123. Poligoni, poliedri e politopi regolari

di Andreana Zucco

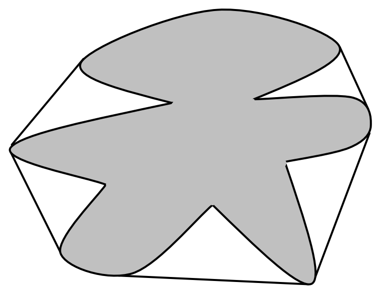
Premessa

Se le definizioni di poligono (2 dimensioni) e di poliedro (3 dimensioni) sono ben note, per poter parlare di oggetti in dimensione superiore a 3 (politopi), occorre dare una definizione estendibile a un qualsiasi numero di dimensioni.
Intanto, precisiamo cosa si intende per spazio di dimensione n. I punti di una retta (spazio a dimensione 1) sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali; i punti del piano, (spazio a dimensione 2) sono in corrispondenza con le coppie di numeri reali; i punti dello spazio ordinario tridimensionale sono in corrispondenza biunivoca con le terne di numeri reali. Per analogia, ad una quaterna di numeri reali si può associare un punto dello spazio a 4 dimensioni. Più in generale una n-upla di numeri reali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rappresenta un punto dello spazio di dimensione n. In questo spazio si può anche introdurre la distanza fra due punti, in modo analogo a come si fa per il piano. Uno spazio di questo tipo viene detto spazio euclideo n-dimensionale.
Per dare la definizione di politopo premettiamo le seguenti definizioni:

Def. 1: Un insieme X di punti di uno spazio di dimensione finita qualsiasi n (ove n è un numero naturale) è detto *convesso* se contenendo due punti a, b contiene anche il segmento [a,b] che li congiunge.

Insiemi convessi sono ad esempio la retta, i poligoni regolari, il cubo.

Def. 2: Si dice *inviluppo convesso* di un insieme X di uno spazio di dimensione n e si scrive conv(X) il più piccolo convesso che contiene X .



Ad esempio, l'inviluppo convesso di tre punti distinti allineati è un segmento, l'inviluppo convesso di tre punti non allineati è un triangolo. L'inviluppo convesso di un insieme X convesso è l'insieme stesso: in questo caso conv(X)=X .
E ora seguendo il testo di H.G.Eggleston [E] diamo la seguente definizione:

Def. 3: L'inviluppo convesso di un numero finito di punti si dice:
poligono in dimensione 2,
poliedro in dimensione 3,
politopo in dimensione n superiore a 3.

Ad esempio, nel piano quattro punti non allineati a, b, c, d danno origine ad un poligono: un triangolo di vertici a, b, c se d appartiene a conv(a,b,c) mentre se d è esterno al triangolo di vertici a, b, c i quattro punti danno origine ad un quadrilatero.

Poligoni regolari

Analizziamo ora il concetto di regolarità per i poligoni.

Def. 4: Un poligono di p lati e di p vertici si dice regolare se è equiangolo ed equilatero e si indica, usando i simboli di Schläfli, con {p}.

Ad esempio {4} rappresenta solo il quadrato, che è regolare, mentre il rettangolo è equiangolo, ma non equilatero e il rombo è equilatero ma non equiangolo.
Osserviamo che i poligoni regolari sono infiniti.

Poliedri regolari

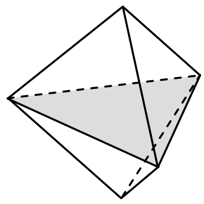
Passiamo ora ai poliedri, che sono l'estensione del concetto di poligono. Abbiamo detto che un poliedro è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti, ovviamente non complanari, ma si può anche definire in modo equivalente come l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi che sia anche limitata. I piani che lo delimitano, lo intersecano secondo poligoni piani, detti *facce*, disposte in modo che ogni loro lato, detto *spigolo*, sia comune a due di esse; inoltre si dicono *vertici* del poliedro i suoi punti estremi.
Quindi un poliedro qualsiasi è una regione dello spazio limitato da N_0 vertici, N_1 spigoli, N_2 facce, numeri legati fra loro dalla formula di Eulero:

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

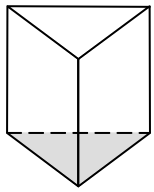
Quando un poliedro si dice regolare?
Ci sono diverse definizioni equivalenti:

Def. 5: Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono regolari e uguali e se tutti gli angoloidi sono uguali.

Un esempio di solido che soddisfa a tutte le condizioni ed è quindi un poliedro regolare è il cubo.
Non sono regolari ad esempio:



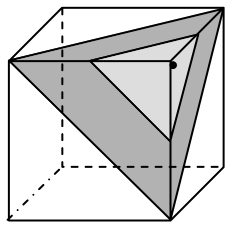
1) La bipiramide formata da due tetraedri regolari incollati per una faccia non è un poliedro regolare, pur avendo le facce regolari e uguali (triangoli equilateri) ha angoloidi diversi, infatti da due vertici escono tre spigoli e dai tre vertici escono quattro spigoli.



2) Il prisma a basi triangolari equilatere e facce laterali quadrate non è un poliedro regolare in quanto ha facce regolari, ma non tutte uguali, mentre i suoi angoloidi sono triedri che, avendo le stesse facce, sono uguali.

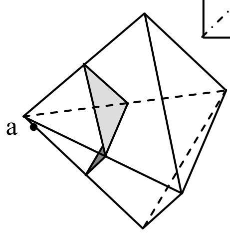
Per estendere a dimensioni superiori il concetto di regolarità diamo la seguente definizione:

Def. 6: Dato un vertice a di un poliedro, si dice *stella relativa al vertice a* la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i secondi estremi degli spigoli aventi *a* come vertice. Si dice *figura al vertice a* la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli aventi a come vertice.



Ad esempio la stella e la figura al vertice di un cubo sono triangoli equilateri simili.

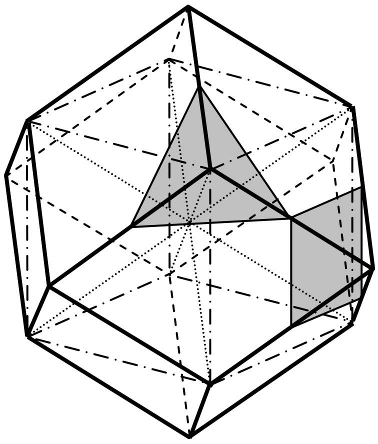
Si prova che per un qualunque vertice di un poliedro regolare, la stella e la figura al vertice sono poligoni piani, mentre ad esempio per la bipiramide dell'esempio precedente ciò non è vero: la stella e la figura al vertice di un vertice da cui escono quattro spigoli è formata da due triangoli equilateri non complanari.



Ora possiamo dare le seguente definizione che si dimostra equivalente alla Def. 5.

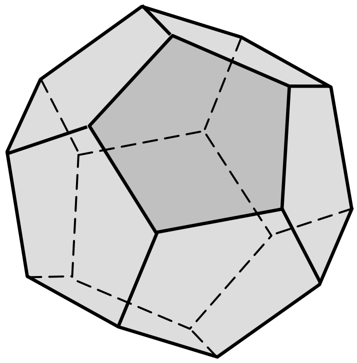
Def. 7: Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono regolari e le sue stelle (oppure equivalentemente le sue figure al vertice) sono poligoni regolari.

Un esempio di un poliedro che pur avendo figure al vertice regolari, non ha facce regolari è il dodecaedro rombico. Questo poliedro si costruisce a partire da due cubi uguali. Uno rimane tale quale nel centro della costruzione. L'altro viene scomposto in sei piramidi rette a base quadrata, ognuna ha come base una faccia del cubo ed ha vertice nel centro del cubo scomposto. Ora incolliamo le sei piramidi sulle facce del primo cubo. Otteniamo un poliedro che ha come facce rombi, mentre le figure al vertice sono quadrati o triangoli equilateri. Non avendo facce regolari non è un poliedro regolare



Usando i simboli di Schläfli[1] un poliedro regolare si denota con {p,q} dove p è il numero dei lati di una faccia e q il numero dei lati di una stella. Ad esempio il cubo si denota con {4,3} in quanto le sue facce sono quadrati e le sue stelle triangoli.
Com'è noto esistono solo cinque tipi di poliedri regolari, cosa che proveremo usando il teorema di Schläfli. Essi sono:

- tetraedro: {3,3} è una piramide a base triangolare, le cui quattro facce sono triangoli equilateri;
- ottaedro: {3,4} è formato da due piramidi a base quadrata incollate sulle basi e con facce triangoli equilateri;
- cubo: {4,3} si ottiene regolando l'altezza di un prisma a base quadrata in modo che ogni faccia sia un quadrato;
- icosaedro: {3,5} si ottiene collegando i vertici di due pentagoni posti su piani paralleli ma uno ruotato rispetto all'altro in modo che i due pentagoni siano collegati da dieci triangoli equilateri (formando una specie di tamburo); infine sui due pentagoni si incollano due piramidi a base pentagonale, in modo da avere in tutto venti triangoli equilateri;
- dodecaedro: {5,3} per costruirlo occorrono dodici pentagoni. Si incastrano in modo opportuno sei pentagoni in modo da formare una scodella, gli spigoli liberi formano un decagono sghembo; unendo due oggetti di questo tipo lungo gli spigoli liberi, si ottiene il dodecaedro.



Politopi regolari 4-dimensionali

Passiamo ora a considerare i politopi in dimensione 4 che sono un'estensione dei poliedri.
Abbiamo definito un politopo 4-dimensionale come l'inviluppo convesso di un numero finito di punti. Esso possiede N_3 celle di dimensione 3 che sono poliedri, N_2 celle piane dette facce, N_1 celle unidimensionali dette spigoli ed N_0 vertici che sono i punti estremi. Tali numeri sono legati fra loro dalla relazione di Eulero: $N_0 + N_2 = N_1 + N_3$.

Def. 8: Un politopo 4-dimensionale si dice regolare se le sue celle che compongono il contorno sono poliedri regolari e le sue stelle (o le sue figure al vertice) sono poliedri regolari.

Vediamo la costruzione di alcuni politopi 4-dimensionali seguendo il testo di H.S.M.Coxeter [C]:

1. se si parte da un segmento di vertici A,B e si considera un punto C esterno alla retta che contiene il segmento, unendo i tre punti A, B, C si ottiene un triangolo;
2. se si uniscono i vertici del triangolo conv(A,B,C) con un punto D esterno al piano su cui giace si ottiene un tetraedro;

[1] Il matematico svizzero Ludwig Schläfli (Grasswyl 1814, Berna 1895) fu tra i primi a studiare la geometria in dimensioni superiori a 3. Il suo lavoro matematico da pioniere in questo campo fu così poco apprezzato che appena due suoi scritti furono accettati per la pubblicazione. Solo nel 1901, sei anni dopo la sua morte fu pubblicata la sua *Teorie der Vielfachen Kontinuität* in cui fra l'altro definisce ciò che chiama *polischemi* oggi detti politopi, di cui tratta questo articolo.

3. se si uniscono i vertici del tetraedro conv(A,B,C,D), con un punto E esterno al poliedro nella 4ª dimensione si ottiene un politopo e se si fa in modo che tutti gli spigoli siano uguali si ottiene un *5-celle*, detto anche *4-simplesso*, e si indica con α_4.

Quindi il 5-celle possiede:

- $N_0 = 5$ (ossia i 4 vertici A,B,C,D del tetraedro iniziale e il punto aggiunto E);
- $N_1 = 10$ (ossia i 6 spigoli del tetraedro iniziale e i 4 ottenuti congiungendo E con i 4 vertici del tetraedro iniziale);
- $N_2 = 10$ (ossia le 4 facce del tetraedro iniziale e le 6 facce ottenute considerando i triangoli che hanno un vertice in E e come base uno dei 6 spigoli del tetraedro);
- $N_3 = 5$ (ossia il tetraedro iniziale conv(A,B,C,D) e i 4 tetraedri che hanno come vertice E e come base una faccia del tetraedro iniziale).

La stella di un vertice (vedi Def. 6) del 5-celle è un tetraedro.

Per ottenere la generalizzazione del tetraedro in dimensione 5 basterà aggiungere un punto della 5ª dimensione al 5-celle (che è 4-dimensionale) e fare in modo che tutti gli spigoli siano uguali. Si procede allo stesso modo per dimensioni superiori.

Cominciamo un'altra costruzione servendoci inizialmente ancora di un segmento, ma mentre nel caso precedente dovevamo aggiungere un punto, ora ne aggiungeremo due da parti opposte.

1. Inizialmente abbiamo il segmento A,B e consideriamo due punti C,D da parti opposte alla retta contenente il segmento, facendo in modo che il quadrilatero sia un quadrato (con al suo interno il segmento iniziale);
2. poi si uniscono i vertici del quadrato conv(A,B,C,D) con due punti E, F situati da parti opposte al suo piano, facendo in modo che le otto facce siano tutte triangoli equilateri e si ottiene un ottaedro (contenente al suo interno il quadrato iniziale);
3. infine in dimensione 4 si uniscono i vertici dell'ottaedro con due opportuni punti G, H da parti opposte allo spazio che lo contiene, si ottiene un politopo che come contorno ha sedici celle tutte tetraedri regolari, otto di vertice G ed otto di vertice H aventi come basi le facce dell'ottaedro, ossia si ottiene un *16-celle*, detto anche *cocubo* 4-dimensionale, che si indica con β_4 e in cui l'ottaedro servito per la costruzione rimane all'interno.

Quindi il 16-celle possiede:

- $N_0 = 8$
- $N_3 = 16$
- $N_2 = 32$, perché i 16 tetraedri hanno 6 facce e ogni faccia è comune a due tetraedri ad esempio conv(A,B,C), è comune a conv(A,B,C,G) e conv(A,B,C,H) perciò $16\times6:2$ sono le facce.
- Infine per calcolare gli spigoli possiamo usare la formula di Eulero: $N_1 = N_0 + N_2 - N_3 = 24$.

La stella di un vertice (vedi Def. 6) di un 16-celle è un ottaedro.

In dimensioni superiori alla quarta la generalizzazione dell'ottaedro prosegue allo stesso modo.

Per la generalizzazione del cubo si procede invece "per traslazioni".

1. Traslando un punto A lungo una retta si ottiene un segmento A,A' di lunghezza l.
2. Traslando un segmento A,B lungo una direzione ortogonale si ottiene un quadrato di vertici A,B,B',A' che ha come contorno il segmento iniziale A,B, il segmento finale A',B' e i due segmenti che li collegano A,A' e B,B'.
3. Traslando un quadrato secondo una direzione ortogonale al suo piano otteniamo un cubo che ha come facce, il quadrato iniziale il quadrato finale e quattro quadrati di raccordo.
4. Traslando un cubo secondo una direzione ortogonale allo spazio che lo contiene otteniamo l'*8-celle* o *ipercubo* 4-dimensionale, che si indica con γ_4 e ha sul contorno come poliedri: il cubo iniziale, quello finale e i sei cubi di raccordo.

Quindi l'8-celle possiede:

- $N_0 = 16$
- $N_3 = 8$
- $N_1 = 32$, perché gli spigoli dei cubi iniziali e finali hanno ciascuno 12 spigoli e ogni vertice del cubo iniziale traslando genera uno spigolo in più, ossia gli spigoli sono 12+12+8.
- Infine per calcolare le facce possiamo usare la formula di Eulero: $N_2 = N_1 + N_3 - N_0 = 24$.

Questi politopi per costruzione hanno celle regolari e stelle (o figure al vertice) regolari, si tratta quindi di politopi regolari.

Anche per i politopi 4-dimensionali si usano i simboli di Schläfli.
In generale se le facce bidimensionali sono dei {p} e le stelle dei {q,r} viene indicato con {p,q,r}.
Il 5-celle ha come celle dei tetraedri per cui le facce sono dei {3} e come stelle ancora dei tetraedri {3,3} quindi ha come simbolo {3,3,3}.
Il 16-celle ha come celle dei tetraedri per cui le facce sono dei {3} e come stelle degli ottaedri {3,4} quindi ha come simbolo {3,3,4}.
L'8-celle ha come celle dei cubi per cui le facce sono dei {4} e come stelle dei tetraedri {3,3} quindi ha come simbolo {4,3,3}.

Politopi regolari n-dimensionali

Come ovvia estensione della Def. 8 si ha:

Def. 9: Un politopo si dice regolare se le sue celle sono regolari e le sue stelle (o figure al vertice) sono regolari.

Considerato un politopo regolare P di dimensione n, lo indichiamo con

$$\{r_1,r_2,..,r_{n-1}\}$$

se r_1 è il numero dei lati delle facce bidimensionali di P e se $\{r_2,..,r_{n-1}\}$ è il simbolo della stella di P.
Nel seguito consideriamo poligoni, poliedri e politopi sempre regolari.

La relazione fondamentale per i politopi regolari

Ad ogni poligono regolare è associato il cerchio circoscritto passante per i suoi vertici, ad ogni poliedro regolare è associata la sfera circoscritta passante per i suoi vertici, analogamente ad ogni politopo regolare P è associata l'ipersfera circoscritta passante per i suoi vertici.
Detta l la lunghezza di uno spigolo di P ed r il raggio della sua ipersfera circoscritta il numero

$$\varrho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$$

è oggetto della relazione fondamentale. Seguendo la notazione (francese) del testo di M. Berger [B] la stella di P sarà indicata con Et(P). La relazione è la seguente:
Sia P un politopo regolare n-dimensionale $\{r_1,r_2,..,r_{n-1}\}$ ed Et(P) la stella riferita ad un generico vertice, allora $\varrho(P)$ e $\varrho(Et(P))$ sono legati dalla relazione

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(Et(P))},$$

o equivalentemente

$$\varrho(r_1,\ldots,r_{n-1}) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2,\ldots,r_{n-1})}.$$

La dimostrazione si può trovare sul testo [B].

<u>TEOREMA - (Schläfli 1850)</u>: *A meno di similitudini, gli unici politopi convessi regolari n-dimensionali che esistono sono quelli rappresentati dai seguenti simboli:*

- $n = 2$ $\{r_1\}$ *per qualunque intero* $r_1 \geq 3$
- $n = 3$ $\{3, 3\}$ $\{3, 4\}$ $\{4, 3\}$ $\{3, 5\}$ $\{5, 3\}$
- $n = 4$ $\{3, 3, 3\}$ $\{3, 3, 4\}$ $\{4, 3, 3\}$ $\{3, 4, 3\}$ $\{3, 3, 5\}$ $\{5, 3, 3\}$
- $n \geq 5$ $\{3,\dots, 3\}$ $\{3,\dots, 3, 4\}$ $\{4, 3,\dots, 3\}$.

<u>Dimostrazione</u>: Proviamo che i simboli possibili sono quelli dell'enunciato, nel caso n=2, n=3.

Poiché $r_1 \geq 3$ (lati di una faccia) risulta $\cos^2\frac{\pi}{r_1} \geq \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, ma $\varrho(P) = \varrho(r_1, r_2,\dots, r_{n-1})$ è una quantità positiva per definizione:

$$\varrho(P) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2,\dots,r_{n-1})} > 0 \quad \text{perciò} \quad \varrho(r_2,\dots, r_{n-1}) > \cos^2\frac{\pi}{r_1} \geq \frac{1}{4}.$$

I politopi regolari, stelle di politopi regolari, devono quindi soddisfare alla doppia condizione:

$$\varrho(r_1, r_2,\dots, r_{n-1}) > 0 \qquad \varrho(r_2,\dots, r_{n-1}) > \frac{1}{4}.$$

Esaminiamo il caso n = 2.

Dato il poligono $\{r_1\}$, presi due vertici consecutivi x, x', indicato con o il centro della circonferenza circoscritta di raggio r, l'angolo $x\hat{o}x'$ vale $\frac{2\pi}{r_1}$.

Detto h il punto di intersezione della bisettrice di tale angolo con il lato xx' di lunghezza ℓ nel triangolo conv(o, h, x) si ha $\frac{\ell}{2} = r\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{r_1}$ da cui $\frac{\ell}{2r} = \mathrm{sen}\frac{\pi}{r_1}$.

La relazione fondamentale si può allora scrivere $\rho(r_1) = \frac{\ell^2}{4r^2} = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{r_1}$.

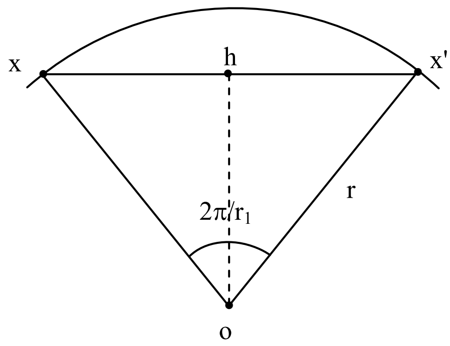
Quindi:

$r_1 = 3$ $\qquad \rho(3) = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$

$r_1 = 4$ $\qquad \rho(4) = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

$r_1 = 5$ $\qquad \rho(5) = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}\left(5-\sqrt{5}\right) > \frac{1}{4}$

$r_1 = 6$ $\qquad \rho(6) = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$.



Qualsiasi sia il numero dei lati $\rho(r_1)$ è sempre maggiore di zero, per cui esistono infiniti poligoni regolari, ma solo i poligoni con al più cinque lati possono essere stelle di poliedri.

Esaminiamo il caso n = 3.

Sia P un poliedro di simbolo $\{r_1, r_2\}$; il secondo paramentro r_2 può assumere solo i valori 3, 4 e 5 per quanto visto nel caso bidimensionale.

Sia $r_2 = 3$ $\qquad \rho(Et(P)) = \rho(3) = \frac{3}{4}$. Calcoliamo ora $\rho(r_1, 3)$.

Se $r_1 = 3$ $\qquad \rho(3, 3) = 1-\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}} = 1-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{4}$.

Se $r_1 = 4$ $\qquad \rho(4, 3) = 1-\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = 1-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{4}$.

Se $r_1 = 5$ $\qquad \rho(5, 3) = 1-\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{5}}{\frac{3}{4}} = 1-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{6} > 0$.

Se $r_1 = 6$ $\qquad \rho(6, 3) = 1-\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}} = 1-\dfrac{4}{3}\dfrac{3}{4} = 0$.

Pertanto esistono solo tre poliedri con stelle triangolari: il tetraedro, il cubo e il dodecaedro e soltanto i primi due, {3, 3} e {4, 3}, sono stelle di politopi regolari di dimensione quattro.

Per $r_2 = 4$ $\qquad \rho(Et(P)) = \rho(4) = \dfrac{1}{2}$. Calcoliamo ora $\rho(r_1, 4)$.

Se $r_1 = 3$ $\qquad \rho(3, 4) = 1-\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1-2\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$

Se $r_1 = 4$ $\qquad \rho(4, 4) = 1-\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1-2\,\dfrac{1}{2} = 0$

Quindi otteniamo l'ottaedro {3, 4} ed esso può essere stella di politopi regolari di dimensione quattro.

Per $r_2 = 5$ $\qquad \rho(Et(P)) = \rho(5) = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ $\qquad$ Calcoliamo ora $\rho(r_1, 5)$.

Se $r_1 = 3$ $\qquad \rho(3, 5) = 1-\dfrac{8\cos^2\frac{\pi}{3}}{5-\sqrt{5}} = 1-\dfrac{2}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} > \dfrac{1}{4}$

Se $r_1 = 4$ $\qquad \rho(4, 5) = 1-\dfrac{8\cos^2\frac{\pi}{4}}{5-\sqrt{5}} = 1-\dfrac{4}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{-\sqrt{5}}{5} < 0$

Solo {3, 5} è un politopo regolare, l'icosaedro, e può essere stella di politopi in dimensione quattro.

Abbiamo quindi ritrovato una proprietà nota anche per vie elementari.
Gli unici poliedri regolari sono: **tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro e dodecaedro.**
Procedendo allo stesso modo si può provare che:

$$\rho(3, 3, 3)= \frac{5}{8} \qquad \rho(4, 3, 3)= \frac{1}{4} \qquad \rho(3, 3, 4)= \frac{1}{2}$$

$$\rho(3, 4, 3)= \frac{1}{4} \qquad \rho(3, 3, 5) = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \qquad \rho(5, 3, 3) = \frac{7-3\sqrt{5}}{16}$$

Quindi in dimensione n = 4 possono esistere sei politopi regolari i cui simboli sono:

{3, 3, 3} il 5-celle	{4, 3, 3} l'8-celle	{3, 3, 4} il 16-celle
{3, 4, 3} il 24-celle	{3, 3, 5} il 600-celle	{5, 3, 3} il 120-celle

ma tra essi solo il 4-simplesso o 5-celle {3, 3, 3} (5 vertici, 10 spigoli, 10 faccie e 5 celle formate da tetraedri) e il cocubo o 16-celle {3, 3, 4} (8 vertici, 24 spigoli, 32 facce e 16 celle formate da ottaedri) possono essere stelle di politopi regolari in dimensione cinque.
Abbiamo visto la costruzione dei primi tre, per i rimanenti tre la costruzione è più complicata e si può trovare nel testo [C].
Per $n \geq 5$, si dimostra , per induzione, che

$\rho(3,\ldots,3, 3)= \dfrac{n+1}{2n}$ $\qquad$ $\rho(4, 3,\ldots, 3)= \dfrac{1}{n}$ $\qquad$ $\rho(3,\ldots, 3, 4)= \dfrac{1}{2}$

Quindi esistono solo tre politopi n-dimensionali

α_n {3,…, 3, 3} $\qquad$ β_n, {3,…,3, 4} $\qquad$ γ_n {4,3,…, 3}

e di questi solo il simplesso {3,…, 3, 3} e il cocubo {3…, 3, 4} possono essere stelle di politopi regolari.

Bibliografia essenziale

[B] M. BERGER, Géométrie, Cedic Nathan, Paris (1977)
[C] H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, Methuen & Co Ltd, London, (1948)
[E] H. G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge, England (1958)
[F-Z] P.FAVRO – A.ZUCCO, *Appunti di Geometria Convessa*, quaderno didattico n.34, Dip. Matematica, Univ. Torino.