

• Numero 11 – Dicembre 2009 •



Kevindoooley, Geometry lesson

<http://www.flickr.com/photos/pagedooley/2575606606/>

ROMPERE LE FIGURE – TEORIA DEI GIOICHI – POLITOPI – TALETE –
DECADIMENTO RADIOATTIVO – DIETERICI – OVOIDE – MODELLO FUZZY

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .rtf o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail, CV sintetico (100-200 parole).

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo [3].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione. La redazione

non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto
Luca Barletta
Michele Mazzucato
Nicola Chiriano

Hanno collaborato a questo numero

Gaetano Barbella, Aldo Bonet, Giuseppe De Cecco, Salvatore Lega, Giuseppe Pesare, Pietro Romano, Antonello Urso, Andreana Zucco.

Sommario

121. Rompere le figure	5
Giuseppe De Cecco	
122. Teoria dei giochi e scelte formative.	10
Giuseppe Pesare	
123. Poligoni, poliedri e politopi regolari	17
Andreana Zucco	
124. Il padre dell'astronomia razionale	25
Aldo Bonet	
125. Simulazioni del decadimento radioattivo con la TI Voyage 200	37
Pietro Romano	
126. Proprietà dell'equazione di dieterici	44
Antonello Urso	
127. L'ovoide a cipolla	48
Gaetano Barbella	
128. Un modello fuzzy per la modellazione delle associazioni biologiche	53
Salvatore Lega	
129. Lo scaffale dei libri	62

Editoriale

In questo numero Giuseppe De Cecco ci parla di come rompere bene le figure; un classico esempio di problema semplice da formulare ma tutt'altro che semplice da risolvere: quando si taglia in due una figura piana, ciascun pezzo ha sicuramente un'area minore di quella di partenza, ma è possibile tagliare in due una figura in modo che il diametro (cioè la massima ampiezza) di ciascun pezzo sia strettamente minore di quello della figura di partenza? La risposta non è così banale come può sembrare a prima vista. Giuseppe Pesare ci mostra un modello interpretativo, attraverso la Teoria dei Giochi, del problema della scelta del percorso di studi, per spiegare l'insuccesso del percorso universitario breve introdotto negli anni '60 in Francia. Andreana Zucco ci introduce alle problematiche dei politopi, estensioni a più dimensioni dei poliedri. Aldo Bonet presenta il risultato di ricerche storiche su Talete, il padre della moderna astronomia razionale. Pietro Romano descrive un'esperienza didattica sulla simulazione del decadimento radioattivo con la calcolatrice grafica TI Voyage 200. Antonello Urso ci parla della generalizzazione dell'equazione di stato di gas ideali: come può essere ritoccata l'equazione in modo che descriva i comportamenti di gas reali?. Gaetano Barbella propone un approfondimento di un noto quesito da giochi matematici, da cui deriva lo studio di una particolare curva a cipolla. Salvatore Lega presenta un classico problema di modellazione matematica preda-predatore attraverso un sistema fuzzy.

Antonio Bernardo

121. Rompere le figure

di Giuseppe De Cecco

[Dip. Mat. Uni. Salento]

Personalmente sono affascinato dai problemi che si enunciano in maniera semplice, ma che per la loro soluzione hanno bisogno di non semplici dimostrazioni. La ricerca di queste dimostrazioni spesso ha impegnato matematici per molto tempo: infatti c'era bisogno di idee nuove! Quei problemi sono stati perciò catalizzatori positivi di studi e di approfondimenti tra branche diverse della Geometria, facendone scoprire insospettiti legami.

Naturalmente andrebbe chiarito anche che cosa vuol dire “semplice” (etimologicamente “senza pieghe”, senza parti nascoste), ma qui interviene la storia personale del lettore. In questo articolo “semplice” vorrà dire fare uso solo delle conoscenze di geometria elementare, che dovrebbero essere note ai nostri studenti delle Scuole secondarie. I docenti giudicheranno poi quali parti possono essere sviluppate in classe.

Il primo problema che si vuole affrontare è il seguente.

Sia X una figura piana (limitata e non ridotta ad un punto). Comunque spezziamo X in due parti, è ovvio che le parti hanno un'area minore di quella di X , ma è possibile dividere X in due parti tali che il loro diametro (cioè la massima ampiezza) sia minore del diametro di X ?

Vedremo su esempi che, in generale, la risposta è no¹; cioè esistono figure X tali che almeno una delle due parti ha diametro uguale a quello di X . A tale scopo basta considerare un triangolo equilatero o un disco.

Perciò ha senso chiedersi quale sia il minimo numero, $a(X)$, di parti in cui dividere la figura per essere certi che tutti i pezzi abbiano diametro minore della figura originaria. Per raggiungere il nostro scopo costruiremo dapprima una opportuna “mattonella” che contenga la figura e poi la taglieremo in modo canonico.

¹ Un interessante articolo, che approfondisce il concetto di diametro, è [C], dal quale traggio alcune considerazioni e al quale rimando per maggiori dettagli.

In questo problema geometrico ha un ruolo decisivo anche la visualizzazione: emerge così il valore creativo e formativo della Geometria, che è stata la matrice dello sviluppo della matematica elementare. Il formalismo è intervenuto in un secondo momento e spesso ha nascosto la situazione geometrica.

Nel 1933 il matematico polacco K. Borsuk [B] si propose di trovare $a(X)$, nel caso che X fosse un'arbitraria figura dello spazio n -dimensionale. Dopo aver provato che $a(X) \leq 3$ per $n=2$, egli congetturò $a(X) \leq n+1$. Nel 1955 H.G. Eggleston [E] ha provato che $a(X) \leq 4$ per $n=3$, mentre nel 1992, J. Kahn e G. Kalai [K-K] hanno provato che è possibile costruire controesempi alla congettura per n abbastanza grande (più precisamente $n=1326$ e $n>2014$). Si osserva però che la congettura è vera in ogni dimensione se X è una figura n -dimensionale convessa e simmetrica rispetto ad un punto [Ri], se X è una figura con bordo “liscio” [H], se X è un solido di rotazione [D]². Dunque Borsuk, in un certo senso, aveva visto giusto.

In matematica dimostrare che una certa congettura è vera o falsa ha la stessa importanza. Nella ricerca scientifica non va molto lontano chi rinuncia a “sfruttare l'insuccesso”, cioè rinuncia a cercare vie nuove per affrontare problemi che sembrano inaccessibili ai metodi conosciuti. Come diceva il grande matematico E. De Giorgi (1928-1996) – *l'unica cosa da evitare sono i problemi insignificanti “brutti” e artificiosi, inventati solo perché si possiede un metodo atto a risolverli.*

1. Premesse

Diremo che la figura X è *divisa* o *spezzata* nelle figure X_1, X_2, \dots, X_k se X è unione degli X_i con interni disgiunti, cioè i pezzi possono incontrarsi solo lungo il loro bordo. In simboli

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k.$$

² L'articolo [Ra] dà una completa rassegna dello stato del “problema di Borsuk” fino ai nostri giorni: la bibliografia contiene 123 opere.

La prima questione che si pone è la seguente: è possibile dividere X in parti tali che

$$(*) \quad diam(X_i) < diam(X) \quad i=1,2,\dots,k ?$$

Si ricordi che si chiama *diametro* di X l'estremo superiore delle distanze $dist(A,B)$ al variare di A e B in X ; come è intuitivo, esso è la massima ampiezza della figura. Un segmento che ha ampiezza massima è detto *corda massima*, se X è un poligono, una corda massima congiunge due vertici.

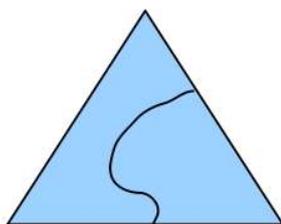
Nel seguito spesso ci limiteremo a figure *convesse*³. Infatti se X è un'arbitraria figura, allora il più piccolo insieme convesso che contiene X , $conv(X)$ ⁴, detto anche *inviluppo convesso* di X , è tale che

$$diam(X) = diam(conv(X)).$$

Inoltre per un teorema (del 1920) dovuto al matematico ungherese J. Pál [P], ogni figura n -dimensionale X può essere inclusa in un convesso di diametro costante uguale a $diam(X)$. Ricordiamo, limitandoci al caso $n=2$, che figure di diametro costante sono il cerchio, i poligoni di Reuleaux ed altre figure ancora.

2. Il caso $k=2$

Considereremo esempi per cui, comunque si spezzi X in due parti, almeno una delle parti ha diametro uguale a $diam(X)$ e quindi non è verificata la condizione (*).

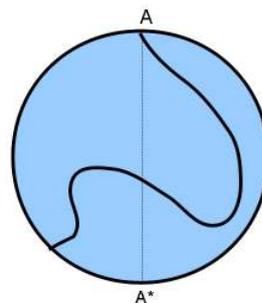


1) Sia X un triangolo equilatero di lato d ; chiaramente $diam(X)=d$. Se X è diviso in due parti X_1 e X_2 tramite una curva che non contenga vertici (come in figura) è ovvio (per il "principio dei cassetti") che una delle due parti, per es. X_1 , contiene due vertici e l'altra X_2 un

solo vertice. Ne segue che $diam(X_1)=d$ e $diam(X_2)<d$.

Se consideriamo una curva che abbia come estremo un vertice (per es. il segmento che dà l'altezza), i due pezzi hanno diametro d .

Il ragionamento sopra fatto si applica ad ogni poligono regolare con un numero dispari di vertici (e quindi di lati).



2) Sia X un cerchio di diametro d e $X=X_1 \oplus X_2$. Sia A un punto del bordo di X e del bordo di X_1 e X_2 . Indicato con A^* il punto diametralmente opposto ad A , si ha: se A^* appartiene ad X_1 (risp. X_2), allora $diam(X_1)=d$ (risp. $diam(X_2)=d$). poiché $dist(A,A^*)=d$.

Il precedente ragionamento si può ripetere per ogni figura di ampiezza costante (definendo opportunamente il punto diametralmente opposto). Dunque se X è una figura di ampiezza costante, non è possibile dividerla in due parti con diametro minore di X . Invece ciò è possibile, come si vede facilmente, se X è un rettangolo, un parallelogramma.

Inoltre, se X possiede una sola corda massima $[A_0, B_0]$, una qualsiasi retta r che incontri $[A_0, B_0]$ in un suo punto interno, è tale che A_0 e B_0 appartengono ai due semipiani opposti individuati da r e quindi le due parti X_1 e X_2 hanno diametro minore di $|A_0 B_0|$ (lunghezza di $[A_0, B_0]$)⁵.

Analogamente, se X possiede due corde massime, $[A_0, B_0]$ e $[A'_0, B'_0]$, e $O=[A_0, B_0] \cap [A'_0, B'_0] \in X$, una qualsiasi retta r per O divide la figura X nel modo richiesto. Ma se X ha tre corde massime non si può concludere come sopra (esempio del triangolo equilatero). Naturalmente il ragionamento continua a valere se esiste una retta r che incontra tutte e tre le corde in un loro punto interno.

Se X è una figura simmetrica rispetto ad un punto O , allora tutte le corde massime hanno O

³ Una figura X è convessa se, per ogni coppia di punti A e B di X , si ha che il segmento AB è tutto contenuto in X .

⁴ Per definizione è l'intersezione di tutti i convessi che contengono X .

⁵ Per dettagli cfr. [C].

come punto medio. Si prova che una figura X , simmetrica rispetto ad un punto O , è divisibile in due parti di diametro più piccolo se e solo se esiste una direzione che non è la direzione di una corda massima. (In un cerchio non esiste una tale direzione)

3. Il teorema di Borsuk per $n=2$

Quanto sopra detto giustifica la ricerca del minimo numero di parti in cui dividere una figura X con la condizione (*).

Il seguente teorema dà la risposta nel caso piano, quindi per $n=2$.

Teorema di Borsuk (1933)

Ogni figura piana di diametro d può essere divisa in tre parti di diametro minore di d .

Questo risultato (già ottenuto indipendentemente nel 1930 da L. Lusternik e L. Schnirel'mann) è immediata conseguenza del seguente teorema, che sarà illustrato nel paragrafo 5.

Teorema di Pál (1920)

Ogni figura piana di diametro d può essere inclusa in un esagono regolare per il quale è d la distanza tra i lati paralleli.

Noto questo teorema, dividendo l'esagono in tre pentagoni congruenti (come in figura) si ottiene il risultato voluto, poiché i tre pentagoni

hanno diametro uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}d < d$, quindi

$$\text{diam}(X_i) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}d \quad (i=1,2,3).$$

Si osservi che questo confine superiore sul diametro delle tre parti è il migliore possibile (cioè non può essere ulteriormente abbassato) come mostra il seguente esempio. Infatti un cerchio di diametro d non può essere diviso in parti C_1, C_2, C_3 tali che

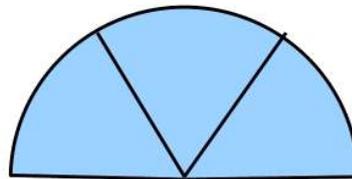
$$\text{diam}(C_i) < \frac{\sqrt{3}}{2}d \quad (i=1,2,3).$$

Infatti se così fosse, la parte di circonferenza contenuta in ogni C_i sarebbe necessariamente contenuta in un arco minore di 120° e dunque quelle tre parti non potrebbero ricoprire l'intera circonferenza ([B-G]).

Naturalmente figure particolari possono essere divise in tre parti ciascuna di diametro minore di $\frac{\sqrt{3}}{2}d/2$. Per esempio un semicerchio X può

essere diviso in tre settori aventi angolo al centro di 60° . In tal caso

$$\text{diam}(X_i) = \frac{d}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}d \quad (i=1,2,3).$$

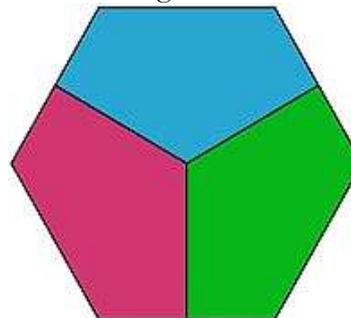


4. Il caso generale

Innanzitutto per $n=1$ è immediato verificare la congettura di Borsuk. Infatti un segmento di diametro d può essere diviso dal punto medio in due parti di diametro $< d$.

Consideriamo ora il caso $n=3$.

Con un ragionamento analogo a quello seguito per il triangolo equilatero, ci si convince facilmente che se un tetraedro regolare di diametro d è diviso in 2 o in 3 parti, poiché i vertici sono 4, una parte deve necessariamente contenere 2 vertici e quindi quella parte ha diametro uguale a d . Quindi per $n=3$ esistono particolari figure X_0 per le quali $a(X_0) \geq 4$; nel 1955 H. Eggleston ha provato che per un'arbitraria figura X dello spazio 3-dimensionale si ha $a(X_0) \leq 4$, quindi per $n=3$ la congettura di Borsuk è vera.



Nel 1957 B. Grünbaum [G] ne dà una dimostrazione elementare; egli prova che ogni figura tridimensionale X , di diametro d , si può includere in un ottaedro tale che le facce opposte abbiano distanza d . L'ottaedro si può dividere poi in modo canonico in quattro parti di diametro $< d$, ottenendo così il risultato.

Il passaggio dalla dimensione 2 alla 3 (come pure da 1 a 2) non è per nulla facile e per $n=4$ è ancora una congettura.

Come detto nell'Introduzione, il primo controesempio, sorprendente anche perché coinvolgeva un *politopo* (generalizzazione dei poliedri, le

figure “più semplici”), fu dato nel 1992 da J. Kahn e G. Kalai per $n=1326$. Nel 2003 A. Hinrichs e C. Richter [H-R] hanno provato che la congettura è falsa per $n > 297$.

5. Teoremi di inscatolamento

In questa paragrafo considereremo due teoremi di “inscatolamento”, cioè andremo alla ricerca della minima scatola che contenga una data figura convessa (nel caso piano la “scatola” non è altro che una “mattonella”).

Il teorema di Pál ci assicura che si può trovare una mattonella esagonale i cui lati paralleli hanno distanza $diam(X)$; quello di Kakutani che la mattonella può essere quadrata di lato $diam(X)$, ma questo risultato non è utile al nostro problema di rompere “bene” le figure.

Entrambi i teoremi utilizzano in modo essenziale il seguente teorema, che si incontra spesso anche nelle scuole secondarie. Il suo contenuto è molto intuitivo, ma la dimostrazione risale alla metà del 1800:

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Una funzione reale, continua in un intervallo, la quale vi assuma sia valori negativi, sia valori positivi, si annulla almeno una volta nell'intervallo.

Ora siamo in grado di dimostrare il seguente teorema [K]

Teorema di Kakutani (1942)

Ogni figura piana X si può includere in un quadrato Q in modo tale che X tocchi ogni lato di Q .

Dimostrazione.

Fissiamo una direzione formante un angolo $\varphi \in [0, \pi/2]$ (misura in radianti) con una direzione assegnata.

Siano $s_1(\varphi)$ e $s_2(\varphi)$ le rette di supporto⁶ aventi direzione φ ed $r_1(\varphi)$ e $r_2(\varphi)$, quelle ortogonali ad $s_1(\varphi)$ e $s_2(\varphi)$. Si ottiene così un rettangolo che contiene X e tale che ogni lato tocchi X . Si tratta di far vedere che esiste una direzione φ_0 tale che il rettangolo in questione diventi un quadrato.

Poniamo

$$w(\varphi) = \text{dist}(s_1(\varphi), s_2(\varphi)) > 0$$

$$w(\varphi + \pi/2) = \text{dist}(r_1(\varphi), r_2(\varphi)) > 0$$

$$f(\varphi) = w(\varphi) - w(\varphi + \pi/2).$$

La funzione

$$f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

è tale che $f(\varphi + \pi/2) = -f(\varphi)$, quindi $f(\pi/2) = -f(0)$; allora per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste un angolo $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$, tale che

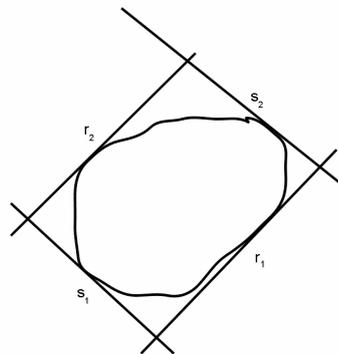
$$f(\varphi_0) = 0 \Rightarrow w(\varphi_0) = w(\varphi_0 + \pi/2) \Rightarrow$$

$$\text{dist}(s_1(\varphi_0), s_2(\varphi_0)) = \text{dist}(r_1(\varphi_0), r_2(\varphi_0)),$$

cioè il rettangolo sopra considerato è un quadrato. \square

Dunque ogni figura piana si può includere in una mattonella quadrata; naturalmente $diam(X) \leq diam(Q)$. Il teorema si estende al caso n -dimensionale pervenendo al seguente risultato (semplice conseguenza di un bel teorema di Kakutani-Yamabe-Yujobô del 1950) : se X è un sottoinsieme non vuoto e compatto di \mathbb{R}^{n+1} , allora esiste un $(n+1)$ -cubo C che contiene X e tale che X tocchi ogni faccia di C ([DC]).

Con un ragionamento analogo, ma più laborioso, a quello seguito nella dimostrazione del teorema di Kakutani, si può provare il teorema di Pál.



Infatti è possibile includere X in un esagono i cui lati appartengono a rette di supporto e i cui angoli sono tutti di 120° . Facendo variare con continuità la direzione delle rette di supporto si perviene ad un esagono regolare tale che le rette parallele opposte abbiano distanza uguale al diametro di X ⁷.

⁶ Una *retta di supporto* s per una figura X è una retta che ha qualche punto in comune con X e tale che X giace in uno dei due semipiani individuati da s .

⁷ Una dimostrazione che utilizza nozioni più familiari agli studenti delle Scuole secondarie si trova in [C].

BIBLIOGRAFIA

- [B] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale Euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20 (1933), 177-190.
- [B-G] V. Boltyanskii, I. Gohberg, *The decomposition of figures into smaller parts*, Univ. of Chicago, 1980.
- [C] R. Cruciani, *Sul diametro delle figure piane*, Archimede, 1, (1993), 12-26.
- [D] B. V. Dekster, *The Borsuk conjecture holds for bodies of revolution*. J. Geometry, [bf 52] (1995), 64--73.
- [DC] G. De Cecco, *Complementi di Geometria superiore*, Ist. Mat. Univ. Lecce, 1984, cap.3.
- [E] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.
- [G] B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 53 (1957), 776-778.
- [H] H. Hadwiger, *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, Comm. Math. Helv., 18 (1945/46), 73-75.
- [H-R] A. Hinrichs, C. Richter, *New sets with large Borsuk numbers*, Disc. Math. 270 (2003), 137-147.
- [K] S. Kakutani, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in \mathbb{R}^3* , Ann. of Math. (2) 43 (1942), 739-742.
- [K-K] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin (new series) of the AMS, 29 (1993), N.1, 60-62.
- [L-S] L. A. Lysternik, L. G. Schnirel'mann, *Topological methods for variational problems*, ONTI, Moscow, 1930.
- [Ra] A.M. Raigorodskii, *Around Borsuk's Hypothesis*, Journal of Mathematical Sciences, Vol.54, n°4 (2008), 604-623.
- [Ri] A.S. Riesling, *Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature*, Ukr. Geom. Sb., 11 (1971), 78-83.

122. Teoria dei giochi e scelte formative

di Giuseppe Pesare

[Dot. Mag. in Sociologia e Ricerca Sociale giusepes@libero.it]

Sunto

In quest'articolo mostriamo come la teoria dei giochi sia utilizzata da alcuni sociologi, in particolare dai teorici della scelta razionale, per spiegare alcuni fenomeni sociali, quali gli effetti non intenzionali dell'agire sociale. A questo proposito, presentiamo un modello di gioco proposto da Raymond Boudon per spiegare l'insuccesso dell'insegnamento superiore corto, introdotto negli anni '60 nel sistema universitario francese. Precisiamo che l'utilizzo di modelli mutuati dalla teoria dei giochi per spiegare fenomeni quali le scelte formative non è unanimemente condiviso tra i sociologi, perché esso si fonda sull'ipotesi che l'agire sociale sia sempre razionale, e su questo tema il dibattito in sociologia è tutt'altro che concluso.

In this article we show the use of Games Theory by some sociologists, particularly by the ones who embrace rational choice theory, to explain some social phenomena, as not-intentional effects of social actions. About this matter, we present a model of game proposed by Raymond Boudon to explain the failure of the short-cycle higher education, introduced in the French university system during the 60's. We add that the use of models borrowed from Games Theory to explain social phenomena as educational choices isn't unanimously shared by sociologists, because this use is based on the hypothesis that social actions are always rational, and about this subject the debate is still open.

Il tema della razionalità in sociologia

In ambito sociologico si è spesso dibattuto sul problema della razionalità, essendo questo strettamente connesso con uno dei temi centrali delle scienze sociali, quello dell'azione sociale e della possibilità di comprenderla o spiegarla.

Prima di affrontare il tema della razionalità in relazione alle scelte scolastiche e universitarie,

è opportuno chiarire cosa intendiamo dire quando affermiamo che un'azione è razionale. Schematizzando, il filosofo della scienza Enzo Di Nuoscio dice che si ha un'azione razionale quando:

1. l'agente percepisce come di tipo C_1 la situazione problematica di tipo C nella quale si è imbattuto;
2. l'agente, sulla base della sua saggezza assiologica, individua in S lo scopo da perseguire;
3. sulla base della sua saggezza nomica, l'agente ritiene che in una situazione di tipo C_1 sia opportuno fare a per conseguire S ;
4. l'agente fa a [1].

Nel suo *Dizionario di sociologia*, Luciano Gallino dà del concetto di "razionalità" una definizione più ampia; sintetizzando, egli scrive che possiamo indicare un'azione come razionale rispetto ad uno scopo o ad un valore quanto più il soggetto agente soddisfa le seguenti condizioni:

- a) prende in esame tutte le alternative realisticamente possibili nella situazione in cui si trova e le scala in ordine di preferenza, di utilità, di valore dal suo punto di vista;
- b) individua tutte le variabili esterne che possono influire sui risultati dell'azione, e di ciascuna calcola la modalità più probabile che conseguirebbe dalla scelta di ciascuna alternativa;
- c) individua, mediante metodi di induzione e deduzione logicamente e attualmente corretti, le conseguenze delle diverse alternative in diversi campi, sia nel breve che nel lungo periodo;
- d) calcola e pondera in modo comparativo l'utilità o il valore di ciascuna conseguenza, prodotta dall'incrocio tra una data alternativa e una data variabile esterna, nonché la sommatoria di ciascuna colonna di conseguenze derivante in totale da ciascuna alternativa;

e) tenendo conto di tutto ciò, sceglie l'alternativa che per lui presenta la massima somma di utilità o il massimo valore [2].

Per quanto si tratti chiaramente di un modello idealtipico, e quindi, come tale, di una costruzione concettuale limite cui la realtà della vita quotidiana può più o meno avvicinarsi, questo modello di razionalità è stato ritenuto da molti autori la “strada maestra” per spiegare l'agire individuale: essi presumono che «le vicende umane non siano una inafferrabile irregolarità priva di un senso accessibile ad un osservatore esterno, ma che la loro fitta ed infinita trama sia l'effetto voluto o non voluto di azioni umane regolate da un principio che conferisce ad essa un qualche tipo di ordine [...]» [1]; questo principio è il *principio di razionalità*.

L'introduzione del principio di razionalità in sociologia per spiegare l'agire sociale si deve a Weber, secondo il quale l'azione sociale è prevalentemente razionale; tuttavia, solo nella seconda metà del secolo scorso (in particolare negli anni Ottanta) vi è stata una gran diffusione di quella prospettiva che ha inteso applicare il principio di razionalità pressoché ad ogni ambito della vita sociale: stiamo parlando della *teoria della scelta razionale*, che ha avuto esponenti quali Elster, Boudon, Coleman, Becker, ed altri ancora.

Secondo Max Weber, una delle caratteristiche principali delle società moderne è il fatto che il tipo di azione che egli definisce “razionale rispetto allo scopo” prevale non solo nel campo della scienza o in quello dell'economia ma si estende in tutti gli ambiti della vita sociale. Ciò è dovuto al fatto che le società occidentali hanno subito negli ultimi secoli un processo di *razionalizzazione*, cioè di diffusione nella società del calcolo razionale e della scelta strategica. Obiettivo della sociologia weberiana vuole essere quello di *comprendere* l'agire sociale in base al suo senso e, alla luce di quanto detto sopra, ciò è possibile se consideriamo che le azioni umane sono il prodotto di una razionalità cosciente [3].

Quest'ultima è un'ipotesi che ha trovato in disaccordo molti sociologi del secolo scorso. Tra i tanti, ricordiamo almeno Alfred Schütz, per il quale ogni azione è determinata dai *visuti significativi*, cioè dalle esperienze passate del soggetto, in linea di principio inaccessibili ad

ogni osservatore esterno. Pertanto, Schütz ritiene che l'agire sociale non sia improntato ad un modello di razionalità con le caratteristiche che abbiamo indicato sopra, ma consiste nel prodotto di ciò che si è appreso in passato. In una prospettiva schütziana, potremmo dire allora che vi può essere un'azione razionale, coerentemente con la definizione che abbiamo dato di razionalità, se il soggetto agente è stato socializzato ad agire in questo modo: ciò che abbiamo chiamato “principio di razionalità” è infatti qualcosa di storicamente e culturalmente determinato.

L'idea di individuare una logica sottostante ad azioni, interazioni e relazioni sociali capace di spiegarle e anche di prevederle, una logica che permetta alla sociologia di costituirsi come “scienza esatta” al pari delle scienze naturali, è un'idea vecchia quanto la disciplina: Auguste Comte, che per primo pensò ad una “scienza della società” che chiamò “sociologia”, raffigurava la stessa come *fisica sociale*, della quale, analogamente alla meccanica, era possibile studiare una *statica sociale* ed una *dinamica sociale*. Così, più volte nel corso del Novecento, sulla scia di Weber, si è pensato di ravvisare tale logica nel principio di razionalità. Su questa base vengono elaborate teorie sociologiche costruite come teorie scientifiche, strutturate in teoremi, proposizioni e corollari logicamente coerenti tra loro ed esplicitati in volumi redatti nella forma di trattati scientifici, in cui il comportamento umano viene descritto e generalizzato in una serie di definizioni, proposizioni e corollari. A mo' di esempio, si considerino le seguenti “proposizioni” che compaiono in “Le forme elementari del comportamento sociale” [4], testo redatto nei primi anni Sessanta dal sociologo ed economista statunitense George Homans, e si noti come il linguaggio e la generalizzazione appaiano modellati su quelli di proposizioni proprie di testi di scienze naturali: «*Se in passato l'evento di una particolare situazione-stimolo è stata un'occasione in cui una certa attività di un uomo è stata ricompensata, allora quanto più la situazione-stimolo presente è simile a quella passata, tanto più è probabile che egli emetta presentemente tale attività, o un'attività similare*» e «*quanto più la mancata attuazione della regola di giustizia distributiva va a scapito di un uomo, tanto più è probabile che egli*

manifesti il comportamento emozionale comunemente chiamato ira» (corsivi nel testo). Altri testi (per esempio “La logica dell’azione collettiva” di Mancur Olson [5]) sono poi corredati da formule e grafici di funzioni.

Teoria della scelta razionale e teoria dei giochi

Come accennavamo, negli anni Ottanta del XX secolo si è diffusa nelle scienze sociali la «teoria della scelta razionale», secondo cui ogni attore sociale agisce razionalmente ed intenzionalmente. L’agire sociale è improntato al modello idealizzato di agire economico: si registra così una subordinazione dell’*homo sociologicus* all’*homo oeconomicus* [6]. Ogni scelta per i teorici della scelta razionale è improntata a criteri di razionalità; ciò vale anzitutto per quelle scelte che gli individui fanno di fronte ad un ambiente indipendente dalle loro scelte (*scelte parametriche*). Il discorso si complica quando l’individuo che deve fare una scelta deve tener conto di scelte fatte da altri, il comportamento dei quali si assume essere altrettanto razionale, prima di decidere la propria azione: parliamo delle *scelte strategiche* (o interdipendenti), di cui si è occupato una disciplina matematica che ha avuto largo successo tra i teorici della scelta razionale, la “teoria dei giochi”, dove per “gioco” si intende una sequenza di mosse (azioni, comportamenti) tra due o più attori razionali, tale che per ogni mossa il risultato ottenuto dipende dalla mossa scelta dall’altro attore (o dagli altri attori). L’assunto di base della teoria dei giochi, senza il quale questa non avrebbe alcun senso, è che ogni giocatore coinvolto in un gioco si sforzi di ottenere vincite più alte che sia possibile: il suo principale interesse nel gioco è cioè quello di massimizzare il guadagno, scegliendo in linea di principio la strategia che, in base alla funzione di liquidazione del gioco¹, gli permetta di ottenere la più alta vincita possibile, una scelta che è complicata dal fatto che ogni giocatore controlla solo una variabile

¹ La *funzione di liquidazione* di un gioco, nella teoria dei giochi, è la funzione che associa una vincita per un dato giocatore *i* ad ogni combinazione di strategie messe in atto dai diversi giocatori. Per ogni giocatore vi è una diversa funzione di liquidazione; se essa è uguale per tutti il gioco si dice *simmetrico*.

di tale funzione, mentre le altre variabili sono controllate dai suoi avversari.

In particolare, nell’ambito della teoria della scelta razionale la teoria dei giochi si è mostrata utile a spiegare quei fenomeni noti in sociologia come *effetti perversi* (denominati altresì *effetti inintenzionali* o *di composizione*), ossia le conseguenze non previste e non desiderate di azioni razionali; molti studiosi dei fenomeni sociali sono infatti giunti alla conclusione che, soprattutto nelle società complesse e differenziate, l’adozione di una strategia razionale individuale da parte di una pluralità di attori conduca spesso a risultati collettivamente subottimali. Questo tema è stato ampiamente indagato dal sociologo francese Raymond Boudon, che in qualche modo aderisce alla teoria della scelta razionale², in diversi volumi e saggi.

L’approccio di Boudon allo studio delle scelte formative

In uno di questi abbiamo un chiaro esempio di come la teoria dei giochi possa essere utilizzata per spiegare, a partire dall’ipotesi di razionalità individuale, quei fenomeni sociali che a prima vista possono apparirci la negazione dell’idea di attore sociale razionale, e che invece la confermano. Si tratta del saggio intitolato “Istituzioni scolastiche ed effetti perversi. L’insegnamento superiore corto” [8], in cui l’autore, partendo dall’ipotesi che gli individui si comportino razionalmente nelle loro scelte relative al percorso di studi, e applicando un modello matematico, mostra le cause di effetti non ottimali tanto per gli individui quanto per la collettività.

Per Boudon le scelte scolastiche sono razionali nel senso che i diversi corsi d’azione (smettere o proseguire, intraprendere l’uno o l’altro percorso) sarebbero l’effetto di scelte sorrette da “buone ragioni”, dal punto di vista di chi le effettua, piuttosto che il frutto di forze o cause (per esempio materiali o psichiche) sottratte al controllo dei soggetti agenti. Tali scelte, in particolare quelle dopo l’obbligo, non sono dunque determinate da condizionamenti legati all’eredità culturale (che influirebbero solo nel differenziare i rendimenti in età infantile), ma

² Anche se ne critica alcuni aspetti; vedi, per esempio, [7].

da valutazioni razionali a base economica: per i soggetti di bassa estrazione sociale, rispetto a quelli provenienti da classi più elevate, i costi economici per raggiungere un alto livello di istruzione sono più alti, mentre le probabilità di successo, alla luce dei precedenti risultati scolastici, sono più basse; da qui la scelta più frequente in questi soggetti di abbandonare gli studi subito dopo l'obbligo scolastico, o comunque di non aspirare ad un alto titolo di studio.

È questa l'idea fondante del saggio che stiamo considerando, in cui l'autore si interroga sullo scarso numero di iscrizioni ad una forma di insegnamento superiore breve successivo al conseguimento di un diploma di studi secondari, istituito di recente nel sistema universitario francese.

Negli anni Sessanta, in Francia, la classe politica considera che un numero sempre maggiore di laureati ottiene tipi di occupazione che per i loro contenuti e per le remunerazioni che comportavano sono inadeguati rispetto al numero di anni di studio compiuti; ciò fa nascere l'idea che un nuovo tipo di istituzione superiore, con un numero inferiore di anni di studio, possa abbattere sprechi inutili di risorse volte a costruire competenze non utilizzate sul mercato del lavoro, da parte dell'individuo, che può raggiungere uno stesso risultato (una data occupazione) con minori costi, e da parte della collettività, su cui incombe parte del finanziamento dell'istruzione pubblica. Nasce così in questi anni l'istituzione dell'insegnamento superiore corto, che permette agli studenti che abbiano conseguito il diploma e che intendano continuare gli studi di scegliere tra l'insegnamento tradizionale ed una nuova e più breve forma di insegnamento. Tuttavia, nonostante il fatto che vi sia stata un'adeguata promozione di questo nuovo tipo di insegnamento, il numero di studenti che nei primi anni in cui è stata proposta quest'alternativa ha scelto di iscriversi alle nuove istituzioni è stato di gran lunga inferiore rispetto alle previsioni. Boudon intende spiegare le ragioni per cui gli studenti continuano a scegliere le forme di insegnamento tradizionale, e lo fa applicando a questo fenomeno la teoria della scelta razionale, e in particolare la teoria dei giochi. La tesi dell'autore è che la creazione delle istituzioni di

insegnamento superiore corto ha creato una struttura d'azione collettiva per certi versi affine a quella del "dilemma del prigioniero", nel senso che compiendo scelte ragionevoli, gli individui ottengono risultati sfavorevoli sia per se stessi che per la collettività; in altre parole, se i "giocatori" si comportano in maniera razionale non migliorano il loro risultato, che sarà inferiore o al più uguale a quello che avrebbero ottenuto "giocando" in modo non razionale.

Per chiarire la sua tesi Boudon costruisce un modello, immaginando cosa succedeva prima dell'introduzione dell'insegnamento superiore corto e successivamente a quest'evento. Cominciando con il discutere cosa accadeva quando l'unica forma di insegnamento successiva al diploma era quella tradizionale, l'autore dice che ogni studente aveva dei costi da sostenere, tanto economici – consistenti per esempio nelle tasse di iscrizione e nell'acquisto dei materiali necessari per lo studio, ma anche in quelli meno quantificabili consistenti nella rinuncia ad un possibile guadagno – quanto psicologici e sociali. Questi costi vengono sostenuti in vista di vantaggi previsti o sperati, anch'essi di tipo economico e sociale; tuttavia, i vantaggi che, una volta conseguita la laurea, questi studenti ottengono, non sono uguali per tutti. Date queste premesse, Boudon immagina che un gruppo di 20 studenti decida di iscriversi all'università; si immagina inoltre che la struttura del mercato del lavoro sia tale che 6 di questi otterranno un vantaggio in termini di status sociale del valore ipotetico di 2 franchi, 8 un vantaggio del valore di 1 franco, e 6 un vantaggio nullo, dove evidentemente l'unità di misura e le cifre scelte sono di fantasia, non hanno altro significato che quello delle relazioni d'ordine che le legano. In media, quindi, gli studenti del gruppo otterranno un beneficio dall'investimento nell'istruzione, e precisamente un beneficio medio di 1 franco: di conseguenza, gli studenti che hanno la possibilità di iscriversi all'università, in quanto la probabilità di ottenerne un vantaggio è maggiore di quella di non ottenerne.

Ad un certo punto l'autorità politica francese introduce l'insegnamento superiore corto, che presenta per gli individui i vantaggi di una riduzione dei costi dell'istruzione e di una

maggior probabilità di acquisizione del diploma finale, per via dei differenti metodi pedagogici utilizzati in questi istituti. Qualche anno dopo, i dati statistici mostrano in primo luogo che in media gli studenti usciti da un indirizzo corto percepiscono redditi analoghi a quelli che ricevono coloro che hanno conseguito la laurea attraverso una carriera universitaria tradizionale; in secondo luogo, gli stessi dati indicano una differenza molto inferiore tra i redditi dei primi rispetto a quelli dei laureati. In definitiva, il reddito medio e mediano dei licenziati dall'insegnamento superiore corto non è molto diverso da quello dei laureati, le cui retribuzioni sono più disperse di quelle di chi ha seguito l'indirizzo corto. Boudon considera questi aspetti della differenza tra insegnamento tradizionale ed insegnamento corto e li trasferisce al modello precedente immaginando che tutti gli studenti usciti dall'indirizzo corto ottengano un beneficio di 1 franco; in questo modo, la media e la mediana dei benefici di chi ha seguito l'insegnamento corto sono entrambe di 1 franco, esattamente come quelle dei benefici di chi ha seguito l'insegnamento tradizionale, che però hanno retribuzioni più disperse: lo scostamento semplice medio dei benefici dell'insegnamento tradizionale è infatti

$$(6|0-1|+8|1-1|+6|2-1|)/20=0,6$$

mentre quello dell'insegnamento corto è 0 ($20|1-1|/20$), così come la deviazione standard nel primo caso è uguale a

$$\sqrt{\frac{6(0-1)^2+8(1-1)^2+6(2-1)^2}{20}} \approx 0,77$$

mentre nel secondo caso è sempre nullo.

I 20 studenti dello scaglione fittizio possono ora quindi scegliere tra l'insegnamento corto, garantendosi un beneficio certo di 1 franco, e l'insegnamento lungo, che, nel caso in cui tutti intraprendessero questa strada, assicurerebbe un beneficio di 2 franchi a 6 studenti, di 1 franco ad 8, e un beneficio nullo ai restanti 6.

Poniamo ora che i 20 studenti conoscano perfettamente le regole del gioco, e che siano intercambiabili, nel senso che nessuno si stimi migliore degli altri. Intuitivamente, si potrebbe pensare che, essendo uguali i benefici medi forniti dai due indirizzi, ed essendo minori i costi dell'insegnamento corto, sia più ragione-

vole per ogni individuo scegliere quest'ultimo; tuttavia i dati mostrano che le cose stanno diversamente, e Boudon intende dimostrare che se i 20 studenti ipotetici sono giocatori accorti, non si lasceranno sedurre dall'indirizzo corto. Bisogna infatti tener conto della particolare struttura di gioco che si è costituita, che l'autore delinea come segue.

Ognuno dei 20 studenti può scegliere tra l'insegnamento corto, che gli garantisce un beneficio di un franco indipendentemente dal comportamento degli altri, e l'insegnamento lungo, che gli garantisce un beneficio medio di un franco nel caso in cui tutti gli altri scegliessero lo stesso indirizzo ma maggiore di 1 franco se almeno uno studente sceglie l'indirizzo corto; in particolare, il beneficio sarebbe di 2 franchi se l'insegnamento lungo venisse scelto da non più di 6 studenti. Come nel famoso dilemma dei prigionieri, ogni giocatore (cioè ogni studente) non sa come si comporteranno gli altri; ciascuno studente può determinare i benefici medi, utilizzando ciascuna delle due strategie possibili sotto le possibili differenti ipotesi relative al comportamento degli altri; dal punto di vista di ognuno dei giocatori, per ognuna delle strategie, le ipotesi sono 20, perché il numero degli altri studenti che può scegliere (o non scegliere) l'indirizzo lungo (o corto) è compreso tra 0 e 19. Infatti, ricorrendo alla funzione di liquidazione, possiamo dire che la retribuzione dello studente i è data da $s_1s_2s_3\dots s_i\dots s_{20}$, dove $s_1, s_2, s_3, \dots, s_i, \dots, s_{20}$, ecc. sono le strategie adottate dai giocatori 1, 2, ..., i , ecc., ognuna delle quali può assumere una delle due modalità che possiamo indicare come *lungo* e *corto*. Poiché si tratta di un gioco simmetrico, i giocatori sono intercambiabili tra loro, pertanto la retribuzione dello studente i non cambierà finché non cambierà il numero di coloro che scelgono l'una strategia, e quelli che scelgono l'altra; in altri termini, per lo studente i non avrà importanza che, per esempio, lo studente 2 scelga l'indirizzo lungo e il 16 scelga quello corto o viceversa: a lui interesserà soltanto il numero di quanti sceglieranno il primo e quanti il secondo indirizzo. Pertanto, possiamo ragionare tenendo conto solo del numero di giocatori che scelgono l'una o l'altra strategia e non della loro identità. Ammettiamo dunque che uno

studente qualsiasi, che chiameremo i , scelga l'indirizzo lungo: come accennavamo, se non più di altri 5 studenti scelgono lo stesso indirizzo, egli è sicuro di un beneficio di 2 franchi, che, come sappiamo, possono assicurarsi in 6; se invece 6 studenti diversi da i sceglieranno l'indirizzo lungo, lo studente i ha 6 possibilità su 7 di ottenere un beneficio di 2 franchi, e 1 su 7 di ottenerne uno del valore di 1 franco; la sua speranza di beneficio (cioè il beneficio medio, che corrisponde alla media

dei valori che può assumere la funzione di liquidazione) sarà in questo caso uguale a $\frac{6}{7} \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 1 \approx 1,86$ franchi. Si possono allora calcolare le speranze di guadagno di uno studente preso a caso tra i 20, in funzione delle diverse ipotesi sul comportamento degli altri 19. I risultati sono sintetizzati nella seguente tabella:

Tabella 1 - Matrice di retribuzione corrispondente al gioco sopra descritto

Strategie dello studente i	Numero di studenti che scelgono l'indirizzo lungo all'infuori di i									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indirizzo corto	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Indirizzo lungo	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	1,86	1,75	1,67	1,60

Strategie dello studente i	Numero di studenti che scelgono l'indirizzo lungo al di fuori di i									
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Indirizzo corto	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Indirizzo lungo	1,55	1,50	1,46	1,42	1,33	1,25	1,17	1,11	1,05	1,00

Fonte: R. Boudon, *Istituzioni scolastiche ed effetti perversi. L'insegnamento superiore corto*, in R. Boudon, *Effetti "perversi" dell'azione sociale*, Feltrinelli, Milano, 1981, p.121.

La tabella mostra quindi come, qualunque sia la scelta degli altri, lo studente i abbia interesse a scegliere la strategia dell'indirizzo lungo rispetto a quella dell'indirizzo corto, poiché in questo modo ha una speranza di guadagno superiore, nel 95% dei casi, a quella associata alla strategia dell'insegnamento corto, e uguale, nel restante 5%.

Si potrebbe obiettare che il modello non spiega come mai un certo numero di studenti (circa 1 su 7, secondo i dati in possesso di Boudon) scelga l'indirizzo corto; l'autore afferma al riguardo che modificando il modello introducendovi altre variabili, si potrebbe spiegare questo fenomeno; tuttavia ciò renderebbe meno semplice il modello, che non mira ad un'attenta rappresentazione della realtà, quanto ad evidenziare la logica di una struttura dell'azione collettiva. Boudon in effetti è cosciente del fatto che questo modello costituisca una rappresentazione idealizzata, essendo scarsamente realistico: non è vero, per esempio, che gli studenti siano perfettamente informati sui dati del gioco, né che ognuno si stimi quanto gli altri; nonostante ciò, l'autore usa il modello per spiegare come la causa del

fallimento dell'insegnamento superiore corto debba essere ricercata nei paradossi originati dall'aggregazione di decisioni individuali, piuttosto che nelle spiegazioni di tipo culturale.

Scelte formative: accettazione e rifiuto del presupposto della razionalità

L'idea che le scelte scolastiche ed universitarie siano scelte razionali ha avuto un largo seguito negli ultimi decenni. Si pensi alle conclusioni cui è giunto uno studio sulle scelte scolastiche in Piemonte condotto dall'IRES³ nel 1993⁴: le decisioni scolastiche assunte dagli individui sono considerate «ampiamente spiegabili in termini di valutazioni razionali, risultando fortemente influenzate dal confronto fra abilità scolastiche e preferenze professionali dei decisori (gli adolescenti e i loro genitori) e opportunità occupazionali offerte dal contesto

³ L'Istituto di Ricerche Economiche e Sociali è un'associazione no profit, fondata dalla CGIL nel 1979, finalizzata alla promozione, progettazione, e realizzazione di studi e ricerche sul lavoro e i suoi cambiamenti.

⁴ I risultati di questa ricerca sono discussi in [9]

sociale ed economico in cui essi vivono» [9]. Sulle stesse scelte influiscono decisamente anche le risorse culturali della famiglia, mentre poco rilevante è il vincolo rappresentato da quelle economiche; da parte sua, anche il mercato del lavoro influenza le decisioni scolastiche: esse infatti, in quest'ottica, consistono nella scelta dei mezzi necessari a conseguire degli obiettivi ragionevolmente raggiungibili, e solo le dinamiche presenti nel mondo del lavoro indicano se questi siano tali o meno.

Si deve comunque tenere presente che l'idea per la quale le scelte scolastiche ed universitarie siano razionali non è condivisa da molti scienziati. Tra questi possiamo citare Bourdieu, per il quale la scuola è l'istituzione principale volta ad innescare il circolo vizioso della riproduzione culturale come funzione della riproduzione di classe: essa è uno strumento nelle mani delle classi dominanti, per mezzo del quale queste perpetuano nel tempo le disuguaglianze sociali. Ciò si rende possibile attraverso meccanismi di selezione presenti nell'istituzione stessa: «le probabilità di accesso agli studi superiori appaiono come il risultato di una selezione che, nel corso del curriculum scolastico, viene esercitata con un rigore che varia notevolmente a seconda dell'origine sociale dei soggetti; in effetti, per le classi meno abbienti, si tratta puramente e semplicemente di *eliminazione*» [10]. Tali meccanismi di selezione, se non eliminano definitivamente gli studenti di bassa estrazione sociale, determinano in loro degli atteggiamenti negativi che influiscono pesantemente sulle decisioni scolastiche successive; questi meccanismi operano a livello culturale sfavorendo chi è «portatore» di una cultura popolare, e favorendo chi invece ha un retroterra culturale affine al tipo di cultura proposto dalla scuola. Dunque, il concetto di razionalità non è molto utile per spiegare i meccanismi di scelta in quest'ambito, perché non tiene conto dei condizionamenti culturali e sociali che influiscono su questi; bisognerebbe invece comprendere la natura delle relazioni che uniscono il sistema scolastico alla struttura dei rapporti di classe [11],

poiché sono queste relazioni a determinare quelle che chiamiamo «scelte».

In definitiva, l'analisi del tema delle scelte scolastiche ci fornisce un esempio di come il dibattito sulla razionalità, tra chi ritiene che in un certo senso la razionalità sia il «motore» delle scelte e delle azioni dell'uomo, e chi invece considera le azioni umane determinate dalla cultura e le scelte fortemente influenzate da meccanismi sociali e culturali, sia tutt'altro che concluso in sociologia.

Riferimenti bibliografici

- [1] Di Nuoscio E., «Leggi e ragioni. Per una spiegazione individualistica e nomologica dell'azione umana», in Boudon R. et al., *Filosofia dell'azione e teorie della razionalità*, Luiss Edizioni, Roma, 2002
- [2] Gallino L., *Dizionario di sociologia*, UTET, Torino, 1993
- [3] Weber M., *Economia e società*, Edizioni di Comunità, Milano, 1995
- [4] Homans G.C., *Le forme elementari del comportamento sociale*, Franco Angeli, Milano, 1975
- [5] Olson M., *La logica dell'azione collettiva*, Feltrinelli, Milano, 1983
- [6] Baert P., *La teoria sociale contemporanea*, Il Mulino, Bologna, 2002
- [7] Boudon R., *Teoria della scelta razionale o individualismo metodologico?*, in Boudon R., Oliverio A., Antiseri D., *Teorie della razionalità e scienze sociali*, Luiss Edizioni, Roma, 2002
- [8] Boudon R., *Istituzioni scolastiche ed effetti perversi. L'insegnamento superiore corto*, in Boudon R., *Effetti "perversi" dell'azione sociale*, Feltrinelli, Milano, 1981
- [9] Abburrà L., Gambetta D., Miceli R., *Le scelte scolastiche individuali*, IRES, Torino, 1996.
- [10] Bourdieu P., Passeron J. C., *Gli studenti e la cultura. I delfini*, Guaraldi editore, Rimini-Firenze, 1976
- [11] Bourdieu P., Passeron J. C., *La riproduzione. Elementi per una teoria del sistema scolastico*, Guaraldi editore, Rimini, 1972.

123. Poligoni, poliedri e politopi regolari

di Andreana Zucco

Premessa

Se le definizioni di poligono (2 dimensioni) e di poliedro (3 dimensioni) sono ben note, per poter parlare di oggetti in dimensione superiore a 3 (politopi), occorre dare una definizione estendibile a un qualsiasi numero di dimensioni.

Intanto, precisiamo cosa si intende per spazio di dimensione n . I punti di una retta (spazio a dimensione 1) sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali; i punti del piano, (spazio a dimensione 2) sono in corrispondenza con le coppie di numeri reali; i punti dello spazio ordinario tridimensionale sono in corrispondenza biunivoca con le terne di numeri reali. Per analogia, ad una quaterna di numeri reali si può associare un punto dello spazio a 4 dimensioni. Più in generale una n -upla di numeri reali (x_1, x_2, \dots, x_n) rappresenta un punto dello spazio di dimensione n . In questo spazio si può anche introdurre la distanza fra due punti, in modo analogo a come si fa per il piano. Uno spazio di questo tipo viene detto spazio euclideo n -dimensionale.

Per dare la definizione di politopo premettiamo le seguenti definizioni:

Def. 1: Un insieme X di punti di uno spazio di dimensione finita qualsiasi n (ove n è un numero naturale) è detto *convesso* se contenendo due punti a, b contiene anche il segmento $[a,b]$ che li congiunge.

Insiemi convessi sono ad esempio la retta, i poligoni regolari, il cubo.

Def. 2: Si dice *inviluppo convesso* di un insieme X di uno spazio di dimensione n e si scrive $\text{conv}(X)$ il più piccolo convesso che contiene X .

Ad esempio, l'inviluppo convesso di tre punti distinti allineati è un segmento, l'inviluppo convesso di tre punti non allineati è un triangolo. L'inviluppo convesso di un insieme X convesso è l'insieme stesso: in questo caso $\text{conv}(X)=X$.

E ora seguendo il testo di H.G.Eggleston [E] diamo la seguente definizione:

Def. 3: L'inviluppo convesso di un numero finito di punti si dice:

- poligono* in dimensione 2,
- poliedro* in dimensione 3,
- politopo* in dimensione n superiore a 3.

Ad esempio, nel piano quattro punti non allineati a, b, c, d danno origine ad un poligono: un triangolo di vertici a, b, c se d appartiene a $\text{conv}(a,b,c)$ mentre se d è esterno al triangolo di vertici a, b, c i quattro punti danno origine ad un quadrilatero.

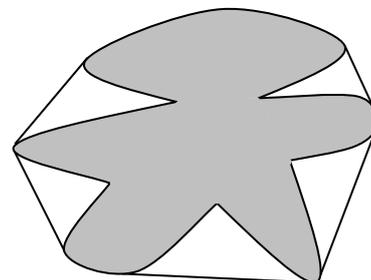
Poligoni regolari

Analizziamo ora il concetto di regolarità per i poligoni.

Def. 4: Un poligono di p lati e di p vertici si dice regolare se è equiangolo ed equilatero e si indica, usando i simboli di Schläfli, con $\{p\}$.

Ad esempio $\{4\}$ rappresenta solo il quadrato, che è regolare, mentre il rettangolo è equiangolo, ma non equilatero e il rombo è equilatero ma non equiangolo.

Osserviamo che i poligoni regolari sono infiniti.



Poliedri regolari

Passiamo ora ai poliedri, che sono l'estensione del concetto di poligono. Abbiamo detto che un poliedro è l'involuppo convesso di un numero finito di punti, ovviamente non complanari, ma si può anche definire in modo equivalente come l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi che sia anche limitata. I piani che lo delimitano, lo intersecano secondo poligoni piani, detti *facce*, disposte in modo che ogni loro lato, detto *spigolo*, sia comune a due di esse; inoltre si dicono *vertici* del poliedro i suoi punti estremi.

Quindi un poliedro qualsiasi è una regione dello spazio limitato da N_0 vertici, N_1 spigoli, N_2 facce, numeri legati fra loro dalla formula di Eulero:

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

Quando un poliedro si dice regolare?

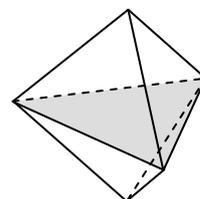
Ci sono diverse definizioni equivalenti:

Def. 5: Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono regolari e uguali e se tutti gli angoloidi sono uguali.

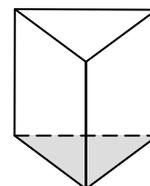
Un esempio di solido che soddisfa a tutte le condizioni ed è quindi un poliedro regolare è il cubo.

Non sono regolari ad esempio:

1) La bpiramide formata da due tetraedri regolari incollati per una faccia non è un poliedro regolare, pur avendo le facce regolari e uguali (triangoli equilateri) ha angoloidi diversi, infatti da due vertici escono tre spigoli e dai tre vertici escono quattro spigoli.



2) Il prisma a basi triangolari equilatero e facce laterali quadrate non è un poliedro regolare in quanto ha facce regolari, ma non tutte uguali, mentre i suoi angoloidi sono triedri che, avendo le stesse facce, sono uguali.

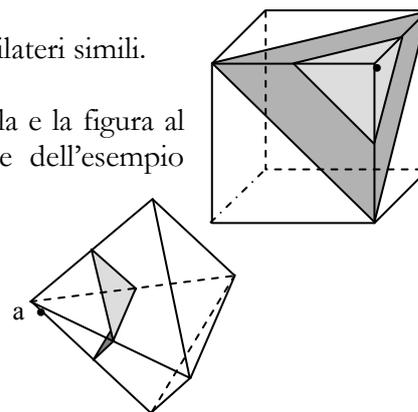


Per estendere a dimensioni superiori il concetto di regolarità diamo la seguente definizione:

Def. 6: Dato un vertice a di un poliedro, si dice *stella relativa al vertice a* la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i secondi estremi degli spigoli aventi a come vertice. Si dice *figura al vertice a* la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli aventi a come vertice.

Ad esempio la stella e la figura al vertice di un cubo sono triangoli equilateri simili.

Si prova che per un qualunque vertice di un poliedro regolare, la stella e la figura al vertice sono poligoni piani, mentre ad esempio per la bpiramide dell'esempio precedente ciò non è vero: la stella e la figura al vertice di un vertice da cui escono quattro spigoli è formata da due triangoli equilateri non complanari.

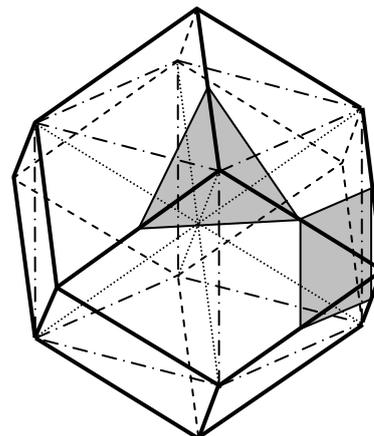


Ora possiamo dare la seguente definizione che si dimostra equivalente alla Def. 5.

Def. 7: Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono regolari e le sue stelle (oppure equivalentemente le sue figure al vertice) sono poligoni regolari.

Un esempio di un poliedro che pur avendo figure al vertice regolari, non ha facce regolari è il dodecaedro rombico. Questo poliedro si costruisce a partire da due cubi uguali. Uno rimane tale quale nel centro della costruzione. L'altro viene scomposto in sei piramidi rette a base quadrata, ognuna ha

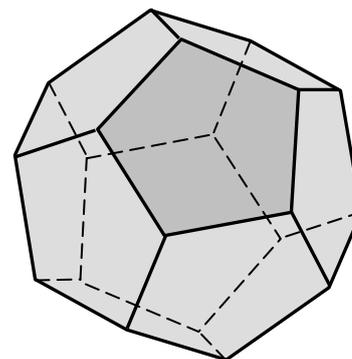
come base una faccia del cubo ed ha vertice nel centro del cubo scomposto. Ora incolliamo le sei piramidi sulle facce del primo cubo. Otteniamo un poliedro che ha come facce rombi, mentre le figure al vertice sono quadrati o triangoli equilateri. Non avendo facce regolari non è un poliedro regolare



Usando i simboli di Schläfli¹ un poliedro regolare si denota con $\{p,q\}$ dove p è il numero dei lati di una faccia e q il numero dei lati di una stella. Ad esempio il cubo si denota con $\{4,3\}$ in quanto le sue facce sono quadrati e le sue stelle triangoli.

Com'è noto esistono solo cinque tipi di poliedri regolari, cosa che proveremo usando il teorema di Schläfli. Essi sono:

- **tetraedro:** $\{3,3\}$ è una piramide a base triangolare, le cui quattro facce sono triangoli equilateri;
- **ottaedro:** $\{3,4\}$ è formato da due piramidi a base quadrata incollate sulle basi e con facce triangoli equilateri;
- **cubo:** $\{4,3\}$ si ottiene regolando l'altezza di un prisma a base quadrata in modo che ogni faccia sia un quadrato;
- **icosaedro:** $\{3,5\}$ si ottiene collegando i vertici di due pentagoni posti su piani paralleli ma uno ruotato rispetto all'altro in modo che i due pentagoni siano collegati da dieci triangoli equilateri (formando una specie di tamburo); infine sui due pentagoni si incollano due piramidi a base pentagonale, in modo da avere in tutto venti triangoli equilateri;
- **dodecaedro:** $\{5,3\}$ per costruirlo occorrono dodici pentagoni. Si incastrano in modo opportuno sei pentagoni in modo da formare una scodella, gli spigoli liberi formano un decagono sghembo; unendo due oggetti di questo tipo lungo gli spigoli liberi, si ottiene il dodecaedro.



Politopi regolari 4-dimensionali

Passiamo ora a considerare i politopi in dimensione 4 che sono un'estensione dei poliedri.

Abbiamo definito un politopo 4-dimensionale come l'involuppo convesso di un numero finito di punti. Esso possiede N_3 celle di dimensione 3 che sono poliedri, N_2 celle piane dette facce, N_1 celle unidimensionali dette spigoli ed N_0 vertici che sono i punti estremi. Tali numeri sono legati fra loro dalla relazione di Eulero: $N_0 + N_2 = N_1 + N_3$.

Def. 8: Un politopo 4-dimensionale si dice regolare se le sue celle che compongono il contorno sono poliedri regolari e le sue stelle (o le sue figure al vertice) sono poliedri regolari.

Vediamo la costruzione di alcuni politopi 4-dimensionali seguendo il testo di H.S.M.Coxeter [C]:

1. se si parte da un segmento di vertici A,B e si considera un punto C esterno alla retta che contiene il segmento, unendo i tre punti A, B, C si ottiene un triangolo;
2. se si uniscono i vertici del triangolo conv(A,B,C) con un punto D esterno al piano su cui giace si ottiene un tetraedro;

¹ Il matematico svizzero Ludwig Schläfli (Grasswyl 1814, Berna 1895) fu tra i primi a studiare la geometria in dimensioni superiori a 3. Il suo lavoro matematico da pioniere in questo campo fu così poco apprezzato che appena due suoi scritti furono accettati per la pubblicazione. Solo nel 1901, sei anni dopo la sua morte fu pubblicata la sua *Theorie der Vielfachen Continuität* in cui fra l'altro definisce ciò che chiama *polischemi* oggi detti politopi, di cui tratta questo articolo.

3. se si uniscono i vertici del tetraedro $\text{conv}(A,B,C,D)$, con un punto E esterno al poliedro nella 4^a dimensione si ottiene un politopo e se si fa in modo che tutti gli spigoli siano uguali si ottiene un *5-celle*, detto anche *4-simplex*, e si indica con α_4 .

Quindi il 5-celle possiede:

- $N_0 = 5$ (ossia i 4 vertici A,B,C,D del tetraedro iniziale e il punto aggiunto E);
- $N_1 = 10$ (ossia i 6 spigoli del tetraedro iniziale e i 4 ottenuti congiungendo E con i 4 vertici del tetraedro iniziale);
- $N_2 = 10$ (ossia le 4 facce del tetraedro iniziale e le 6 facce ottenute considerando i triangoli che hanno un vertice in E e come base uno dei 6 spigoli del tetraedro);
- $N_3 = 5$ (ossia il tetraedro iniziale $\text{conv}(A,B,C,D)$ e i 4 tetraedri che hanno come vertice E e come base una faccia del tetraedro iniziale).

La stella di un vertice (vedi Def. 6) del 5-celle è un tetraedro.

Per ottenere la generalizzazione del tetraedro in dimensione 5 basterà aggiungere un punto della 5^a dimensione al 5-celle (che è 4-dimensionale) e fare in modo che tutti gli spigoli siano uguali. Si procede allo stesso modo per dimensioni superiori.

Cominciamo un'altra costruzione servendoci inizialmente ancora di un segmento, ma mentre nel caso precedente dovevamo aggiungere un punto, ora ne aggiungeremo due da parti opposte.

1. Inizialmente abbiamo il segmento A,B e consideriamo due punti C,D da parti opposte alla retta contenente il segmento, facendo in modo che il quadrilatero sia un quadrato (con al suo interno il segmento iniziale);
2. poi si uniscono i vertici del quadrato $\text{conv}(A,B,C,D)$ con due punti E, F situati da parti opposte al suo piano, facendo in modo che le otto facce siano tutte triangoli equilateri e si ottiene un ottaedro (contenente al suo interno il quadrato iniziale);
3. infine in dimensione 4 si uniscono i vertici dell'ottaedro con due opportuni punti G, H da parti opposte allo spazio che lo contiene, si ottiene un politopo che come contorno ha sedici celle tutte tetraedri regolari, otto di vertice G ed otto di vertice H aventi come basi le facce dell'ottaedro, ossia si ottiene un *16-celle*, detto anche *cocubo* 4-dimensionale, che si indica con β_4 e in cui l'ottaedro servito per la costruzione rimane all'interno.

Quindi il 16-celle possiede:

- $N_0 = 8$
- $N_3 = 16$
- $N_2 = 32$, perché i 16 tetraedri hanno 6 facce e ogni faccia è comune a due tetraedri ad esempio $\text{conv}(A,B,C)$, è comune a $\text{conv}(A,B,C,G)$ e $\text{conv}(A,B,C,H)$ perciò $16 \times 6 : 2$ sono le facce.
- Infine per calcolare gli spigoli possiamo usare la formula di Eulero: $N_1 = N_0 + N_2 - N_3 = 24$.

La stella di un vertice (vedi Def. 6) di un 16-celle è un ottaedro.

In dimensioni superiori alla quarta la generalizzazione dell'ottaedro prosegue allo stesso modo.

Per la generalizzazione del cubo si procede invece "per traslazioni".

1. Traslando un punto A lungo una retta si ottiene un segmento A,A' di lunghezza l.
2. Traslando un segmento A,B lungo una direzione ortogonale si ottiene un quadrato di vertici A,B,B',A' che ha come contorno il segmento iniziale A,B, il segmento finale A',B' e i due segmenti che li collegano A,A' e B,B'.
3. Traslando un quadrato secondo una direzione ortogonale al suo piano otteniamo un cubo che ha come facce, il quadrato iniziale il quadrato finale e quattro quadrati di raccordo.
4. Traslando un cubo secondo una direzione ortogonale allo spazio che lo contiene otteniamo l'*8-celle* o *ipercubo* 4-dimensionale, che si indica con γ_4 e ha sul contorno come poliedri: il cubo iniziale, quello finale e i sei cubi di raccordo.

Quindi l'8-celle possiede:

- $N_0 = 16$
- $N_3 = 8$
- $N_1 = 32$, perché gli spigoli dei cubi iniziali e finali hanno ciascuno 12 spigoli e ogni vertice del cubo iniziale traslando genera uno spigolo in più, ossia gli spigoli sono $12+12+8$.
- Infine per calcolare le facce possiamo usare la formula di Eulero: $N_2 = N_1 + N_3 - N_0 = 24$.

Questi politopi per costruzione hanno celle regolari e stelle (o figure al vertice) regolari, si tratta quindi di politopi regolari.

Anche per i politopi 4-dimensionali si usano i simboli di Schläfli.

In generale se le facce bidimensionali sono dei $\{p\}$ e le stelle dei $\{q,r\}$ viene indicato con $\{p,q,r\}$.

Il 5-celle ha come celle dei tetraedri per cui le facce sono dei $\{3\}$ e come stelle ancora dei tetraedri $\{3,3\}$ quindi ha come simbolo $\{3,3,3\}$.

Il 16-celle ha come celle dei tetraedri per cui le facce sono dei $\{3\}$ e come stelle degli ottaedri $\{3,4\}$ quindi ha come simbolo $\{3,3,4\}$.

L'8-celle ha come celle dei cubi per cui le facce sono dei $\{4\}$ e come stelle dei tetraedri $\{3,3\}$ quindi ha come simbolo $\{4,3,3\}$.

Politopi regolari n-dimensionali

Come ovvia estensione della Def. 8 si ha:

Def. 9: Un politopo si dice regolare se le sue celle sono regolari e le sue stelle (o figure al vertice) sono regolari.

Considerato un politopo regolare P di dimensione n, lo indichiamo con

$$\{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$$

se r_1 è il numero dei lati delle facce bidimensionali di P e se $\{r_2, \dots, r_{n-1}\}$ è il simbolo della stella di P.

Nel seguito consideriamo poligoni, poliedri e politopi sempre regolari.

La relazione fondamentale per i politopi regolari

Ad ogni poligono regolare è associato il cerchio circoscritto passante per i suoi vertici, ad ogni poliedro regolare è associata la sfera circoscritta passante per i suoi vertici, analogamente ad ogni politopo regolare P è associata l'ipersfera circoscritta passante per i suoi vertici.

Detta l la lunghezza di uno spigolo di P ed r il raggio della sua ipersfera circoscritta il numero

$$\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$$

è oggetto della relazione fondamentale. Seguendo la notazione (francese) del testo di M. Berger [B] la stella di P sarà indicata con $Et(P)$. La relazione è la seguente:

Sia P un politopo regolare n-dimensionale $\{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$ ed $Et(P)$ la stella riferita ad un generico vertice, allora $\rho(P)$ e $\rho(Et(P))$ sono legati dalla relazione

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(Et(P))},$$

o equivalentemente

$$\rho(r_1, \dots, r_{n-1}) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2, \dots, r_{n-1})}.$$

La dimostrazione si può trovare sul testo [B].

TEOREMA - (Schläfli 1850): *A meno di similitudini, gli unici politopi convessi regolari n-dimensionali che esistono sono quelli rappresentati dai seguenti simboli:*

- $n = 2$ $\{r_1\}$ per qualunque intero $r_1 \geq 3$
- $n = 3$ $\{3, 3\}$ $\{3, 4\}$ $\{4, 3\}$ $\{3, 5\}$ $\{5, 3\}$
- $n = 4$ $\{3, 3, 3\}$ $\{3, 3, 4\}$ $\{4, 3, 3\}$ $\{3, 4, 3\}$ $\{3, 3, 5\}$ $\{5, 3, 3\}$
- $n \geq 5$ $\{3, \dots, 3\}$ $\{3, \dots, 3, 4\}$ $\{4, 3, \dots, 3\}$.

Dimostrazione: Proviamo che i simboli possibili sono quelli dell'enunciato, nel caso $n=2$, $n=3$.

Poiché $r_1 \geq 3$ (lati di una faccia) risulta $\cos^2 \frac{\pi}{r_1} \geq \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, ma $\rho(P) = \rho(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ è una quantità positiva per definizione:

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2, \dots, r_{n-1})} > 0 \quad \text{perciò} \quad \rho(r_2, \dots, r_{n-1}) > \cos^2 \frac{\pi}{r_1} \geq \frac{1}{4}.$$

I politopi regolari, stelle di politopi regolari, devono quindi soddisfare alla doppia condizione:

$$\rho(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) > 0 \qquad \rho(r_2, \dots, r_{n-1}) > \frac{1}{4}.$$

Esaminiamo il caso $n = 2$.

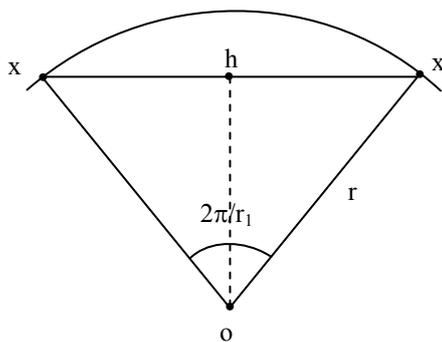
Dato il poligono $\{r_1\}$, presi due vertici consecutivi x, x' , indicato con o il centro della circonferenza circoscritta di raggio r , l'angolo $\widehat{xox'}$ vale $\frac{2\pi}{r_1}$.

Detto h il punto di intersezione della bisettrice di tale angolo con il lato xx' di lunghezza ℓ nel triangolo conv(o, h, x) si ha $\frac{\ell}{2} = r \sin \frac{\pi}{r_1}$ da cui $\frac{\ell}{2r} = \sin \frac{\pi}{r_1}$.

La relazione fondamentale si può allora scrivere $\rho(r_1) = \frac{\ell^2}{4r^2} = \sin^2 \frac{\pi}{r_1}$.

Quindi:

$$\begin{aligned} r_1 = 3 & \quad \rho(3) = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{4} \\ r_1 = 4 & \quad \rho(4) = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\ r_1 = 5 & \quad \rho(5) = \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}(5 - \sqrt{5}) > \frac{1}{4} \\ r_1 = 6 & \quad \rho(6) = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Qualsiasi sia il numero dei lati $\rho(r_1)$ è sempre maggiore di zero, per cui esistono infiniti poligoni regolari, ma solo i poligoni con al più cinque lati possono essere stelle di poliedri.

Esaminiamo il caso $n = 3$.

Sia P un poliedro di simbolo $\{r_1, r_2\}$; il secondo parametro r_2 può assumere solo i valori 3, 4 e 5 per quanto visto nel caso bidimensionale.

Sia $r_2 = 3$ $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(3) = \frac{3}{4}$. Calcoliamo ora $\rho(r_1, 3)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 5 \quad \rho(5, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{8} (3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6} > 0.$$

$$\text{Se } r_1 = 6 \quad \rho(6, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{3}{4} = 0.$$

Pertanto esistono solo tre poliedri con stelle triangolari: il tetraedro, il cubo e il dodecaedro e soltanto i primi due, $\{3, 3\}$ e $\{4, 3\}$, sono stelle di politopi regolari di dimensione quattro.

Per $r_2 = 4$ $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(4) = \frac{1}{2}$. Calcoliamo ora $\rho(r_1, 4)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{2} = 0$$

Quindi otteniamo l'ottaedro $\{3, 4\}$ ed esso può essere stella di politopi regolari di dimensione quattro.

Per $r_2 = 5$ $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(5) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ Calcoliamo ora $\rho(r_1, 5)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 5) = 1 - \frac{8 \cos^2 \frac{\pi}{3}}{5 - \sqrt{5}} = 1 - \frac{2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} > \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 5) = 1 - \frac{8 \cos^2 \frac{\pi}{4}}{5 - \sqrt{5}} = 1 - \frac{4}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} < 0$$

Solo $\{3, 5\}$ è un politopo regolare, l'icosaedro, e può essere stella di politopi in dimensione quattro.

Abbiamo quindi ritrovato una proprietà nota anche per vie elementari.

Gli unici poliedri regolari sono: **tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro e dodecaedro.**

Procedendo allo stesso modo si può provare che:

$$\begin{array}{lll} \rho(3, 3, 3) = \frac{5}{8} & \rho(4, 3, 3) = \frac{1}{4} & \rho(3, 3, 4) = \frac{1}{2} \\ \rho(3, 4, 3) = \frac{1}{4} & \rho(3, 3, 5) = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} & \rho(5, 3, 3) = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{16} \end{array}$$

Quindi in dimensione $n = 4$ possono esistere sei politopi regolari i cui simboli sono:

$\{3, 3, 3\}$ il 5-celle	$\{4, 3, 3\}$ l'8-celle	$\{3, 3, 4\}$ il 16-celle
$\{3, 4, 3\}$ il 24-celle	$\{3, 3, 5\}$ il 600-celle	$\{5, 3, 3\}$ il 120-celle

ma tra essi solo il 4-simpleso o 5-celle $\{3, 3, 3\}$ (5 vertici, 10 spigoli, 10 facce e 5 celle formate da tetraedri) e il cocubo o 16-celle $\{3, 3, 4\}$ (8 vertici, 24 spigoli, 32 facce e 16 celle formate da ottaedri) possono essere stelle di politopi regolari in dimensione cinque.

Abbiamo visto la costruzione dei primi tre, per i rimanenti tre la costruzione è più complicata e si può trovare nel testo [C].

Per $n \geq 5$, si dimostra, per induzione, che

$$\rho(3, \dots, 3, 3) = \frac{n+1}{2n} \quad \rho(4, 3, \dots, 3) = \frac{1}{n} \quad \rho(3, \dots, 3, 4) = \frac{1}{2}$$

Quindi esistono solo tre politopi n -dimensionali

$\alpha_n \{3, \dots, 3, 3\}$ $\beta_n \{3, \dots, 3, 4\}$ $\gamma_n \{4, 3, \dots, 3\}$

e di questi solo il simpleso $\{3, \dots, 3, 3\}$ e il cocubo $\{3, \dots, 3, 4\}$ possono essere stelle di politopi regolari.

Bibliografia essenziale

[B] M. BERGER, *Géométrie*, Cedic Nathan, Paris (1977)

[C] H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, Methuen & Co Ltd, London, (1948)

[E] H. G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge, England (1958)

[F-Z] P.FAVRO – A.ZUCCO, *Appunti di Geometria Convessa*, quaderno didattico n.34, Dip. Matematica, Univ. Torino.

124. Il padre dell'astronomia razionale

di Aldo Bonet

[aldo@storiadellamatematica.it]

“... *in memoria del Professor Bruno Rizzi* ...”

Sunto. Dopo una breve introduzione sulle origini dell'astronomia, si passano in rassegna le classiche fonti storiche sulla vita e le opere di Talete e sulla cultura dell'antico Egitto, prendendo come riferimento principale un articolo di Bruno Rizzi [BR]. Viene poi esposto, collegandolo in un quadro di sintesi, un metodo originale per la misurazione delle altezze delle piramidi e correttamente integrato nelle testimonianze storiche per proseguire con la realizzazione ipotetica di un distanziometro per misurare dalla costa le distanze delle navi in mare. Il distanziometro permette di spiegare la scoperta dei teoremi geometrici e la predizione di eventi astronomici che la tradizione concordemente attribuisce a Talete. L'oggetto principale di questo articolo è il metodo di Talete per la misura angolare del Sole.

Origini e sviluppo dell'astronomia

L'astronomia è senz'altro la più antica delle scienze, si presentò quotidianamente all'uomo sin dalla sua prima comparsa sulla Terra con il suo suggestivo spettacolo diurno dell'alba e del tramonto del Sole, della notte stellata o illuminata dalla Luna, è quella che ha maggiormente contribuito alla evoluzione del pensiero umano. Nata dalle necessità della vita quotidiana: la misura del tempo che passava era per l'uomo primitivo un'idea molto vaga; vedeva ogni giorno il Sole sorgere e tramontare per far posto alla notte. Questo fu riconosciuto come un tempo breve, composto dal giorno (luce) e dalla notte (buio). L'uomo riconobbe poi i tempi lunghi che si ripetevano: l'albero che dapprima fioriva, poi maturava i frutti, *in seguito* ingialliva e staccava le foglie, infine rimaneva spoglio e allora arrivava il freddo. Aveva scoperto l'alternarsi delle quattro stagioni e aveva riconosciuto che ogni volta che l'albero rifioriva col ritorno del

tepore del Sole era passato un tempo lungo, un anno. Ma non conosceva molto di più.

Quando incominciò ad osservare la notte l'uomo imparò qualcosa in più sullo scorrere del tempo: ogni mese la Luna aumentava fino a diventare piena poi gradualmente decresceva fino a scomparire di nuovo, contò che in un anno ci sono dodici Lune piene; perciò dodici mesi, ma vide che il fenomeno aveva una regolarità e si ripeteva immutato in tempi ancor più lunghi, gli anni. Fu così che l'uomo cominciò a suddividere il trascorrere dei tempi coi fenomeni divenuti a lui più familiarmente conosciuti e a darne una misura.

L'uomo imparò a suddividere il tempo breve di una giornata servendosi di un bastone piantato ritto sul terreno e per sapere quanta parte del giorno era trascorsa, “l'ora”, osservava la posizione assunta sul suolo dall'ombra del bastone, proiettata dal Sole, che ruotava lentamente (come la lancetta delle ore del nostro moderno orologio), dal mattino alla sera in un semicerchio e sempre quotidianamente allo stesso modo. L'uomo poi nel prendere familiarità temporale con le ore del suo “orologio”, notò che il sole non proiettava una lunghezza d'ombra identica nelle varie stagioni: l'ombra era visibilmente più lunga nella stagione fredda e più corta in quella calda. Segnò per terra il punto in cui arrivava l'ombra del bastone a mezzogiorno nella stagione della fioritura, ovvero in primavera, fece lo stesso nella stagione della maturazione dei frutti, cioè in estate, successivamente nella stagione della caduta delle foglie, ovvero in autunno e infine, quando l'albero fu spoglio, nella stagione dell'inverno. Ebbe così quattro punti temporali di riferimento nel corso di un anno e osservando la lunghezza dell'ombra sul terreno sapeva se era tempo di semina o di raccolti, senza dover più osservare il comportamento delle piante. Era nato il calendario. L'anno infine non fu suddiviso soltanto nelle

quattro stagioni ma anche in base alle lune: dodici erano le lune piene che si presentavano nel tempo lungo, e dodici sono i periodi che ancor oggi dividono l'anno; così sono nati i mesi del calendario. I Babilonesi come gli Egizi disponevano già di un calendario più preciso, basato sulla posizione delle stelle in cielo. Essi avevano già notato che l'anno, era il tempo che una stella impiegava, dopo i suoi periodici spostamenti, per ritrovarsi nello stesso punto del firmamento; l'anno egizio era suddiviso correttamente in 365 giorni $(30 \times 12) + 5$.

La misura del tempo era calcolata con particolari strumenti di misurazione quali: la clessidra ad acqua, lo gnomone, il polos, quest'ultimi due erano utilizzati come orologi solari; lo stazionamento di osservazione era fatto con fili a piombo o aste piombate per la determinazione della verticalità del punto e bilance o livelle ad acqua per l'orizzontalità, mire per l'allineamento e il puntamento delle stelle, uno di questi strumenti era il merkhet, utilizzato dagli Egizi.

Anche lo studio di quei grandi e spaventevoli fenomeni celesti, come le eclissi di Sole o di Luna, fecero inizialmente dell'astronomia una scienza misteriosa, associata più alle superstizioni astrologiche e anticamente riservata agli stregoni e alle caste sacerdotali delle antiche religioni che assimilavano gli astri agli dei e gli eventi favorevoli, col culto mitologico nella loro adorazione.

Fu in questa forma che Talete di Mileto, ritenuto dalla tradizione come il maggiore dei sette sapienti dell'antica Civiltà talassica, che tra il VII-VI secolo a. C. durante il corso dei suoi numerosi viaggi, conobbe lo sviluppo e l'interpretazione irrazionale di questa scienza misteriosa, la quale, veniva gelosamente tramandata nelle rinomate scuole delle civiltà potamiche e custodita dalle caste sacerdotali; quelle di Menfi e di Tebe dell'antico Egitto consentirono l'accesso a Talete, che seppe guadagnarsi con la sua inusitata sapienza.

Talete e la nascita della scienza

Secondo le fonti storiche, Talete di Mileto (625-540 a.C.) viaggiò molto in Egitto ed in Asia Minore, si interessò con spirito poliedrico costruttivo e inventivo di geometria, astronomia, ingegneria, fisica, filosofia, di speculazioni commerciali e anche di politica.

«Talete si interessò a fondo anche di astronomia ed anzi gli furono attribuite tre opere, *Astronomia nautica*, *Sul Solstizio e Sull'Equinozio* (quest'ultime due, possibili parti della prima), riuscendo pure a “predire” l'eclisse di sole del 28 maggio 585 a. C., prima data nell'astronomia occidentale. Accogliendo la testimonianza di Eudemo, Talete fu il primo, tra i greci, a studiare l'astronomia e ad indagare i periodi, *con mezzi scientifici*». [BR, pp. 294, 295]

Platone lo nomina tra i suoi famosi “sette savi” della Grecia, la sapienza dei quali si esprimeva in brevi e memorabili sentenze; lo definisce inoltre (Rep. 600 a) come un “ingegnoso inventore di tecniche”. Comunque nessuna opera o alcuno scritto di questi è in nostro possesso.

Certamente Talete non fu né un filosofo, né uno scienziato in senso aristotelico, per primo, colse al di là della diversità e della molteplicità delle cose l'esistenza di un elemento unitario che identificò con l'acqua. Egli fu l'intelligente tramite culturale tra l'Egitto e la Grecia antica rivestendo quindi una posizione di primo piano. Fu colui che coraggiosamente spodestò gli innumerevoli dei e quel culto mitologico in cui erano immersi l'uomo e i popoli del suo tempo, per fecondare l'ovulo embrionale del pensiero razionale dimostrandone la sua enorme potenzialità nel determinare l'inaccessibile, l'inviolabile, nel misurare senza paura i fenomeni naturali sconosciuti e spiegandone semmai i motivi che li generano, nel conquistare, disegnare e addirittura racchiudere in una mappa l'unicità sferica del cosmo che l'uomo pensava ancora informe e irraggiungibile; un mondo ormai non più dominio esclusivo dei faraoni o degli dei, poiché, questo potente strumento razionale aveva messo nelle mani più famigliari dell'uomo del VI secolo a.C. l'immensa eredità di una planimetria universale del mondo, sorretto e generato da un unico principio primo, dal quale ora i discepoli di Talete potevano addirittura avanzare ipotesi, un'immensa avventura alla scoperta di un universo incredibilmente raggiungibile e determinabile con l'uso dell'intelletto, indirizzando così l'umanità verso un grande futuro perché da quel giorno in poi, il genere umano non doveva e non poteva più contare sull'Olimpo, ma solo esclusivamente sulla forza razionale della Scienza.

La chiave matematica di Talete apre la porta dell'astronomia razionale

Limitandoci brevemente all'attività matematica di Talete, osserviamo che la principale testimonianza che lo riguarda è quella dello storico Proclo, nel suo Riassunto (o *Commento al libro I degli Elementi di Euclide*).

Bruno Rizzi [BR, pp. 303, 304] elenca i seguenti punti:

1. “ Talete fu il primo che, andato in Egitto ne riportò questa dottrina e la introdusse nell'Ellade e molte scoperte fece egli stesso e di molte dette lo spunto ai sui successori, affrontando alcuni problemi in modo più sensibile o empirico (1a), altri in modo più generale (1b)”.
2. “ Talete fu il primo a dimostrare che il cerchio è bisecato dal diametro (2a)”.
3. “Talete fu il primo a intuire e ad affermare che gli angoli alla base di ogni triangolo isoscele sono uguali, solo chiamando, secondo l'uso più antico, “ simili” gli angoli uguali (3a)”.
4. “Questo teorema, trovato per la prima volta da Talete, come dice Eudemo e giudicato degno di dimostrazione scientifica da parte dell'Autore degli *Elementi*, dimostra dunque che quando due rette si tagliano fra loro, gli angoli al vertice sono uguali (4a)”.
5. “(con riferimento al II criterio di uguaglianza)...Eudemo nella sua Storia della geometria attribuisce questo teorema a Talete; perché per il metodo con cui si tramanda che egli indicasse la distanza delle navi in mare (5a), (5b) dice Eudemo che deve aver fatto uso di questo teorema.”
6. “Panfila dice che, appreso dagli Egizi lo studio della geometria, egli Talete per primo iscrisse in un cerchio il triangolo rettangolo (6a), (6b), e sacrificò un bove, altri, fra cui il matematico Apollodoro, dicono che la scoperta è di Pitagora”

7. “ Geronimo dice anche che misurò le piramidi (7a) dall'ombra aspettando il momento in cui le nostre ombre hanno la nostra stessa grandezza”

8. “A Talete si ascrive pure il merito di avere adottato l'arco di circolo (8a) come misura degli angoli.”

9. “ Dai teoremi tramandatici si è argomentato che, a Talete era anche noto il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo. Da un passo del matematico Gemino, conservatici da Eutocio, si apprende che gli antichi geometri dimostrarono questo teorema per tutti i casi speciali, cioè prima per il triangolo equilatero, poi per l'isoscele, quindi per lo scaleno (9a); mentre i posteriori dimostrarono il teorema in generale.”

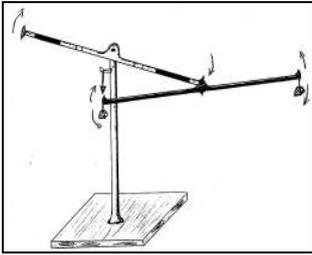
La creativa attività matematico - strumentale di Talete nonché la sua costante ricerca di una evoluzione sempre più precisa e universale dell'angolo e di uno strumento di collimazione, fu senz'altro la chiave che l'ha introdotto verso l'astronomia razionale; l'ingegnoso metodo dell'orizzontale e fedele ricostruzione sul terreno dei triangoli rettangoli per la determinazione dell'altezza inaccessibile e inviolabile delle piramidi ha generato tramite l'osservazione, l'ingegnosa invenzione successiva di uno strumento multifunzionale, basato invece sulla verticale costruzione meccanica dell'angolo retto mediante l'assemblaggio di due o più bilance; con due bilance Talete frazionò il mare per determinare la distanza inaccessibile delle navi in navigazione dentro l'orizzonte. Era nata così, la scienza strumentale.

La scienza strumentale di Talete

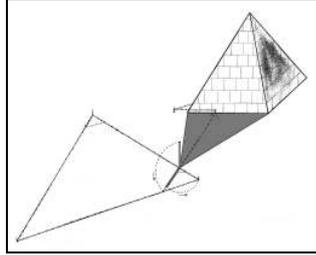
In questo articolo, giusto per dare una sintesi panoramica d'insieme dell'evoluzione e della molteplice applicazione di questo strumento multifunzionale che portò la scienza strumentale di Talete verso l'astronomia razionale, vengono ripresi i seguenti disegni enumerati in ordine, corrispondenti e correlati agli enunciati nei nove punti elencati in precedenza:

Ricostruzioni dell'autore

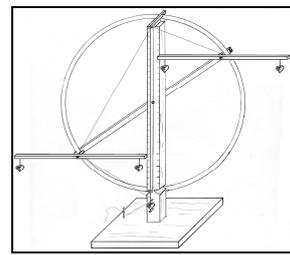
Punto 1.1a



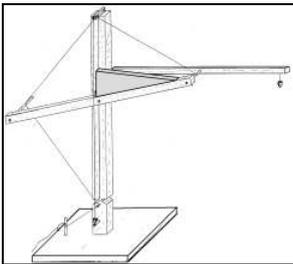
Punto 1.1b



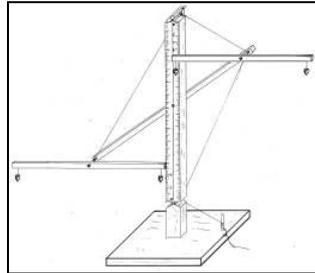
Punto 2.2a



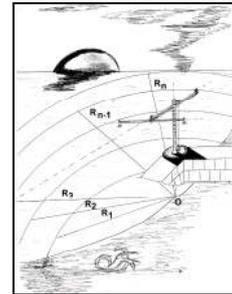
Punto 3.3a



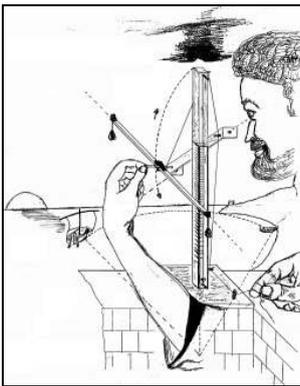
Punto 4.4a



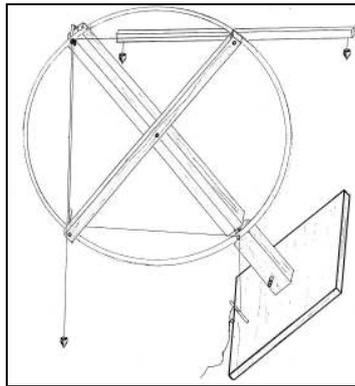
Punto 5.5a



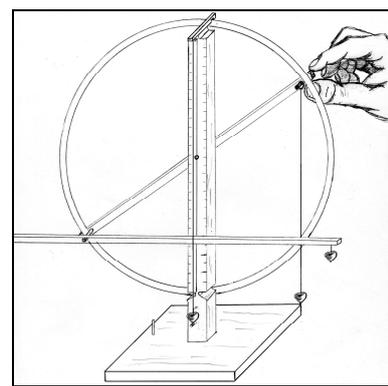
Punto 5.5b



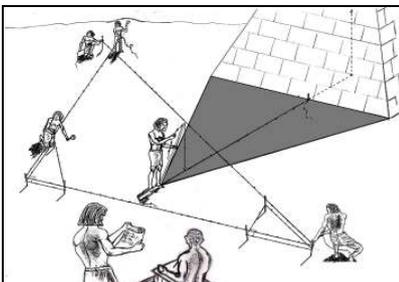
Punto 6.6a



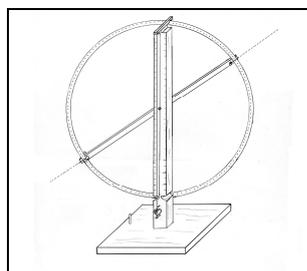
Punto 6.6b



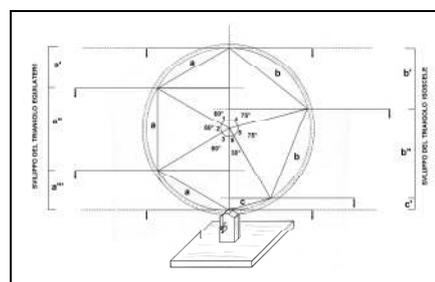
Punto 7.7a



Punto 8.8a



Punto 9.9a



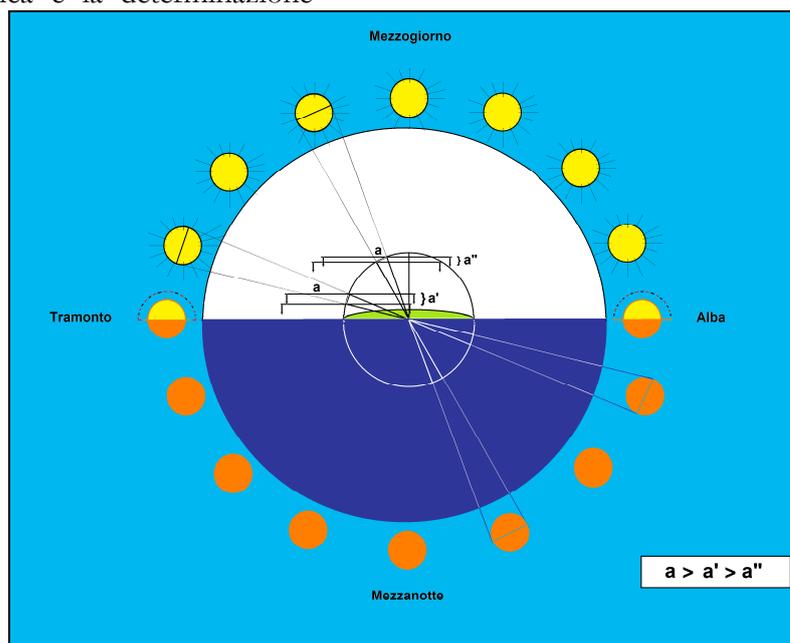
La prima mappa scientifica dell'universo

Non si può non rimanere stupiti per le notevoli e scoperte astronomiche e cosmologiche attribuite a Talete, e tutto ciò poteva essere avvenuto non solo per un salto di qualità del pensiero, non solo con l'ausilio della modesta strumentazione del tempo già menzionata ma sicuramente anche grazie all'invenzione di uno strumento speciale che doveva avere alla sua base funzionale dei buoni principi costruttivi – matematici e non unicamente per osservare, ma anche per poter permettere di “misurare” gli elementi del Cosmo pur con tutti i limiti di una scienza al suo esordio; un campo diottrico semplice ma ottimale d'inquadramento e di mira degli astri, supportato anche da un primordiale ma validamente alternativo apparato angolare, solo così si può ragionevolmente spiegare, per quell'epoca, la notevole indagine astronomica compiuta da Talete e la sbalorditiva precisione dei risultati: le scoperte del percorso obliquo delle costellazioni e del cammino delle stelle, l'individuazione fondamentale della stella polare per la navigazione, il ritorno annuale del Sole ecc., ma soprattutto i dati maggiori con l'osservazione, la spiegazione o la comprensione dell'eclisse di Sole, l'affermazione del giorno di novilunio nel quale correttamente si verifica e la determinazione

pressoché precisa dell'ampiezza angolare del Sole pari a $1/720$ della sua orbita, l'affermazione di posizione astronomica centrale della Terra nel Cosmo e di unicità di quest'ultimo; il primo modello cosmologico basato su dati e mezzi scientifici e col pianeta Terra rimasto per moltissimi secoli, ad eccezione del pitagorico Filolao, Aristarco di Samo, fino a Copernico, in una posizione cosmica centrale e privilegiata.

Il Cosmo di Talete

Il semplice Cosmo sferico, qui ipoteticamente ricostruito in sezione planimetrica, è stato probabilmente concepito da Talete nella sua elementare unicità come una calotta celeste visibile nell'emisfero concavo soprastante, saturo d'aria (colore bianco) e una calotta oceanica, invisibile nella parte emisferica convessa sottostante, saturata d'acqua (colore blu), con al centro la terra galleggiante a forma di disco piatto arrotondato (colore verde) e avente il visibile orizzonte terrestre (o marino) coincidente con la linea di confine dell'orizzonte cosmico (o celeste), attorno al quale avrebbero ruotato, nell'immediata periferia dell'universo, i due astri principali, le costellazioni e pensati inizialmente, dentro la Scuola Ionica, più di forma circolare che sferica.



Questo modello cosmologico di Talete, era probabilmente scaturito in conseguenza del suo metodo per il calcolo della misurazione dell'ampiezza angolare del Sole e della Luna.

Interessante è notare, come per Talete i due emisferi, nella spiegazione logica di questa ipotesi, basata nell'accettazione circolare dei moti per i corpi celesti osservati, nella determinazione ipotetica del calcolo dell'ampiezza angolare Sole - Luna, dovevano inevitabilmente appartenersi vicendevolmente ed avere in comune e necessariamente nel centro cosmico la totalità della terra emersa, concepita da Talete a forma di disco piatto e arrotondato ma galleggiante sull'acqua, escludendo per logica conseguenza, che l'emisfero sottostante poggiasse su altro, cosa questa poi contestata successivamente da Aristotele, ma da questo primo modello cosmologico ricostruito, non possiamo non accorgerci il prefigurarsi pur ancora inconsapevole, nella Scienza di Talete e con straordinario anticipo, di un potenziale processo di pensiero che ha così fecondato nella mente dell'uomo del VI secolo a. C., quell'embrione concepito poi nel principio newtoniano della gravità universale.

Il galleggiamento della Terra nell'oceano, secondo le varie testimonianze, era pensato da Talete analogamente ad un legno galleggiante o ad una nave e, quando essa è scossa o fluttua per il movimento dell'acqua, allora diciamo che c'è il terremoto (Seneca nat. Quaest. III 14), questa ipotesi di una Terra galleggiante e arrotondata, dovrebbe averla formulata anche per giustificare il fenomeno facilmente osservabile del variare giornaliero del cammino apparente diurno del Sole che gli risultava sempre diverso nel corso dell'anno.

“Karl R. Popper, riprendendo quest'affermazione ha individuato il punto centrale della teoria di Talete proprio nell'ipotesi della Terra galleggiante sull'acqua ipotesi, egli dice, “che anticipa così singolarmente la moderna teoria della deriva dei continenti” Cfr. *Conjectures and Refutations*, London 1969, traduzione di Giuliano Pancaldi, *Congetture e Confutazioni*, il Mulino 1972, pag.238”. B. Rizzi [BR, p. 298, nota 14]

“Aristotele nel *De Coelo*. “Altri dicono che essa [la Terra] posa sull'acqua. Questa è la più antica teoria tramandataci, e ne fanno autore Talete di Mileto: essa [la Terra] rimarrebbe ferma perché galleggerebbe come un pezzo di legno, o alcun-

ché altro di simile (anche questi corpi infatti sono per natura portati a posare non sull'aria, ma sull'acqua). Come se poi la medesima ragione non valesse, come per la Terra, anche per l'acqua che sostiene la Terra: neppure l'acqua ha infatti la proprietà di rimaner sospesa, ma poggia a sua volta su qualcos'altro. B. Rizzi [BR, p. 298, 299, nota 15]

Ancora, come l'aria è più leggera dell'acqua, anche l'acqua è più leggera della terra. Com'è possibile che ciò che è più leggero sia posto più in basso di ciò che per sua natura è più pesante?

Ancora: se per la sua natura la Terra è portata a posare sull'acqua tutta intera, è chiaro che lo sarà anche ogni sua parte; invece noi vediamo che questo non accade, ma qualunque parte di terra si prenda, questa precipita al fondo, e tanto più rapidamente quanto più è grande. Cfr. *De Coelo* II (B) 13, 294 a-b, trad. di Oddone Longo, Bari, Universale Laterza 1973, pp.309- 310.

La spiegazione della proposizione non si presenta dunque agevole. La critica di Aristotele fa pensare terra, acqua, aria poste in “ordine di leggerezza”, ma giova altresì rilevare che Aristotele non attribuisce a Talete riflessioni riguardanti, per così dire, il peso specifico.

Anche su questi punti il professor Rizzi aveva compiuto una coraggiosa e sottile osservazione ovvero, mettendo in evidenza la divagazione o la difficoltà filosofica del grande Aristotele sulla ben più profonda meditazione e intuizione cosmologica del precursore Talete; possiamo essere d'accordo e abbinare con quanto lo stesso Rizzi scrisse alle pagg. 297 e 323: “Ne nasce un singolare dibattito, ad una voce, con Aristotele che cerca il confronto col vecchio saggio per inquadrare, confrontare il “principio” di Talete con i propri [...] appena enunciati [...]. Insomma anche questa volta il saggio greco (Talete) seppe guardare ciò che gli altri avevano semplicemente “visto”.

Talete scala il cielo degli dei

L'idea strumentale di una misura angolare del diametro del Sole e di un rapporto in scala da cercare con la sua orbita, (o anche della Luna) era una meta che potenzialmente, grazie al suo multifunzionale strumento, Talete poteva già scorgere all'orizzonte e incredibilmente gli riesce raggiungere, spodestando gli dei, consegnando così un cielo nuovo ben al disopra

dell'Olimpo, alle future esplorazioni astronomiche e conquiste dell'uomo ma anche una scienza che condizionerà i maggiori pensatori successivi e getterà le basi agli studi e alle più grandi opere dell'antichità come gli *Elementi* di Euclide, *l'Ottica*, *la Catottrica* e *i Fenomeni*, quest'ultima, un'opera astronomica fondamentalmente basata e ripresa sul primo modello Taletiano.

Per un sapiente come Talete, che ha misurato con precisione e indirettamente l'altezza delle piramidi, che ha misurato indirettamente, con altrettanta precisione, la distanza delle navi spinte da Eolo nel mare di Poseidone e con lo stesso strumento ha presumibilmente scoperto e spiegato i teoremi fondamentali della geometria "sacra" dei sacerdoti egizi, postulando da questa scienza strumentale anche l'inizio della ricerca filosofica, non più di un'altra divinità ma di un principio primo naturale di tutte le cose su cui si fonda, si spiega e pervade tutto l'universo circostante, non è certo difficile immaginarci un Talete astronomo che, con l'uso dello stesso strumento e l'idea "utopistica" o "sacrilega" di valicare la linea dell'orizzonte per esplorare o violare il Cosmo degli dei, di determinare una scala del cielo fino allora riservato esclusivamente al dio egizio Thoth, di calcolare un rapporto tra il Sole e la sua orbita in un "viaggio" attorno alla Terra riservato solo al supremo dio cosmico Ra che incontrava al tramonto la dea egizia Nut, abbia dato inizio alla più grande rivoluzione culturale e scientifica dell'uomo che ha fatto probabilmente eclissare, come prima vittima eccellente, lo stesso dio creatore Ra, che si identificava al tramonto nel quotidiano richiamo alla vita in Ra-Atum, divenuto poi, Amon-Ra.

Talete fu presumibilmente aiutato anche da semplici scoperte qui di seguito ipotizzate, che per un osservatore attento e ingegnoso come lui, non devono essergli passate inosservate.

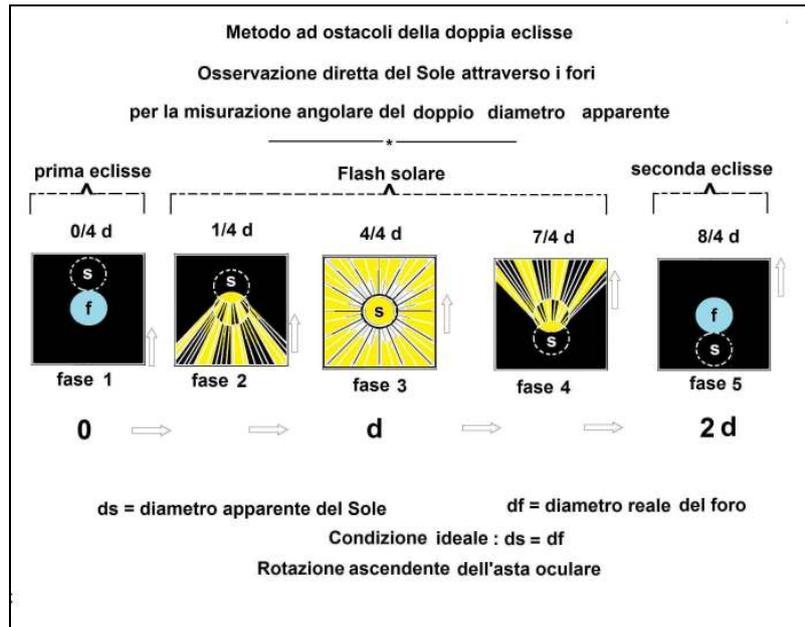
La doppia eclisse e l'osservazione indiretta del Sole

I traguardi (o pinnule) che delimitano il campo ottico dello strumento, nei quali sono stati praticati dei rispettivi fori, meglio se quest'ultimi, per una riuscita ottimale del metodo venissero realizzati con un diametro identico a quello ap-

parente degli oggetti cosmici di osservazione e quindi, nel caso della misura angolare del Sole, uguali al diametro apparente dell'astro solare; pertanto questi traguardi, in una iniziale osservazione diretta, avrebbero agito, col movimento ascendente e discendente dell'asta oculare, come dei veri e propri ostacoli tra l'occhio dell'osservatore e il Sole stesso o anche, nel caso, della Luna.

Detti traguardi, avrebbero giocato un ruolo vantaggioso nella schermatura protettiva dell'occhio per le osservazioni dirette del Sole, inoltre, come per la misura delle navi in mare, anche vantaggioso per una precisa "misurazione" del diametro solare apparente, in quanto, si avrebbe potuto spostare o distanziare a piacimento l'astro solare nel campo ottico strumentale, sino ad eclissarlo totalmente sia nella parte superiore come in quella inferiore del foro dell'obiettivo, ovvero, mediante il semplice movimento ascendente/discendente dell'asta oculare di collimazione, cercando nell'istante comune di buio, di far coincidere perfettamente la linea tangente immaginaria posta in comune tra la circonferenza del foro dell'obiettivo con l'identica circonferenza apparente del Sole artificialmente eclissato dietro il traguardo dello stesso obiettivo (vedi figura seguente)

L'osservatore, producendo artificialmente nel campo ottico o di mira strumentale una eclisse iniziale del Sole, ostacolando e collocando a piacimento l'intero astro apparente nella parte schermata del traguardo e tangente al punto superiore del foro dell'obiettivo (fase 1), mediante il movimento ascendente dell'asta oculare, faceva quindi gradualmente comparire il Sole (fase 2) fin tutta la sua apparente interezza e abbagliante luminosità tra i due fori ad esso allineati e dentro il campo ottico (fase 3), per farlo gradualmente scomparire (fase 4) nella parte schermata del traguardo, fino a farlo interamente eclissare e condurlo tangente al punto inferiore del foro dell'obiettivo (fase 5); un tale movimento dell'asta oculare, avrebbe così percorso idealmente, tra le due eclissi artificialmente prodotte: due volte l'intero diametro apparente del Sole.



La stessa cosa si poteva applicare ancor meglio, per la Luna piena e, non era cosa da poco; ora gli astri con le loro eclissi, non incutevano più paura sull'uomo, ora era l'uomo che li poteva addirittura eclissare!

Nel raggiungere i risultati di questa storica impresa, cioè nel determinare la misura angolare del Sole, Talete ha dovuto certamente sviluppare un lungo percorso scientifico che lo ha impegnato una vita intera, poiché pare dalle testimonianze, che questo risultato sia stato raggiunto solo sulla soglia della vecchiaia e, probabilmente, ipotizzando il raggiungimento di una connotazione di angolo formidabile per l'epoca; un concetto precursore a quello moderno del radiante! Ma non solo, percorrendo una fase empirica e innovativa dello strumento che avrebbe raggiunto anche il massimo della validità con quella probabile e fondamentale scoperta dell'osservazione indiretta del Sole mediante proiezione dell'astro tra i due fori strumentali, nonché tramite il raggiungimento di una precisione strumentale che Talete ha conseguito presumibilmente mediante queste ipotetiche tappe e scoperte:

1) Valutare con le prime misurazioni sperimentali, l'esclusione del bilanciamento dello strumento, il quale avrebbe portato minore sensibilità strumentale ma maggiore praticità, precisione ed eluso inevitabili discordanze angolari già probabilmente riscontrate didatticamente nello studio empirico della sommatoria degli angoli interni dei triangoli.

2) Riportare le tacche strumentali dal supporto originario, alla circonferenza di un cerchio incorporato allo strumento; l'angolo precursore al nostro radiante, sarebbe stato inteso da Talete più come una porzione di spazio individuata dall'asta oculare di collimazione degli astri sulla fune circoscrivente il cerchio dello strumento, e quindi, con una connotazione dell'angolo molto somigliante a quella ciclo-metrica a settore circolare, ovvero, di una misura circolare sulla circonferenza che si poteva sviluppare o stendere anche in orizzontale; un concetto che Talete poteva aver attinto dalle tecniche ciclo-metriche utilizzate frequentemente dagli artigiani carradori e dai vasai, o molto probabilmente dagli architetti Egizi.

3) Ricercare, mediante il metodo della doppia eclisse, la costruzione del foro perfetto coincidente con la circonferenza apparente dell'astro cosmico in osservazione e valutare col teorema di Talete, enunciato in precedenza [punto 4.4a], l'invarianza dei risultati a vantaggio della migliore praticità e dimensionamento, di un utilizzo dell'asta oculare di collimazione preferibile nella forma radiale che diametrale.

4) Verificare il foro perfetto calcolandolo per praticità e precisione finale, prima sull'astro lunare nella fase di Luna piena e poi su quello solare; la perfetta coincidenza porterà ad affermare la medesima ampiezza angolare per i due astri principali del Cosmo e quindi, per una teoria Euclidea della visione conica che sarebbe sopraggiunta, per le osservazioni astronomiche di Talete sulla grandezza apparente del Sole e

del passaggio perpendicolare della Luna sotto di esso durante l'eclisse, anche la conseguente affermazione della differente grandezza tra i due astri, ricercata poi dagli astronomi successivi.

5) La probabile scoperta di Talete dell'osservazione indiretta del Sole, forse avvenuta con la costante sperimentazione d'innovazione costruttiva dello strumento, gli avrebbe consentito con la proiezione indiretta dell'astro attraverso i fori, magari collegati anche da un tubicino (o canna) per ridurne l'interferenza della luminosità esterna, non solo una vantaggiosa osservazione del Sole, quasi a tavolino, non solo una determinazione angolare efficace e più precisa di quella diretta, ma probabilmente in una fase costruttiva di un fortuito foro stenopeico, anche l'inaspettata visibile e nitida proiezione di un'eclisse parziale o anula-

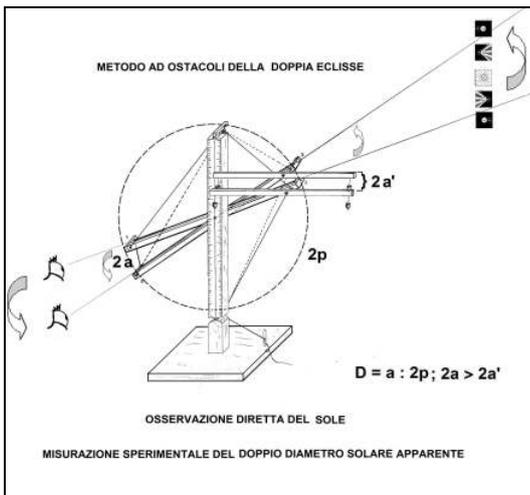
re, che in quel tempo era casuale osservare o captare sulla superficie dell'acqua guardando i riflessi del Sole.

6) Col metodo della doppia eclisse e la proiezione indiretta del Sole sopra un foglio di papiro utilizzato come schermo, Talete avrebbe calcolato il numero divino, ovvero, non il numero espresso in decimali di $1/720$ tra il diametro del Sole e la sua orbita, ma più semplicemente il numero di volte (720) in cui il diametro del Sole è contenuto dentro la stessa.

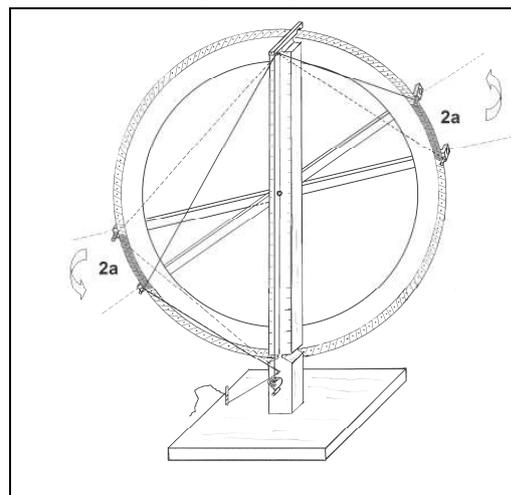
Anche in questo caso, sempre per dare una sintesi panoramica d'insieme dell'evoluzione e dell'applicazione di questo strumento multifunzionale, che portò Talete alla storica impresa astronomica, vengono qui di seguito ripresi i seguenti disegni enumerati e correlati alle tappe elencate nei sei punti precedenti:

Ricostruzioni dell'autore

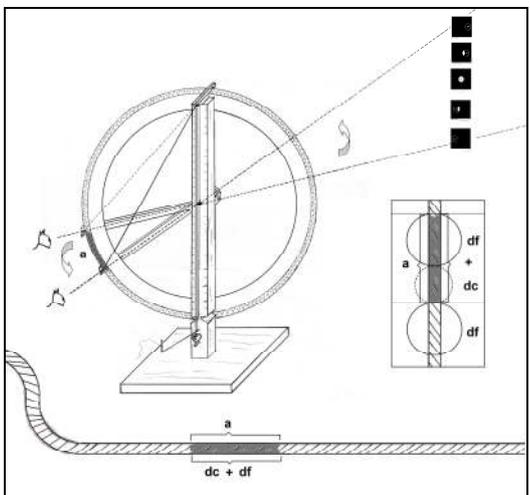
Punto 1



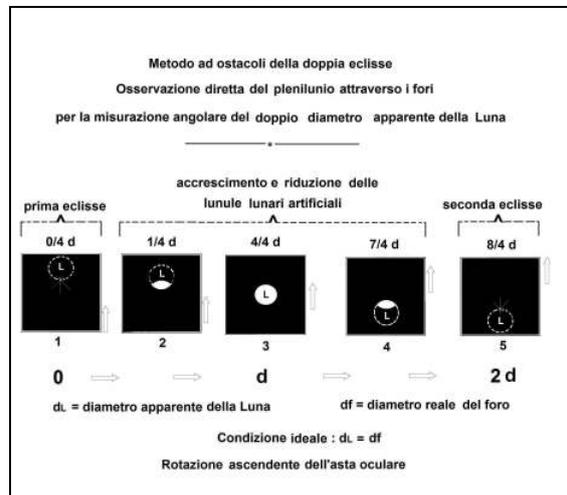
Punto 2



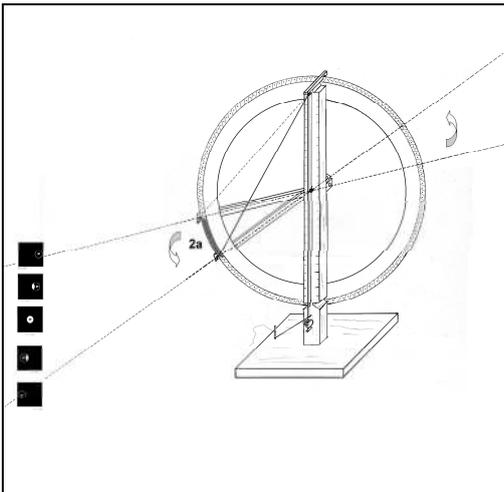
Punto 3



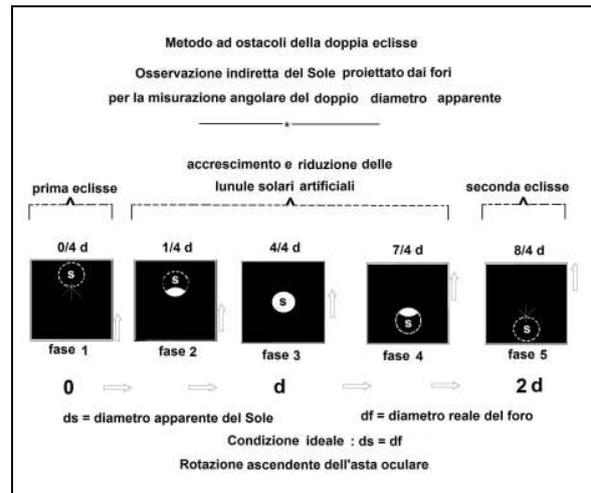
Punto 4



Punto 5



Punto 6



Talete calcola il numero divino

Le notevoli scoperte di Talete, per l'epoca, sarebbero risultate all'avanguardia, ma soprattutto riconoscendo a Talete il giusto titolo di "primo scienziato" che studiò in modo innovativo e originale i corpi celesti, l'espertissimo osservatore degli astri, che gli avrebbe solo per questo, garantito una certa paternità storica della scoperta o della comprensione dei fenomeni cosmici mediante l'invenzione di un semplice strumento astronomico che avrebbe anticipato di circa 2000 anni, con dei metodi efficacemente alternativi, il cannocchiale lenticolare galileiano e pertanto, non sarebbe improprio definire oggi, alla luce di queste ipotesi e risultati, l'astronomo Talete come, il "Galileo Galilei" dell'antichità. Ecco qui di seguito le probabili fasi operative con i calcoli per trovare il numero divino.

Predisponendo il distanziometro a strumento astronomico, mediante l'applicazione di un cerchio solido incorporato e circoscritto da una fune lungo tutta la circonferenza che poniamo uguale a "2p", dove il semicerchio superiore di ampiezza "p" rappresenta l'arco apparente di collimazione della calotta sferica celeste soprastante. Poniamo poi con "a" l'ampiezza dell'arco orientato sulla fune circoscritta al cerchio; un intervallo individuato in ampiezza dall'asta radiale di collimazione coi due estremi del diametro apparente del Sole. Talete, misurando col preciso metodo indiretto della doppia eclisse il doppio del diametro apparente, avrebbe pertanto individuato sulla circonferenza del cerchio dello strumento e quindi segnato sulla fune circoscrivente il corrispettivo spazio

dell'arco orientato occupante, che poniamo pari a 2a, inoltre, con questo metodo, avrebbe ridotto a metà anche il numero delle tacche di riparto dove da un numero di 720 sarebbero passate a 360 lungo tutto lo sviluppo totale della circonferenza del cerchio e quindi, attorno allo sviluppo di una circonferenza circoscritta dalla fune, la quale, sarebbe stata per comodità distesa successivamente su un piano orizzontale in tutta la sua lunghezza; ovvero, 180 tacche per ogni semicerchio o per ogni metà della stessa fune. Nel "seguire" il movimento iniziale di un Sole già alto sull'orizzonte, partendo da una qualsiasi e precisa ora del giorno, in un ideale viaggio orbitale che compiva giornalmente il dio egizio Ra intorno alla Terra, di durata pari a un giorno e a una notte fino all'alba successiva e raggiungendo la stessa ora iniziale di partenza, Talete avrebbe compiuto logicamente con lo strumento, in un tale ipotetico percorso zenitale o circumnavigante l'eclittica, un giro completo con l'asta oculare radiale, la quale, avrebbe percorso in questo ipotetico viaggio e in modo circolare, tutto il cerchio dello strumento, che poniamo pari a 2p.

Talete poteva così ottenere un rapporto tra: l'ampiezza "a" dell'arco orientato sulla fune e corrispondente al diametro solare apparente, con l'intero sviluppo pari a "2p" della fune stessa circoscritta al cerchio. Poniamo con "D" tale rapporto, ovvero: $D = a/2p$. Il rapporto doppio, col doppio diametro misurato, risulterà pertanto: $2D = 2a/2p$. E' più plausibile che Talete calcolò il rapporto doppio, nel modo inverso, ovvero: $2p/2a = 1/2D$, trovando così, non un rapporto espresso in decimali, ma più sem-

plicemente un numero intero, corrispondente a: “quante volte il Sole, col doppio del suo diametro, occupa la sua stessa orbita”.

Col metodo indiretto della doppia eclisse, le 360 tacche risultanti, (notare come questo numero riecheggia con la moderna suddivisione in gradi sessagesimali) scaturite da un riporto della doppia misura “2a” segnata sulla fune circoscrivente e distribuite lungo l'intera fune distesa sul piano orizzontale, rappresentano il numero di volte in cui, il doppio del diametro apparente sta nell'intera orbita zenitale del Sole, oppure, è lo stesso se diciamo che: il doppio del diametro solare apparente, rappresenta 1/360 dell'intera misura della circonferenza ovvero, dell'intera orbita apparente del Sole; un numero intero di volte, che poi deve essere raddoppiato per ottenere quello esatto che indica il preciso numero di volte in cui il singolo diametro solare sta nella sua stessa orbita; minore erano i riporti distribuiti lungo la fune distesa sul piano, minore risultava l'errore accumulato nell'operazione e quindi più preciso era il numero finale cercato.

Il numero divino accordato

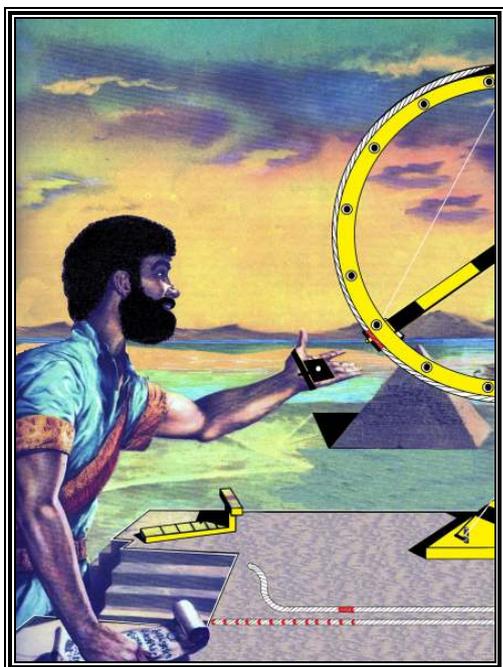


Figura ripresa e modificata dal Dizionario Enciclopedico, CONOSCERE, F.lli Fabbri Editori, 1964, Vol n° 1, pag 21.

Questo metodo, avrebbe consentito a Talete, non solo di ridurre conseguentemente l'accumulo complessivo dei riporti, ma anche di

ridimensionare a piacimento la grandezza dell'asta oculare e quindi di semplificare la grandezza o anche la fattezze dello stesso strumento a vantaggio della precisione, permettendogli, di stabilire ulteriori verifiche strumentali dell'ampiezza angolare del Sole; per esempio, costruendo lo strumento col solo semicerchio sinistro e con una semifune ad esso circoscritta o col solo quarto di cerchio, precorrendo in questo caso, uno strumento di fattezze molto simile al quadrante astronomico Tolemaico o con la sesta/ottava parte del cerchio, precorrendo rispettivamente il sestante o l'ottante nautico e astronomico; quest'ultimi strumenti, per l'epoca, ci sembrano decisamente prematuri, ma ormai la strada strumentale Talete l'aveva inequivocabilmente tracciata.

Conclusioni

Avviandoci così verso la conclusione, possiamo dire che, se la scienza strumentale o “meccanica” iniziata da Talete di Mileto era sì “rudimentale”, suscettibile di venire, sia per l'imperfezione costruttiva, sia per l'errore intrinseco strumentale ed estrinseco dell'acuità visiva e per l'epoca platonica, osteggiata e destinata per questo a breve durata, ma è altrettanto vero che comunque la si giudichi il suo apporto, sia come impiego precursore della moderna topografia, dell'astronomia terrestre e nautica nonché della fisica sperimentale, sia come stimolo e interesse verso la geometria e la filosofia naturalistica, suscitato nei matematici, fisici, filosofi e astronomi posteriori, ha generato inequivocabilmente l'inizio della vera scienza e della vera astronomia.

Possiamo concordare perfettamente col pensiero che il Professor Bruno Rizzi già espresse a conclusione del suo articolo:

“Ma altrettanto facile e doveroso è concludere che, contro tutte le possibili recriminazioni, la “lunga marcia” del pensiero occidentale fu iniziata inequivocabilmente con il “primo passo” di Talete”.

Questo pensiero ci consente un collegamento per un'ulteriore precisazione: Talete, non fu solo il filosofo dell'acqua o l'autore improbabile di un teorema geometrico scolastico, ma fu molto di più, Talete riassume l'erede legittimo della cultura dell'antico Egitto, che attraverso i suoi innovativi contributi e degni successori ci ha tra-

mandato e consegnato nei secoli, con una nuova e sempre più moderna veste, quel “SAPE-RE” che oggi ci siamo abituati a chiamare semplicemente col nome universale di SCIENZA.

Chi volesse ulteriormente approfondire o scoprire ancora di più su questo primo scienziato dell’antichità, può entrare, per scaricare gratuitamente e integralmente questa ricerca, nel sito dell’autore: www.storiadellamatematica.it.

BIBLIOGRAFIA

[BR] Bruno Rizzi: TALETE ED IL SORGERE DELLA SCIENZA ATTRAVERSO LA DISCUSSIONE CRITICA, Physis 1980

[RK] Richard Klimpert: STORIA DELLA GEOMETRIA , Tradotto, con note e aggiunte dal Professore di Topografia nel R. Istituto Tecnico di Bari, Pasquale Fantasia , Gius. Laterza e Figli, Bari, 1901.

[CS] Charles Singer: BREVE STORIA DEL PENSIERO SCIENTIFICO, Einaudi, 1961.

[FI] Francesca Incardona, EUCLIDE OTTICA, immagini di una teoria della visione, Di Renzo Editore, 1996.

[FK] Friedrich Klemm, STORIA DELLA TECNICA, Feltrinelli, 1966.

[KF] Kitty Ferguson, LA MUSICA DI PITAGORA, Longanesi 2009.

[LC] Laura Catastini e Franco Ghione LE GEOMETRIE DELLA VISIONE, Scienza, Arte, Didattica, Springer 2006.

[AF] Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, GLI ELEMENTI DI EUCLIDE, U.T.E.T. 1970.

[CB] Carl B. Boyer, STORIA DELLA MATEMATICA, introduzione di Lucio Lombardo Radice, traduzione di Adriano Carugo, Mondadori 2008.

[LR] Lucio Russo: LA RIVOLUZIONE DIMENTICATA, Feltrinelli 1996 e nuova edizione 2005

[AP] André Pichot, LA NASCITA DELLA SCIENZA, MESOPOTAMIA, EGITTO, GRECIA ANTICA, Edizioni Dedalo 1993.

[AL] Adolfo La Rocca, IL FILOSOFO E LA CITTÀ, commento storico ai Florida di Apuleio, Edizioni L’Erma di Bretschneider, 2005.

125. Simulazioni del decadimento radioattivo con la TI Voyage 200

di Pietro Romano

[pr.romano@tin.it]

L. S. "Leonardo", Giarre (CT)

Abstract. *A graphical calculator, as TI Voyage 200, can be used to simulate stochastic processes through its pseudo-casual number generator. In this work, we realize a simulation of nuclear decay, to verify the laws governing this process.*

Introduzione

In questo articolo, si espone una attività didattica, realizzata con la calcolatrice grafica TI Voyage 200, dedicata alla simulazione di processi stocastici mediante l'uso delle funzioni di generazione di numeri pseudo-casuali di cui questa calcolatrice dispone. Più dettagliatamente, il tema trattato è quello dei decadimenti radioattivi.

L'attività può essere sviluppata anche con il foglio elettronico Excel. La scelta delle calcolatrici grafiche è stata dettata dal fatto che, avendone a disposizione una per alunno, è stato possibile lavorare direttamente nella classe.

Gli studenti coinvolti facevano parte di una quinta classe liceo Scientifico sperimentazione Brocca. Nel corso del quinquennio avevano avuto modo di utilizzare con discreta continuità la calcolatrice e ne conoscevano i vari ambienti (in particolare, Home, Graph, Data/Matrix Editor, etc.). Inoltre, gli studenti conoscevano i comandi di base del TI Basic, il linguaggio di programmazione di cui le calcolatrici sono dotate.

La legge del decadimento radioattivo

Il decadimento radioattivo [1] è un processo essenzialmente stocastico, la cui caratteristica basilare risiede nel fatto che *la probabilità che ogni singolo nucleo ha di decadere in un dato tempo Δt è costante*. Questa affermazione segue direttamente dalla legge (sperimentale) che governa questo fenomeno:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

N_0 rappresenta la popolazione iniziale di nuclei; $N(t)$ i nuclei residui al tempo t . La costante τ (costante di decadimento) rappresenta la "vita media", cioè il tempo necessario affinché la popolazione iniziale si riduca al valore $\frac{N_0}{e}$.

La prima fase di studio è dunque consistita nell'analisi della (1) e, in particolare, del significato della grandezza τ . In fig. 1, mostriamo alcuni grafici per differenti valori di τ :

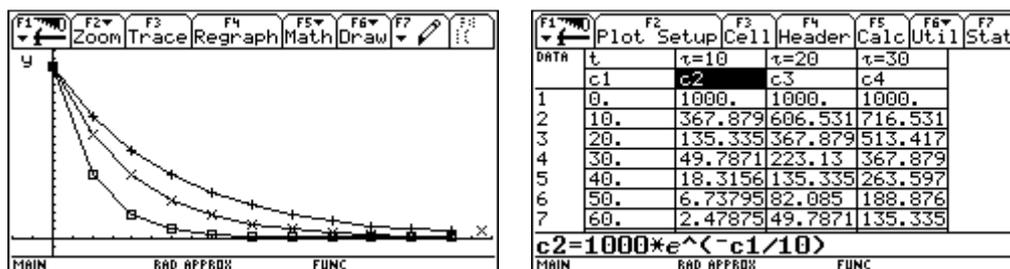


Fig. 1: la legge del decadimento (1) per tre differenti valori di τ .

Considerazioni teoriche

Alla base delle tecniche di simulazione utilizzate, bisogna premettere qualche considerazione teorica. Dalla relazione (1), fissato un intervallo di tempo Δt , si trova:

$$\begin{cases} N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ N(t + \Delta t) = N_0 e^{-\frac{t + \Delta t}{\tau}} \end{cases} \Rightarrow \frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{N(t)} = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = p \quad (2)$$

La quantità espressa in (2) rappresenta la frequenza di decadimenti nel tempo Δt . Essendo τ costante e Δt fissato, essa è costante e, in conseguenza della natura statistica del fenomeno, rappresenta proprio la probabilità costante di cui si è detto.

Ciò consentirà di simulare il processo utilizzando la funzione di generazione di numeri pseudocasuali della Voyage 200 (la funzione $rand()$) e verificare come il numero di nuclei residui in funzione del tempo sia correttamente rappresentato dalla relazione (1).

Altro fatto ben noto è relativo a come si distribuisce il numero di decadimenti in un dato intervallo Δt , assegnato il numero iniziale N_0 di nuclei e la probabilità p di decadimento nel dato Δt . Esso è dato dalla legge binomiale [2]:

$$B_{N_0, k} = \binom{N_0}{k} p^k q^{N_0 - k} \quad (3)$$

dove $q = 1 - p$. Se poi p è molto piccola ed N_0 molto grande, posto $\lambda = N_0 p$, la (3) può scriversi (distribuzione di Poisson):

$$P_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

È stato quindi studiato graficamente il problema delle analogie e delle differenze che si hanno fra queste due distribuzioni, osservando come esse sono praticamente indistinguibili per piccoli valori di p (Nella figura seguente, il confronto fra le distribuzioni binomiale (linea + quadrato) e di Poisson (linea) per due differenti valori di p).

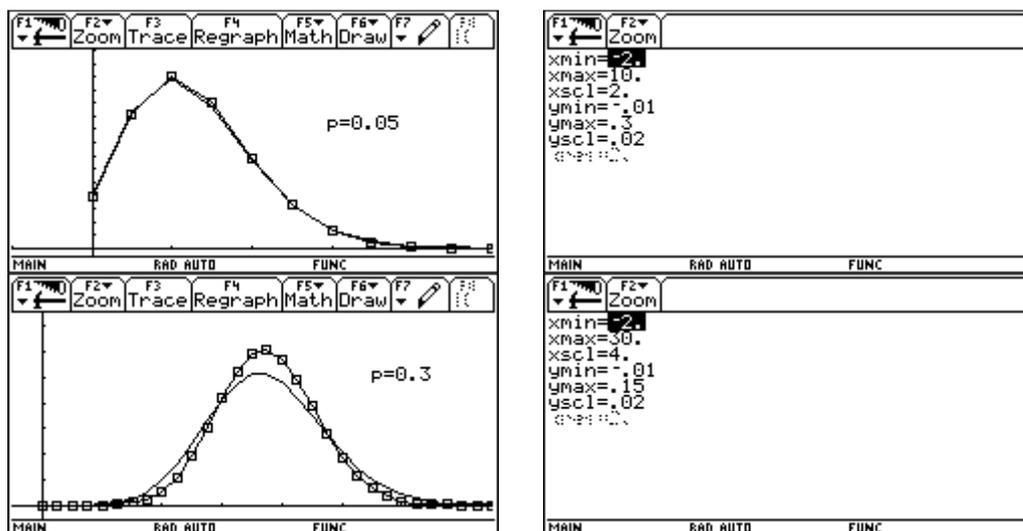


Fig. 2: Confronto tra le distribuzioni Binomiale e di Poisson per $N_0=50$ e per due differenti valori di p (a destra, le relative impostazioni della finestra grafica).

Anche in questo caso, il processo di simulazione si baserà sull'uso della funzione *rand()*.

Simulazione 1: La legge esponenziale

Descriviamo sinteticamente le operazioni da compiere: fissiamo un intervallo di tempo Δt , ed un valore di probabilità p ($0 < p < 1$, probabilità che un nucleo ha di decadere in Δt), vogliamo “seguire” l'evoluzione di un nucleo per un certo numero di questi intervalli (diciamo per it intervalli, quindi un tempo complessivo pari a $t_{fin} = it \cdot \Delta t$). Generiamo quindi un numero casuale ψ e se risulta $\psi < p$, si assume che il nucleo è decaduto entro il tempo Δt . Se è invece $\psi \geq p$, si procederà a successive generazioni di numeri casuali fino a che non risulti $\psi < p$. Se, ad esempio, ciò si verifica dopo aver generato k numeri casuali, considereremo il decadimento avvenuto tra il tempo $(k-1)\Delta t$ ed il tempo $k\Delta t$.

La procedura va poi ripetuta per il numero totale di nuclei (N_0) che si vuole prendere in considerazione. La figura che segue mostra il listato del programma:

```

3a
:degrad()
:Prgm
:ClrHome
:DelVar temp,na
:Dialog
:Title "Decadimento Radiattivo"
:Request "num iniz eventi",num
:Request "num periodi",it
:Request "durata periodi (s)",deltat
:Request "probab decad (0<p<1)",p
:EndDialog
:expr(num)>num

3b
:expr(it)>it
:expr(deltat)>deltat
:expr(p)>p
:For j,1,it+1
:  @>temp[j]
:  @>na[j]
:EndFor
:num>na[1]
:For i,1,num
:  @>ctrl
:  For j,2,it+1
:    If ctrl=0 Then
3c
:If rand()>=p Then
:  na[j]+1>na[j]
:  1>ctrl
:EndIf
:EndFor
:For j,2,it+1
:  (j-1)*deltat>temp[j]
:  na[j-1]-na[j]>na[j]
:EndFor
:EndPrgm
    
```

Fig. 3: il programma Decrad() visualizzato nell'ambiente Program Editor.

La variabile *num* corrisponde a N_0 , *deltat* è invece l'intervallo Δt . La variabile *it* rappresenta il numero complessivo di intervalli Δt che vengono presi in esame. Il programma costruisce essenzialmente un vettore $temp[J] = (J-1)\Delta t$, contenente il tempo iniziale di ognuno dei periodi Δt che si susseguono, ed un vettore $na[J]$, contenente il numero di nuclei residui al tempo $(J-1)\Delta t$.

Una volta avviato il programma dall'ambiente *Home* della calcolatrice, si ottiene la schermata per l'input dei dati (fig. 4a). Con riferimento ai dati indicati, il tempo di elaborazione è di circa 6 minuti. Completata questa fase, ci si porta in ambiente *Data/Matrix editor* (fig. 4b) per predisporre una tabella con i risultati del calcolo.

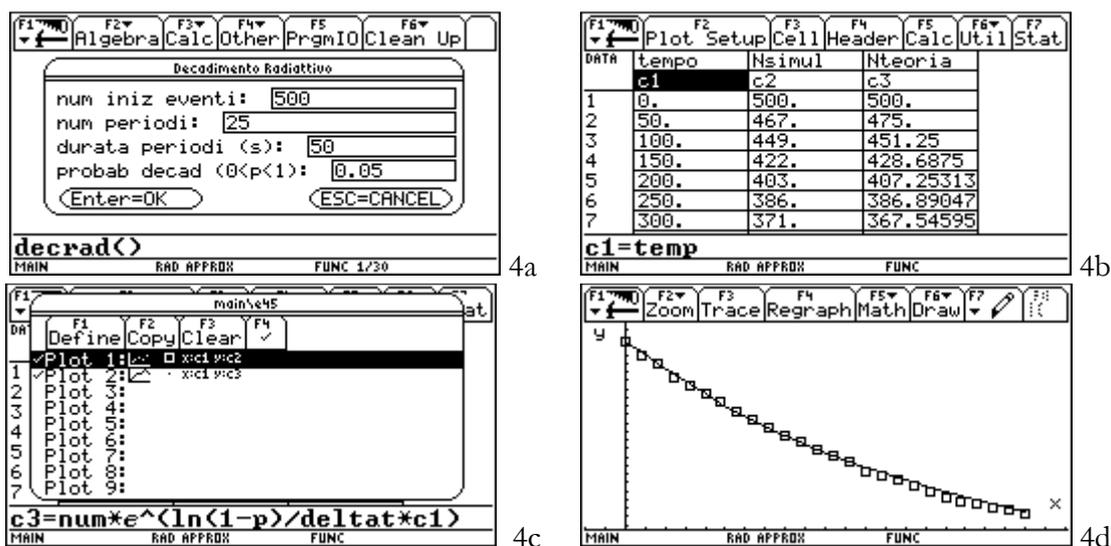


Fig. 4: le varie fasi della simulazione.

La prima colonna (C1) riporta il vettore $temp[J]$. Per operare questa assegnazione, nella cella contrassegnata “c1” si inserisce il nome del vettore; con procedura analoga, alla seconda colonna (C2) viene assegnato il vettore $na[J]$. La colonna C3 riporta il numero dei nuclei residui calcolati attraverso la (1) e, per questo, serve determinare τ . Da $p = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$

$$\text{(rel. (2)), segue } \tau = -\frac{\Delta t}{\ln(1-p)}.$$

Dopo aver completato le operazioni sulla tabella, bisogna predisporre la finestra grafica. Si seleziona F2 (Plot Setup), quindi F1 (Define). Come è possibile rilevare da fig. 4c, nell'esempio si ha un *Plot 1* per la rappresentazione dei dati della simulazione, ed un *Plot 2* per la rappresentazione dei dati calcolati attraverso la (1). Si può a questo punto passare in ambiente *Graph*. Viene automaticamente visualizzato il grafico (fig. 4d – i quadrati si riferiscono alla simulazione; la linea si riferisce al calcolo con la (1)).

In fig. 5 ed in fig. 6, vengono presentate altre due situazioni. La prima si riferisce ad una simulazione con una popolazione iniziale di 3000 atomi, osservati per 20 periodi Δt pari a 15 s, nel caso in cui la probabilità di decadimento nel tempo Δt è pari 0,1. Il tempo necessario è in questo caso circa 28 minuti.

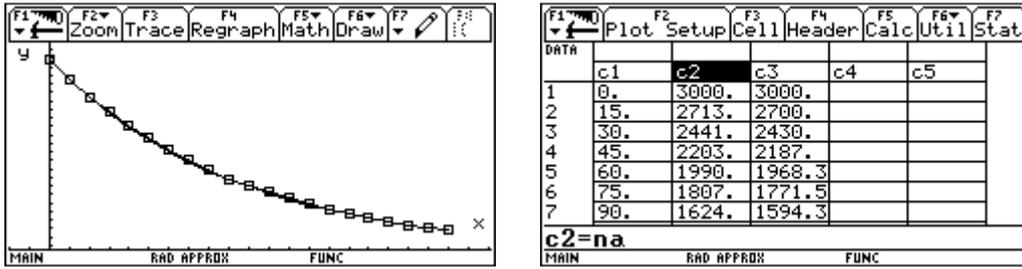


Fig. 5: $N_0=3000$ atomi $\Delta t=15$ s numero di periodi=20 $p=0,1$.

La seconda si riferisce invece ad una simulazione con una popolazione iniziale di 500 atomi, osservati per 10 periodi Δt pari a 30 s, nel caso in cui la probabilità di decadimento nel tempo Δt è pari 0,5.

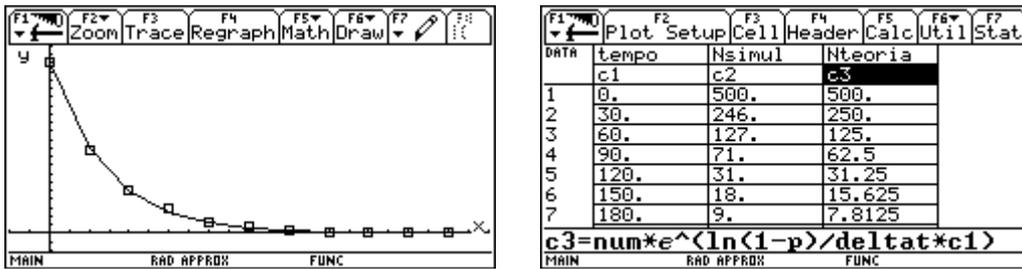


Fig. 6: $N_0=500$ atomi $\Delta t=30$ s numero di periodi=10 $p=0,5$.

Simulazione 2: la distribuzione binomiale

Si vogliono ora “osservare” per un intervallo di tempo fissato (Δt) un numero (N_p) di campioni, tutti contenenti lo stesso numero iniziale di nuclei (N_0). Lo scopo è quello di osservare che il numero di nuclei residui segue una distribuzione binomiale.

Fissata, come prima, la probabilità p di decadimento in Δt , si generano N_0 numeri casuali e si conta il numero delle volte che si ottengono valori $\psi < p$ (nuclei decaduti). Si ripete la procedura N_p volte. Il listato è il seguente:

```

:decrad1(
:Prm
:ClrHome
:DelVar nal,vett
:Dialog
:Title "decadimenti radioattivi 2"
:Request "num eventi N0",num
:Request "num prove Np",prov
:Request "prob decad (0<p<1)",p
:EndDialog
:expr(num)+num
:expr(prov)+prov
MAIN          RAD AUTO          FUNC
7a

:expr(p)+p
:For i,1,prov
:  0→nal[i]
:  For j,1,num
:    If rand()<=p Then
:      nal[i]+1→nal[i]
:    EndIf
:  EndFor
:EndFor
:For i,1,num+1
:  0→vett[i]
:EndFor
:For i,1,prov
:  vett[nal[i]+1]+1→vett[nal[i]+1]
:EndFor
:EndPrgm
MAIN          RAD APPROX          FUNC
7c
    
```

Fig. 7: Il programma Decrad1() visualizzato nell'ambiente Program Editor.

In questo caso, la variabile num è N_0 , mentre $prov$ è N_p . Il programma genera come risultato finale il vettore $vett[j]$, ($j = 1, \dots, num + 1$), il cui j -esimo elemento contiene il numero complessivo di prove in cui si sono avuti $j - 1$ decadimenti.

La figura che segue mostra il confronto tra la distribuzione teorica (4) (binomiale) e il risultato della simulazione, in tre differenti situazioni, tutte caratterizzate dallo stesso numero di atomi iniziale ($N_0 = 100$ nuclei) e dallo stesso numero di prove ($N_p = 500$), ma per tre differenti valori della probabilità di decadimento ($p = 0,1$; $p = 0,2$; $p = 0,3$). Il tempo per ognuna di queste tre simulazioni è stato poco più di 30 minuti.

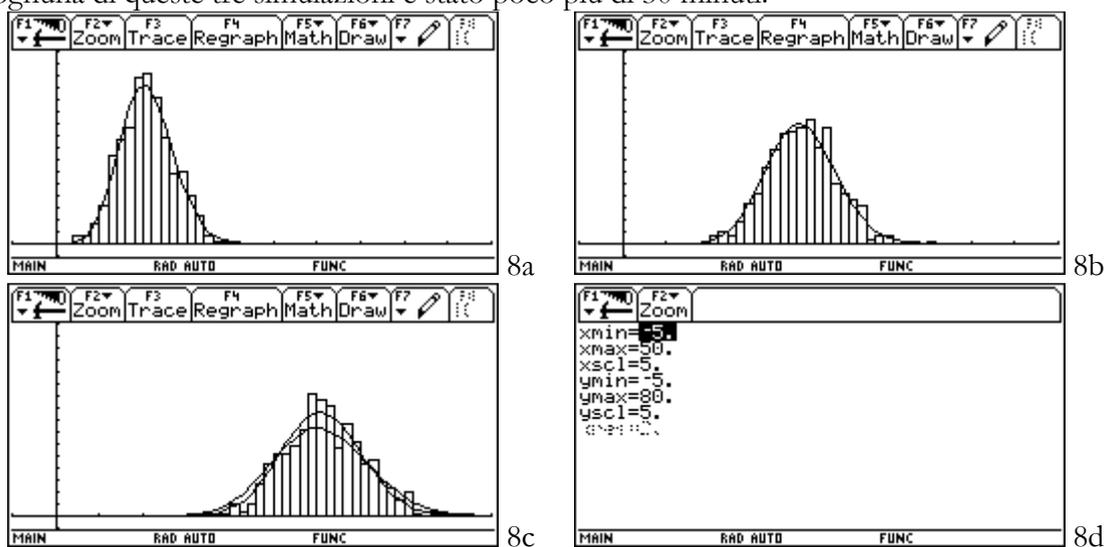


Fig. 8: Confronto fra distribuzione teorica e simulazione nel caso di $N_0=100$ atomi, $N_p=500$ prove, e per tre differenti probabilità di decadimento: $p=0,1$ (fig.a), $p=0,2$ (fig.b), $p=0,3$ (fig.c).

L'accordo tra simulazione e distribuzione teorica è buono e ci permette di concludere che la tecnica di simulazione è adeguata. In fig. 8c, come ulteriore confronto, viene mostrata, oltre alla distribuzione binomiale, anche quella di Poisson, che, delle due, è quella più bassa, e mostra un peggiore adattamento del dato teorico alla simulazione. Queste differenze diventano praticamente impercettibili se si riduce il valore di p . In fig. 9, viene mostrato il risultato di una simulazione con $N_0 = 50$ nuclei, $N_p = 950$ e $p = 0,05$ (tempo di calcolo di poco inferiore a 30 minuti):

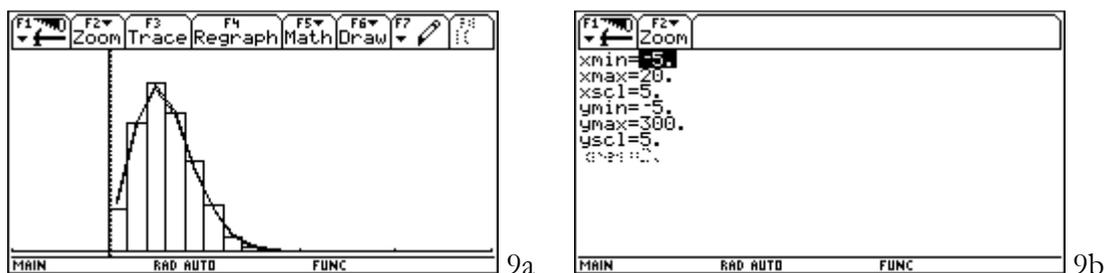


Fig. 9: Confronto fra distribuzione teorica e simulazione nel caso di $N_0=50$ atomi $N_p=950$ prove e per $p=0,05$.

Anche in questo caso, sono state rappresentate sia la distribuzione binomiale che quella di Poisson, ma esse risultano, per il basso valore di p , praticamente indistinguibili.

Conclusioni

Lo studio della legge del decadimento radioattivo viene normalmente svolto nei mesi finali dell'ultimo anno di corso, nell'ambito dell'unità didattica che riguarda il nucleo ed i processi nucleari. Non sempre il tempo è sufficiente per approfondire queste tematiche. Inoltre, è evidente che sono necessarie, da parte degli studenti, competenze che devono essere state gradualmente acquisite durante tutto il quinquennio. Una attività di questo tipo va quindi inquadrata all'interno di una pianificazione didattica di lungo periodo. Il tempo necessario può anche essere ricavato utilizzando qualche ora di informatica, visto che questa disciplina è coinvolta in modo importante. È quindi necessario un coordinamento con l'insegnante di matematica, se diverso da quello di fisica.

Tutto ciò premesso, la valenza didattica di una impostazione di questo genere, è innegabile, in quanto sono in gioco aspetti che poi si ritrovano nelle moderne metodologie della ricerca scientifica e/o in svariati settori lavorativi.

Bibliografia

- [1] A. Caforio, A. Ferilli, *Fisica vol. 3*, Le Monnier, Firenze 2005, pag. 554-556.
- [2] M. Trovato, R. Manfredi, *Nuovi Elementi di Matematica – Calcolo delle probabilità e statistica inferenziale*, Ghisetti & Corvi Editori, Milano 1997, pag. 115-148.

Proprietà dell'equazione di Dieterici

di Antonello Urso

Introduzione

Il semplice modello base offerto dalla teoria cinetica molecolare (ovvero schematizzando le molecole come corpuscoli dotati di una certa massa e velocità) è soddisfacente in quanto consente di ricavare la legge di stato dei gas ideali utile nel caso di pressioni molto basse: $PV = nRT$.

Sotto condizioni più generali invece i vari gas mostrano deviazioni non trascurabili. Sorge allora spontanea la domanda sulla possibilità di poter comprendere la natura di queste deviazioni usando per un gas un modello più elaborato; è pertanto molto interessante indagare su quali ritocchi siano necessari al modello precedente. Nella sua celebre equazione

$$(P + a/V^2)(V - b) = nRT$$

Van der Waals per primo aggiunse due termini in più: un termine "b" legato al volume occupato dalle molecole, e un termine "a" che rappresenta le forze di attrazione che si manifestano tra le molecole.

Con questi accorgimenti l'equazione di Van der Waals presenta un certo miglioramento tuttavia è per molti aspetti ancora insoddisfacente tanto che subito dopo la sua apparizione ne nacquero molte varianti.

Una tra quelle più famose su cui ci soffermeremo è l'equazione di stato dei gas reali nella forma data da Conrad Heinrich Dieterici.

Teoria

Studieremo in questo articolo alcune interessanti proprietà dell'equazione termodinamica di Dieterici applicabile ad una mole di un generico gas:

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} \exp[-a(T)/RTV] \quad (1)$$

dove viene supposto, per maggiore generalità, che il coefficiente di attrazione intermolecolare "a" dipendente dalla temperatura.

Ricaveremo mediante la (1) la relazione tra tensione di vapore saturo e temperatura.

Una relazione empirica che rappresenta bene tale relazione è l'equazione di Guggenheim (nella fig.1 in rosso), che scriveremo seguendo il principio degli stati corrispondenti (s.c.) per cui i tre valori critici nella rappresentazione PVT saranno uguali ad 1, cioè: $P_c = V_c = T_c = 1$:

$$p \cong \exp(5.4 - 5.4/t) \quad (1a)$$

oppure la seguente semplice equazione empirica (nella fig.1 in blu) ricavata dal sottoscritto:

$$p \cong t^6 \quad (1b)$$

l'intervallo di temperature da considerare è: $0 < t \leq 1$.

Supponendo ora che sia¹: $a(T) = a_0 \frac{T_c}{T}$; scriviamo la (1) in s.c.:

$$p(v, t) = \frac{t}{2v - 1} \exp(2 - 2/t^2 v) \quad (2)$$

Se tracciamo la retta $v=1$ nel diagramma pv , essa intersecherà per una data temperatura la funzione di Dieterici nel punto che determina la tensione di vapore saturo (equilibrio liquido-vapore); cioè: $p_{lv}(t) = p(1, t)$, usando la (2):

$$p_{lv}(t) = t \exp(2 - 2/t^2) \quad (2a)$$

(fig. 1 in nero)

Vedi la fig.1 per il confronto tra le formule (1a), (1b), (2a); è anche possibile ricavare la curva di Andrews sfruttando la stessa retta $v=1$: Vedi la fig.2.

¹ Per H₂O abbiamo invece: $a(T) = a_0 (T_c/T)^{3/2}$

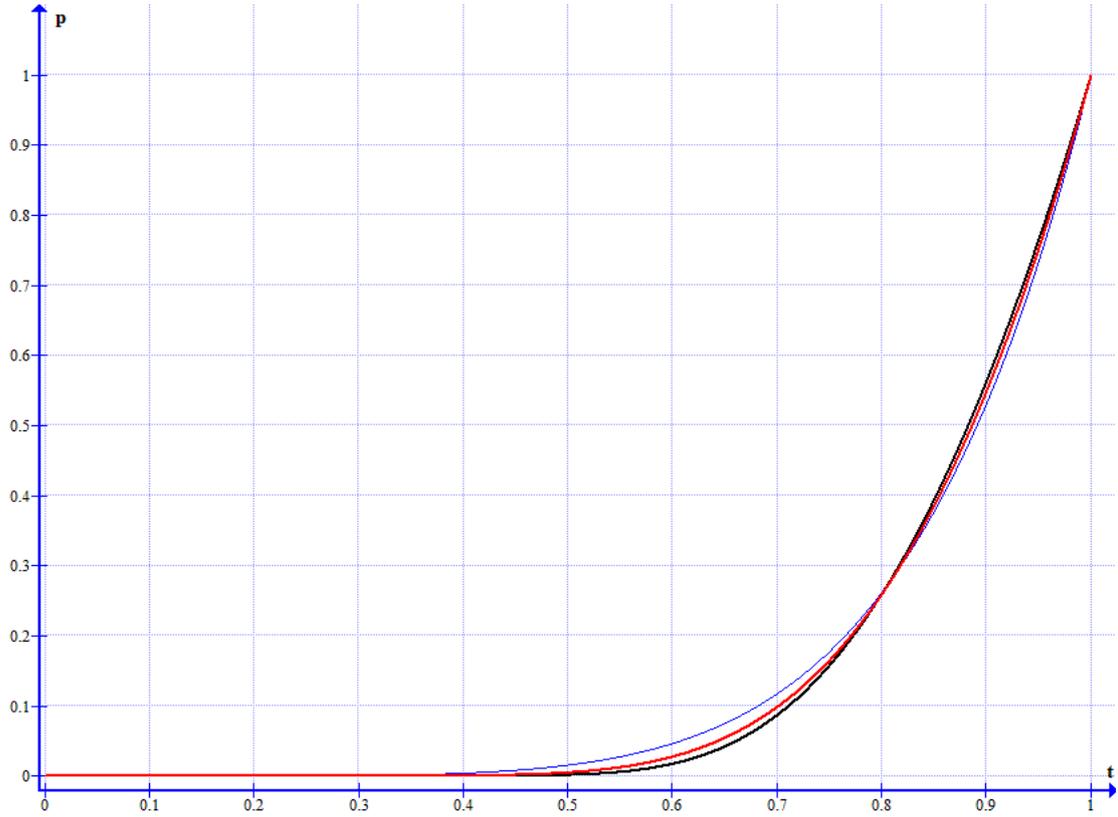


Figura 1 - Tensioni di vapore saturo empiriche

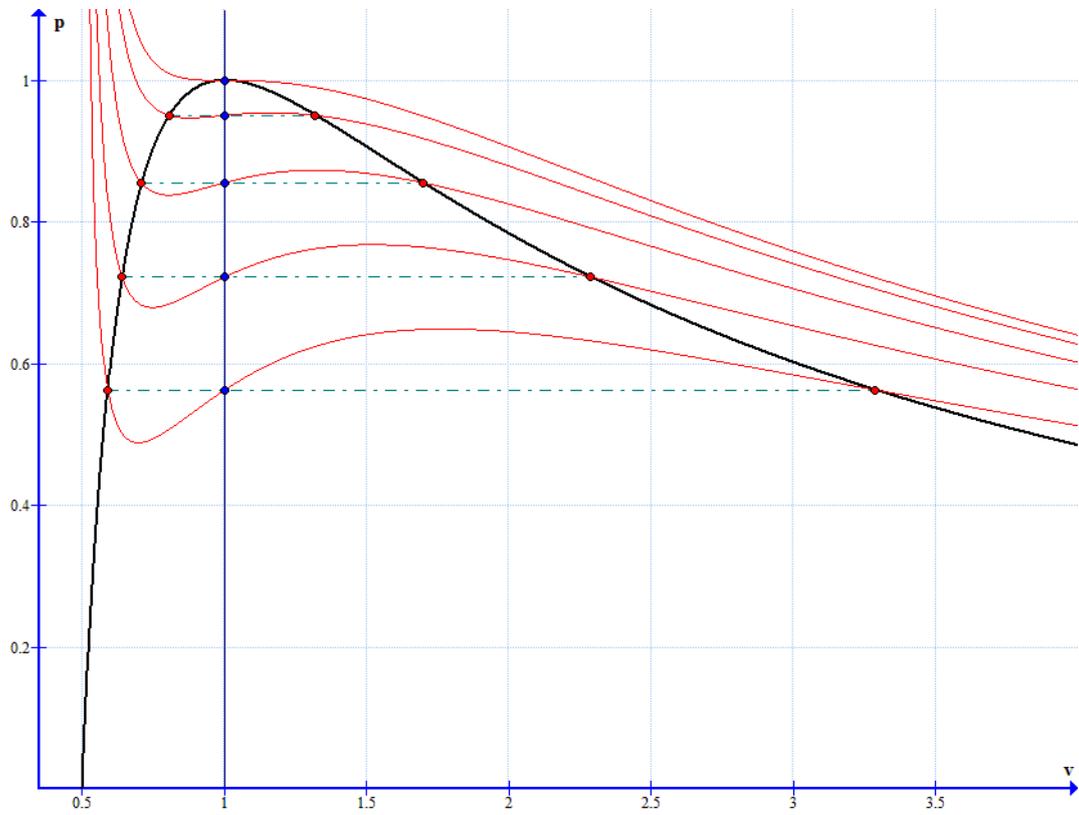


Figura 2 - Curva di Andrews

Proprietà per $t > 1$

Mostriamo adesso altre proprietà dell'equazione termodinamica di Dieterici per temperature superiori alla temperatura critica:

$$P(V, T) = \frac{RT}{V-b} \exp[-a(T)/RTV]$$

indicando con

$$a(T) = a_0 f(T/T_c);$$

$$a(T_c) = a_0; f(1) = 1;$$

e riscrivendo tutto in (s.c.) abbiamo:

$$p(v, t) = \frac{t}{2v-1} \exp[2 - 2f(t)/tv] \quad (3)$$

Dall'analisi di vari gas risulta un comportamento medio della funzione $f(t)$ di questo tipo:

$$f(t) = \begin{cases} 1/t & \text{per: } 1 \geq t > 0 \\ 1/\sqrt[3]{t} & \text{per: } t > 1 \end{cases} \quad (3a)$$

Quindi per: $t > 1$ la (3) diventa:

$$p(v, t) = \frac{t}{2v-1} \exp[2 - 2/t^{4/3}v] \quad (4)$$

Ricaviamo adesso la temperatura massima di inversione t_i usando la formula di Joule - Kelvin:

$$\mu_{jk} = \frac{1}{c_p} \left[t \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p - v \right] \quad (5)$$

Alla temperatura di inversione: $\mu_{jk} = 0$ quindi:

$$t \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p - v = 0 \quad (5a)$$

usando adesso la (4) nella (5a) dopo alcuni calcoli otteniamo (per: $v \rightarrow \infty$):

$t_i = 5.34$; per: $z_c \cong 0.27$; dove z_c è il rapporto di compressione: $z_c = P_c V_c / RT_c$ che può variare lievemente secondo il tipo di gas preso in esame.

Per la maggior parte dei gas ricaviamo dalle tavole: $t_i = 4.8$; per: $z_c \cong 0.29$.

Possiamo dimostrare teoricamente questo risultato supponendo che vi sia una lieve dipendenza dal volume del coefficiente di attrazione intermolecolare:

$$a(T, V) = a(T) \frac{V}{V + kb} \quad (6)$$

Dove il coefficiente k può essere positivo o negativo. Facendo i calcoli otteniamo per i parametri critici:

$$V_c = (2+k)b; \quad P_c = \frac{a_0}{4e^2 b^2 (1+k)^2};$$

$$RT_c = \frac{a_0}{4b(1+k)}; \quad z_c = \frac{2+k}{e^2(1+k)} \quad (7)$$

Per la temperatura massima di inversione otteniamo:

$$t_i = \left(\frac{28}{3e^2 z_c - 3} \right)^{3/4} \quad (8)$$

con $k = -0.125$ si ha $z_c = 0.29$; $t_i = 4.83$ (teorico).

Invece se prendiamo il caso dell'acqua per $k = 0.386$ si ha $z_c = 0.233$; $t_i = 6.8$ (teorico); dalle tavole: $t_i(H_2O) = 6.75$.

Per H_2 ed H_c abbiamo invece con buona approssimazione: $f(t) = 1$; per: $t > 1$ e quindi²:

$$t_i = \frac{8}{e^2 z_c - 1} \cong \begin{cases} 7 & (H_c; z_c = 0.29) \\ 6.2 & (H_2; z_c = 0.31) \end{cases} \quad (9)$$

Per verificare la compatibilità sperimentale dei nostri coefficienti di attrazione intermolecolare teorici (sempre per $t > 1$) ricaviamo l'equazione della curva di inversione (ottenibile dai punti di stazionarietà delle curve isoentalpiche); infatti differenziando e uguagliando a zero la funzione dei gas reali: $p = p(v, t)$ possiamo facilmente ricavare: $(\partial v / \partial t)_p$, e sostituendo tale risultato nella (5a) otteniamo:

$$t \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_v + v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_t = 0 \quad (10)$$

La (10) insieme alla funzione $p = p(v, t)$ fornisce un'equazione teorica della curva di inversione nel diagramma pt nell'intervallo di temperature: $]1; t_i]$ confrontabile con la curva sperimentale.

Possiamo vedere alcuni esempi nella fig. 3, dove in blu viene indicata la curva di inversione sperimentale, mentre in nero quella teorica per: N_2 , H_2 , H_c ; nell'ascissa sono posizionate le temperature e nell'ordinata le pressioni.

² Nell'intervallo $0 < t \leq 1$ abbiamo invece per H_2

: $f(t) = 1/\sqrt{t}$, e per H_c : $f(t) = 1$

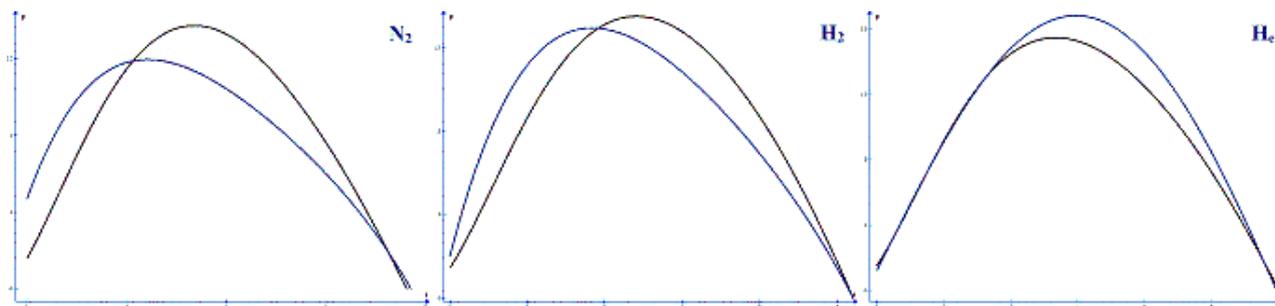


Figura 3 - Confronto tra curve di inversione sperimentali e teoriche.

Tenendo conto che per tali curve l'incertezza sperimentale sulla pressione varia dal 5% al 25% i risultati ottenuti si possono considerare sperimentalmente compatibili.

Conclusioni

Sebbene l'equazione di Dieterici con il termine di attrazione “ a ” costante fornisca un miglioramento almeno qualitativo rispetto a quella di Van der Waals tuttavia considerare tale termine dipendente dalla temperatura permette di descrivere con maggior efficacia le proprietà della quasi totalità dei gas monoatomici e biatomici; H_2 ed He si discostano lievemente dal comportamento medio perché i loro elettroni di valenza occupano a riposo lo stato più basso $1S$ rendendo gli effetti quantistici diversamente schematizzabili in un modello classico o semiclassico di urti e attrazioni intermolecolari. Per le molecole composte da più di due atomi potrebbero presentarsi deviazioni più o meno esplicite, a causa della loro più articolata struttura geometrica.

Bibliografia essenziale

Mark W. Zemansky “Calore e Termodinamica” – Zanichelli, Bologna

M. M. Abott, H. C. Van Ness “Termodinamica” – ETAS LIBRI

Aggiornamenti:

<http://sites.google.com/site/pianetagalileo/>

127. L'ovoide a cipolla

A cura di Gaetano Barbella

Il puzzle “La capra nel recinto”

Il puzzle “La capra nel recinto” è un problema di matematica, che la professoressa Annarita Ruberto, mia cara amica, ha proposto il 17 maggio scorso ai suoi giovani alunni di media e lettori adulti sul suo blog *Matem@ticamente*.¹ Nell'occasione fui invitato da Annarita a partecipare al suo gioco con una soluzione che fosse corredata da una geometria confacente, sapendo quanto ami la geometria, appunto.

Il problema è questo:

Un campo ha la forma di un cerchio di raggio lungo 100 metri, delimitato da un recinto circolare. Una capra è legata da una corda a un paletto, in un punto fisso del recinto. Per impedire alla capra di diventare troppo grassa, l'agricoltore vuole fare in modo che essa possa raggiungere soltanto la metà dell'erba del campo.. Quanto deve essere lunga la corda?

E così mi diedi da fare per accontentarla con più di una soluzione, cosa che fu assai gradita insieme a quelle, altrettanto interessanti, di un altro lettore, l'amico Bruno.

La cosa sembrò esaurirsi a questo punto, ma in seguito la mia conclusione del gioco matematico in questione mi si ripresentava continuamente nella mente. Questo, finché non mi sorse la volontà di sviluppare una geometria che generalizzasse il problema limitato alla ricerca della lunghezza della corda che doveva formare una parziale superficie del recinto, la sua metà.

La soluzione analitica del puzzle

Tra le varie soluzioni proposte, nessuno aveva cercato di risolvere in maniera generale il problema, cosa che ora mi accingo a fare. Premetto che sono un modesto dilettante in matematica e per giunta la mia cultura si rifà alle semplici nozioni di matematica elementare che però bastano per il nostro caso.

Per semplificare mi limito ad esibire di seguito l'equazione grazie alla quale ho potuto ottenere la giusta risposta richiesta dal puzzle, ovvero la lunghezza della corda da fissare al paletto del recinto.

Si considera dapprima che il raggio del recinto r_1 sia uguale a 1 come mostrato in Figura 1. La formula che segue permette di ricavare l'angolo θ , espresso in radianti, tale che l'area delimitata in rosso risulti pari alla metà dell'area del cerchio con centro in O e raggio r_1 :

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{2 \frac{\theta}{\pi} (2 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Come si vede, questa formula non permette di ricavare in modo diretto l'angolo θ in questione ed allora vi sono due procedimenti per giungere a questo scopo.

¹ <http://lanostramatematica.splinder.com/post/20563490>



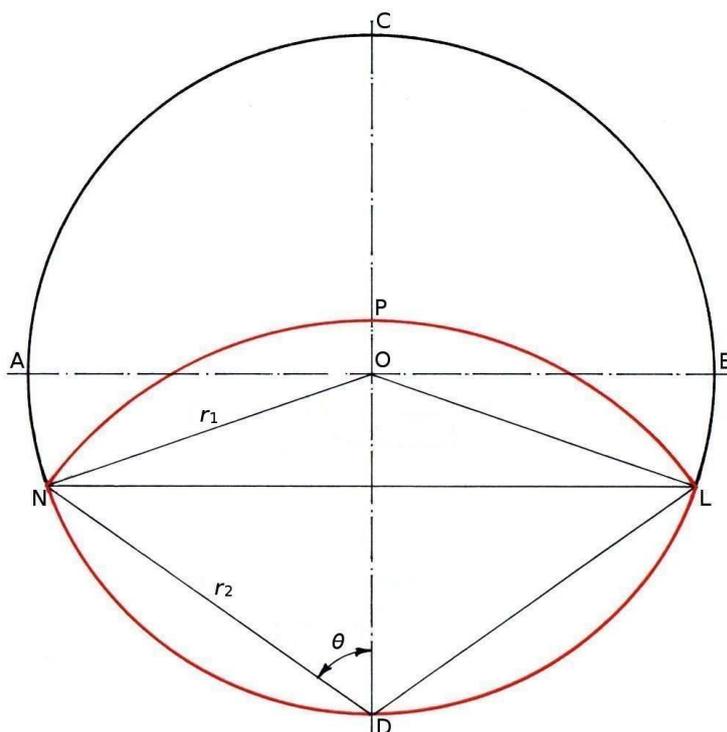


Figura 1. Bi-segmento circolare DNPL di metà area del cerchio in O e raggio r_1 .

Il primo consiste nel calcolare per tentativi successivi lo sviluppo dell'equazione servendosi necessariamente di un semplice calcolatore tascabile. Si comincia attribuendo un ipotetico valore dell'angolo ricercato fino a giungere a quello giusto in base alle cifre decimali disponibili, tale che l'equazione sia rispettata. Questo esercizio è un'ottima occasione per prendere dimestichezza con il calcolo approssimato.

La seconda via fa uso di software di calcolo simbolico e numerico; in questo caso è stato adottato il software libero *Maxima*².

A questo punto debbo confessare di non essere tanto pratico del software, ma grazie al contributo di uno dei miei figli, Gianluca di fresco dottorato in ingegneria strutturale, molto preparato su questa cosa, mi è stato possibile pervenire alla soluzione numerica del problema.

Colgo l'occasione per citare un altro mio contributo, *Il geometra pensiero in rete*³, per il quale devo ringraziare un altro figlio, Piermaria, esperto di informatica. Grazie Piermaria e Gianluca

E così, seguendo il suddetto itinerario è stato possibile ottenere l'angolo θ che è risultato pari a 0.952848 rad, che corrisponde a 54,594161° sessagesimali.

Il passo successivo è stato quello di calcolare il raggio r_2 con questa formula:

$$r_2 = 2 \cos \theta = 1.158728 \quad (2)$$

Che vale per $r_1 = 1$.

Per il caso del puzzle, invece, r_2 va moltiplicato per 100, poiché il raggio del recinto è uguale a 100 metri. La risposta è quindi 115,8728 metri.

² <http://maxima.sourceforge.net/>

³ <http://www.webalice.it/gbarbella/>

I dati elaborati da Maxima

```
(%o1) f(x):=(sin(x)*cos(x))/(2*x*(2*cos(x)^2-1)/%pi+1/2)-%pi/2;
(%o2) find_root(f(x)=0, x, %pi/4, %pi/3);
(%o2) 0.95284786465494
(%o3) if numer#false then numer:false else numer:true;
(%o2)*180/%pi;
(%o3) true
(%o4) 54.59416116278086
(%o5) 2*cos(%o2);
(%o5) 1.158728473018
(%o6) A(x):=%pi*(2*x*(2*cos(x)^2-1)/%pi+1)-2*sin(x)*cos(x);
(%o7) wxplot2d([A(x)], [x,0,%pi/2]);
Output file "/home/gaetano/maxout.png".
(%o7) << Graphics >>
```

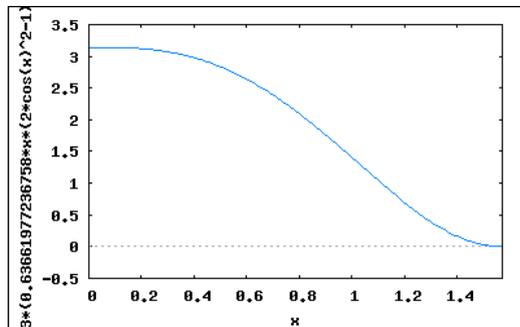


Figura 2: Graphics.

Curva di aree di bi-segmenti circolari in seno ad un cerchio

Ora viene la parte interessante per far luce su qualsiasi altro angolo θ che va da 0 a $\pi/2$ radianti (ovvero da 0° a 90° sessagesimali). Di qui si perviene alla superficie corrispondente, espressa dalla lettera greca ρ , che si calcola con la seguente equazione polare:

$$\rho(\theta) = \pi \left[2 \frac{\theta}{\pi} (2 \cos^2 \theta - 1) + 1 \right] - 2 \sin \theta \cos \theta \quad (3)$$

Imponendo che l'area ρ nell'equazione (3) sia pari a $\pi/2$ (cioè la metà dell'area del cerchio) si ottiene l'equazione (1). Osservando la Figura 3 il raggio ρ individua il valore dell'area in rosso OPQ. Essa è funzione dell'angolo θ che si calcola in base all'equazione (3).

Per $r_1 = 2r$ si ha $\rho = \pi$.

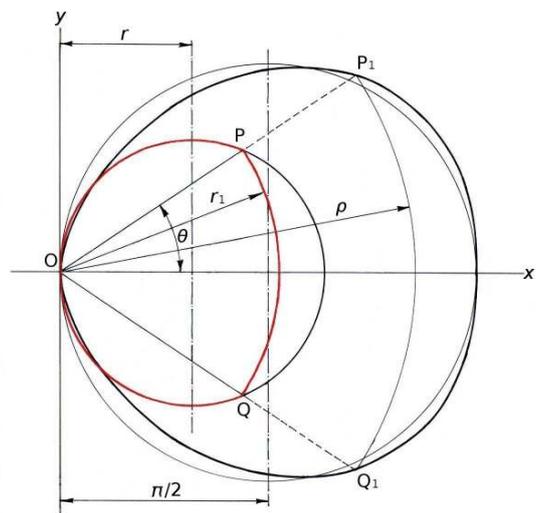


Figura 3: Ovoide a cipolla.

La figura della curva, che deriva dall'individuazione di tutti raggi vettori che corrispondono al variare dell'angolo θ in Figura 3, non l'ho vista contemplata fra quelle della nutrita casistica della geometria presenti sul web, ma potrei anche sbagliarmi. Ne ho trovata una simile (Figura 4), ma di forma schiacciata, l'uovo di Keplero o di Viviani, meglio definito *foglio semplice*.⁴

Nel nostro caso, invece, potremo accostare la curva a quella di una cipolla, ma di questo ne parlerò in seguito.

Ma vediamo nel dettaglio l'elaborazione al computer della procedura per lo sviluppo della suddetta equazione (3).

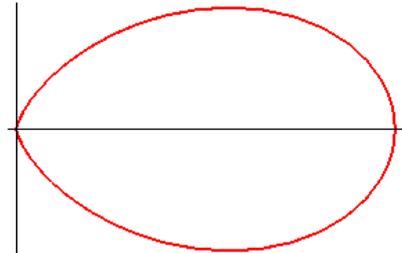


Figura 4: Uovo di Keplero.

(%i8)

```
wxplot2d([[parametric, A(t)*cos(t), A(t)*sin(t), [t, 0, %pi/2], [nticks, 300]], [parametric, %pi*cos(t)*cos(t), %pi*cos(t)*sin(t), [t, 0, %pi/2], [nticks, 300]]], [x,0,3.5],
```

```
[gnuplot_preamble, "set xrange [0:3.5]");
```

Output file "/home/gaetano/maxout.png".

```
(%o8) << Graphics >>
```

(%i9)

```
if numer#false then numer:false else numer:true$
```

```
A(%pi/4);
```

```
(%o10) %pi-1
```

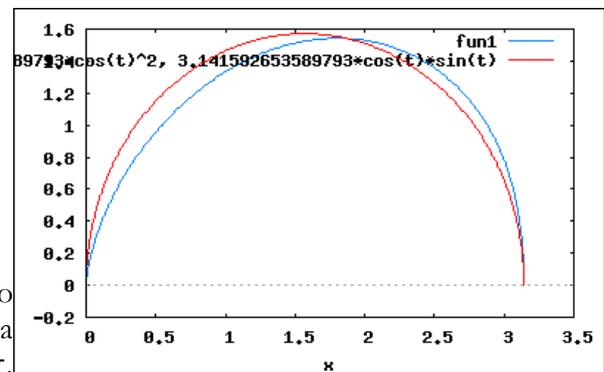


Figura 5: Graphics.

Come si vede nella figura 5, si nota in blu il profilo della curva ricavata al computer. Essa si discosta da quella di un cerchio (in rosso) con diametro pari a π . Come già sopra accennato, per la sua particolare forma ho ritenuto di chiamare questa curva *ovoide a cipolla*.

Geometrie note degli strati della cipolla

Non resta ora che servirsi della geometria della curva suddetta per approfondire la supposta relazione con la cipolla, oggetto per altro del titolo di questo saggio.

Si potrebbe aggiungere, a prova di questo accostamento, che, dal lato geometrico, la curva deriva dal progressivo "crescere" del *bi-segmento circolare* all'interno del relativo cerchio, e dall'altro, quello della cipolla, da un corrispondente "crescere" per strati all'interno di essa, come si osserva nella Figura 6.

Con sorpresa ci si rende conto che la geometria ci fornisce i dati matematici di un genere di curva del tutto simile a quelle dei vari strati all'interno della cipolla, specie quella del germoglio. Questa curva (Figura 7) si chiama *quadratica piriforme* (chiusa, come quella oggetto di questo saggio).

Riporto ora alcuni dati salienti a riguardo, cosa che traggio da internet.⁵

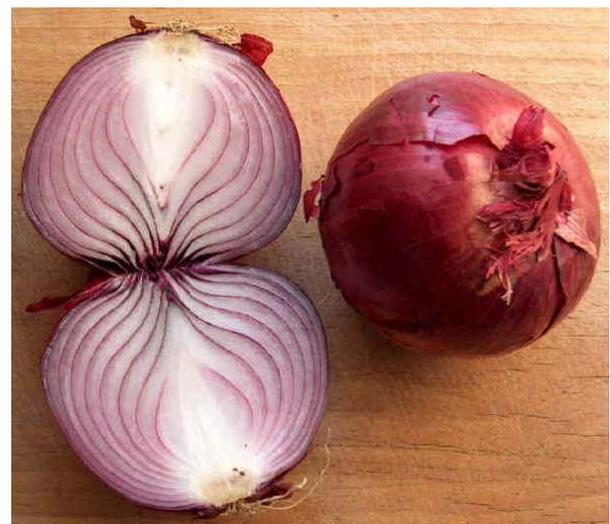


Figura 6: Strati della cipolla

4 <http://www.mathcurve.com/courbes2d/foliumsimple/foliumsimple.shtml>

5 <http://www.mathcurve.com/courbes2d/piriforme/piriforme.shtml>

Si tratta di una curva studiata da Wallis nel 1685 e Bonnet nel 1844. Deriva dal nome latino *Pirum*, ossia pera.

Altri nomi: goccia d'acqua, trottola.

Equazioni cartesiane:

$$b^2 y^2 = x^3(a-x) \text{ da cui } by = \pm x \sqrt{x(a-x)}$$

Altra geometria, che si lega agli strati interni della cipolla, se sezionata trasversalmente in modo da evidenziare tutti i cerchi concentrici, è relativa ad uno dei sistemi per ricavare l'area del cerchio che viene chiamato, appunto, *Integrazione a "cipolla"*.⁶

Si tratta di un approccio, tramite gli integrali, per il calcolo dell'area del cerchio. Può essere fatto pensando che questa superficie è data dalla somma progressiva di infiniti cerchi concentrici che hanno come valore massimo la circonferenza e come minimo il centro del cerchio. In pratica è come se sommassimo tra di loro infiniti anelli, aventi ognuno spessore infinitesimo. Dalla Figura 8 comprendiamo come il nome legato alla cipolla derivi proprio dalla stratificazione del cerchio, come quella di una cipolla, come già detto, anche se in due dimensioni. Possiamo dunque chiamare t il raggio del cerchio a cui corrisponde ogni singola circonferenza, la cui lunghezza è $2\pi t$ (notiamo che in questa dimostrazione si dà per assunto questo dato). Quindi possiamo integrare (integrazione definita) $2\pi t dt$, cioè la funzione che ci dà le diverse circonferenze (separate dal fattore infinitesimo dt), tra il valore massimo e minimo dei loro raggi, r e 0 .

$$Area(r) = \int_0^r 2\pi t dt = \left[(2\pi) \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^r = \pi r^2$$

Riferimenti delle immagini

Figura 2: <http://lanostramatematica.splinder.com/post/20563490>

“ 4: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/foliumsimple/foliumsimple.shtml>

“ 6: <http://www.agraria.org/coltivazionierbacee/aromatiche/cipolla.htm>

“ 7: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/piriforme/piriforme.shtml>

“ 8: <http://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio>

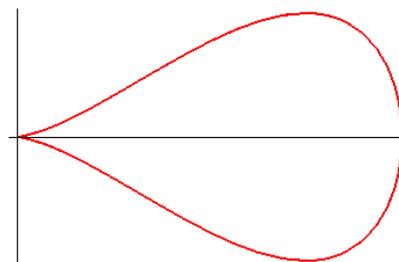


Figura 7: Curva quadratica piriforme.

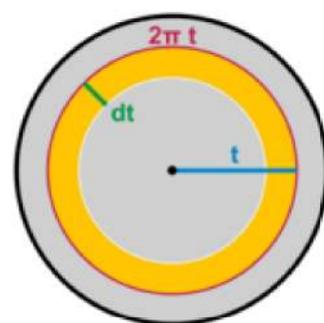


Figura 8: Un metodo di integrazione per calcolare l'area del cerchio

Brescia, 20 luglio 2009

6 <http://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio>

Un sistema fuzzy per la modellizzazione delle associazioni biologiche. Il caso delle lepri e delle linci in Canada durante il periodo 1845-1937¹

Salvatore Lega

[willer9@gmail.com]

Abstract

In questo lavoro viene presentato un sistema a logica fuzzy, capace di fornire una descrizione formale delle associazioni biologiche tra due specie di popolazioni animali: le lepri e le linci vissute in Canada tra il 1845 ed il 1937. Un sistema fuzzy è un modello matematico che utilizza la teoria dei fuzzy sets e la logica fuzzy e permette di trattare entità non definibili con precisione. Il sistema fuzzy, qui proposto, sarà dotato di due variabili di input, il numero delle linci al tempo t ed il corrispondente incremento di popolazione, e una variabile d'output intesa come numero delle lepri al medesimo tempo t . Il modello fuzzy produrrà, quindi, un'associazione tra le due variabili di input e la variabile di output usufruendo di una base di regole fuzzy, di un motore inferenziale fuzzy, secondo il metodo proposto da Larsen, di un fuzzificatore e di un defuzzificatore. Alla fine si farà vedere come i risultati ottenuti dal metodo fuzzy, cioè i valori prodotti dalla variabile di output, se confrontati graficamente con quelli reali possono essere considerati molto verosimili.

Introduzione

Il concetto di fuzzy set nasce dall'osservazione fatta da Zadeh nel 1965 (Zadeh, 1965) in ordine alle classi di oggetti incontrate nel mondo reale che non hanno dei criteri di appartenenza definiti in modo preciso. Tali classi di oggetti sono presenti sia nelle rappresentazioni mentali della realtà sia nella terminologia usata dal linguaggio naturale e perciò assenti nelle usuali rappresentazioni matematiche che fanno uso della logica binaria, di formule esatte, di equazioni differenziali e così via. A tal proposito il matematico A. Sangalli (Sangalli 2000) afferma che: “nel mondo ideale della matematica le cose

sono certe e precise; ma nel mondo reale la precisione e la certezza assoluta sono beni molto rari”.

Oggigiorno la teoria dei fuzzy set è definita come quella disciplina che contiene concetti e tecniche che formano una struttura matematica capace di manipolare i concetti vaghi e sfumati presenti nei processi del pensiero umano. L'ambizione, quindi, è di fornire una impostazione formale per poter gestire l'informazione incompleta e graduale così come viene espressa dal linguaggio naturale.

In generale, la teoria fuzzy comprende tutte quelle discipline che usano i concetti di base dei fuzzy sets, tra cui:

¹ Lavoro iniziato in collaborazione con il prof. L. Di Lascio presso il dipartimento di matematica ed informatica dell'università degli studi di Salerno

1) **Matematiche fuzzy.** Qui i concetti della matematica classica sono estesi, in modo tale da sostituire gli insiemi classici con gli insiemi fuzzy.

2) **Logica fuzzy ed intelligenza artificiale.** La prima permette alle proposizioni di assumere valori di verità nell'intervallo [0,1]. Questa generalizzazione consente di dedurre conclusioni imprecise da premesse imprecise. Nel campo dell'intelligenza artificiale, invece, sono sviluppati i sistemi esperti sfruttando il ragionamento approssimato e l'informazione fuzzy.

3) **I sistemi fuzzy.** Tali sistemi includono il controllo fuzzy e l'approccio fuzzy sia nella elaborazione dei segnali che nelle comunicazioni.

4) **Fuzzy decision making.** Tale disciplina tratta dei problemi di ottimizzazione in presenza di vincoli soft.

In questo lavoro si userà un sistema fuzzy che mediante un insieme di regole linguistiche, la conoscenza esperta, sarà in grado di calcolare un valore numerico, dati altri valori numerici. Si farà vedere, in pratica, come un sistema fuzzy possa essere utilizzato come modello per la descrizione dell'andamento di due popolazioni di specie biologiche che interagiscono tra di loro. Si prenderà come esempio le lepri e le linci, vissute in Canada dal 1845 al 1937 secondo i dati raccolti presso la Hudson Bay Company.

Cosa sono i sistemi fuzzy

Nell'era dello sviluppo dell'informazione il valore della conoscenza umana diviene sempre più prezioso. Si ha l'esigenza di formulare la conoscenza in un modo sistematico ed in più integrarla con modelli matematici. L'obiettivo è, quindi, come trasformare la conoscenza esperta umana in una formula matematica. Il compito dato ai sistemi fuzzy è proprio quello di effettuare questa trasformazione.

Un sistema fuzzy è, allora, un modello matematico che utilizza la teoria dei fuzzy sets e la logica fuzzy, permette di trattare entità

non definibili con precisione. Quindi nell'approccio fuzzy è possibile:

- 1) Utilizzare valori approssimati.
- 2) Approssimare una funzione continua con la precisione che si vuole.
- 3) Matematizzare le parole presenti nel linguaggio comune e fare con esse calcoli del tipo:
simpatico x intelligente = grande uomo.
- 4) Costruire modelli matematici qualitativi e quantitativi .
- 5) Fare ragionamenti con premesse imprecise.

In dettaglio i sistemi fuzzy sono sistemi che si basano sulla conoscenza esperta sotto forma di regole del tipo IF – THEN. Una regola di questo tipo è una frase *Se...Allora...* in cui alcune parole sono caratterizzate da funzioni di appartenenza (membership) continue. Ad esempio la seguente frase è un esempio di regola fuzzy: ” *Se la velocità dell'auto è alta, allora si deve esercitare poca pressione all'acceleratore*”. Dove le parole “alta” e “poca” sono caratterizzate ad esempio dalle funzioni di appartenenza come mostrate in figura 1:

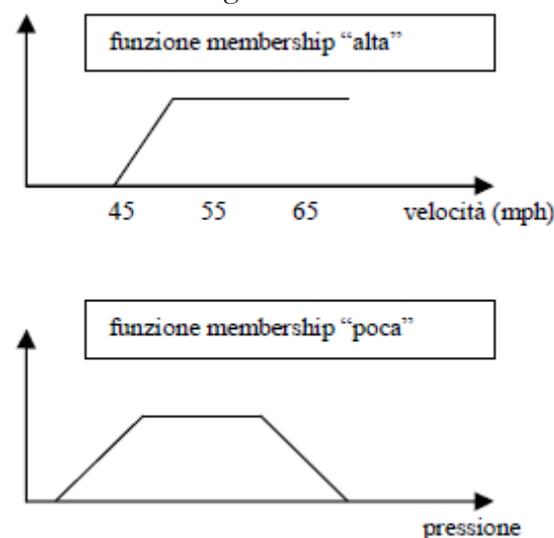


Fig 1. Esempi di funzioni membership.

Il punto di partenza, quindi, nella costruzione di un sistema fuzzy è avere una collezione di regole del tipo *Se ... Allora ...*, ottenute, ad esempio, dalla conoscenza esperta umana.

Ci sono tre tipi di sistemi fuzzy comunemente usati in letteratura:

- 1) Sistemi fuzzy puri.
- 2) Sistemi fuzzy del tipo Takagi – Sugeno – Kang (T-S-K 1985-1995)
- 3) Sistemi fuzzy con fuzzificatore e defuzzificatore.

La configurazione classica di un sistema puro è mostrato in figura 2:

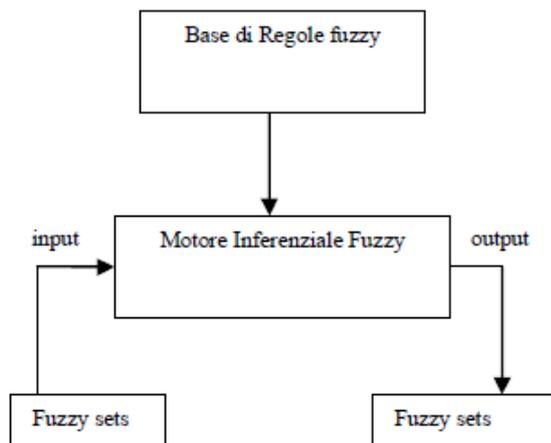


Fig.2. Sistema fuzzy puro

La base di regole fuzzy rappresenta l'insieme delle regole del tipo Se ... allora.

Il motore inferenziale fuzzy combina le regole fuzzy secondo i principi della logica fuzzy in modo tale da produrre una associazione tra fuzzy sets di input con i fuzzy sets di output. Il principale problema di questo tipo di sistemi fuzzy è dovuto dal fatto che sia gli inputs che gli outputs sono insiemi fuzzy (cioè parole del linguaggio naturale), mentre i principali modelli di descrizione formale della realtà hanno la caratteristica che sia gli inputs che gli outputs sono valori numerici reali.

I sistemi fuzzy di Takagi-Sugeno-Kang si differenziano dai precedenti per la forma delle regole fuzzy. Ad esempio, "Se la velocità dell'auto è alta, allora si deve dare una pressione sull'acceleratore pari a $y=cz$."

Si noti che la parte dopo *allora* della regola è cambiata, rispetto a quella vista in precedenza, per la presenza della equazione $y=cz$.

Questo modo di scrivere le regole se da una parte rende più facile combinare più regole, dall'altra tuttavia non fornisce né una struttura naturale di rappresentazione della conoscenza umana (gli uomini non si esprimono con delle formule), né rende possibile la piena applicazione dei principi presenti nella logica fuzzy.

Per risolvere questi problemi si usano i sistemi fuzzy con fuzzificatori e defuzzicatori, come mostrato in figura:

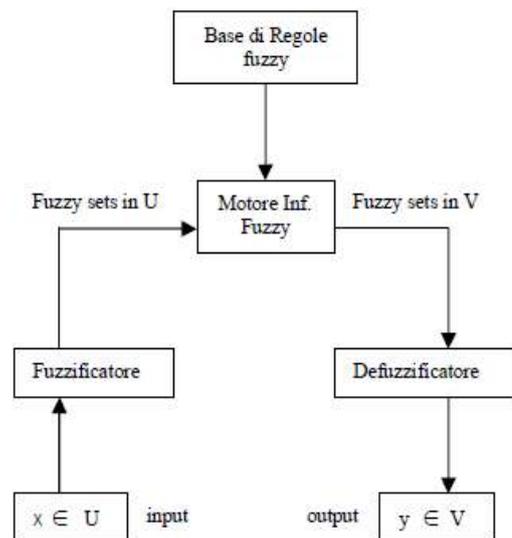


Fig 3. Sistema fuzzy con fuzzificatore e defuzzificatore

$$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \subset \mathbb{R}^n \text{ e } V \subset \mathbb{R}$$

Dove il fuzzificatore trasforma un valore di una variabile reale in un fuzzy set, mentre il defuzzificatore effettua il procedimento inverso cioè trasforma un fuzzy set in un valore reale.

La costruzione di un sistema fuzzy m.i.s.o. (multi input single output)

Dato l'universo del discorso U un fuzzy set A in U è caratterizzato da una funzione di appartenenza $\mu_A(x)$ che associa ad ogni elemento di U un numero reale in $[0,1]$. Cioè :

$$\mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \text{ con } x \in U.$$

Usando una diversa notazione la funzione membership relativa al fuzzy set A può essere scritta nella forma: $A:U \rightarrow [0,1]$ con $A(x) \in [0,1]$. In seguito useremo entrambe le notazioni.

Quando U è un universo continuo (per esempio $U=R$), allora il fuzzy set A è comunemente scritto come:

$$A(x) = \int_U \mu_A(x) / x$$

dove \int_U non è il noto simbolo di integrale, ma indica l'insieme delle coppie $(\mu_A(x), x)$ presenti in U . Se invece U è un insieme discreto allora A può essere scritto come :

$$A(x) = \sum \mu_A(x) / x.$$

Un numero fuzzy triangolare $x=[a,b,c]$ in $[0,1]$ è un fuzzy set la cui funzione di appartenenza è un triangolo, i cui vertici sono rappresentati dai punti $(a,0)$, $(b,1)$ e $(c,0)$.

Una partizione fuzzy, (Ruspini 1969), è una successione di fuzzy sets $\{A_1, \dots, A_n\}$ definiti in U tale che $\forall i \in N$ si ha :

- 1) $A_i \neq \emptyset$ e $A_i \neq U$
- 2) $\sum_{i=1}^n A_i(x) = 1 \quad \forall x \in U$

Una chiara introduzione alla teoria dei fuzzy sets è attualmente disponibile in molti testi, quale, ad esempio, (Klir, Yuan 1995).

Supponiamo che U e V siano due universi del discorso con la peculiarità che :

$$U = U_1 x U_2 x \dots x U_n \subset R^n \text{ e } V \subset R.$$

Siano $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$ e y elementi di U e V rispettivamente ed inoltre assumiamo che la base di regole fuzzy del sistema che vogliamo costruire, con la quale viene rappresentato linguisticamente il problema, sia composta da M regole, allora la l -esima regola avrà la seguente forma:

$$R^l = \text{Se } x_1 \text{ è } A_1^l \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ è } A_n^l, \text{ allora } y \text{ è } B^l \quad (1)$$

con $l=1, \dots, M$.

Dove x_1, \dots, x_n sono le variabili linguistiche (Zadeh 1975) di input, y è la variabile linguistica di output, mentre gli A_i^l e B^l sono, rispettivamente, fuzzy set in U_i e in V . Essi rappresentano rispettivamente il valore linguistico della variabile linguistica x_i e della variabile linguistica y nella regola R^l .

Le regole all'interno della base di regole fuzzy devono avere le seguenti proprietà:

- 1) Completezza, in cui per $\forall \mathbf{x} \in U$ esiste almeno una regola all'interno della base di regole fuzzy tale che $A_i(x_i) \neq 0$ con $i=1, \dots, n$.
- 2) Consistenza. Se nella base di regole fuzzy non compaiono regole con la parte *Se* uguale e la parte *Allora* diversa.

Descritta la forma delle regole fuzzy, si dovrà specificare il modo in cui un valore reale di input venga trasformato dal sistema in un fuzzy set. Tale compito è affidato al fuzzificatore. In pratica, tale operazione è definita come un modo di associare un valore $\mathbf{x}^* \in U \subset R^n$ ad un fuzzy set A' definito in U . Nel caso in esame si userà il fuzzy set "singleton". Tale fuzzy set indicato con A' avrà il valore della funzione membership pari ad 1 se $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, pari a 0 in tutti gli altri casi. Cioè :

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x^* \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2)$$

L'idea del motore inferenziale fuzzy è quella di inferire la conoscenza di una variabile partendo dalla conoscenza della sua relazione con un'altra variabile il cui significato è noto. Ad esempio : se la variabile linguistica x assume il valore linguistico "piccolo" descritto dal fuzzy set A' e se è nota la relazione linguistica R : " x e y sono uguali" allora si può inferire il valore linguistico della variabile y descritto dal fuzzy set B : " y è quasi piccolo". Il motore inferenziale fuzzy, quindi, utilizzando le leggi della logica fuzzy combina il fuzzy set di input A' definito in $U \subset R^n$ con la base delle regole fuzzy al fine di inferire un fuzzy set B , semanticamente corretto definito in $V \subset R$. Ci sono diversi motori inferenziali fuzzy, noi useremo quello che di solito è riferito a Larsen (Larsen 1980).

Sia A' il fuzzy set di input, definito in $U \subset R^n$, del motore inferenziale, ottenuto me-

dianete l'operazione di trasformazione di un numero reale in un fuzzy set, e sia la (1) la l-esima regola fuzzy presente nella base di regole fuzzy, con $l = 1, \dots, M$, allora il fuzzy set calcolato dal motore inferenziale, secondo Larsen è:

$$\mu_{B'}(y) = \text{Max}_{l=1}^M [\sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i)) \mu_{B^l}(y)]$$

Ma poiché A' è un fuzzy set "singleton" che assume valore massimo pari ad 1, la formula precedente può essere scritta come:

$$\mu_{B'}(y) = \text{Max}_{l=1}^M [\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y)] \quad (3)$$

Una volta che il motore inferenziale ha calcolato il fuzzy set B' si ha la necessità di trasformarlo in un numero reale come valore in uscita del sistema fuzzy. Questo compito è affidato al defuzzificatore, che quindi ha la caratteristica di associare al fuzzy set B' definito in $V \subset R$ un valore reale.

Tale operazione si identifica con una una funzione f tale che $f : B' \rightarrow V$, con $f(B') = y^*$. Uno dei metodi più usati è quello del centro di massa:

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy} \quad (4)$$

Qui il simbolo \int è il solito simbolo di integrazione. Si definisce, poi, altezza di un fuzzy set Y il valore reale h in $[0,1]$ tale che $h = \sup(\mu_Y(y))$;

Il centro, indicato con z , di un generico fuzzy set Y , definito in V e con funzione membership $\mu_Y(y)$, può essere calcolato effettuando le seguenti operazioni:

- 1) Calcolando la media di tutti i valori di y nei quali il fuzzy set raggiunge il massimo .
- 2) Se tale media è infinita positiva, allora, il centro è il minimo di tutte le y .
- 3) Se la media è infinita negativa, allora la media è il massimo delle y su cui il fuzzy setes ha il massimo.

Ora Poiché, il fuzzy set B' in (3) è ottenuto mediante la unione di M fuzzy set:

$$B' = \bigcup_{l=1}^M B_l' = \text{Max}_{l=1}^M B_l' = \text{Max}_{l=1}^M [\prod_{i=1}^n A_i^l(x_i) * B^l(y)]$$

una buona approssimazione del metodo del centro di massa è dato dalla media pesata dei centri degli M fuzzy di cui è composto B' . In generale, allora, dati M fuzzy sets con centro z_i e altezza h_i , con $i=1, \dots, n$, si definisce come media pesata dei centri il valore reale ottenuto dalla seguente formula:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^M z_i * h_i}{\sum_{i=1}^M h_i} \quad (5)$$

Supponiamo, ora, che i fuzzy set B^l presenti in (1) siano normali (un fuzzy set che come valore massimo della sua funzione membership il numero 1 è detto normale), e con centri z^l .

Poiché $\prod_{i=1}^n A_i^l(x_i)$ e z^l sono rispettivamente l'altezza ed il centro di B_l' , allora :

il fuzzy system che ha come fuzzificatore il singleton, come tipo di motore inferenziale quello di Larsen e come defuzzificatore la media pesata dei centri è il seguente:

$$y = f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M z^l (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i))}{\sum_{l=1}^M (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i))} \quad (6)$$

Le relazioni tra prede e predatori

Il processo di predazione si verifica quando gli animali di una specie, i predatori, uccidono quelli di un'altra specie, le prede, per crearne nutrimento. La conoscenza dell'interazioni tra le popolazioni di prede e predatori è un importante fattore nello studio della ecologia delle popolazioni.

Un esempio classico è rappresentato dalla lince canadese (*lynx canadensis*) che preda quasi esclusivamente la lepre americana (*hare-lepus americanus*). In questo caso si è notato che un incremento della popolazione delle lepri era seguito subito dopo da un incremento del numero delle linci. I dati relativi al numero delle lepri e delle linci, fino al 1903 e fino al 1911 rispettivamente, sono ricavati dai numeri di pellicce vendute dai cacciatori alla Hudson Bay Company. I dati successivi sono riportati dai lavori di Maclulich (Maclulich 1973) e di Elton & Nicholson (Elton, Nicholson 1942). Il grafico che visualizza l'andamento delle due popolazioni è mostrato in figura 4 :

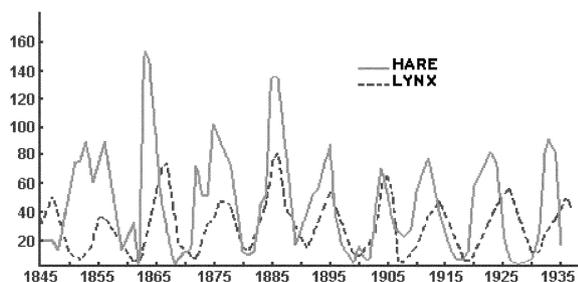


Fig.4 Andamento delle popolazioni di lepri (hare) e di linci (lynx) dal 1845 al 1937.

Dal grafico si può notare che la popolazione delle prede (hare) raggiunge il suo picco con una buona approssimazione ogni dieci anni, mentre i predatori lo raggiungono circa due anni dopo. Questo andamento delle due po-

polazioni è spiegato dal fatto che se le prede crescono, allora ci sarà sempre cibo per i predatori. Ciò causa un incremento del numero di predatori, tuttavia l'aumento della predazione conduce ad un inevitabile declino della popolazione delle lepri. Questo declino è seguito a sua volta, a causa della diminuzione delle fonti di nutrimento, da un declino della popolazione dei predatori.

Uno dei modelli più usati in ecologia per la descrizione dell'interazione delle popolazioni di lepri e di linci utilizza un sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine, e fu proposta dai matematici Lotka-Volterra (Volterra 1926). Nel prossimo paragrafo si farà vedere come il sistema fuzzy proposto nel paragrafo precedente (6) sia capace di modellare queste interazioni.

Il sistema fuzzy per la modellizzazione delle interazioni delle popolazioni di lepri e linci

Il sistema fuzzy che costruiremo sarà composto da due variabili di input ed una di output, come mostrato in figura 5.



Fig.5 Sistema fuzzy con due variabili di input x_1 , x_2 e una variabile di output y .

Le due variabili di input, x_1 e x_2 , descriveranno, rispettivamente, il numero di predatori (linci), al tempo t , ed il corrispondente incremento di popolazione. La variabile di output, y , indicherà, infine, il numero delle prede (lepri) sempre al tempo t . I dati numerici di input sono quelli indicati nella seguente tabella:

Anno	X ₁ =predatori	X ₂ =incred.	prede
1845	32	-	20
1847	50	18	20
1849	12	-38	52
1851	10	-2	83
1853	13	3	64
1855	36	23	68
1857	15	-21	83
1859	12	-3	12
1861	6	-6	36
1863	6	0	150
1865	65	59	110
1867	70	5	60
1869	40	-30	7
1871	9	-31	10
1873	20	11	70
1875	34	14	100
1877	45	11	92
1879	40	-5	70
1881	15	-25	10
1883	15	0	11
1885	60	45	137
1887	80	20	137
1889	26	-54	18
1891	18	-8	22
1893	37	19	52
1895	50	13	83
1897	35	-15	18
1899	12	-23	10
1901	12	0	9
1903	25	13	65
1905	62	37	45
1907	49	-13	30
1909	7	-42	25
1911	7	0	27
1913	20	13	77
1915	43	23	25
1917	11	-32	10
1919	6	-5	10
1921	20	14	46
1923	37	17	80
1925	43	6	20
1927	50	7	8
1929	30	-20	6
1931	15	-15	6
1933	18	3	20
1935	40	22	83
1937	48	8	12

Tab. 1 Dati relativi al numero (x1000) delle lepri (prede) e delle linci (predatori) visute in Canada dal 1845 1937.

Faremo vedere, quindi, come il sistema fuzzy sia capace di produrre valori della variabile y sia capace di produrre valori della variabile y non molto distanti da quelli effettivamente verificati sul campo, e presenti nella colonna “Prede” nella tabella precedente.

Innanzitutto, definiamo gli intervalli di appartenenza delle variabili di input e di output. Dai dati presenti nella tabella si evince che x₁ e x₂ prenderanno valori in [6,80] e [-54,59] rispettivamente, mentre la variabile y in [6,150].

La variabile linguistica di input x₁, “numero di predatori”, assumerà i seguenti valori linguistici: {Molto basso, Basso, Medio, Alto, Molto alto}.

I fuzzy set della partizione possono anche essere rappresentati mediante i numeri triangolari fuzzy come segue:

$$[6; 6; 24,5] = \{\text{Molto Basso}\}$$

$$[6; 24,5; 43] = \{\text{Basso}\}$$

$$[24,5; 43; 61,5] = \{\text{Medio}\}$$

$$[43; 61,5; 80] = \{\text{Alto}\}$$

$$[61,5; 80; 80] = \{\text{Molto Alto}\}$$

La figura 6 mostra il grafico della partizione linguistica fuzzy

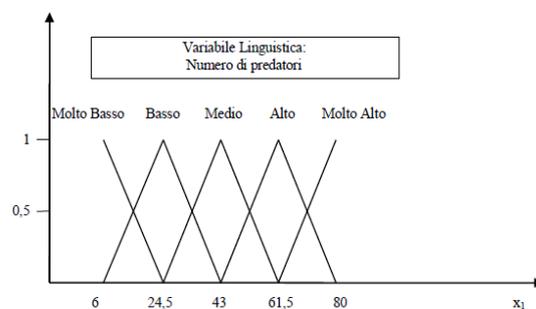


Fig. 6. Partizione fuzzy della variabile linguistica Numero di Predatori (linci)

I termini linguistici della variabile linguistica x₂, “incremento”, saranno :{ Molto negativo, Negativo, Stazionario, Positivo, Molto positivo}. Utilizzando i numeri triangolari fuzzy la partizione linguistica sarà costituita dai seguenti fuzzy set:

$$[-54; -54; -25,75] = \{\text{Molto negativo}\}$$

$$[-54; -25,75; 2,5] = \{\text{Negativo}\}$$

- $[-25,75; 2,5; 30,75] = \{\text{Stazionario}\}$
- $[2,5; 30,75; 59] = \{\text{Positivo}\}$
- $[30,75; 59; 59] = \{\text{Molto Positivo}\}$

La figura 7 visualizza graficamente la partizione.

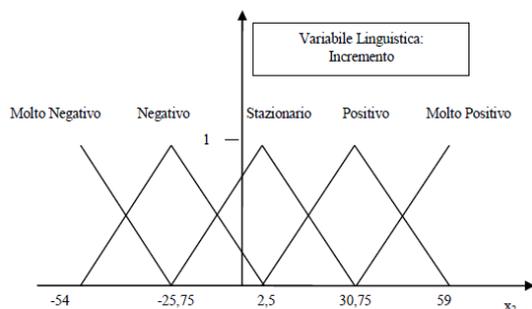


Fig. 7. Partizione fuzzy della variabile linguistica Incremento del numero di predatori

Infine, la variabile di output y, che linguisticamente descrive il numero della popolazione delle prede, avrà come valori i seguenti termini linguistici :{ Molto Basso, Basso, Medio, Alto, Molto alto}, e la partizione fuzzy indicata dai numeri triangolari fuzzy sarà;

- $[6; 6; 42] = \{\text{Molto Basso}\}$
- $[6; 42; 78] = \{\text{Basso}\}$
- $[42; 78; 114] = \{\text{Medio}\}$
- $[78; 114; 150] = \{\text{Alto}\}$
- $[114; 150; 150] = \{\text{Molto Alto}\}$.

Graficamente la partizione avrà la forma mostrata in figura 8:

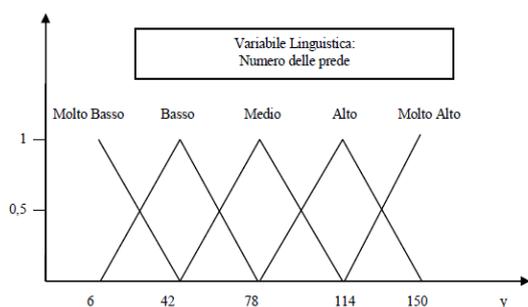


Fig. 8. Partizione fuzzy della variabile linguistica Numero di Prede (lepri).

La base delle regole fuzzy, costruita effettuando un'osservazione approfondita del fenomeno della predazione, sarà composta dalle seguenti 14 regole:

1. Se il numero dei predatori e' "MOLTO BASSO" e l'incremento e' "MOLTO NEGATIVO" allora il numero delle prede e' "BASSO".
2. Se il numero dei predatori e' "MOLTO BASSO" e l'incremento e' "NEGATIVO" allora il numero delle prede e' "BASSO".
3. Se il numero dei predatori e' "MOLTO BASSO" e l'incremento e' "STAZIONARIO" allora il numero delle prede e' "BASSO".
4. Se il numero dei predatori e' "BASSO" e l'incremento e' "MOLTO NEGATIVO" allora il numero delle prede e' "BASSO".
5. Se il numero dei predatori e' "BASSO" e l'incremento e' "NEGATIVO" allora il numero delle prede e' "MOLTO BASSO".
6. Se il numero dei predatori e' "BASSO" e l'incremento e' "STAZIONARIO" allora il numero delle prede e' "BASSO".
7. Se il numero dei predatori e' "BASSO" e l'incremento e' "POSITIVO" allora il numero delle prede e' "BASSO".
8. Se il numero dei predatori e' "MEDIO" e l'incremento e' "NEGATIVO" allora il numero delle prede e' "MOLTO BASSO".
9. Se il numero dei predatori e' "MEDIO" e l'incremento e' "STAZIONARIO" allora il numero delle prede e' "MEDIO".
10. Se il numero dei predatori e' "MEDIO" e l'incremento e' "POSITIVO" allora il numero delle prede e' "MEDIO".
11. Se il numero dei predatori e' "ALTO" e l'incremento e' "STAZIONARIO" allora il numero delle prede e' "MEDIO".
12. Se il numero dei predatori e' "ALTO" e l'incremento e' "POSITIVO" allora il numero delle prede e' "MEDIO".
13. Se il numero dei predatori e' "ALTO" e l'incremento e' "MOLTO POSITIVO" allora il numero delle prede e' "MOLTO ALTO".
14. Se il numero dei predatori e' "MOLTO ALTO" e l'incremento e' "POSITIVO" allora il numero delle prede e' "MOLTO ALTO".

La base di regole fuzzy composta dalle quattordici precedenti regole, non ha il requisito della completezza, tuttavia il sistema fuzzy può essere considerato completo in quanto, la conoscenza del problema permette di essere sicuri che, in base ai dati in nostro possesso, presenti all'interno della tabella, non si presenteranno mai dati di input che non "accendano" una delle 14 regole. Nel caso in cui i dati di input dovessero essere in numero maggiore rispetto a quelli presenti nella tabella precedente è conveniente verificare se sia il caso di ampliare il numero delle regole.

I risultati ottenuti dal sistema fuzzy sono mostrati in figura 9.

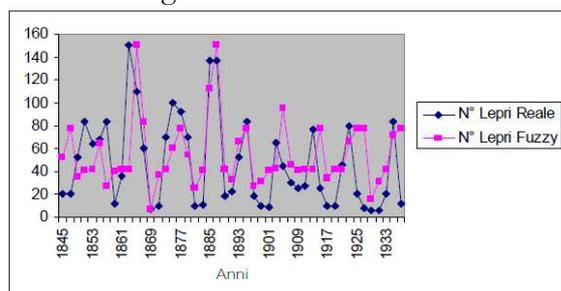


Fig. 9 .Il grafico confronta l'andamento del numero delle prede calcolate con il modello fuzzy e con quello reale.

I dati predittivi del modello fuzzy sono molto plausibili se confrontati con quelli reali, nonostante il numero esiguo di dati di input. Comunque, un aumento del numero di fuzzy sets all'interno di una partizione porterebbe ad una maggiore precisione dei risultati del modello a discapito però della velocità computazionale.

Riferimenti

Elton C, Nicholson M. (1942), *The ten-year cycle in numbers of the lynx in Canada*. *Journal of Animal Ecology*, vol.11 pp. 215–244

Klir G., Yuan B. (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*, Prentice – Hall International, 1995.

Larsen P.M. (1980), *Industrial applications of fuzzy logic control*. *Int. Journal man-machine studies*, vol. 12, n° 1, pp.3-10.

MacLulich D.A. (1937), *Fluctuations in the numbers of the varying hare (Lepus americanus)*. University of Toronto Studies, Series N.43, pp. 5-136

Ruspini E.H. (1969), *A new approach to clustering*. *Information and control*. Vol.15, pp.22-32.

Sangalli A. (2000), *L'importanza di essere fuzzy*. Bollati Boringhieri.

Sugeno M., Kang K.T. (1991), *Structure identification of fuzzy model*, *Fuzzy Sets and Systems* 28 pp.191–212.

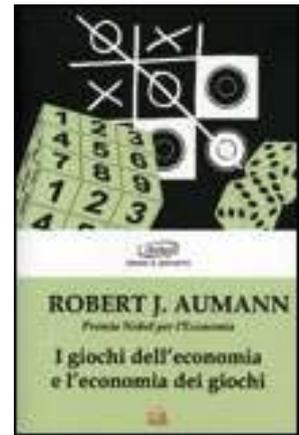
T. Takagi, M. Sugeno (1985), *Fuzzy identification of systems and its applications*, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 15 116–132.

Volterra V. (1926), *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, *Atti Acc. Naz. Lincei* pp. 31-113.

Zadeh L.A. (1965), *Fuzzy sets*, *Information Control*, 8, pp.338-353.

Zadeh L.A. (1975), *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I, II, III*. *Information Sciences* I 8 – II 8 – III 9. pp 199-249 ; pp 301-357; pp 43-80

129. Lo scaffale dei libri



Robert J. Aumann, *I giochi dell'economia e l'economia dei giochi*, Di Renzo Editore, 2009

Robert John Aumann è un matematico israeliano, nel 2005 ha vinto con Thomas Schelling il premio Nobel per l'economia per "avere accresciuto la nostra comprensione del conflitto e della cooperazione attraverso l'analisi della Teoria dei Giochi". Secondo i saggi di Stoccolma che lo hanno insignito del premio: "Ha migliorato la nostra comprensione del concetto di conflitto e cooperazione attraverso l'analisi della Teoria dei Giochi come approccio per affrontare la grande questione: perché alcuni gruppi di persone o Paesi riescono a promuovere la cooperazione, mentre altri subiscono i conflitti?"

Negli anni sessanta Aumann ha un'azienda di consulenza chiamata Mathematica fondata da O. Morgenstern e H. Kuhn. "Avevamo a che fare con i negoziati di Ginevra per il disarmo, scrive Aumann, una serie di negoziati con l'Unione Sovietica sul tema del controllo degli armamenti e del disarmo. Maschler ed io rimanemmo molto colpiti dal fatto che questi negoziati si svolgevano a più riprese; un modello che si sarebbe adattato loro perfettamente era quello dei giochi ripetuti... giochi ripetuti con informazioni incomplete. Non sapevamo quante armi possedesse l'Unione Sovietica, né i suoi cittadini sapevano quante armi fossero in nostro possesso."

In questo libretto di 80 pagine Aumann parla di sé, della sua storia, delle ricerche sulla Teoria dei Giochi e soprattutto esprime il suo punto di vista filosofico sul ruolo di questa Teoria sia come disciplina tecnica, di applicazione efficace della matematica, sia come disciplina conoscitiva del mondo e dell'uomo.

La teoria dei giochi è una branca della matematica applicata, generalmente usata nelle scienze politiche, sociali, economiche, più recentemente anche nella biologia e nell'informatica, che tenta di cogliere dal punto di vista matematico il comportamento in situazioni strategiche, nelle quali il successo di un individuo nel fare delle scelte dipende dalle scelte degli altri. Inizialmente fu sviluppata per analizzare le situazioni di competizione in cui un individuo riesce a spese di un altro, i cosiddetti giochi a somma zero, ma è poi stata sviluppata per trattare una vasta classe di interazioni, classificate secondo diversi criteri. Si potrebbe descrivere in maniera più appropriata come 'teoria della decisione interattiva' poiché s'interessa principalmente del comportamento di chi prende le decisioni, i giocatori, le cui decisioni si influenzano a vicenda. Il termine deriva dalla somiglianza formale di questi

problemi con i giochi di società: scacchi, bridge, poker... e sottolinea la natura razionale, fredda e calcolatrice di questa analisi.

In realtà, scrive Aumann, l'uomo razionale è una specie mitologica, il suo consanguineo più prossimo nella vita reale è l'homo sapiens che è spesso guidato da motivazioni psicologiche inconscie o anche perfettamente conscie ma totalmente irrazionali. Spesso è un autentico stupido e anche quando è intelligente è spesso stanco, affamato, distratto, arrabbiato, ubriaco, incapace di pensare sotto pressione, guidato più dalle emozioni che dalla razionalità. Così non possiamo aspettarci che la teoria dei giochi o quella economica siano descrittive nello stesso senso della fisica o dell'astronomia. La razionalità è infatti solo uno dei molti fattori che influenzano il comportamento umano. Dobbiamo abituarci all'idea che l'economia non è l'astronomia, la teoria dei giochi non è la fisica. Le scienze, continua Aumann, sono figli delle nostre menti, dobbiamo permettere loro di svilupparsi naturalmente e non forzarle in schemi che non sono adatti per loro.

Dal mio punto di vista, continua l'autore, le teorie scientifiche non devono essere considerate in termini di 'vero' o 'falso'. Nella definizione di una teoria, non stiamo provando a raggiungere la verità, o ad approssimarci ad essa, piuttosto stiamo provando a organizzare i nostri pensieri e le nostre osservazioni in maniera utile. In altre parole, la verità non è l'unico criterio per applicare la scienza; tant'è che la meccanica newtoniana continua ad essere usata come modello anche dopo essere stata screditata dal punto di vista della verità dalla relatività einsteiniana. Pertanto, quando nella Teoria dei Giochi ci poniamo il problema di massimizzare l'utile non dobbiamo chiederci se ciò è plausibile, se gli uomini si comportano effettivamente così, ma dobbiamo indagare su quali legami questo fatto crea e dove essa ci porta.

La home page dell'autore <http://www.ma.huji.ac.il/~raumann/>

Antonio Bernardo

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 3 Numero 11 – Dicembre 2009

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

Direttore responsabile Antonio Bernardo

antoniobernardo@matematicamente.it