD = a + b$. Possiamo dunque calcolare c mediante il teorema di Pitagora: $c = \sqrt{d^2 - (a + b)^2}$.

3 Discussione preliminare sui possibili percorsi

Dalla cinematica sappiamo che la relazione fra tempo (t), spazio (s) e velocità media (v) è $s = v t$ da cui $t = s/v$. Dobbiamo considerare separatamente i tratti di spiaggia e quelli di mare, perché il bagnino corre e nuota con velocità diverse, rispettivamente $v_1 > v_2$.

Detto s_1 il tratto generico di spiaggia e s_2 quello di mare e detti t_1 e t_2 i rispettivi tempi di percorrenza di tali tratti, possiamo scrivere:

$$\text{sulla spiaggia: } t_1 = \frac{s_1}{v_1} \quad \text{in mare: } t_2 = \frac{s_2}{v_2}$$

Il tempo totale è dunque: $t_{tot} = t_1 + t_2$.

Facciamo ora delle considerazioni su alcuni percorsi possibili.

Il percorso di minima lunghezza è indubbiamente AB , e verrebbe da dire che sia anche quello di minimo tempo. Questo sarebbe sicuramente vero se il bagnino potesse nuotare tanto velocemente quanto corre sulla spiaggia, ovvero, se potesse mantenere una velocità costante per tutto il tragitto.

Ma notiamo come il tratto di mare JB , dove il bagnino deve nuotare, è molto più lungo rispetto al tratto di spiaggia AJ , dove invece il bagnino può correre. Viene spontaneo chiedersi se esistono percorsi non molto più lunghi di questo ma con una proporzione più favorevole fra tratti di spiaggia e di mare.

Le spezzate ACB e ADB rappresentano due percorsi nettamente più lunghi di AB . Ma osserviamo i tratti di spiaggia e di mare: ACB è molto meno favorevole rispetto ad AB , perché diminuisce il tratto di spiaggia (AC) ed aumenta quello in mare (CB); ADB presenta invece un tratto notevolmente più lungo di spiaggia (AD), e uno molto più breve di mare (DB). Quest'ultimo percorso, sebbene globalmente più lungo di AB , potrebbe essere compiuto in un tempo totale minore.

A questo punto sorge spontaneo il dubbio se non esista un punto K , compreso fra J e D , in cui il bagnino debba tuffarsi in mare e tale che la spezzata AKB sia il percorso di minimo tempo, sebbene non di minima lunghezza. Un simile percorso sarebbe globalmente meno lungo di ADB e allo stesso tempo continuerebbe ad avere un tratto di mare (KB) più corto di quello di spiaggia (AK). Queste considerazioni possono variare leggermente a seconda della scelta dei punti A e B e dei valori a , b , d forniti dal problema, ma la logica è sempre la stessa.

In generale, bisogna sempre cercare un punto K compreso fra C e D , in cui il bagnino deve tuffarsi in mare per arrivare nel tempo più breve in soccorso del bagnante. Tale ragionamento può essere verificato grazie all'interattività dinamica di GeoGebra. Il file interattivo è disponibile on line in [2].

4 Esplorazione numerica

In riferimento alla figura 2, si prenda un punto qualsiasi K appartenente al segmento CD . Si traccino poi i segmenti AK e KB di lunghezza rispettivamente s_1 e s_2 . Si definisca inoltre un segmento CK di lunghezza k . Si definiscano le variabili t_1 , t_2 , t_{tot} come indicato precedentemente, scegliendo per le velocità valori ragionevoli e realistici. Nell'esempio in figura sono stati scelti i valori $v_1 = 5 \text{ m/s}$, $v_2 = 3 \text{ m/s}$.

È possibile ora spostare con il mouse il punto K lungo il segmento CD . Di conseguenza varieranno dinamicamente tutte le variabili e i parametri introdotti e potremmo verificare numericamente la bontà delle considerazioni fatte. I dati poi possono essere raccolti in una tabella. Difatti GeoGebra è fornito di una finestra algebrica in cui vengono registrati e aggiornati in tempo reale tutti i parametri, le variabili e gli enti geometrici del problema.

Si noti che i valori di a , b , d sono fissati nel momento in cui vengono posizionati i punti A e B , e dunque spostando con il mouse la loro ubicazione, tali valori possono essere variati. In questo modo è possibile verificare numerose varianti del problema, rendendosi conto che il ragionamento fatto, seppure con qualche lieve differenza, è sempre corretto. In particolare troveremmo sempre

un punto K compreso fra C e D , tale che il percorso AKB sia di minimo tempo; il punto K è numericamente identificato dalla misura del segmento AK , ovvero dal parametro K .

5 Soluzione analitica

Introduciamo una variabile indipendente, ovvero un'incognita x . Poniamo la misura del segmento $CK = x$; in tal modo $KD = c - x$. Calcoliamo in funzione di x i valori di s_1 e s_2 applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ACK e BDK :

$$s_1(x) = \sqrt{a^2 + x^2} \quad s_2(x) = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

Scriviamo poi t_1 , t_2 , t_{tot} in funzione di x .

$$t_{tot}(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}, \quad x \in [0, c]$$

Poiché K è compreso fra C e D , la variabile x può variare fra 0 e c .

Il problema si riduce a trovare il punto di minimo assoluto della funzione $t_{tot}(x)$, continua e derivabile nell'intervallo di definizione che è chiuso e limitato. Il teorema di Weierstrass ci assicura che tale punto esiste e si trova in corrispondenza o degli estremi dell'intervallo o di eventuali punti stazionari della funzione interni ad esso. Sappiamo già dalle precedenti considerazioni che tale punto si troverà all'interno dell'intervallo.

Procediamo pertanto alla ricerca dei punti stazionari.

6 Analisi grafica e numerica

Nello stesso foglio della costruzione geometrica immettiamo la funzione $f(x) = t_{tot}(x)$ nell'input di GeoGebra e visualizziamone il grafico. I valori di a , b , c e delle velocità v_1 , v_2 vengono automaticamente presi da quelli usati per la costruzione geometrica. Si nota immediatamente che all'interno dell'intervallo di definizione vi è un punto di minimo relativo.

È possibile introdurre un punto G di coordinate $G(k; t_{tot})$ e impostare il comando "Traccia". Spo-

stando con il mouse il punto K lungo il segmento CD , vedremo il punto G tracciare per punti una curva che va a sovrapporsi perfettamente al grafico della funzione, che a questo punto possiamo anche

occultare. Introduciamo poi la tangente al grafico della funzione nel punto G utilizzando la nota relazione: $y = f(x_G) + f'(x_G) \cdot (x - x_G)$ dove x_G è l'ascissa del punto G .

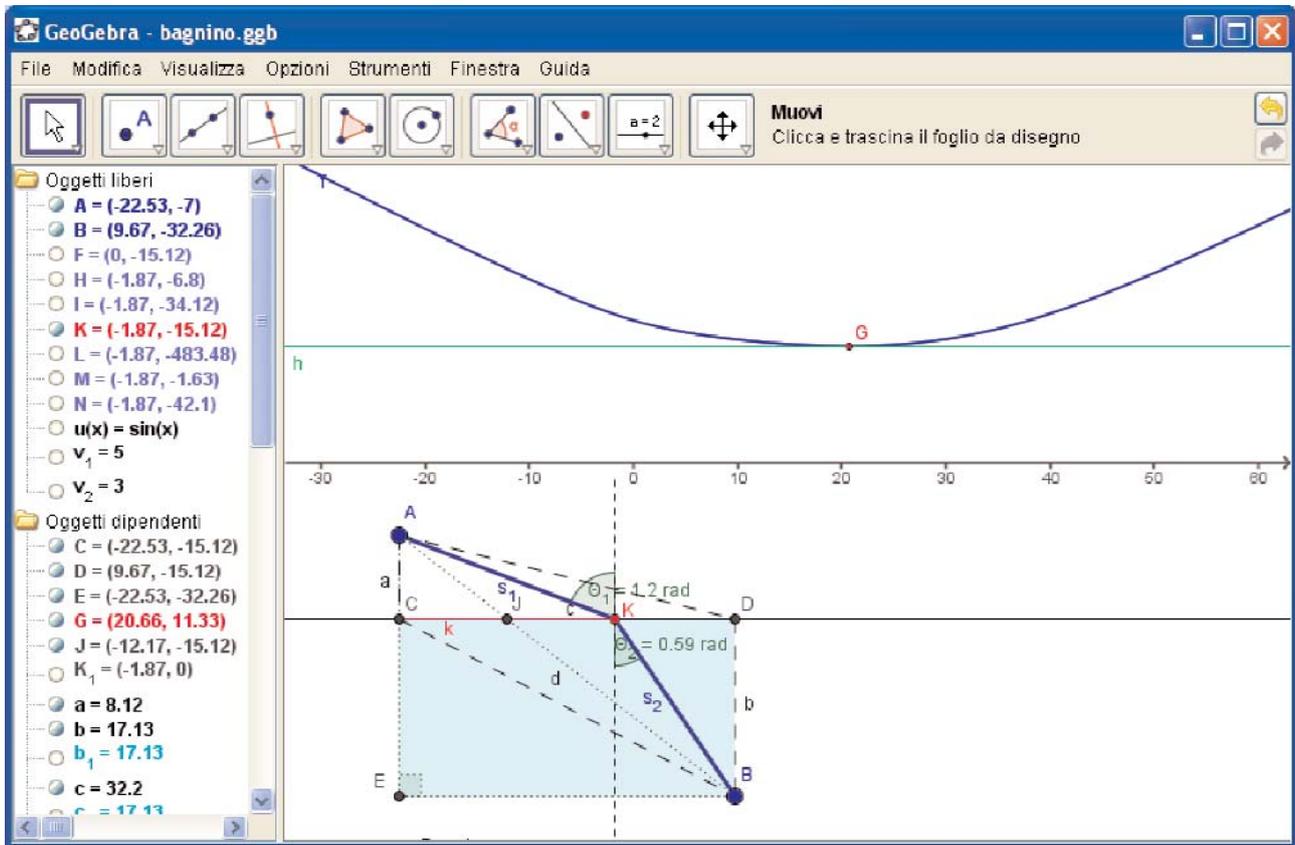


Figura 3. Finestra di Geogebra con la rappresentazione della funzione tempo totale.

Adesso è possibile individuare anche ‘ad occhio’, oltre che numericamente, la posizione ottimale del punto K . Infatti quando vedremo che la tangente è in posizione orizzontale, avremo individuato il punto stazionario della funzione. Possiamo inoltre spostare i punti A e B e quindi variare la costruzione geometrica. Automaticamente cambieranno la funzione, il suo grafico, ed il punto G permettendoci di analizzare numericamente e graficamente tutte le possibili situazioni.

7 Soluzione ‘esatta’

Per risolvere analiticamente il problema bisogna derivare la funzione $t_{tot}(x)$ ed uguagliare a zero la derivata per individuare i punti stazionari.

$$t'_{tot}(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2 \sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = 0$$

Dalla risoluzione trigonometrica dei triangoli rettangoli ACK e BDK :

$$\frac{CK}{AK} = \cos(\widehat{CKA}) \quad \frac{KD}{KB} = \cos(\widehat{BKD})$$

Tracciamo la perpendicolare alla riva per il punto K . Chiamiamo θ_1 e θ_2 gli angoli che i segmenti AK e KB formano rispettivamente con tale perpendicolare; essi sono i corrispettivi complementari degli angoli CKA e BKD .

Poiché $\cos(90^\circ - \theta) = \sin$, fatte le debite sostituzioni possiamo infine scrivere:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} - \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} = 0$$

da cui invertendo ricaviamo:

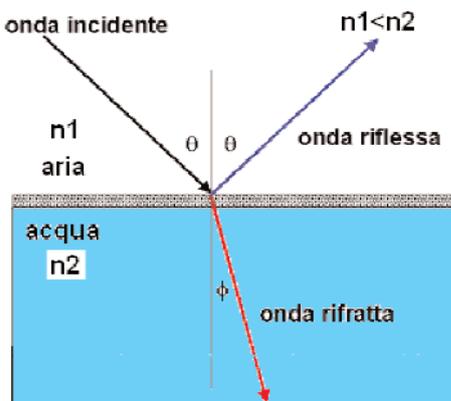
$$(1) \quad \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2}$$

Con GeoGebra è possibile verificare numericamente questa soluzione introducendo gli angoli θ_1 e θ_2 e mettendo a confronto il rapporto dei loro seni con il rapporto delle velocità scelte. Muoviamo il punto K con il mouse: lì dove la funzione presenta il suo punto di minimo, i due rapporti si eguagliano; possiamo anche prendere nota dei valori degli angoli, sia in radianti che in gradi.

8 Legge di Snell e principio di Fermat

La formula (1) non è nient'altro che la legge di Snell, la quale descrive quantitativamente il fenomeno della rifrazione della luce all'interfaccia fra due mezzi trasparenti.

Ogni mezzo è caratterizzato da un indice di rifrazione $n=c/v$, dove c è la velocità della luce nel vuoto e v quella nel mezzo considerato. Maggiore è la densità del mezzo, minore è la velocità della luce quando lo attraversa.



$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Figura 4. La legge di Snell

Cosa accade dunque ad un raggio di luce quando passa, ad esempio, dall'aria all'acqua?

Non segue più un percorso rettilineo, ma una spezzata, come mostrato in figura.

In analogia con il nostro problema, la luce compie percorsi di minimo tempo fra due punti arbitrariamente scelti nello spazio.

Questo è noto come principio di Fermat: "Il percorso fra due punti preso da un raggio di luce è quello che è attraversato nel minor tempo."

La versione completa e moderna del principio di Fermat afferma che il percorso ottico è *estremale*; ciò significa che in taluni casi può anche essere di massimo e non necessariamente di minimo tempo. Ma non è questa la sede per approfondire un tale argomento; basti sapere che i principi estremali che si riscontrano in natura sono tanti, uno fra tutti quello di minima azione, largamente usato in meccanica razionale [3, 4].

9 Alcune varianti del problema

Le seguenti varianti del problema del bagnino si prestano ad essere usate come esercitazione in classe, in quanto si basano essenzialmente sugli stessi ragionamenti.

Un ragazzo che si trova in un punto A, situato lungo un rettilineo di una strada di campagna, deve raggiungere la propria ragazza che si trova (ad aspettarlo ansiosamente!) in un casolare situato in un punto B, distante 8 km dalla strada, in mezzo ad un prato. La distanza in linea d'aria tra A e B è di 17 km. Il ragazzo può correre a 5 km/h sulla strada e a 3 km/h sull'erba del prato. In quale punto dovrà abbandonare la strada se, come è naturale, vuole raggiungere la propria ragazza nel più breve tempo possibile? [6]

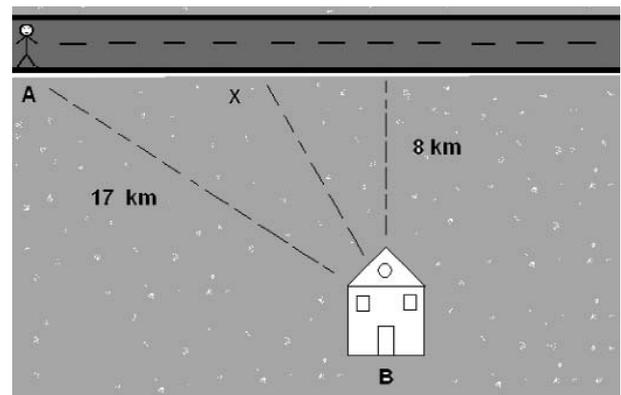


Figura 5. Il problema della ragazza da raggiungere.

Questa variante semplificata è molto interessante in quanto può essere risolta algebricamente.

Difatti, operate le considerazioni e i passaggi preliminari, si ottiene seguente funzione:

$$t_{tot} = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 289}}{3}, \quad AX = x \in [0,15]$$

Derivando ed uguagliando a zero, si ottiene un'equazione irrazionale che dopo qualche discussione e qualche passaggio si riduce alla seguente:

$$x^2 - 30x + 189 = 0$$

le cui soluzioni sono: $x_1 = 9$ e $x_2 = 21$. La seconda non appartiene all'intervallo di definizione per cui non è accettabile. Dunque $AX = 9$ metri.

Si deve costruire un oleodotto che porti il petrolio da una piattaforma A in mezzo al mare ad un porto B sulla costa. Sapendo che le spese di costruzione sono pari a N \$/m sulla terraferma ed M \$/m in mare, si determini il percorso di minor costo. [4]

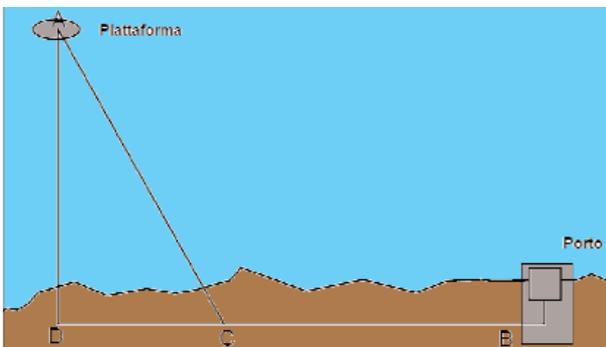


Figura 6. Il problema dell'oleodotto

Una ditta specializzata deve stendere una linea elettrica da Chiasso (Svizzera) a Como (Italia); le due città distano in linea d'aria 17 km e Como dista 8 km dal confine con la Svizzera. I costi per la messa in opera della linea sono di 80.000 euro al giorno lungo il confine Svizzero e di 60.000 euro al giorno in territorio italiano; ma gli operai Svizzeri in un giorno riescono a stendere 2 km di linea lungo il confine, mentre gli operai italiani nel loro territorio solo 1 km. Qual è il percorso che deve seguire la linea elettrica affinché il costo totale sia minimo? [Suggerimenti: è importante calcolare i costi per ogni km; arrivati all'equazione finale, arrotondate la radice di $\epsilon/4$ al numero intero più piccolo.]

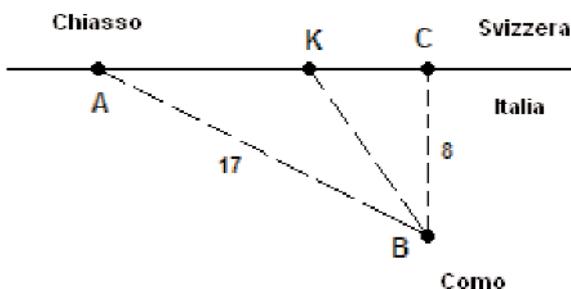


Figura 7. Il problema della linea elettrica

Conclusioni

L'argomento scelto è uno dei più affascinanti che possa essere trattato in un Liceo all'interno del programma di analisi matematica del V anno, soprattutto per le sue implicazioni scientifiche e tecnologiche che permettono di avvicinare i giovani ai processi di generalizzazione e di sintesi della scienza. L'utilizzo di un software interattivo e dinamico quale GeoGebra permette di trattare il problema con notevole semplicità, dando agli studenti un immediato riscontro grafico e numerico e aiutandoli nelle loro argomentazioni.

Bibliografia e sitografia

- [1] Geogebra, articoli in italiano
<http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Italian>
- [2] L. Frangella, Il problema del bagnino
<http://www.geogebra.org/en/upload/files/italian/lucagit/prob-bagnino.html>
- [3] F. Giannoni, V. Girolimetti "Problemi di Massimo e Minimo e Applicazioni"
http://www.unicam.it/matinf/pls/Materiale_06/Dispensa_Fer mat.pdf
- [4] B. Piochi, "Metodi elementari per la soluzione di problemi di minimo"
http://www.irre.lazio.it/matema/documenti/mpi/Analisi/B_Piochi.pdf
- [5] O. Serra, "Principi estremali in Fisica"
<http://digilander.libero.it/ottavioserra0/articoli/LiceoScienza/00%20PRINCIPI%20ESTREMALI%20FISICA.doc>
- [6] M. Falanga, L. Battaia, Batmath
<http://www.batmath.it/>

Metallica 6

100. Triangolo di Tartaglia in un giorno di sciopero.

di Anna Cerasoli



BES Photos, Student Teacher

Dunque era quello l'appuntamento fisso delle sei. Metallica, ogni giorno, metteva a disposizione del Centro di Servizi per il Volontariato un'ora del suo tempo. E in quell'ora faceva matematica. Sia che si trattasse di spiegazioni a bambini in ospedale, sia che si trattasse di doposcuola a ragazzi stranieri o in difficoltà, lei era a disposizione.

Sono tornato a casa pensando che se non fossi passato per quella piazza non avrei mai saputo del suo impegno civile. Tutto nel suo stile: fare senza apparire.

Ero appena entrato quando è squillato il telefono. Era lei: 'Cosa ne dici se, dopo cena, ciascuno per conto proprio, ci ripassiamo un pezzo del Calcolo Combinatorio? Domani pomeriggio ci vediamo e in poco tempo ognuno ripete all'altro quello che ha ripassato, così ci sbrighiamo e possiamo stare un po' insieme. Non parliamo mai di noi...'

Eccolo il tuffo al cuore! Ho dovuto aspettare qualche secondo prima di riuscire a proferire verbo: 'Sì, va bene, io l'ho già fatto un po' di ripasso... sono arrivato ai coefficienti binomiali e al Triangolo di Tartaglia'. E poi, con un po' di coraggio ho aggiunto 'Sono contento se riusciamo a stare un po' insieme... Oggi, quando ti ho vista con il tuo amico, ho avuto un pugno nello stomaco... ho pensato che fosse il tuo ragazzo... cioè, non so... è il tuo ragazzo?' 'No, è un amico, viene anche lui al Centro. Fa il clown. Allora, a domani?'

Prima di mettermi a studiare ho respirato profondamente e rinviato a più tardi tutti i pensieri e le fantasticherie su cosa le dirò e cosa mi risponderà. So, comunque, che prima di tutto faremo un po' di esercizi e non voglio proprio sbagliarli. Perciò ho ripreso il quaderno di mate. Sono arrivato a ripassare i problemi in cui bisogna trovare il numero di tutti i sottoinsiemi di un insieme. Il primo era questo: davanti a un vaso con 5 pasticcini, in quanti modi ci si può servire? Ovviamente si può prenderne nessuno, oppure uno, o due... insomma quanti e quali si vuole, compreso il prenderli tutti. Si tratta, perciò, di calcolare quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme di 5 elementi.

Quando il prof ce l'ha spiegato io ho capito veramente che cosa è la creatività matematica, ho capito come, partendo da cose che già sai e che metti insieme, riesci a creare un nuovo schema di risoluzione.

Lui ci ha suggerito di immaginare la scena in cui, realmente, stiamo scegliendo quanti e quali pasticcini mangiare. Potremmo fare così: prendiamo in considerazione uno dei pasticcini e decidiamo se mangiarlo o no; se sì, scriviamo una S, altrimenti una N. Fatto questo per tutti i pasticcini, avremo scritto una parola, lunga 5, con l'alfabeto (S,N). È proprio questa parola a identificare il sottoinsieme di pasticcini che vorremo mangiare.



Fig.1 Avendo a disposizione cinque pasticcini in quanti modo ci si può servire?

Ma, allora, il problema di trovare tutti i sottoinsiemi si riduce a trovare tutte le parole, lunghe 5, con l'alfabeto (S,N). E queste sappiamo trovarle perché conosciamo il modello 'quante parole'. Sono m^n , in cui m è il numero dei caratteri dell'alfabeto e n è quello della parola.

Perciò nel nostro caso sono

$$2^5$$

A me è piaciuta molto questa spiegazione! Si vede la potenza delle idee matematiche, che creano schemi comuni per situazioni tanto diverse.

Poi abbiamo ragionato in generale: il numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente n elementi è 2^n .

A quel punto il prof ci ha fatto verificare la formula sul triangolo di Tartaglia.

						1								1	2^0		
					1	+	1							2	2^1		
				1	+	2	+	1						4	2^2		
			1	+	3	+	3	+	1					8	2^3		
		1	+	4	+	6	+	4	+	1				16	2^4		
	1	+	5	+	10	+	10	+	5	+	1			32	2^5		

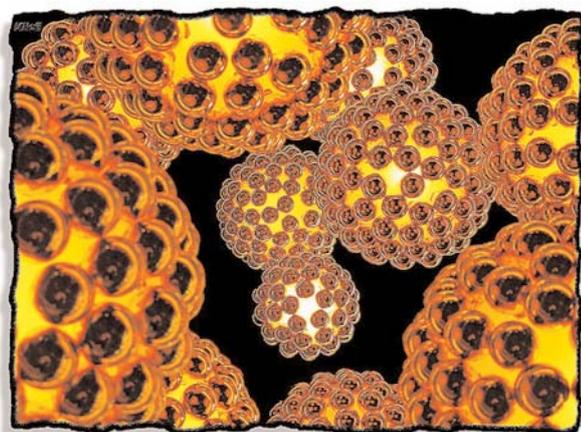
Fig. 2 Il triangolo di Tartaglia e le potenze del 2

Poiché i termini di ogni riga corrispondono proprio ai numeri dei vari sottoinsiemi, è bastato calcolare la loro somma per avere il totale di tutti i sottoinsiemi. E infatti, per ogni riga, abbiamo ottenuto proprio 2^n .

Come esercizio c'era da cercare esempi di problemi analoghi. Uno simpatico era quello del giorno di sciopero: in quanti diversi modi un professore, arrivando in una classe di 22 alunni, in un giorno di sciopero, può trovare gli studenti presenti in aula? Ci possono essere tutti, o nessuno, o soltanto uno... insomma si tratta sicuramente di tutti i sottoinsiemi di un insieme di 22 elementi. Perciò sono 2^{22} . (In realtà, nella nostra classe, ultimamente, prima di uno sciopero facciamo sempre l'assemblea e decidiamo di entrare tutti o nessuno...)



Athens, Empty Classroom



Kliefi, Bakterien Lampe

Poi il prof ci ha detto un'altra cosa che mi ha aiutato a capire meglio perché questi problemi si risolvono con una potenza di 2: se nella classe arriva un 23-esimo allievo, i sottoinsiemi raddoppiano, diventano 2^{23} . Si tratta dei 2^{22} sottoinsiemi precedenti, in cui s'inserisce anche il nuovo allievo che ha deciso di scioperare, aggiunti ad altrettanti sottoinsiemi in cui il nuovo allievo non compare perché ha deciso di non scioperare. E per ogni allievo in più, si ha un nuovo raddoppio.

Abbiamo calcolato 2^{22} ed è venuto 4194304. Più di quattro milioni di possibilità! Una caterva! D'altra parte la potenza non si chiama così per caso...

Mi è rimasta impressa la storia dei batteri. Un batterio si riproduce dividendosi a metà e dando vita a due batteri. Perciò ogni generazione è doppia della precedente. Sembra incredibile ma, fatti i calcoli, da un solo batterio che si riproduce ogni venti minuti, si ha, in 48 ore, una quantità di batteri il cui peso è quattromila volte quello del nostro pianeta. E c'è da dire che per fare un grammo di batteri ce ne vogliono un milione di milioni! Per fortuna le condizioni ambientali non permettono una tale crescita... altrimenti! Ma non devo divagare. Devo trovare un po' di esempi concreti in cui si tratta di calcolare il numero totale dei sottoinsiemi di un insieme. Vorrei trovarne di originali, perché vedo che faccio un certo effetto su Metallica quando mi trova 'geniaale!'

ESERCIZI

1. Vuoi dare una mano al protagonista cercando esempi? Scrivili nei commenti all'articolo
2. La potenza di 2 è presente in molti problemi. Uno famoso è quello degli scacchi. Si racconta che l'inventore del gioco chiedesse come ricompensa 1 chicco di grano per la prima casella, 2 per la seconda, 4 per la terza, e così raddoppiando fino alla sessantaquattresima casella. Non fu possibile ricompensarlo perché, a conti fatti, risultò che quella quantità di grano non esisteva nemmeno in tutti i granai del mondo. Sai dimostrare che la somma di tutti quei chicchi è $2^{64}-1$?

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DEL N. PRECEDENTE

2. 126

3. 56

4. 15

5. $\binom{50}{2} \binom{25}{2} = 367500$

6. Dal punto di vista dei sottoinsiemi, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ perché, nell'insieme di n elementi, per ogni sottoinsieme di k elementi, ne resta uno di $n-k$ elementi (il complementare).

101. Un criterio di divisibilità generalizzato

di Paolo La Rocca¹

SUNTO

In questo articolo viene presentato un criterio di divisibilità per un qualunque numero purché sia coprimo di 10. Di questo criterio si offre una dimostrazione basata sulla soluzione di un'equazione diofantea lineare. Il metodo per risolvere l'equazione offre un esempio significativo di utilizzo del foglio di calcolo elettronico.

ABSTRACT

In this paper a divisibility criterion for any number coprime of 10 is presented. A proof based on the solution of a linear diophantine equation is given. The equation is solved with the aid of the spreadsheet, showing a significant example of the use of this tool.

1 Introduzione

È noto ad un qualunque studente di matematica che esistono dei criteri per determinare se un numero naturale N è divisibile per un numero naturale $d < N$. Tali criteri sono utili in quanto permettono una verifica della divisibilità meno laboriosa della divisione diretta di N per d . Ad esempio, un numero è divisibile per 2 se e solo se la cifra delle unità è pari; un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3 (un analogo criterio esiste per il 9); un numero è divisibile per 5 se e solo se la cifra delle unità è 0 oppure 5.

In generale utilizzare un criterio di divisibilità per un numero d , significa sostituire ad N una sua funzione $f(N)$ che assume valori interi e tale che $|f(N)| < N$, che sia divisibile per d se e solo se N

è divisibile per d . Ad esempio, nel criterio di divisibilità per 3 la funzione f è “somma di tutte le cifre” (vedi Vorob'ev [1] e per alcune notizie storiche e un confronto tra diversi criteri vedi anche Di Stefano [2]). Consideriamo il seguente criterio di divisibilità per 7, meno noto degli altri:

Un numero naturale N è divisibile per 7 se e solo se è divisibile per 7 il numero che si ottiene rimuovendo da N la cifra delle unità e sottraendo il prodotto di tale cifra per 2 dal numero formato dalle rimanenti cifre di N .

Ad esempio per determinare se 41265 è divisibile per 7 si cancella il 5, ottenendo 4126; si sottrae 10 (prodotto della cifra eliminata 5 per 2) ottenendo 4116. Reiterando la procedura si ottengono i numeri 399 e 21. Poiché 21 è divisibile per 7, lo è anche il numero originario 41265 (si può anche reiterare un'altra volta arrivando a 0, che è divisibile per 7).

In questo articolo discuteremo una dimostrazione elementare di tale criterio, che può essere proposta come percorso di approfondimento a livello di scuole superiori, e che può essere facilmente generalizzata per produrre criteri di divisibilità per qualunque numero che termini con le cifre 1,3,7,9; in particolare dunque per qualunque numero primo (eccetto 2 e 5). È evidente l'interesse che tale tipo di problematiche ha anche per la determinazione della primalità di un numero (vedi D'Andrea [3]).

Useremo la notazione $d | N$ per indicare che d è un divisore di N , ovvero che N è un multiplo di d ; ad esempio $3 | 24$, in quanto $3 \cdot 8 = 24$.

¹ Docente presso il Liceo Scientifico J.F.Kennedy, Roma; email: paololar@libero.it

2 Il criterio di divisibilità per 7

Premettiamo la seguente

Proposizione 1

Siano $d, A, B \in \mathbf{N}$, $d|A$ e $d|B$ se e solo se $d|(Ax + By)$ per ogni $x, y \in \mathbf{Z}$

In altre parole se un numero è divisore di un numero A e di un numero B , è anche divisore di una qualunque combinazione lineare di A e B a coefficienti interi (e viceversa). Il teorema diretto segue dalla proprietà distributiva della divisione; quello inverso si ottiene ponendo $x = 1$ e $y = 0$, oppure $x = 0$ e $y = 1$.

Vediamo come si può riformulare il criterio di divisibilità per 7 sopracitato utilizzando la scrittura polinomiale dei numeri in base 10.

Consideriamo un generico numero di tre cifre $N = abc$ (vedremo che ciò non comporta alcuna perdita di generalità), cioè in forma polinomiale $N = 100a + 10b + c$. La funzione f su cui si effettua la verifica di divisibilità per 7, espressa in termini delle tre cifre a, b, c è: $f(N) = 10a + b - 2c$; infatti cancellando la cifra dell'unità, a diventa la cifra delle decine mentre b quella della unità. Il criterio di divisibilità per 7, riferito a numeri di 3 cifre, viene dunque espresso dalla seguente:

PROPOSIZIONE 2

Sia $N = abc$ un numero naturale scritto in forma decimale, essendo a, b e c cifre comprese tra 0 e 9; si ha:

$$7|10a + b - 2c \quad \text{se e solo se} \quad 7|100a + 10b + c.$$

In realtà si potrebbe utilizzare una notazione più compatta, scrivendo il generico numero come $10q+u$, dove q è il quoziente della divisione per 10 e u il resto, cioè le unità. Si è però preferito utilizzare la notazione decimale estesa per ragioni di chiarezza, pensando questo come un percorso didattico di approfondimento per le scuole superiori, coerentemente con la scelta adottata da ottimi libri di testo in commercio come ad esempio quello di Lamberti, Mereu e Nanni [4]. L'equazione a cui si perviene, la (3) nelle pagine seguenti, che è la base per i risultati ottenuti, risulta comunque indipendente da tale scelta.

La dimostrazione consiste nel trovare una combinazione lineare dei due numeri che sia divisibile per 7. Si può procedere sottraendo ripetutamente da N il numero $10a + b - 2c$ finché non si arriva ad un numero divisibile per 7. Sono necessari 3 passi:

$$\begin{array}{r} 100a + 10b + c \quad - \\ \underline{10a + b - 2c} \\ 90a + 9b + 3c \quad - \\ \underline{10a + b - 2c} \\ 80a + 8b + 5c \quad - \\ \underline{10a + b - 2c} \\ 70a + 7b + 7c \end{array}$$

Si ha dunque:

$$70a + 7b + 7c + 3(10a + b - 2c) = 100a + 10b + c$$

Poiché $70a + 7b + 7c$ è divisibile per 7, se $10a + b - 2c$ è divisibile per 7 lo è anche il secondo membro, cioè N (Proposizione 1). Viceversa, sempre per la Proposizione 1, se N è divisibile per 7 lo è anche $3(10a + b - 2c)$ e dunque $10a + b - 2c$, essendo 3 e 7 primi tra loro. La Proposizione 2 è così dimostrata.

Si può osservare che si sarebbe arrivati allo stesso risultato anche partendo da un numero con più di 3 cifre, ad esempio con 4 cifre, a, b, c, d saremmo arrivati a $700a + 70b + 7c + 7d$ ecc. Dunque nel seguito, per semplicità, faremo riferimento a numeri di 3 cifre.

3 Il criterio di divisibilità in generale

Ci proponiamo di stabilire in quali casi vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3

Un numero naturale N è divisibile per d se e solo se è divisibile per d il numero che si ottiene rimuovendo da N la cifra delle unità e aggiungendo il prodotto di tale cifra per un opportuno numero intero x (moltiplicatore) al numero formato dalle rimanenti cifre di N .

Questo criterio è menzionato ad esempio nell'ar-

titolo *Divisibility criterion* dell'Enciclopedia della matematica [5] dove si parla però di una sua possibile generalizzazione solo per numeri della forma $10^k c \pm 1$, dove c è un numero intero.

Il caso $d = 7$ rientra in questa formulazione più generale se si pone $x = -2$ (sottrarre 2 volte un numero equivale ad aggiungere -2 volte lo stesso numero). Vediamo qual è la condizione che deve essere soddisfatta affinché esista tale numero. Consideriamo prima il caso di divisori $d < 10$. La funzione su cui verificare la divisibilità vale $f(N) = 10a + b + xc$. Il numero di passi, cioè il numero di volte che deve essere sottratta $f(N)$ per arrivare ad un numero divisibile per d , è $n_{step} = 10 - d$. Il coefficiente di c a cui si arriva dopo tale numero di passi è $1 - n_{step} \cdot x$. Si ha un criterio di divisibilità se e solo se tale numero è uguale a d o ad un suo multiplo intero, in modo che tutti i coefficienti siano divisibili per d . Ciò avviene quando è soddisfatta la seguente equazione:

$$1 - n_{step} \cdot x = md \quad \text{con } m \in \mathbf{Z},$$

cioè,

$$(1) \quad 1 - (10 - d)x = md$$

Si ha un criterio di divisibilità per d della forma della Proposizione 3, se e solo se tale equazione ammette soluzioni (x, m) intere.

Consideriamo ora il caso di divisori $d > 10$.

Il numero di passi è $n_{step} = d - 10$ e per arrivare ad un numero divisibile per d occorre ora aggiungere ad N il numero $f(N) = 10a + b + xc$. Si arriva dunque all'equazione:

$$1 + n_{step} \cdot x = md \quad \text{con } m \in \mathbf{Z},$$

cioè,

$$(2) \quad 1 + (d - 10)x = md,$$

che è equivalente alla (1). Le equazioni (1) e (2) possono essere riscritte come:

$$(3) \quad (10 - d)x + md = 1,$$

che è un'equazione diofantea lineare (un'equazione diofantea è un'equazione a coefficienti interi), per cui si cercano soluzioni intere nelle incognite x ed m , della forma $ax + bm = c$, dove i coeffi-

cienti a e b dipendono da d , mentre c è uguale ad 1. Sappiamo dalla teoria delle equazioni diofantee, vedi ad esempio Courant e Robins [6], oppure Andrews [7] che tale equazione ammette soluzioni se e solo se c è un multiplo di $M.C.D.(a, b)$. Nel caso dell'equazione (3), poiché $c = 1$, essa ammetterà soluzioni se e solo se $M.C.D.(10 - d, d) = 1$, cioè ancora se e solo se 10 e d sono primi tra loro, il che si verifica per tutti e soli i numeri che terminano con le cifre 1,3,7,9. Sappiamo inoltre che se (x_0, m_0) è una soluzione particolare dell'equazione, la soluzione generale è della forma:

$$x = x_0 + kd$$

$$(4) \quad m = m_0 - k(10 - d),$$

dove k è un qualunque numero intero. Rimane il problema di trovare una soluzione particolare dell'equazione. Poiché per il criterio di divisibilità in studio siamo interessati in particolare all'incognita x , abbiamo esplicitato l'equazione (3) rispetto ad x , ottenendo:

$$(5) \quad x = \frac{md - 1}{d - 10}$$

Questa può essere considerata una funzione aritmetica nelle variabili m, d , che può essere studiata con l'ausilio del foglio di calcolo. Nella Tabella 1 si riportano i valori di x ottenuti con il foglio di calcolo per valori di $8 \leq m \leq 5$ e valori di $1 \leq d \leq 41$ (prima colonna).

A ciascun valore intero di x corrisponde un criterio di divisibilità per il corrispondente numero d .

Dalla tabella risulta che si ha $x = 3$ per $d = 29$ (in corrispondenza di $m = 2$). Consideriamo il numero $29 \cdot 3728 = 108112$ (che quindi sappiamo essere divisibile per 29). Verifichiamo che l'algoritmo del criterio di divisibilità (Proposizione 3) ci fornisce la divisibilità del numero; applicandolo ripetutamente a 108112 si ottengono i numeri: 10817, 1102, 116, 29; dunque 108112 è divisibile per 29.

Dalla tabella risulta $x = -4$ per $d = 41$. Consideriamo il numero $41 \cdot 98658 = 4044978$. Applicando a tale numero l'algoritmo otteniamo in successione: 404465, 40426, 4018, 369, 0; quindi 4044978 è divisibile per 41.

d	m=-8	m=-7	m=-6	m=-5	m=-4	m=-3	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	
1		1	0,8888889	0,7777778	0,6666667	0,5555556	0,4444444	0,3333333	0,2222222	0,1111111	0	-0,1111111	-0,2222222	-0,3333333	-0,4444444
2		2,125	1,875	1,625	1,375	1,125	0,875	0,625	0,375	0,125	-0,125	-0,375	-0,625	-0,875	-1,125
3	3,5714286	3,1428571	2,7142857	2,2857143	1,8571429	1,4285714	1,0000000	0,5714286	0,1428571	-0,2857143	-0,7142857	-1,1428571	-1,5714286	-2	
4		5,5	4,8333333	4,1666667	3,5	2,8333333	2,1666667	1,5	0,8333333	0,1666667	-0,5	-1,1666667	-1,8333333	-2,5	-3,1666667
5		8,2	7,2	6,2	5,2	4,2	3,2	2,2	1,2	0,2	-0,8	-1,8	-2,8	-3,8	-4,8
6		12,25	10,75	9,25	7,75	6,25	4,75	3,25	1,75	0,25	-1,25	-2,75	-4,25	-5,75	-7,25
7		19	16,666667	14,333333	12	9,666667	7,333333	5	2,666667	0,333333	-2	-4,333333	-6,666667	-9	-11,333333
8		32,5	28,5	24,5	20,5	16,5	12,5	8,5	4,5	0,5	-3,5	-7,5	-11,5	-15,5	-19,5
9		73	64	55	46	37	28	19	10	1	-8	-17	-26	-35	-44
10															
11	-89	-78	-67	-56	-45	-34	-23	-12	-1	10	21	32	43	54	
12	-48,5	-42,5	-36,5	-30,5	-24,5	-18,5	-12,5	-6,5	-0,5	5,5	11,5	17,5	23,5	29,5	
13	-35	-30,66667	-26,33333	-22	-17,66667	-13,33333	-9	-4,66667	-0,33333	4	8,33333	12,66667	17	21,33333	
14	-28,25	-24,75	-21,25	-17,75	-14,25	-10,75	-7,25	-3,75	-0,25	3,25	6,75	10,25	13,75	17,25	
15	-24,2	-21,2	-18,2	-15,2	-12,2	-9,2	-6,2	-3,2	-0,2	2,8	5,8	8,8	11,8	14,8	
16	-21,5	-18,83333	-16,16667	-13,5	-10,83333	-8,16667	-5,5	-2,83333	-0,16667	2,5	5,16667	7,83333	10,5	13,16667	
17	-19,57143	-17,14286	-14,71429	-12,28571	-9,85714	-7,42857	-5	-2,57143	-0,14286	2,28571	4,71429	7,14286	9,57143	12	
18	-18,125	-15,875	-13,625	-11,375	-9,125	-6,875	-4,625	-2,375	-0,125	2,125	4,375	6,625	8,875	11,125	
19	-17	-14,88889	-12,77778	-10,66667	-8,55556	-6,44444	-4,33333	-2,22222	-0,11111	2	4,11111	6,22222	8,33333	10,44444	
20	-16,1	-14,1	-12,1	-10,1	-8,1	-6,1	-4,1	-2,1	-0,1	1,9	3,9	5,9	7,9	9,9	
21	-15,36364	-13,45455	-11,54545	-9,63636	-7,72727	-5,81818	-3,90909	-2	-0,90909	1,81818	3,72727	5,63636	7,54545	9,45455	
22	-14,75	-12,91667	-11,08333	-9,25	-7,41667	-5,58333	-3,75	-1,91667	-0,83333	1,75	3,58333	5,41667	7,25	9,08333	
23	-14,23077	-12,46154	-10,69231	-8,92308	-7,15384	-5,38462	-3,61538	-1,84615	-0,76923	1,69231	3,46154	5,23077	7,06923	8,76923	
24	-13,78571	-12,07143	-10,35714	-8,64286	-6,92857	-5,21429	-3,5	-1,78571	-0,71429	1,64286	3,35714	5,07143	6,78571	8,5	
25	-13,4	-11,73333	-10,06667	-8,4	-6,73333	-5,06667	-3,4	-1,73333	-0,66667	1,6	3,26667	4,93333	6,6	8,26667	
26	-13,0625	-11,4375	-9,8125	-8,1875	-6,5625	-4,9375	-3,3125	-1,6875	-0,0625	1,5625	3,1875	4,8125	6,4375	8,0625	
27	-12,76471	-11,17647	-9,58824	-8	-6,41176	-4,82353	-3,23529	-1,64706	-0,58824	1,52941	3,11765	4,70588	6,29412	7,88235	
28	-12,5	-10,94444	-9,38889	-7,83333	-6,27778	-4,72222	-3,16667	-1,61111	-0,55556	1,5	3,05556	4,61111	6,16667	7,72222	
29	-12,26316	-10,73684	-9,21053	-7,68421	-6,15789	-4,63158	-3,10526	-1,57894	-0,52632	1,47368	2,95	4,52632	6,05263	7,57894	
30	-12,05	-10,55	-9,05	-7,55	-6,05	-4,55	-3,05	-1,55	-0,05	1,45	2,95	4,45	5,95	7,45	
31	-11,85714	-10,38095	-8,90476	-7,42857	-5,95238	-4,47619	-3	-1,52381	-0,47619	1,42857	2,90476	4,38095	5,85714	7,33333	
32	-11,68182	-10,22727	-8,77273	-7,31818	-5,86364	-4,40909	-2,95455	-1,5	-0,45455	1,40909	2,86364	4,31818	5,77273	7,22727	
33	-11,52174	-10,08696	-8,65217	-7,21739	-5,78261	-4,34783	-2,91304	-1,47826	-0,43478	1,39130	2,82608	4,26087	5,69522	7,13043	
34	-11,375	-9,95833	-8,54167	-7,125	-5,70833	-4,29167	-2,875	-1,45833	-0,41667	1,375	2,79167	4,20833	5,625	7,04167	
35	-11,24	-9,84	-8,44	-7,04	-5,64	-4,24	-2,84	-1,44	-0,04	1,36	2,76	4,16	5,56	6,96	
36	-11,11538	-9,73077	-8,34615	-6,96154	-5,57692	-4,19231	-2,80769	-1,42308	-0,38462	1,34615	2,73077	4,11538	5,5	6,88462	
37	-11	-9,62963	-8,25926	-6,88889	-5,51818	-4,14815	-2,77778	-1,40741	-0,37037	1,33333	2,70370	4,07407	5,44444	6,81481	
38	-10,89286	-9,53571	-8,17857	-6,82143	-5,46429	-4,10714	-2,75	-1,39286	-0,35714	1,32143	2,67857	4,03571	5,39286	6,75	
39	-10,7931	-9,44827	-8,10344	-6,75862	-5,41379	-4,06896	-2,72414	-1,37931	-0,34483	1,31034	2,65172	4	5,34483	6,68965	
40	-10,7	-9,36667	-8,03333	-6,7	-5,36667	-4,03333	-2,7	-1,36667	-0,33333	1,3	2,63333	3,96667	5,3	6,63333	
41	-10,6129	-9,29032	-7,96774	-6,64516	-5,32258	-4	-2,67741	-1,35483	-0,32258	1,29032	2,61290	3,93548	5,25806	6,58064	

Tabella 1. I valori di x ottenuti con il foglio di calcolo.

I risultati della tabella suggeriscono alcune considerazioni.

OSSERVAZIONE 1. Come ci aspettavamo, si ottengono criteri di divisibilità per tutti e soli i numeri che terminano con le cifre 1,3,7,9.

OSSERVAZIONE 2. A ciascun valore di d corrispondono diversi valori interi di x , che sono congrui modulo d ; ciò è evidente ad esempio nelle righe corrispondenti a $d = 11$ e a $d = 9$, ma si può rilevare anche per $d = 3$, $d = 7$ o $d = 13$. Come detto sopra questa è una proprietà generale delle soluzioni delle equazioni diofantee, vedi equazioni

(4), che si può comunque dimostrare anche a partire dall'equazione (5). Infatti, supponiamo che per un dato d ci sia un x intero in corrispondenza di un certo m_0 . Aggiungendo kd , con k intero, ad entrambi i membri della (5) si ottiene:

$$x + kd = \frac{m_0 d - 1}{d - 10} + kd = \frac{m_0 d - 1 + kd(d - 10)}{d - 10} = \frac{(m_0 + k(d - 10))d - 1}{d - 10};$$

dunque anche $x + kd$ soddisfa la (5) con un valore diverso di m , ed è un altro possibile moltiplicatore nel criterio di divisibilità per d .

OSSERVAZIONE 3. Si osservano andamenti lineari del valore del moltiplicatore x , per numeri che terminano con la stessa cifra. Ad esempio per $d = 3, 13, 23$ si ottengono i valori di x rispettivamente di 1, 4, 7 (incrementano di 3 per ogni decina) e i corrispondenti valori di m sono rispettivamente $-2, 1, 4$. Si può dimostrare che tali andamenti proseguono all'infinito. Consideriamo appunto il caso dei divisori che terminano con la cifra 3. I diversi valori di d e di m si possono scrivere in termini di un numero $n \geq 0$ che rappresenta in numero di decine presenti in d :

$$d = 10n + 3 \quad e \quad m = 1 + 3(n - 1);$$

il corrispondente valore di x , per la (5), vale:

$$x = \frac{md - 1}{d - 10} = \frac{[1 + 3(n - 1)][10n + 3] - 1}{10n + 3 - 10};$$

svolgendo il prodotto a numeratore e scrivendo i polinomi in forma normale si ottiene:

$$x = \frac{30n^2 - 11n - 7}{10n - 7} = 3n + 1;$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato l'algoritmo della divisione tra polinomi. Quindi x è intero per ogni n e il suo valore incrementa di 3 unità per ogni decina di d . Ricordiamo che questo è solo un valore del moltiplicatore per d (quello più piccolo in valore assoluto) e ce ne sono infiniti altri congrui ad esso modulo d .

Si possono dunque scrivere delle funzioni lineari che forniscono direttamente i valori dei moltiplicatori per ogni d che termina con le cifre 1, 3, 7, 9.

1° CASO. (d termina con la cifra 1)

Dalla tabella si ha $x = -1$ per $d = 11$, e il valore di x diminuisce di una unità per ogni decina di d ; si ha dunque:

$$x = \frac{d - 11}{10}(-1) - 1;$$

cioè:

$$x = \frac{-d + 1}{10}$$

2° CASO. (d termina con la cifra 3)

Come visto prima si ha $x = 1$ per $d = 3$ e si ha un incremento di 3 unità per ogni decina di d :

$$x = \frac{d - 3}{10} \cdot 3 + 1;$$

cioè

$$x = \frac{3d + 1}{10}$$

3° CASO. (d termina con la cifra 7).

Dalla tabella si ha $x = -2$ per $d = 7$, e il valore di x diminuisce di tre unità per ogni decina di d ; ragionando come negli altri casi si arriva a:

$$x = \frac{-3d + 1}{10}$$

4° CASO. (d termina con la cifra 9).

Dalla tabella si ha $x = 1$ per $d = 9$, e il valore di x aumenta di una unità per ogni decina di d ; di nuovo come negli altri casi si arriva a:

$$x = \frac{d + 1}{10}$$

Determiniamo un criterio di divisibilità per 2817. Il numero termina con la cifra 7 e dunque rientra nel 3° caso. Dalla formula per x si ottiene $x = -845$. Verifichiamo la validità del criterio sul numero $2817 \cdot 98659 = 277922403$. Rimuovendo la prima cifra abbiamo 27792240; aggiungendo $-845 \cdot 3 = -2535$ otteniamo 27789705. Reiterando la procedura otteniamo i numeri 2774745, 273249, 19719, -5634 ; poiché l'ultimo numero è chiaramente divisibile per 2817, lo è anche il numero originario 277922403.

Determiniamo un criterio di divisibilità per 319. Il numero termina con la cifra 9 e dunque rientra nel 4° caso: $x = 32$. Verifichiamo la validità del criterio sul numero $319 \cdot 845769 = 269800311$. Applicando ripetutamente l'algoritmo del criterio con $x = 32$ otteniamo: 26980063, 2698102, 269874, 27115, 2871, 319. Dunque 26980063 è divisibile per 319.

I risultati ottenuti possono essere riassunti nel seguente:

TEOREMA (CRITERIO DI DIVISIBILITÀ)

Sia $d > 1$ un numero naturale la cui scrittura decimale termina con le cifre 1,3,7,9. Un numero $N > d$ è divisibile per d se e solo se è divisibile per d il numero che si ottiene rimuovendo da N la cifra delle unità e aggiungendo il prodotto di tale cifra per un opportuno numero intero x (moltiplicatore) al numero formato dalle rimanenti cifre di N . I valori dei moltiplicatori sono:

$$x = \frac{\pm d + 1}{10} + kd, \text{ per divisori } d \text{ che terminano con le cifre } 9 (+) \text{ o } 1 (-)$$

$$x = \frac{\pm 3d + 1}{10} + kd, \text{ per divisori } d \text{ che terminano con le cifre } 3 (+) \text{ o } 7 (-)$$

dove k è un qualunque numero intero.

Osserviamo che per $d = 11$ oltre al valore $x = -1$ (che corrisponde a rimuovere l'ultima cifra e sottrarla dal numero formato dalle rimanenti cifre) si può utilizzare il valore $x = 10$ che fornisce un criterio altrettanto pratico e che tra l'altro può essere utilizzato anche per $d = 9$. Ad esempio, partendo da $21483 = 9 \cdot 11 \cdot 217$ otteniamo molto rapidamente 2178, 297, 99, che infatti è divisibile sia per 9 sia per 11. Infine poiché vale anche il

teorema inverso, possiamo usare l'algoritmo per dimostrare la non divisibilità di un numero per un altro. Ad esempio aggiungendo 9 al numero precedente si ottiene 21492, che non è più divisibile per 11, ma è ancora divisibile per 9. Il criterio con $x = 10$ fornisce 2169, 306, 90, che infatti è divisibile per 9 ma non per 11.

Bibliografia

- [1] Vorob'ev, N.N. (1980) *Criteria of divisibility*, University of Chicago Press.
- [2] Di Stefano, C. (1998) *Nuovi criteri di divisibilità?*, in: *Didattica delle scienze ed informatica nella scuola*, Anno XXXIII n.193.
- [3] D'Andrea, A.(2003) *Complessità e numeri primi*, Archimede, 3, 115-120.
- [4] Lamberti, L., Mereu, L., Nanni A. (2007) *Corso di matematica*, Algebra 1, Etas, Milano.
- [5] Nechaev, V.I. (1989) *Divisibility criterion*, in: *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 3, 284-285.
- [6] Courant, R., Robbins, H. (1996) *What is Mathematics*, Oxford University Press.
- [7] Andrews,G.E. (1971) *Number theory*, Dover Publications, New York.

102. Percorsi Euleriani sull'ottaedro con Mathematica

a cura di Flavio Cimolin

Introduzione

È detto percorso Euleriano su un grafo un percorso che si ottiene senza mai staccare la matita dal foglio e che percorre tutti i lati del grafo esattamente una volta. Il più celebre problema associato ai percorsi Euleriani è quello dei ponti di Koenigsberg, una città russa famosa per aver dato i natali al noto filosofo Immanuel Kant. In sintesi, i cittadini di Koenigsberg si chiedevano se fosse possibile, partendo da un punto qualunque della città, fare una passeggiata attraversando tutti i ponti una e una sola volta, tornando alla fine al punto di partenza. Il brillante Eulero, nel 1736, fu il primo a mostrare, avvalendosi della teoria dei grafi, che un tale percorso non poteva esistere. Da allora in poi i percorsi di questo tipo sono andati sotto il nome di “percorsi Euleriani”. Per chi voglia cimentarsi in una possibile dimostrazione del risultato, un piccolo aiutino è il seguente: dopo aver provato a tracciare un certo numero di grafi senza mai staccare la matita dal foglio, contate quanti sono i segmenti uscenti da ogni vertice...

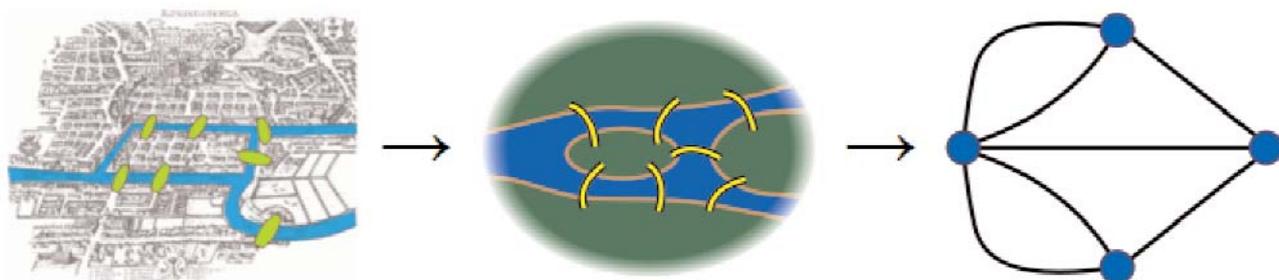


Fig. 1 Dal problema dei ponti ai percorsi Euleriani

Estendendo la definizione ad un solido, un percorso Euleriano è un percorso che passa una e una sola volta su tutti gli spigoli di un poliedro.

In questo documento ci occupiamo di mostrare come si possono determinare tutti i percorsi Euleriani indipendenti su un ottaedro regolare. Possiamo esemplificare meglio il concetto immaginando di essere una formichina che cammina da un vertice all'altro di un ottaedro: la formichina seguirà un percorso Euleriano se riuscirà a percorrere tutti gli spigoli dell'ottaedro senza ripassare mai in uno che ha già percorso in precedenza e giungendo alla fine esattamente al punto di partenza.

Anzitutto è necessario fare alcune precisazioni che aiuteranno a comprendere bene il problema. L'ottaedro è uno dei cinque solidi platonici, ha 8 facce (da qui il nome), 6 vertici e 12 spigoli. Un percorso euleriano dovrà allora descrivere la sequenza degli spigoli percorsi.

Un modo elementare per farlo è quello di assegnare un nome ad ogni vertice e poi elencare via via tutti quelli che vengono percorsi. Però attenzione, in questo modo è ovvio che determineremmo tantissimi percorsi Euleriani che sono legati tutti l'uno all'altro. Infatti partendo da un vertice piuttosto che da un altro, ed eseguendo le stesse mosse, che cosa cambia? E analogamente, muovendo la prima mossa lungo uno spigolo, piuttosto che lungo un qualsiasi altro spigolo, cambierebbe qualcosa? La risposta a entrambe le domande è negativa, come è facile convincersi. È per questo che sarà nostra cura eliminare tutti i percorsi che potremmo definire “dipendenti” l'uno rispetto all'altro, in modo da contare solo quei percorsi euleriani che sono davvero diversi nell'essenza.

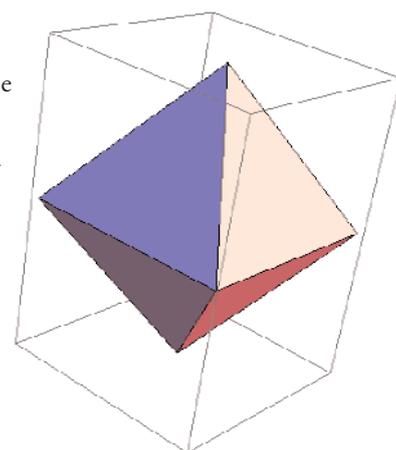


Fig. 2 L'ottaedro regolare

Per farlo, abbiamo immaginato di essere la formichina che percorre il primo spigolo (non importa quale, come già mostrato poco sopra). Quando arriva ad un vertice, che cosa può fare? Può girare a sinistra, può andare dritta, o può girare a destra. Per convincersene basta cercare di visualizzare un ottaedro, o meglio costruirsi uno con un pezzo di carta. Se non ne avete uno o non avete voglia di costruirlo, tornate ogni tanto a guardare la figura 2. Per visualizzare un ottaedro in Mathematica il comando è il seguente:

```
PolyhedronData["Octahedron"]
```

Allora descriveremo il percorso Euleriano della formica sull'ottaedro assegnando ad ogni vertice uno dei comandi "A" per Avanti, "D" per Destra, "S" per Sinistra.

```
li={A,D,S};
```

Un percorso euleriano sarà allora una particolare sequenza di 11 di questi "comandi" che permetterà alla formica di non ripassare mai su uno spigolo già percorso. Prima di iniziare il calcolo effettivo dei percorsi euleriani sull'ottaedro, facciamo ancora una veloce considerazione di teoria dei grafi: tutti i percorsi euleriani su un ottaedro sono chiusi, ovvero ritornano al vertice di partenza. Questa affermazione, tutt'altro che difficile da dimostrare, agevola leggermente il nostro compito di classificazione, come descriveremo fra poco.

La strada da percorrere

Dato che sappiamo che tutti i percorsi Euleriani sono chiusi e sono composti da 12 spigoli, potremo descrivere un singolo percorso con esattamente 11 comandi del tipo "A", "S", "D". Tuttavia è comodo fare sì che il percorso si chiuda "ripassando" sopra allo spigolo iniziale, assegnando cioè 12 comandi anziché 11. In questo modo sarà molto semplice capire come eliminare i percorsi che sono equivalenti, ma iniziano da vertici diversi. Dato che un percorso euleriano consiste di 12 lati ed è chiuso, è chiaro che uno stesso percorso, a seconda del vertice di partenza scelto, potrà essere descritto in molti modi differenti. Vedremo in seguito come eliminare questi percorsi equivalenti. Allo stesso modo elimineremo anche i percorsi che sono equivalenti fra di loro a meno di una simmetria: se invertiamo in un percorso euleriano tutti i comandi "D" con comandi "S" e viceversa, il percorso che si ottiene è ancora un percorso euleriano, diverso dal precedente solo a meno di una simmetria, dunque possiamo considerarlo equivalente, dato che la sua "essenza" non cambia.

Iniziamo dunque a creare tutte le liste possibili di 11 comandi per la formica:

```
lista=Outer[List,li,li,li,li,li,li,li,li,li,li,li,li];  
lista=Flatten[lista,11];  
Length[lista]
```

```
531441
```

Si tratta di una lista lunghissima, che infatti contiene tutte le possibili combinazioni dei comandi ADS, che sono esattamente $3^{12} = 531441$. Ad esempio una possibile stringa è:

```
lista[[324234]]  
{D,S,D,D,D,A,S,A,S,D,S,S}
```

E si legge: "al primo spigolo gira a destra, poi gira a sinistra, poi a destra...". Quello che è importante ricordare è che immaginiamo di dare il comando alla formica nel momento in cui incontra il primo bivio: essa ha quindi già percorso uno degli spigoli dell'ottaedro. Ora quello che andremo a fare sarà eliminare fra questi percorsi quelli che dopo 3, 4, 5, 6, ... comandi ritornano su uno spigolo già percorso. Alla fine otterremo solo dei percorsi Euleriani. Da questi elimineremo ancora quelli che

sono equivalenti a meno di simmetrie o rotazioni (cioè che sono lo stesso percorso, ma iniziante da un altro spigolo), e poi rappresenteremo quelli che rimangono.

Eliminazione dei percorsi non euleriani

Definiamo una funzione che permetta di eliminare fra i percorsi tutti quelli che al loro interno hanno un determinato sottopercorso. Infatti ad esempio se si esegue la sequenza di comandi DDD su un ottaedro, si ritorna sopra al primo spigolo. Quindi qualunque percorso che contenga la sequenza di comandi DDD al suo interno deve essere eliminato. Per capire come mai, basta prendere in mano il nostro ottaedro (o guardarne la figura) e immaginare di essere la formichina che ha percorso uno spigolo ed è arrivata al primo bivio. Se gira a destra, poi al termine gira ancora a destra, e poi lo fa ancora una volta, allora ritorna necessariamente sopra lo spigolo di partenza: questo significa che in un percorso euleriano non potrà mai esserci (né all'inizio né in mezzo) la stringa DDD. Elimineremo allora tutte le possibili sottosequenze di lunghezza crescente che ritornano sul primo spigolo.

```
Riduci[l_List,s_List]:=Select[l,! (MemberQ[Partition[#,Length[s],1,{1,1}],s]) &]
```

Le sequenze da 3 da eliminare sono:

DDD, SSS

```
lista=Fold[Riduci,lista,{ {D,D,D}, {S,S,S} }];  
Length[lista]
```

265221

Come si vede la lista si è snellita parecchio, riducendosi di circa la metà. Potremmo benissimo far calcolare direttamente a Mathematica i sottopercorsi che rendono non euleriano il percorso, tuttavia, almeno per quelli brevi, è semplice (e anche istruttivo) impostarlo a mano, così da ridurre già in maniera notevole l'onere computazionale.

Le sequenze da 4 da eliminare sono:

AAAA

DADA, SASA e ADAD, ASAS

ADDS, ASSD e DSSA, SDDA

```
lista=Fold[Riduci,lista,{ {A,A,A,A}, {D,A,D,A}, {S,A,S,A}, {A,D,A,D}, {A,S,A,S}, {A,D,  
D,S}, {A,S,S,D}, {D,S,S,A}, {S,D,D,A} }];  
Length[lista]
```

45828

Le sequenze da 5 da eliminare sono:

DDADD, SSASS

DAADS, SAASD e DSAAS, SDAAD

DAAAD, SAAAS

DASAA, SADAA e AADAS, AASAD

DSDAA, SDSAA e AASDS, AADSD

DSASD, SDADS

ADSDA, ASDSA

```

lista=Fold[Riduci, lista, {{D,D,A,D,D}, {S,S,A,S,S}, {D,A,A,D,S}, {S,A,A,S,D}, {D,S,A,A,S}, {S,D,A,A,D}, {D,A,A,A,D}, {S,A,A,A,S}, {D,A,S,A,A}, {S,A,D,A,A}}];
lista=Fold[Riduci, lista, {{A,A,D,A,S}, {A,A,S,A,D}, {D,S,D,A,A}, {S,D,S,A,A}, {A,A,S,D,S}, {A,A,D,S,D}, {D,S,A,S,D}, {S,D,A,D,S}, {A,D,S,D,A}, {A,S,D,S,A}}];
Length[lista]

```

6596

Andare a determinare a mano sequenze più grandi da eliminare inizia ad essere difficile, quindi lo facciamo fare al computer, con una routine preparata ad hoc che non fa altro che seguire lo stesso procedimento che eseguiremmo noi, dando alla formichina tutte le possibili combinazioni di comandi:

```

Punti={{0,0,1},{0,0,-1},{0,1,0},{0,-1,0},{1,0,0},{-1,0,0}};
Lati=Select[Complement[Flatten[Outer[Plus,Punti,Punti,1],1],{{0,0,0}}],And[FreeQ[#,2],FreeQ[#,-2]] &]

```

```

{{-1,-1,0},{-1,0,-1},{-1,0,1},{-1,1,0},{0,-1,-1},{0,-1,1},{0,1,-1},{0,1,1},{1,-1,0},{1,0,-1},{1,0,1},{1,1,0}}

```

```

nuovi={};
For[j=1,j<=Length[lista],j++,
  p=lista[[j]];
  Clear[x,l,dd,d];
  dd={};
  i=1;
  x[0]={0,0,1};
  x[1]={0,1,0};
  l[0]=x[0]+x[1];
  la=Lati;
  la=Complement[la,{l[0]}];
  prossimo=continua;
  While[And[prossimo===continua,i<=13],
    d=First[p];
    Switch[d,A,x[i+1]=-x[i-1],D,x[i+1]=Cross[x[i-1],x[i],S,x[i+1]=Cross[x[i],x[i-1]]];
    l[Evaluate[i]]=x[i]+x[i+1];
    prossimo=If[MemberQ[la,l[i]],continua,esci];
    la=Complement[la,{l[i]}];
    dd=Join[dd,{d}];
    p=Rest[p];
    i=i+1;
  ];
  p=Reverse[dd];

  Clear[x,l,dd,d];
  dd={};
  i=1;
  x[0]={0,0,1};
  x[1]={0,1,0};

```

```

l[0]=x[0]+x[1];
la=Lati;
la=Complement[la,{l[0]}];
prossimo=continua;
While[And[prossimo===continua,i≤12],
  d=First[p];
  Switch[d,A,x[i+1]==-x[i-1],D,x[i+1]=Cross[x[i-1],x[i]],S,x[i+1]=Cross[x[i],x[i-1]]];
  l[Evaluate[i]]=x[i]+x[i+1];
  prossimo=If[MemberQ[la,l[i]],continua,esci];
  la=Complement[la,{l[i]}];
  dd=Join[dd,{d}];
  p=Rest[p];
  i=i+1];
p=Reverse[dd];
If[Length[p]<12,nuovi=Join[nuovi,{p}]]];
];

```

Le sequenze da 6 da eliminare restano dunque:

```
p6=Union[Select[nuovi,Length[#]≤6&]]
```

```

{{A,A,A,D,S,S},{A,A,A,S,D,D},{A,D,A,A,D,D},{A,D,D,A,S,S},{A,D,S,A,A,D},{A,D,S,A,
D,S},{A,S,A,A,S,S},{A,S,D,A,A,S},{A,S,D,A,S,D},{A,S,S,A,D,D},{D,A,A,S,D,A},{D,A,
D,S,D,D},{D,A,S,D,A,S},{D,A,S,D,S,D},{D,A,S,S,A,D},{D,D,A,A,D,A},{D,D,A,S,S,A},{
D,D,S,A,A,A},{D,D,S,D,A,D},{D,D,S,D,D,S},{D,S,A,D,S,A},{D,S,D,D,S,D},{D,S,D,S,A,
D},{D,S,D,S,D,S},{D,S,S,D,S,S},{S,A,A,D,S,A},{S,A,D,D,A,S},{S,A,D,S,A,D},{S,A,D,
S,D,S},{S,A,S,D,S,S},{S,D,A,S,D,A},{S,D,D,S,D,D},{S,D,S,D,A,S},{S,D,S,D,S,D},{S,
D,S,S,D,S},{S,S,A,A,S,A},{S,S,A,D,D,A},{S,S,D,A,A,A},{S,S,D,S,A,S},{S,S,D,S,S,D}
}

```

```

lista=Fold[Riduci,lista,p6];
Length[lista]

```

1204

Compiendo la stessa operazione (che non ripetiamo per brevità) anche sulle sequenze da 7, 8, 9, 10 e 11 comandi, si ottiene alla fine una lista di sole 372 possibilità:

```

...
Length[lista]

```

372

Eliminazione dei percorsi dipendenti

Fra tutte le stringhe possibili che avevamo generato all'inizio, abbiamo eliminato tutte quelle che non rappresentano percorsi Euleriani. Quelle che sono rimaste includono però percorsi equivalenti a meno di rotazioni (i percorsi euleriani sull'ottaedro

sono tutti chiusi) o simmetrie (tutte le S e le D scambiate). Eliminiamo anche questa ridondanza con un'altra routine creata ad hoc:

```
lista2={};
While[ Length[ lista] \[ NotEqual] 0,
  a=lista[ [ 1] ] ;
  c=RotateLeft[ a, #] &/@Range[ 0, 11] ;
  as=a/.{ D->S, S->D} ;
  cs=RotateLeft[ as, #] &/@Range[ 0, 11] ;
  AppendTo[ lista2, a] ;
  lista=Complement[ lista, c, cs] ;
lista=lista2;
```

```
Length[lista]
19
```

Come vediamo al termine di questa operazione rimangono solo più 19 percorsi indipendenti l'uno dall'altro. Dunque possiamo affermare che sull'ottaedro ci sono 19 percorsi Euleriani diversi fra di loro, che sono i seguenti:

```
lista=Drop[#, -1] &/@lista
```

```
{ {A, A, A, D, A, A, D, A, A, A, S}, {A, A, A, D, A, A, S, A, A, A, D}, {A, A, A, D, D, A, S, A, D, A, S}, {A, A, A, D, S, A, D, A, S, A, D}, {A, A, D, A, A, D, A, A, S, D, D}, {A, A, D, D, A, A, D, D, A, A, D}, {A, A, D, D, A, D, S, D, S, A, S}, {A, A, D, D, A, D, S, S, D, A, D}, {A, A, D, D, A, S, A, D, S, D, D}, {A, A, D, S, S, D, S, A, D, A, S}, {A, D, D, A, D, S, A, D, D, A, D}, {A, D, D, A, D, S, A, S, S, A, S}, {A, D, D, A, D, S, D, S, S, D, D}, {A, D, D, A, D, S, S, D, D, S, S}, {A, D, D, A, S, D, A, D, D, A, S}, {A, D, D, A, S, D, D, S, S, D, S}, {A, D, S, D, D, S, A, D, S, S, D}, {D, D, S, D, S, S, D, D, S, D, S}, {D, D, S, S, D, D, S, S, D, D, S} }
```

Rappresentazione grafica dei percorsi

Dato che leggere una lista di comandi non è particolarmente utile alla comprensione di come sia effettivamente fatto il percorso Euleriano associato, cerchiamo ora di costruirne una rappresentazione grafica, in modo da riuscire a guardare più da vicino quale sia la strada percorsa dalla formichina.

Consideriamo ad esempio il percorso numero 7:

```
percorso=lista[ [7] ]
{A, A, D, D, A, D, S, D, S, A, S}
```

Usiamo i seguenti comandi che seguono per disegnare a tutti gli effetti il tracciato del percorso sull'ottaedro, sfruttando la sua colorazione per seguirne la traccia:

```
NomiPunti={ "F", "A", "D", "B", "E", "C" };
Clear[ q, q1, nome] ;
q[ 0] = { 0, 0, -1} ;
nome[ 0] =NomiPunti[[ Position[ Punti, q[ 0] ]][ [ 1, 1] ]];
q[ 1] = { 0, -1, 0} ;
nome[ 1] =NomiPunti[[ Position[ Punti, q[ 1] ]][ [ 1, 1] ]];
q1[ 1] = { q[ 0], q[ 1] } ;
```

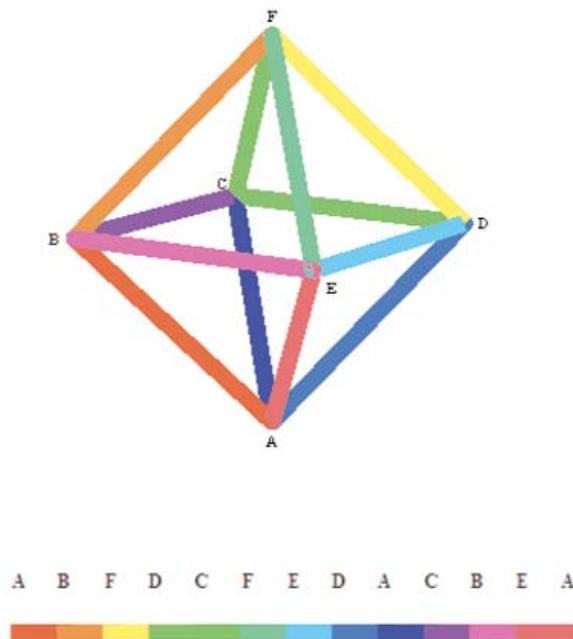
```

For[ i=2, i<=12, i++,
  comando=percorso[[ 1] ] ;
  percorso=Rest[ percorso ] ;
  Switch[ comando, A, q[ i ] =-q[ i-2] , D, q[ i ] =Cross[ q[ i-2] , q[ i-1] ] , S, q[ i ] =Cross[ q[ i-
1] , q[ i-2] ] ] ;
  ql[ i ] = { q[ i-1] , q[ i ] } ;
  nome[ i ] =NomiPunti[ [ Position[ Punti, q[ i ] ] ][ [ 1, 1 ] ] ] ;
  ] ;
linee={ } ;
For[ i=1, i<=12, i++,
  AppendTo[ linee, { Thickness[ 0.03] , Hue[ (i-1)/12] , Line[ ql[ i ] ] } ] ] ;
scala={ } ;
For[ i=1, i<=12, i++,
  AppendTo[ scala, { Thickness[ 0.03] , Hue[ (i-1)/12] , Line[ { { (i-
1)/12, 0} , { i/12, 0} } ] } ] ] ;

nomivertici3D={ Text[ "A" , { 0, 0, -1.1} ] , Text[ "B" , { 0, -1.1, 0} ] , Text[ "C" , { -
1.4, 0, 0} ] , Text[ "D" , { 0, 1.1, 0} ] , Text[ "E" , { 1.4, 0, 0} ] , Text[ "F" , { 0, 0, 1.1} ] } ;
nomivertici=Text[ nome[ #] , { #/12, 0} , BaseStyle->{ FontWeight->"Bold", FontSize->
>12} ] &/@Range[ 0, 12] ;
Show[ Graphics3D[ { linee, nomivertici3D} ] , Boxed->False, ViewPoint->{ 5, -1, 1} ]
Show[ Graphics[ nomivertici, AspectRatio->.04] ]
Show[ Graphics[ scala, AspectRatio->.05] ]

```

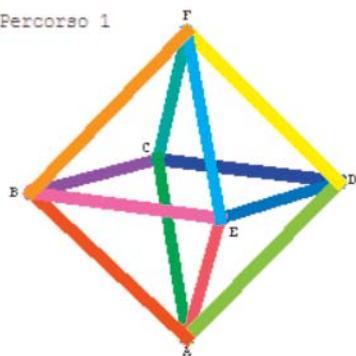
Quel che viene generato dall'ultimo blocco di comandi è la figura seguente:



In essa si vede chiaramente qual è la sequenza di spigoli percorsi nel cammino Euleriano scelto: la scala colorata e le lettere permettono di seguire senza problemi il viaggio della formichina sull'ottaedro.

Per concludere, rappresentiamo con la modalità appena descritta, tutti i 19 percorsi Euleriani sull'ottaedro calcolati.

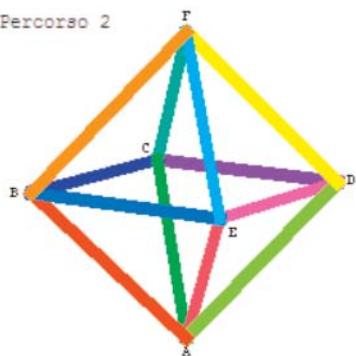
Percorso 1



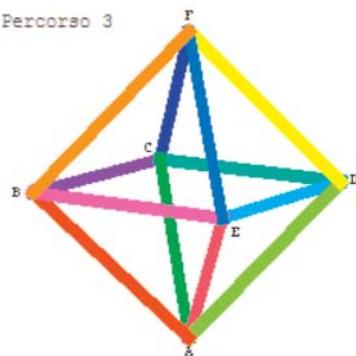
A B F D A C F E D C B E A A B F D A C F E B C D E A A B F D A C D E F C B E A



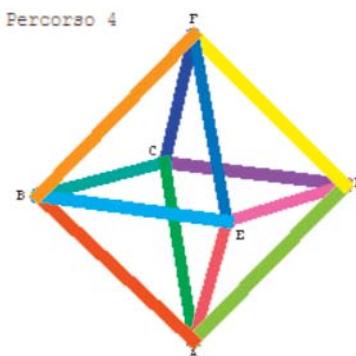
Percorso 2



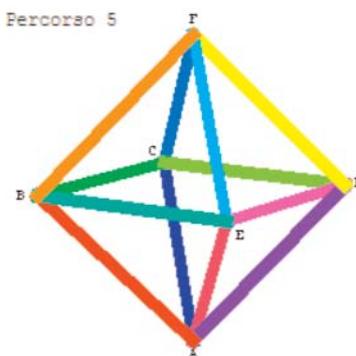
Percorso 3



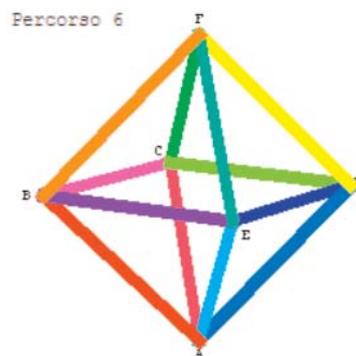
Percorso 4



Percorso 5



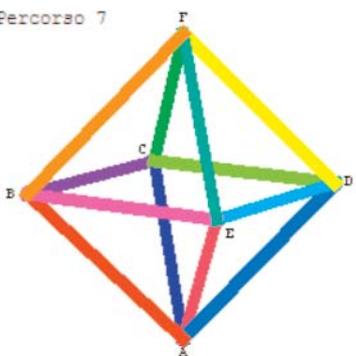
Percorso 6



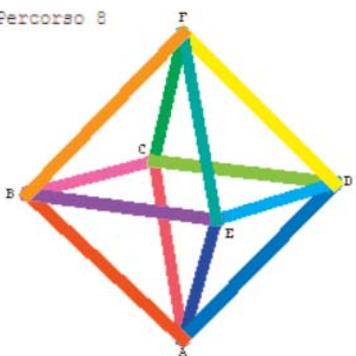
A B F D A C B E F C D E A A B F D C B E F C A D E A A B F D C F E A D E B C A



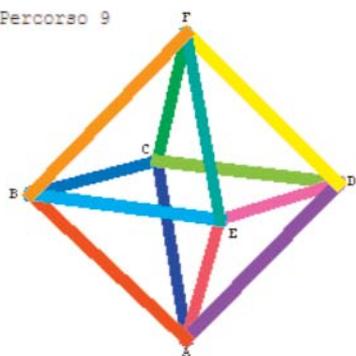
Percorso 7



Percorso 8



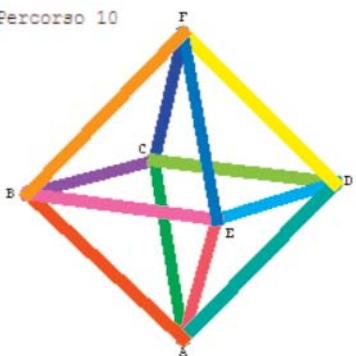
Percorso 9



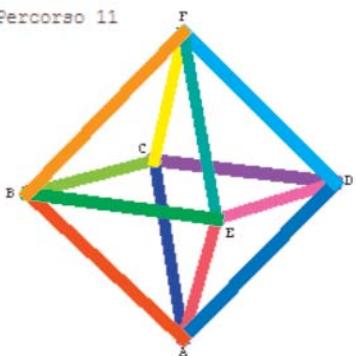
A B F D C F E D A C B E A A B F D C F E D A E B C A A B F D C F E B C A D E A



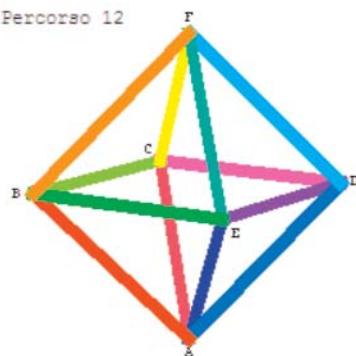
Percorso 10



Percorso 11



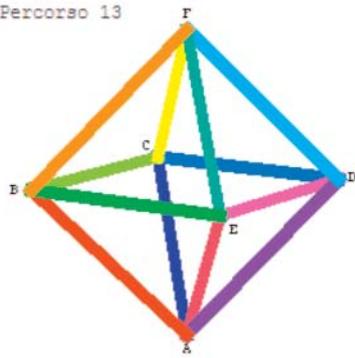
Percorso 12



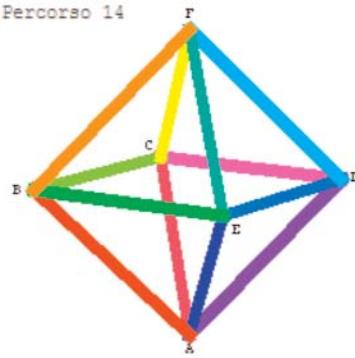
A B F D C A D E F C B E A A B F C B E F D A C D E A A B F C B E F D A E D C A



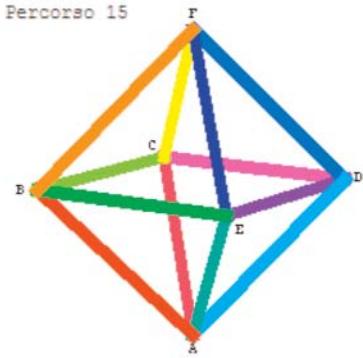
Percorso 13



Percorso 14

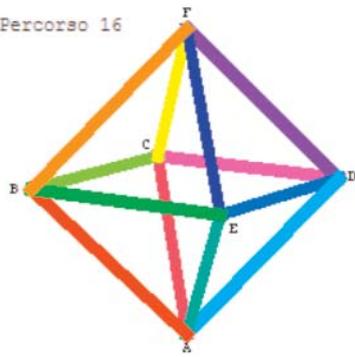


Percorso 15

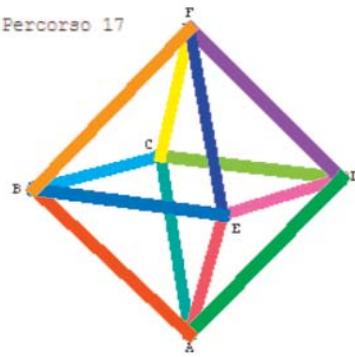


A B F C B E F D C A D E A A B F C B E F D E A D C A A B F C B E A D F E D C A

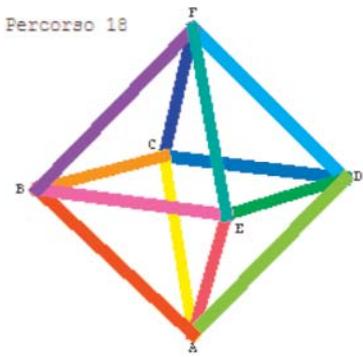
Percorso 16



Percorso 17

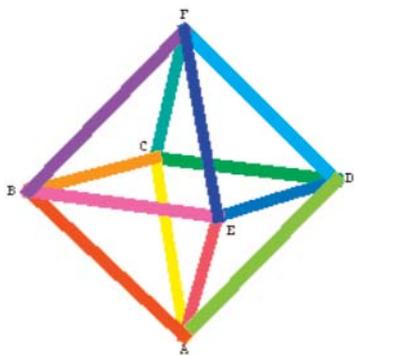


Percorso 18



A B F C B E A D E F D C A A B F C D A C B E F D E A A B C A D E F D C F B E A

Percorso 19



A B C A D C F D E F B E A

103. Matematica con la Bash

di Luciano Sarra

SUNTO. Attualmente non è difficile eseguire con i computer domestici calcoli sia numerici che simbolici utilizzando programmi potenti come Mathematica, Matlab, Octave. In questo articolo vogliamo presentare il programma *bc* e dimostrare che, se da una parte non ha la pretesa di competere con i programmi professionali, dall'altra si può, in modo opportuno, eseguire calcoli di una certa complessità. Come esempio di applicazione illustreremo la valutazione di un integrale tridimensionale col metodo di Monte Carlo per arrivare ad una stima di π .

1 Introduzione

Nell'ultimo decennio abbiamo assistito ad un rapido nonché prolifico sviluppo dell'informatica: calcolatori sempre più potenti, sistemi operativi che sono in grado di gestire scenari molto complessi, programmi che svolgono con successo operazioni complicate fornendo risultati che sembravano quasi impossibili. Come spesso accade, l'aumento della fruibilità degli strumenti informatici si accompagna con un analogo aumento della complessità del loro utilizzo. Così, ad esempio, se si devono eseguire una serie di operazioni il cui risultato varia al variare di un dato iniziale, si possono utilizzare programmi di calcolo quali Excel, Derive [1] o Matlab [2]; se invece si devono risolvere determinati problemi di matematica avanzata, sicuramente strumenti più raffinati come Mathematica [3] possono venire in aiuto. Infine in certi campi della matematica o della fisica molti calcoli possono essere eseguiti facendo ricorso a linguaggi di programmazione ben specifici (Fortran, C). Tutti questi strumenti matematici hanno in comune il fatto che non essendo presenti su nessuna installazione di default di un sistema operati-

vo, devono essere acquistati (pagando le relative licenze) oppure scaricati dalla Rete (se fanno parte di un progetto Open Source), installati con le specifiche dipendenze, cioè con le librerie necessarie per il loro corretto funzionamento. Infine, ogni programma ha un proprio linguaggio, ovvero una sintassi mediante la quale eseguire i calcoli: si pensi, a tale proposito, come cambia il modo di calcolare le soluzioni di un'equazione di secondo grado con Excel, Mathematica, Derive o Matlab.

In questo articolo vogliamo illustrare uno strumento matematico alternativo che non può e non vuole essere il sostituto degli applicativi citati precedentemente ma che, se usato in maniera opportuna, può fornire i risultati cercati nella soluzione di molti problemi matematici. Esso si chiama *bc* [4], acronimo di Basic Calculator, è presente in una qualsiasi installazione di GNU/Linux o Unix di default ed è quindi utilizzabile subito con la sola conoscenza della *bash*. Osserviamo infine che gli utenti Windows non sono affatto obbligati ad utilizzare GNU/Linux potendo installare Cygwin [5], un software libero che consente il *porting* di software che generalmente 'gira' su sistemi POSIX verso sistemi Windows.

2 La bash

Il prerequisito per il seguito di questo articolo è solamente la conoscenza della *bash* [6] (**b**ourne **a**gain **s**hell) in ambiente GNU/Linux; come è noto essa è la "shell di default" di tale sistema operativo ovvero è quell'ambiente dove è possibile eseguire i comandi del sistema operativo o relativi all'utilizzo di un'applicazione. Ciò che a noi interessa è lanciare in sequenza una serie di istruzioni che l'ambiente, ovvero la *bash*, eseguirà con l'aiuto di comandi (cioè di programmi) già presenti nel sistema operativo. Utilizzando un linguaggio più tecnico, creeremo degli script che lanceremo nella *bash* di un sistema GNU/Linux;

per chi non è nuovo all'utilizzo di strumenti simili, possiamo affermare che la *bash* in GNU/Linux sta all'ambiente DOS di Windows come gli script in *bash* stanno ai *batch* dei file .bat.

Per esemplificare quanto finora esposto, facciamo un classico esempio di script-bash. Assegniamo a due variabili dei valori numerici come segue:

```
$ a=6;b=5
$ echo $a
$ 6
$ echo $b
$ 5
```

Già con questi primi rudimenti possiamo fare qualche calcolo come la somma (+), la differenza (-), la moltiplicazione (*), la divisione (/), l'elevamento a potenza (**) che sono rispettivamente:

```
$ echo $((a+b))
$ 11
$ echo $((a-b))
$ 1
$ echo $((a*b))
$ 30
$ echo $((a/b))
$ 1
$ echo $((a**b))
$ 7776
```

La limitazione della modalità di esecuzione di questi calcoli appare già evidente nella divisione: dividendo 6 per 5 il quoziente non è un numero intero mentre il risultato ottenuto lo è. La spiegazione risiede nel fatto che la sola *bash*, per come è stata concepita, non è in grado di trattare numeri in virgola mobile così come non è in grado di eseguire operazioni matematiche più avanzate di quelle viste finora. Senza dover ricorrere ai programmi professionali citati nel primo paragrafo, possiamo vedere l'utilizzo del calcolatore *bc* che è presente nella *bash* e che, se usato opportunamente, può risolvere un buon numero di calcoli e problemi.

3 Uso di *bc*

Per utilizzare *bc* è sufficiente lanciare il relativo comando, apparirà un messaggio relativo al copy-

right del programma ed il cursore lampeggiante in attesa di accettare in input le istruzioni. A questo punto eseguiamo gli stessi calcoli visti nel paragrafo precedente in forma più compatta mettendo tutte le operazioni su una singola riga separati ad un punto e virgola

```
$ bc
bc 1.06
Copyright 1991-1994, 1997,
1998, 2000 Free Software Found-
ation, Inc.
This is free software with AB-
SOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
a=6;b=5
a+b;a-b;a*b;a/b;a^b
11
1
30
1
7776
$
```

si sono ottenuti gli stessi risultati anche quello particolare per la divisione fra i due numeri. Tuttavia *bc* è ora in grado di trattare anche operazioni che coinvolgono numeri non interi; infatti è sufficiente scrivere, all'interno dell'ambiente *bc* (lanciato con il flag *-q* non appare il messaggio di copyright) il comando *scale=valore*, dove *valore* è un intero compreso fra 0 e 99, per specificare il numero di cifre decimali da visualizzare

```
$bc -q
scale=6; a=6; b=5
a/b
1.200000
quit
$
```

Un altro esempio di calcolo in virgola mobile è la valutazione della radice quadrata di un qualsiasi numero. Sempre all'interno di *bc* calcoliamo $\sqrt{5}$ con dieci cifre decimali:

```
$bc -q
scale=10;sqrt(5)
```

```
2.2360679774
quit
$
```

Si può evitare l'uso interattivo di *bc* ed operare all'interno della *bash* come nel seguente esempio

```
$ echo `scale=4;9/7 `|bc
1.2857
$
```

Se l'operatore *bc* viene invocato con il flag *-l* allora viene caricata una libreria matematica con il default di *scale* impostato a 20. Mediante tale libreria si possono calcolare anche i valori delle seguenti funzioni

```
s(x), c(x), a(x), l(x), E(x),
J(n,x)
```

che sono, rispettivamente, il seno di *x*, il coseno di *x*, l'arcotangente di *x* (dove *x* è espresso in radianti), il logaritmo naturale di *x*, la funzione esponenziale e la funzione di Bessel di ordine *n* di *x*. Così, ad esempio, per calcolare π con otto cifre decimali si può scrivere

```
$ echo `scale=8;4*a(1) `| bc -l
3.14159264
$
```

Si può, a questo punto, presentare un esempio di parametrizzazione di un calcolo come la conversione della velocità di un punto mobile dall'unità di misura dei *m/s* a quella dei *km/h*. A tale scopo, con l'editor di testo preferito, si può scrivere il seguente script nel file *conversione.sh*:

```
scale=4

/* I commenti sono come nel
linguaggio C */

print "\nConversione dai m/s
ai km/h\n\n"
print "\nVelocità in m/s: " ;
vel =read()
print "\n"
print "Velocità in km/h: "
```

```
vel * 3.6
quit
```

La sua esecuzione porta ad avere

```
$ bc -q conversione.sh
Conversione dai m/s ai km/h
Velocità in m/s: 23
Velocità in km/h: 82.8
```

Ovviamente, questo semplice script può essere arricchito di notevoli miglioramenti come la conversione inversa, un menù principale mediante il quale fare la scelta delle due conversione e così via. Un altro esempio ci porta a mostrare come *bc* si comporti come un linguaggio di programmazione. Infatti, se volessimo calcolare i valori della funzione $y = \sin x + 2 \cdot x \cdot \exp(x)$, partendo da $x=1$ fino a $x=9$ con un passo di 1.5, è sufficiente eseguire il seguente ciclo for nel file *punti.sh*

```
scale=4
for (x=1; x<10; x=x+1.5)
print "y = ", s(x)+2*e(x), "\n"
quit
```

e lanciare da una shell il comando *bc* con il doppio flag *-ql*

```
$ bc -ql punti.sh
y = 6.2778
y = 24.9632
y = 108.4394
y = 488.6783
y = 2193.9231
y = 9830.3360
```

Nel prossimo paragrafo viene proposto un esempio classico che si può facilmente trovare in Rete [7] ma presentato in questa sede con opportune modifiche: il calcolo di π con il metodo di Monte Carlo [8].

[4 Il Calcolo di \$\pi\$ con il metodo di Monte Carlo](#)

Vediamo ora un esempio di applicazione di quanto precedentemente esposto e ci proponiamo di

trovare il valore di π calcolando il volume di una sfera mediante il cosiddetto metodo di Monte Carlo (MC).

Il metodo MC è un metodo numerico utilizzato per il calcolo del valore atteso di variabili casuali, valore che non può essere ottenuto attraverso il calcolo diretto. Si tratta, in ultima analisi, di un metodo d'integrazione numerico per il calcolo d'integrali multipli. Storicamente nacque negli anni '40 all'interno del Progetto Manhattan [9] dalle menti di Ulam e Von Neumann e si basa sull'utilizzo di insiemi di numeri casuali che seguono determinate leggi di probabilità. Il nome di questo metodo è dedicato alla città monegasca perché vuole alludere al legame che esiste tra la casualità dei numeri che escono alla roulette e quelli che si ottengono da una funzione generatrice di numeri casuali. Nell'esempio che segue presenteremo un codice di MC scritto in linguaggio bash che si basa sulla generazione di sequenze di numeri pseudo-casuali da una routine già presente nel linguaggio (*/dev/urandom*). Supponiamo di dover calcolare il volume racchiuso da una superficie chiusa qualsiasi, se si possiede un generatore di numeri casuali distribuiti in un intervallo $[a, b]$ possiamo circoscrivere completamente il volume incognito con un cubo di spigolo $L=b-a$. Si generi ora un gran numero di punti casuali nello spazio, punti le cui coordinate sono determinate da un insieme di tre numeri casuali; se il punto cade all'interno del volume si aggiorna un contatore aggiungendovi 1. Una volta finita la generazione casuale si calcoli il

rappporto tra il numero di punti caduti all'interno del volume incognito (n_x) e quello totale generato (n_{tot}): esso tenderà ad essere prossimo al rapporto tra il volume ricercato, V_x , e quello noto del cubo, V_c . Detto L il suo spigolo, si avrà

$$\iiint dx dy dz \sim \tilde{V}_x \sim \frac{n_x}{n_{tot}} L^3$$

dove \tilde{V}_x indica il fatto che si tratta di un'approssimazione. Se si sceglie come volume incognito quello di una sfera di raggio R avente il centro coincidente con l'origine di un sistema di coordinate cartesiane, sia n_{sfera} il numero dei punti caduti all'interno della sfera, caratterizzati da una distanza dal centro minore del raggio. Se anche il cubo considerato ha il centro di simmetria coincidente con l'origine ed ha lo spigolo uguale a $2L$, la precedente diventa

$$\frac{4}{3} \tilde{\pi} R^3 \sim \frac{n_{sfera}}{n_{tot}} 8L^3$$

dove $\tilde{\pi}$ indica il fatto che tale valore è una stima, cioè essendo $R=L$

$$\tilde{\pi} \sim 6 \frac{n_{sfera}}{n_{tot}}$$

Nel listato 1 presentiamo lo script-bash che valuta l'ultima espressione dove, sfruttando la simmetria del problema, ci si è riferiti all'ottavo di sfera che è posto sopra il quarto di cerchio massimo giacente sul piano (x,y) e si sono generati, pertanto, punti casuali aventi le tre coordinate positive.

Listato 1

1	#!/bin/bash	37	DISTANZA=0
2		38	punti_tot=0
3	# Definizione variabili globali	39	punto_in_sfera=0
4		40	punto_fuori_sfera=0
5	DATA=\$(date +%d%m%y%H%M")	41	
6	SPIGOLO=10000	42	# Inizio del ciclo
7	MAX_GEN=1000	43	
8	NUM_DECIMALI=4	44	while ["\$punti_tot" -lt "\$MAX_GEN"]
9	FATTORE_SCALA=6	45	do
10	NUMERO_CICLI=10	46	
11		47	x_coord=\$(genera_casuale)
12	# Definizione macro principale	48	y_coord=\$(genera_casuale)
13		49	z_coord=\$(genera_casuale)
14	calcolo_MC_3d()	50	
15		51	calcolo_distanza \$x_coord \$y_coord \$z_coord
16	{	52	((punti_tot++))
17		53	
18	genera_casuale ()	54	if ["\$DISTANZA" -le "\$SPIGOLO"]

19	{	55	then ((punto_in_sfera++))
20	SEED=\$(head -1 /dev/urandom od -N 1 awk '{ print \$2 }')	56	fi
21	RANDOM=\$SEED	57	
22	let "rnum = \$RANDOM % \$SPIGOLO"	58	Pi=\$(echo "scale=\$NUM_DECIMALI; \$FATTORE_SCALA*\$punto_in_sfera/\$punti_tot" bc -l)
23	echo \$rnum	59	done
24	}	60	echo
25		61	}
26	calcolo_distanza ()	62	
27	{	63	num_ciclo=0
28	DISTANZA=\$(bc -l << EOF	64	while ["\$num_ciclo" -lt "\$NUMERO_CICLI"]
29	scale = 0	65	do
30	sqrt (\$1 * \$1 + \$2 * \$2 + \$3 * \$3)	66	echo num_ciclo = \$num_ciclo
31	EOF	67	calcolo_MC_3d
32)	68	x=\$num_ciclo
33	}	69	y=\$Pi
34		70	echo \$x \$y >> PUNTI_3d_\$DATA.txt
35	# Variabil iniziali	71	((num_ciclo++))
36		72	done

Commentiamo ora alcune righe del codice MC. Si definisce la routine *calcolo_MC_3d* (riga 14) la quale genera i numeri pseudo-casuali tramite la funzione *genera_casuale* (riga 18) e con essi calcola dapprima le coordinate di un punto nello spazio (righe 47, 48 e 49) e successivamente la sua distanza dall'origine del sistema di coordinate tramite la funzione *calcola_distanza* (riga 26) mediante l'applicazione del teorema di Pitagora. La generazione viene iterata tramite un ciclo (riga 44) ed ogni volta che la distanza trovata è minore del raggio della sfera che coincide con lo spigolo del cubo circoscritto (riga 54), viene aggiornato il contatore *punto_in_sfera* (riga 55). Una volta finito il ciclo, definito dalla variabile *MAX_GEN* (riga 7), si calcola il valore di $\tilde{\pi}$, chiamato *Pi*, come il rapporto fra il numero dei punti caduti all'interno della sfera *punto_in_sfera* e quello totale *punti_tot* (riga 58).

Per evidenziare il fatto che il risultato del valore di π calcolato dal nostro codice dipende fortemente dalla generazione dei numeri pseudo-casuali, abbiamo iterato l'esecuzione della routine

calcolo_MC_3d per *NUMERO_CICLI* di volte che nel nostro caso è 10 (riga 10) ed infine salvato i 10 valori di $\tilde{\pi}$ calcolati in un file (riga 70). Vogliamo ora confrontare in alcuni grafici i 10 valori di $\tilde{\pi}$ trovati in determinate serie con quello di π^* , valore che definiamo "esatto" e che è riportato su ogni tabella di costanti matematiche, considerato alla stessa cifra significativa; le serie si differenziano solamente dalle quantità di numeri pseudo-casuali (nel seguito, numeri ps) generati. La prima serie rappresenta i 10 valori di $\tilde{\pi}$ calcolati con 100 numeri ps generati, la seconda con 1000 generati e la terza con 10000. Ci è sembrato interessante confrontare i risultati trovati nel caso tridimensionale con i corrispondenti valori relativi all'analogo esempio bidimensionale, ovvero calcolando $\tilde{\pi}$ dall'area di una circonferenza di raggio *R* inscritta in un quadrato di lato *2L*. Non è difficile intuire che lo script bash visto in precedenza sarà simile, *mutatis mutandis*, ed il lettore interessato può esercitarsi a scriverlo. Di seguito presentiamo i dati che abbiamo ottenuto e la loro rappresentazione grafica:

Ciclo con 100 numeri ps	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
3D	3.18	3.54	3.24	3.72	3.30	3.60	3.78	2.82	3.18	2.82
2D	3.20	3.24	3.36	3.32	3.32	3.00	2.96	3.00	3.24	3.00

Tabella 1. Prima serie di $\tilde{\pi}$ calcolata con 100 numeri ps.

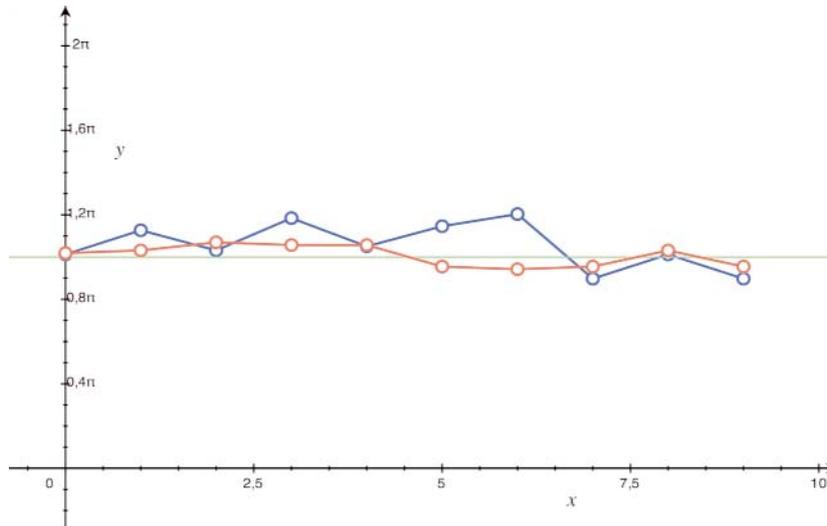


Grafico 1. Serie di $\tilde{\pi}$ con 100 numeri ps relativi alla tabella 1.

La linea blu si riferisce ai valori di $\tilde{\pi}$ derivati dal calcolo della stima del volume della sfera, quella rossa dal calcolo della stima dell'area della circonferenza, in verde il valore $y = \pi^\bullet = 3.14$. L'asse delle ordinate è espressa in unità π ed i valori interi delle ascisse, da 0 a 9, rappresentano le 10 iterazioni del ciclo.

Ciclo con 1000 num. ps	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
3D	3.6180	3.3960	3.5400	3.5460	3.6000	3.6480	3.5340	3.4080	3.6000	3.4200
2D	3.3040	3.2640	3.2400	3.2160	3.2600	3.2920	3.2080	3.2560	3.3480	3.2680

Tabella 2. Seconda serie di $\tilde{\pi}$ calcolata con 1000 numeri ps.

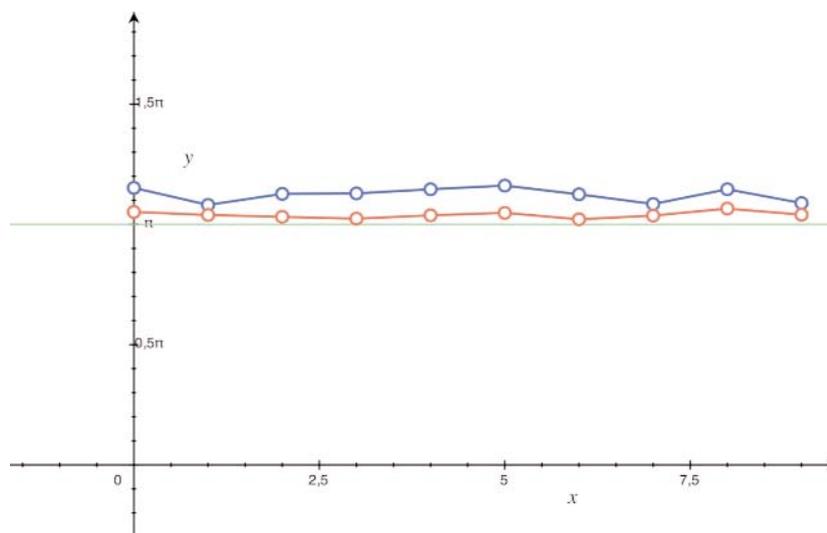


Grafico 2. Serie di $\tilde{\pi}$ con 1000 numeri ps relativi alla tabella 2.

La linea blu si riferisce ai valori di $\tilde{\pi}$ derivati dal calcolo della stima del volume della sfera, quella rossa dal calcolo della stima dell'area della circonferenza, in verde il valore $y = \pi^\bullet = 3.1416$. L'asse delle ordinate è espressa in unità π ed i valori interi delle ascisse, da 0 a 9, rappresentano le 10 iterazioni del ciclo.

Ciclo con 10000 num. ps	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
3D	3.3972	3.3738	3.3840	3.3720	3.4116	3.3696	3.3810	3.3870	3.3402	3.3858
2D	3.2072	3.2212	3.2064	3.2176	3.1992	3.2136	3.2364	3.2036	3.2040	3.2020

Tabella 3. Terza serie di $\tilde{\pi}$ calcolata con 10000 numeri ps.

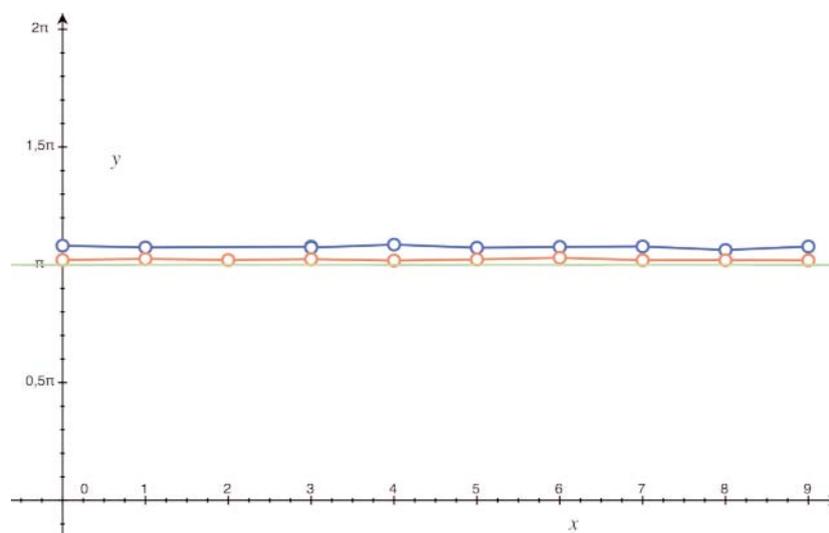


Grafico 3. Serie di $\tilde{\pi}$ con 10000 numeri ps relativi alla tabella 3.

La linea blu si riferisce ai valori di $\tilde{\pi}$ derivati dal calcolo della stima del volume della sfera, quella rossa dal calcolo della stima dell'area della circonferenza, in verde il valore $y = \pi^* = 3.1416$. L'asse delle ordinate è espressa in unità π ed i valori interi delle ascisse, da 0 a 9, rappresentano le 10 iterazione del ciclo.

Confrontando i valori di $\tilde{\pi}$ sia del caso tridimensionale che quello bidimensionale con π^* , ci si accorge che quelli ottenuti con il metodo MC tendono generalmente a sovrastimarli. Indubbiamente questo è dovuto al fatto che nella scrittura del codice si è stati costretti ad introdurre delle approssimazioni legate al fatto che nonostante si utilizzi la funzione `bc`, un codice in bash non è in grado di trattare completamente numeri in virgola mobile. Ad esempio, riferendosi al codice del listato 1, alla riga 29 si è posto `scale=0` nel calcolo della distanza fra il centro della sfera ed il punto generico, generato facendo necessariamente diminuire la precisione. Inoltre una seconda fonte di approssimazioni e quindi, in ultima analisi, di errori sistematici è sicuramente dovuta alla funzione `/dev/urandom` la quale non genera numeri perfettamente casuali. Osserviamo infine che ci si aspetta una certa convergenza della serie di $\tilde{\pi}$ verso π^* se si considera un valore molto alto di numeri casuali, ovvero se il valore della variabile `MAX_GEN` (riga 7 del listato 1) incomincia ad

essere maggiore di 10000: in tal caso gli errori di arrotondamento possono essere ridotti. Ciò è anche confermato, come possiamo vedere nelle tre serie rappresentate dai grafici, dal fatto che i valori trovati si avvicinano a quello "esatto" quando aumentano i punti casuali generati e ci sono meno fluttuazioni attorno a π^* . Osserviamo infine come tale avvicinamento sia più veloce nel caso della circonferenza rispetto a quello della sfera e ciò è legato al fatto che nel primo caso stiamo trattando un problema bidimensionale con due serie di insiemi di numeri pseudo-casuali mentre nel secondo caso il problema è tridimensionale con tre insiemi di numeri pseudo-casuali. Il peso degli errori dovuti alle approssimazioni è sicuramente minore nel primo caso rispetto al secondo.

5 Conclusioni

Alla luce di quanto abbiamo visto, può sorgere spontanea una semplice domanda: è proprio ne-

cessario imparare un nuovo linguaggio per eseguire calcoli che altri programmi fanno con precisione maggiore? Se, per rispondere a tale domanda, si vuole partire dall'esempio appena visto, il calcolo di π con la *bash* non ha la pretesa di sostituire altre routine più sofisticate che portano a valori meglio approssimati, ma vuole essere quello che si è soliti chiamare una prova concettuale (“*a proof of concept*”) che dimostra che può essere eseguita, mediante la *bash* e gli strumenti che essa offre, anche una routine molto complicata come il metodo MC.

L'intento è stato quello di avere illustrato che, avendo a disposizione una shell di una qualsiasi distribuzione GNU/Linux o di un ambiente Cygwin, sono possibili almeno due cose: quella di realizzare programmi che possono risolvere molti problemi che riguardano sia la matematica elementare che avanzata; che con questo metodo è possibile costruire una specie di “prototipo” per realizzare rapidamente una versione semplificata di una routine molto

complessa per verificare le sue funzionalità e requisiti prima di riscriverlo in un linguaggio per un software matematico di alto livello.

Sitografia

- [1] <http://www.derive-europe.com/specs.asp>
- [2] <http://www.mathworks.com>
- [3] <http://www.wolfram.com>
- [4] http://www.gnu.org/software/bc/manual/html_mono/bc.html
- [5] <http://www.cygwin.com>
- [6] <http://it.wikipedia.org/wiki/Bash>
- [7] <http://tldp.org/LDP/abs/html/mathc.html>
- [8] http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_Monte_Carlo
- [9] <http://www.atomicmuseum.com/Tour/manhattanproject.cfm>

104. 2009 anno internazionale dell'Astronomia

di Vito Lecci

L'ONU ha proclamato l'anno 2009 "Anno Internazionale dell'Astronomia", accogliendo così la mozione che l'UNESCO aveva già avanzato nel dicembre 2005. Questa proclamazione è anche un successo italiano, poiché è stato proprio il nostro Paese il primo a farsene promotore fin dal 2003. Un risultato raggiunto anche grazie al fatto che nel 2009 ricorre il IV centenario dalla prima osservazione del cielo con un cannocchiale, da parte di Galileo Galilei.

Moltissime le attività organizzate in tutto il pianeta in ambito astronomico, in Italia sarà l'INAF (Istituto Nazionale di Astrofisica www.inaf.it), sia autonomamente sia in collaborazione con altri enti, università e associazioni culturali, ad organizzare eventi su tutto il territorio nazionale.

Lo scopo di questa iniziativa è quello di offrire a tutti la possibilità di avvicinarsi all'astronomia con un approccio semplice, accessibile ed alla portata di chiunque.

Tra i progetti su scala mondiale segnaliamo:

- **100 ore di astronomia**, in occasione delle quali saranno organizzate diverse attività pratiche di osservazione del cielo con strumenti astronomici messi a disposizione del grande pubblico, sia da parte di osservatori astronomici istituzionali, sia da parte di associazioni culturali locali.
- **Il galileoscopio**, che prevede l'osservazione del cielo con uno strumento molto simile al rudimentale cannocchiale utilizzato da Galileo, questo anche allo scopo di comprendere le notevoli capacità di osservazione dello scienziato toscano, considerando la rudimentalità dello strumento utilizzato all'epoca.
- **Il portale dell'Universo**, attraverso il quale sarà resa disponibile una grande mediateca online che conterrà notizie, immagini, filmati e moltissimo altro materiale.
- **Dark Sky Awareness**, che si propone di pro-

teggere il cielo stellato notturno dal continuo dilagare dell'inquinamento luminoso, prodotto dagli impianti di illuminazione artificiale spesso concepiti e installati male.

- **Astronomy and World Heritage** è invece un'iniziativa volta ad individuare e valorizzare tutti quei siti astronomici di una certa rilevanza culturale.
- **Galileo**, programma di formazione per i docenti che insegnano l'astronomia. Il programma prevede corsi per l'utilizzo della strumentazione astronomica e dei software astronomici di manipolazione delle immagini digitali.
- **La percezione dell'Universo**, che ha l'obiettivo di avvicinare i bambini svantaggiati alla percezione dell'Universo, attraverso giochi, canzoni, attività manuali, cartoni animati ecc.
- **L'Universo dalla Terra** invece è un progetto che mostrerà le più belle immagini astronomiche riprese dai telescopi spaziali in orbita intorno al nostro Pianeta. I luoghi delle mostre saranno i più inusuali, dai giardini ai parchi pubblici, dai musei ai centri commerciali...
- **Sviluppare l'Astronomia in una prospettiva globale**, prevede una serie di iniziative in ambito astronomico realizzate in sinergia tra università, enti di ricerca, e scuole.

La data ufficiale di apertura dell'Anno Internazionale dell'Astronomia sarà il 15 gennaio 2009, la manifestazione si terrà a Parigi.

La manifestazione di chiusura sarà tenuta invece in Italia, il 9 gennaio 2010, data particolarmente densa di significato per noi italiani, nel 1610 infatti (4 secoli prima) Galileo Galilei pubblicò il suo famoso trattato Scientifico "Sidereus Nuncius", in esso erano riportate le sue scoperte riguardanti i satelliti di Giove, la corrugata superficie della Luna, un gran numero di stelle non visibili ad occhio nudo e altro: un trattato destinato a stravolgere le conoscenze astronomiche della

sua epoca e a gettare le basi della moderna astronomia.

Tra le innumerevoli iniziative programmate in Italia vi segnalo l'importante appuntamento con il "Festival dello Spazio" che si terrà domenica 29 marzo 2009 presso le sale dello Sheraton Nicolaus Conference Center di Bari. E' una manifestazione a livello nazionale nel cui ambito sarà allestito un planetario itinerante, dove i partecipanti potranno immergersi nella ricostruzione fedele e realistica del cielo visto da qualsiasi località geografica ed in qualsiasi epoca; sarà presente anche una Galleria delle Scienze, nella quale saranno eseguiti in pubblico esperimenti scientifici; saranno previsti diversi importanti ospiti, tra i quali l'astronauta italiano Umberto Guidoni, già intervenuto in due delle precedenti edizioni; un'esposizione di astrofotografie, un modello in scala 1:1 dello "Sputnik", un'esposizione dei "Vettori Americani" (Gemini, Redstone e Saturn V), del "Modulo MLPL" (fornito dall'Agenzia Spaziale Italiana) e della ricostruzione in scala 1:48 del-

l'Atterraggio di Apollo 11; una mostra di meridiiane, orologi solari e calendari astronomici, una mostra di meteoriti provenienti da tutto il mondo, tra cui alcuni rarissimi frammenti di breccia lunare e di basalto marziano. Numerose anche le conferenze a carattere divulgativo. Per approfondimenti si può consultare il sito internet della manifestazione www.festivaldellospazio.it

Tra i siti specifici per questa iniziativa segnalo

Anno Internazionale dell'Astronomia 2009

<http://www.astronomy2009.it/>.

Un video di presentazione dell'iniziativa è visibile su Youtube all'indirizzo

<http://www.youtube.com/watch?v=Tf4C1EkZ-tho&eurl=http://www.astronomy2009.it/>

Ulteriore iniziativa è la nascita del blog *Sidereus Nuncius* che si propone di offrire aggiornamenti continui e quotidiani nell'ambito dell'astronomia, dell'astrofisica e dell'astronautica, sempre riportati in maniera semplice ed accessibile anche ai non addetti ai lavori. Troverete il blog all'indirizzo: www.sidereus-nuncius.info

105. Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo

Anna Cerasoli, *Sono il numero 1, come mi sono divertito a diventare bravo in matematica*, Feltrinelli, 2008, euro 13,00, pagg. 130

Anna Cerasoli è nota al grande pubblico per i suoi libri divulgativi di matematica *I magnifici 10*, *La sorpresa dei numeri*, *Mr Quadrato*, pubblicati anche all'estero. Le abbiamo fatto alcune domande sul suo nuovo libro.

Matematicamente.it. Nelle storie precedenti il protagonista era Filo un ragazzo 'comune', curioso di matematica, dall'intelligenza vivace, alle prese con la scuola e le maestre, esploratore del mondo, guidato dal nonno professore di matematica in pensione. Anna, chi è il protagonista di questo nuovo libro?

Anna C. *Il protagonista è un bambino che racconta come ha fatto a diventare bravo in matematica e comunica la gioia di aver superato la noia e la paura della matematica ai suoi coetanei. Racconta di come è passato dall'umiliazione e dalla frustrazione, alla sicurezza di sé che permette di capire e anche, quando capita, di affrontare l'insuccesso.*

Matematicamente.it. Qual è l'idea di fondo del libro? Perché un altro libro per ragazzi?

Anna C. *L'idea del libro mi è venuta perché so quanto patiscono i ragazzi a scuola, quanto sia frustrante non capire la matematica, come sia umiliante per bambini che sono di buona intelligenza e che hanno molte capacità, che riescono bene in tante cose e in tanti giochi, avere poi insuccessi in matematica. Perché c'è un muro che li separa dalla matematica. Spesso questo muro è fatto di eccessiva astrazione, di calcoli lunghi e noiosi, di teoria senza applicazioni, e così ho pensato di presentare una matematica facile, vicina alla loro realtà. E poi ho pensato che potesse raccontarla un bambino, con le sue parole, con un linguaggio semplice. Infatti, questo libro non necessita della mediazione dell'adulto e può essere letto tranquillamente da un bambino delle elementari.*

Matematicamente.it. Il tuo libro quindi è pensato come un supporto alla didattica?

Anna C. *Sì, credo che il libro possa essere un buon supporto alla didattica. Io ho scoperto proprio con i bambini quanto sia bello non avere paura della matematica. La loro innata curiosità, la creatività propria di chi comincia a conoscere il mondo sono facili da suscitare e stimolare. Penso, con il libro, di avere qualche chance in questo senso.*

Non esistono altri testi di divulgazione a livello elementare. Di solito la divulgazione della matematica è fatta a un livello più alto: per persone che hanno già una preparazione di scuola superiore. Troppo tardi, penso, quando i buoi sono usciti dalla stalla! Del resto c'è un grande desiderio da parte dei genitori e degli insegnanti di avere strumenti facili che possano accompagnare il libro di testo presentando la matematica insieme a un po' di storia, di curiosità, di aneddoti, di giochi, che rendono tutto più coinvolgente.

Matematicamente.it. Quanta matematica c'è intorno alla vita di un bambino della scuola primaria?

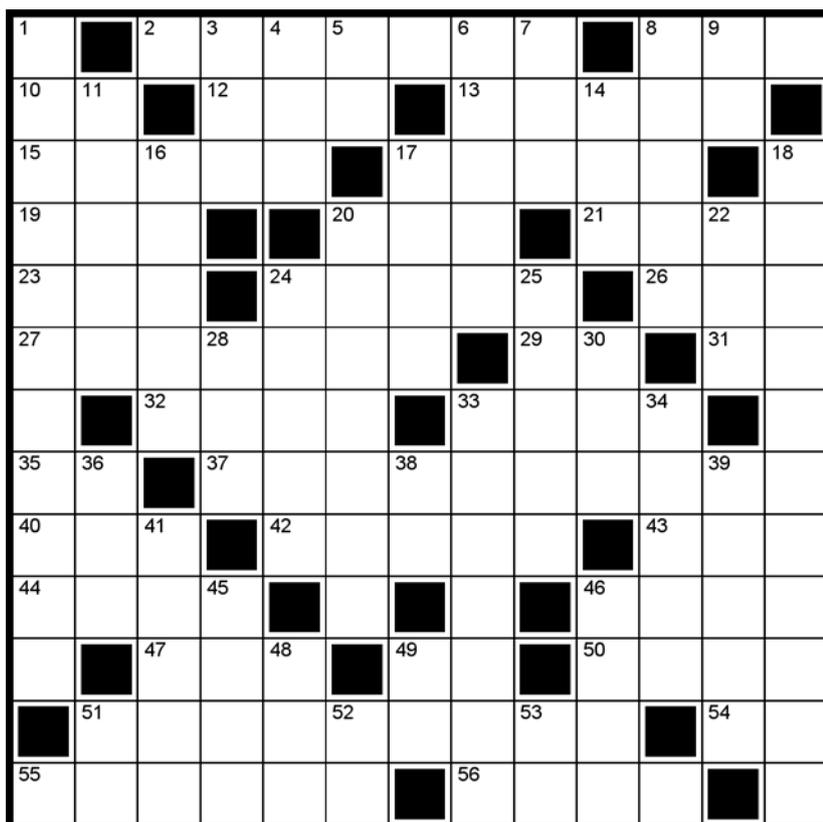


Anna C. *La matematica intorno a noi è proprio tanta. Anche nei posti e nelle modalità più impensate. La maestra del bambino protagonista ha trovato il modo di farlo scoprire ai propri allievi assegnando un compito: munirsi di penna e foglio e descrivere tutte le volte che, durante la giornata, incontrano la matematica. I bambini provano e scrivono numeri: la data, il loro peso, le calorie che trovano nella marmellata al mattino, addirittura i numeri scritti nel frigorifero per stabilire se deve raffreddare di più o di meno... Ma l'insegnante non si accontenta e chiede di andare avanti perché, dice, la matematica non è solo numeri! Allora i bambini pensano alle forme e il giorno dopo, tornano con esempi di finestre quadrate, aiuole tonde, marciapiedi paralleli... Ma non ci siamo ancora. Per convincerli, la maestra fa loro un indovinello dicendo: chi è il padre del figlio di Carlo? Anche questa è matematica, perché la matematica studia pure le relazioni tra le cose. Saranno molte, poi, nel corso del libro, le occasioni per scoprire altra e nuova matematica nella realtà quotidiana di un bambino.*

106. Enigmistica e giochi

DICEMBRE 2008

Premessa da cui si ricava la tesi (A. Berna)



ORIZZONTALI

2. Premessa da cui si ricava la tesi -
 8. Prima moglie di Giacobbe -
 10. L'inizio dell'opposto - 12. Metallo per i primi arrivati - 13. Porto principale di Atene - 15. Dalla sua misura ha avuto origine la geometria - 17. Per collegarsi a Internet - 19. Il "principio" secondo una filosofia cinese - 20. Uno degli stati della materia - 21. Il nome del matematico persiano Hayyam (1048-1131) - 23. Organizzazione delle Nazioni Unite - 24. Moto periodico del mare - 26. Abbreviazione di articolo - 27. Tipica imbarcazione veneta - 29. Tera ampère - 31. Intelligenza artificiale - 32. Massiccia, rigida - 33. Una buona laurea - 35. Al centro del gruppo - 37. Emarginato, escluso - 40. Locale pubblico per bere una birra - 42. Fa pari con ex - 43. Il più famoso ... de' tali - 44. Professore in breve - 46. Si usano per fare verifiche - 47. Tipo di memoria non volatile - 49. Compact Disc - 50. Quello bruno vive anche in Italia - 51. Il complesso delle acque che si trovano sulla superficie terrestre - 54. Operatore logico - 55. Espressione di particolare meraviglia - 56. Il nome di uno dei Carnot.

55. Espressione di particolare meraviglia - 56. Il nome di uno dei Carnot.

VERTICALI

1. Una struttura algebrica - 3. Programma Operativo Regionale - 4. Ventiquattresima parte del giorno - 5. La fine dell'asintoto - 6. Donne il giorno del matrimonio - 7. Istituto Italiano della Donazione - 8. Enunciato preliminare a un teorema - 9. Satellite di Giove - 11. Il matematico italiano degli assiomi dell'aritmetica - 14. Colpevole - 16. Fase di un incontro di pugilato - 17. Il nome della Carfagna, Ministro per le pari opportunità - 18. Ortolano - 20. Buone maniere - 22. Unità di misura di superficie - 24. Utensile per serrare le parti in lavorazione - 25. La più piccola particella costituente un elemento chimico - 28. Numero primo pari - 30. Divinità degli inferi - 33. Cittadina francese meta di pellegrinaggi - 34. Nome femminile che si festeggia il primo luglio - 36. Contrazione di pure - 38. Radice Quadrata - 39. Ciotolo - 41. Lo hanno alcune varietà - 45. Casa automobilistica statunitense - 46. Fungo umanoide di Super Mario - 48. Mio francese - 49. Codice Fiscale - 51. Secondo - 52. Sistema Operativo - 53. Simbolo del Radio.

CRUCINUMERO

Dicembre 2008 (A. Berna)

ORIZZONTALI

1. Dicembre - 3. Si diventa maggiorenni - 4. Lunghezza del fiume Serchio (Toscana) - 7. I minuti in un giorno - 9. Metri in un miglio terrestre - 10. I martiri di Otranto - 11. Nacque Archimede - 12. Lunghezza del fiume Reno - 14. I giorni di Dicembre - 17. Numero di elementi che compongono il piede umano - 18. Codice dell'asteroide Robertball - 20. 5! - 21. Prodotto di tre numeri primi distinti - 22. Somma dei numeri da 1 a 6.

1	2	■	3	■	4	5	6
7	■	8	■	9	■	■	■
10	■	■	11	■	■	■	■
■	12	■	13	■	14	15	■
16	■	17	■	18	■	■	19
20	■	■	21	■	22	■	■

VERTICALI

1. Pronto soccorso - 2. Sette alla quarta - 3. Le prove del decathlon - 4. Numero che si ottiene scrivendo di seguito due numeri la cui somma è 205, la differenza 129 - 5. Un ottimo voto - 6. Le ore in otto giorni - 8. 8! - 9. La somma dei suoi divisori è 21 - 11. Numero che soffia - 13. Le lettere dell'alfabeto inglese - 15. Una famosa carica di cani - 16. Il primo numero che non c'è nella tombola - 18. La somma delle facce di due dadi - 19. I modi per far ridere un bambino secondo Moore Jack.

SOLUZIONI DEL NUMERO PRECEDENTE

La chiave con la quale si decifra il cruciverba corrisponde al numero di volte con il quale appaiono le varie lettere, ovvero il numero rappresenta quante volte una lettera compare nel cruciverba. Così è necessaria un'attenta analisi sulle ripetizioni dei numeri e sulla loro distribuzione. Ad esempio la lettera A appare 28 volte e così via; la codifica è la seguente 28=A, 2=B, 10=C, 4=D, 19=E, 1=F-H-V-Z, 4=G, 22=I, 8=L, 6=M, 13=N, O=15, 5=P-S-U, 14=R, 10=T per avere

4	22	28	10	15	6	15	8	19	15	5	28	14	4	22
G	I	A	C	O	M	O	L	E	O	P	A	R	D	I
5	5	5	14	28	■	10	19	5	15	22	19	■	28	13
U	S	U	R	A	■	C	E	S	O	I	E	■	A	N
4	28	8	28	■	5	28	13	22	13	15	■	6	10	10
G	A	L	A	■	P	A	N	I	N	O	■	M	T	T
8	22	28	■	10	28	14	15	10	28	■	8	19	28	14
L	I	A	■	C	A	R	O	T	A	■	L	E	A	R
22	28	■	10	5	4	22	13	15	■	10	28	14	14	28
I	A	■	C	U	G	I	N	O	■	C	A	R	R	A
19	■	2	28	14	15	13	19	■	5	19	10	28	22	13
E	■	B	A	R	O	N	E	■	P	E	T	A	I	N
8	19	15	13	22	4	28	■	6	19	14	22	13	15	5
L	E	O	N	I	D	A	■	M	E	R	I	N	O	S
6	5	14	28	8	19	■	2	28	10	22	13	15	■	22
M	U	R	A	L	E	■	B	A	C	I	N	O	■	I
15	1	22	4	22	■	5	22	10	15	13	22	■	28	4
O	F	I	D	I	■	P	I	T	O	N	I	■	A	G
10	19	10	28	■	10	19	13	19	14	22	■	5	10	19
T	E	C	A	■	C	E	N	E	R	I	■	S	T	E
19	6	15	■	6	22	14	28	14	19	■	13	19	15	13
E	M	O	■	M	I	R	A	R	E	■	N	E	O	N
8	22	■	10	19	28	10	14	22	■	1	28	4	5	1
L	I	■	T	E	A	T	R	I	■	V	A	D	U	Z
8	28	5	19	10	10	1	22	28	14	28	5	22	10	28
L	A	S	E	C	C	H	I	A	R	A	P	I	T	A

SOLUZIONE:
 987 è un numero di Fibonacci
 27337 è un numero primo
 1331 è un cubo

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 2 Numero 8 – Dicembre 2008

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

Direttore responsabile Antonio Bernardo

antoniobernardo@matematicamente.it