159. Matematica tra le pieghe II

Paolo Bonicatto, Massimiliano Leoni, Luca Lussardi
paolo.bonicatto@gmail.com; leoni.massimiliano1@gmail.com; l.lussardi@dmf.unicatt.it

Introduzione

In un recente articolo ([2]) viene illustrato un interessante rapporto tra geometria e origami, essendo quest'ultimo, come tutti ben sanno, la celebre arte giapponese di piegare la carta. In particolare, l'ultima sezione di [2] è dedicata ad un breve cenno circa i legami tra origami e costruzioni con riga e compasso: l'uso degli origami permette infatti di risolvere alcuni dei problemi dell'antichità notoriamente impossibili da risolvere con riga (non graduata) e compasso.
Ricordiamo che una costruzione geometrica si dice effettuabile con riga e compasso se con una sola riga, non graduata, e con un compasso, è possibile, procedendo per vari passaggi, costruire la configurazione data; ad esempio assegnati due punti nel piano è possibile costruire il punto medio del segmento utilizzando solamente righello e compasso, oppure ancora un triangolo equilatero che ha come base il segmento di estremi i punti assegnati. Torneremo nella prossima sezione ad analizzare nel dettaglio la geometria della riga e del compasso illustrando gli assiomi che in essa si pongono.
Lo scopo di questo articolo è quello di approfondire questo legame tra geometria della riga e compasso e origami, riproponendo anzitutto in modo più dettagliato e critico l'assiomatica recentemente proposta per uno studio geometrico delle costruzioni basate sugli origami, e passando poi a mostrare esplicitamente come gli origami permettono di risolvere alcuni dei problemi dell'antichità, come la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo.

1. La geometria della riga e del compasso

430 a.C. circa: la peste imperversava in tutto il bacino del mediterraneo e non si trovava alcun rimedio per risolvere la difficile situazione. Un giorno gli ateniesi decisero di interrogare l'oracolo al fine di far cessare l'epidemia. Ecco la risposta dell'oracolo:

> *Per far cessare la peste, dovrete duplicare l'altare consacrato ad Apollo nell'isola di Delo.*

L'altare di Apollo a Delo aveva la forma di un cubo. Gli ateniesi costruirono semplicemente un altro altare con spigolo doppio rispetto al lato del già esistente altare. Risultato? La peste non cessò, e questo destò grande stupore nei greci, fino a quando si resero conto che il nuovo altare costruito aveva volume ben otto volte il precedente, e non due: infatti se ℓ era lo spigolo dell'altare originario, allora raddoppiare lo spigolo, ovvero costruire un altare cubico di spigolo 2ℓ, portava ad un volume di $(2\ell)^3 = 8\ell^3$. Impotenti di fronte al fatto, i greci decisero di ricorrere ai matematici: Archita di Taranto (428a.C.-347a.C.), Menecmo (380a.C.-320a.C.), Ippia di Elide (443a.C.-?a.C.). Tutti questi improvvisarono metodi meccanici che erano in grado di tracciare curve particolari nel piano, ad esempio coniche. Purtroppo però tutte queste soluzioni, benché estremamente ingegnose, non aiutavano sul piano concreto la costruzione del nuovo altare. La peste non cessava e i greci decisero di rivolgersi a Platone (428 a.C.-347 a.C.). Il grande filosofo rispose:

> *Se, per bocca dell'oracolo, Apollo ha imposto la costruzione di quell'altare, dovete capire che non è certo perché avesse bisogno di un altare doppio. Il punto è che rimproverava ai greci di trascurare la matematica e biasimava il loro disprezzo per la geometria. Nel desiderio di risolvere a tutti i costi il problema non avete esitato a ricorrere a mezzi razionali e a utilizzare sistemi empirici. Così facendo, non perdete irrimediabilmente il meglio della Geometria?*

E la peste cessò.
La storia leggendaria sopra raccontata, tramandataci da Teone di Smirne (70-135), si riferisce al celebre problema della *duplicazione del cubo*: in parole molto povere l'obiettivo è costruire, con l'uso solamente di riga, non graduata, e compasso, un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$, essendo noto il segmento di lunghezza

1. Il problema della duplicazione del cubo è, come si dice in matematica, un *problema di terzo grado*: infatti ciò che si cerca di costruire è un segmento che abbia lunghezza pari alla soluzione dell'equazione $x^3 - 2 = 0$, che è per l'appunto un'equazione algebrica di terzo grado.
Un altro celebre problema dell'antichità è il cosiddetto problema della *trisezione dell'angolo*: dividere un angolo assegnato in tre angoli uguali tra loro, utilizzando, al solito, solo riga e compasso. Anche per questo problema sono state trovate soluzioni meccaniche ingegnose, ma non una soluzione con riga e compasso. E anche in questo caso si tratta di un problema di terzo grado. Infatti se $\alpha \in [0,2\pi)$ è un dato angolo allora in base alle note formule goniometriche si ha

$$\cos\alpha = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

Ne segue che $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ è soluzione di un'equazione di terzo grado. Essendo possibile costruire con riga e compasso $\cos\alpha$, noto α, segue che è possibile costruire con riga e compasso anche $\frac{\alpha}{3}$ purché uno sia in grado di risolvere con riga e compasso l'equazione di terzo grado $4x^3 - 3x = a$, con a termine noto.
Esiste, infine, un terzo problema dell'antichità, che però non rientra nella stessa categoria dei precedenti, la *quadratura del cerchio*: costruire un quadrato che ha la stessa area di un cerchio assegnato o, in parole povere, costruire un segmento di lunghezza π, noto il segmento di lunghezza 1, tutto ciò, ben inteso, sempre e solo con riga e compasso. Stavolta non si tratta di un problema di terzo grado, né di grado $n > 3$: infatti, π non è mai soluzione di un'equazione della forma

(2.1)
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

La dimostrazione di questo fatto non è banale, e risale a Lindemann (1852-1939) che la pubblicò nel 1882. In matematica si dice anche che π è un numero *trascendente*, mentre tutti i numeri, razionali o no che siano, che si ottengono come soluzioni di equazioni della forma (2.1) sono detti *numeri algebrici*.
Ciò che accomuna i tre problemi dell'antichità descritti è, come Platone suggeriva, l'*impossibilità* della loro risoluzione con l'uso esclusivo di riga non graduata e compasso.
Nella geometria della riga e compasso si possono introdurre i seguenti assiomi euclidei di costruzione, sostanzialmente risalenti a Euclide, vissuto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C.-283 a.C.):

Assioma 1.1 *Per due punti distinti si può tracciare una retta.*

Assioma 1.2. *Dati un punto P e un raggio positivo r, si può tracciare una circonferenza con centro P e raggio r.*

Gli assiomi 1.1 e 1.2 non meritano particolari commenti: si tratta semplicemente di assiomi evidentemente validi se uno pretende di poter usare riga e compasso per le proprie costruzioni.

Assioma 1.3. *È possibile considerare il punto di intersezione tra due rette distinte non parallele tra loro.*

L'assioma 1.3 si riflette nella capacità di risolvere graficamente un sistema di equazioni di primo grado. Ne segue che riga e compasso permettono di costruire le soluzioni a problemi di primo grado, come ad esempio il punto medio di un segmento.

Assioma 1.4. *È possibile considerare i punti di intersezione tra una retta ed una circonferenza.*

Assioma 1.5. *È possibile considerare i punti di intersezione tra due circonferenze.*

Gli assiomi 1.4 e 1.5 dal punto di vista analitico dicono la stessa cosa, dal momento che trovare l'intersezione tra due circonferenze equivale a trovare l'intersezione tra una retta ed una circonferenza. In particolare, essi permettono di risolvere equazioni di secondo grado, dal momento che un sistema retta-circonferenza ha per risolvente un'equazione di secondo grado.
Intuitivamente dunque sembrerebbe che gli assiomi 1.1-1.5 permettano di risolvere problemi di primo o secondo grado. In realtà, per essere più rigorosi si deve affermare che esiste una caratterizzazione algebrica più generale dei numeri costruibili con riga e compasso, che fa uso di alcuni risultati di una parte dell'algebra denominata *teoria dei campi*. È infatti interessante notare che l'insieme dei numeri

costruibili mediante una successione finita di operazioni 1.1-1.5 ha una struttura di *campo*: in poche parole, dati due numeri reali a, b costruibili, la loro somma $a+b$, la loro differenza $a-b$, il loro prodotto ab e il loro rapporto $\frac{a}{b}$ sono anch'essi costruibili. Ancora, si potrebbe dimostrare che tale campo, che d'ora in poi denoteremo con $\mathfrak{C}$, contiene il campo ben noto dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$. Per chi fosse interessato a questa dimostrazione, è sufficiente ricordare il teorema di Talete e mostrare che ogni numero razionale della forma $\frac{1}{n}$ appartiene a $\mathfrak{C}$. In termini tecnici, si dice che $\mathfrak{C}$ è un'*estensione* di $\mathbb{Q}$: denoteremo con $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ l'estensione di $\mathbb{Q}$ di elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, che risulta essere sempre un sottocampo di $\mathbb{R}$.
Il risultato profondo è raccolto nel teorema seguente.

Teorema 1. *Un numero reale r è costruibile con riga e compasso se e soltanto se esiste un numero finito di numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tali che*

i. $r \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.
ii. $\alpha_1^2 \in \mathbb{Q}$ e $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1})$ per ogni $i = 2, \dots, n$.

Ora la questione è valutare il *grado* dell'estensione $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$: il grado di un'estensione è, in un certo senso, una misura della grandezza del nuovo campo. Si osserva che tale ampliamento si realizza anche come successione di estensioni semplici (diciamo un'estensione *semplice* quando è della forma $\mathbb{Q}(a)$ per un opportuno a) che hanno tutti grado 1 o 2. Da qui, per un noto fatto di teoria dei campi, la cosiddetta *moltiplicatività del grado sulle torri*, segue che l'estensione $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ha grado su $\mathbb{Q}$ una potenza di 2, diciamo 2^h con $h \in \mathbb{N}$.
Questo fatto, che può sembrare abbastanza scontato agli addetti ai lavori, è in verità la prova finalmente rigorosa dell'impossibilità di risolvere i tre problemi dell'antichità con riga e compasso. Infatti, per il teorema appena enunciato, se un numero è costruibile, allora esso deve necessariamente appartenere a un'estensione di $\mathbb{Q}$ di grado una potenza di 2: quindi, siccome $\sqrt[3]{2}$ sta in un ampliamento di grado 3, non è costruibile. Ancora, il fatto che il grado sia una potenza di 2 e, dunque, in particolare, un numero finito, ci permette di concludere che nessun numero trascendente è costruibile (si può infatti far vedere che i numeri trascendenti sono tutti e soli quelli che danno luogo a estensioni di grado infinito). Quindi, anche la quadratura del cerchio non è possibile con gli assiomi 1.1-1.5. Infine, per la trisezione dell'angolo, abbiamo già osservato nella sezione precedente che si tratta di un problema di terzo grado, pertanto dal punto di vista algebrico siamo ricondotti ad un'estensione di grado 3 di $\mathbb{Q}$, e dunque anche la trisezione dell'angolo (generico) non è possibile con riga e compasso.

2. Assiomatica degli origami

In analogia alla geometria della riga e del compasso, per la geometria degli origami è stato proposto un set di assiomi che descrivono, in modo inequivocabile, le operazioni che l'arte giapponese permette di effettuare. Tali assiomi sono anche detti **assiomi di Huzita**, e sono stati proposti da Hatori, Huzita, Justin e Lang: per una trattazione matematica rigorosa si veda [1].

Assioma 2.1. *Per due punti distinti si può sempre trovare una piega.*

Per quanto riguarda l'assioma 2.1 c'è ben poco da aggiungere: dati due punti sopra il nostro foglio, possiamo sempre piegarlo lungo la congiungente i due punti, la cosa appare più che ragionevole. In particolare in tal caso la piega è anche unica; si veda la figura 1.

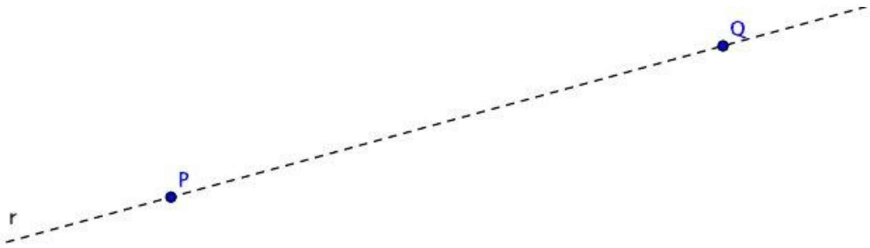

FIGURA 1. La piega *p* che passa per i punti P e Q.

Assioma 2.2. *Date due pieghe non parallele e distinte si può sempre trovare il loro punto di intersezione.*

Anche questo assioma non sembra particolarmente sorprendente: se pieghiamo il nostro foglio di carta lungo due ipotetiche rette, allora individuiamo un unico punto di intersezione tra di esse, a meno che le pieghe non siano parallele. Si veda la figura 2. Osserviamo che gli assiomi 2.1 e 2.2 sono in analogia con gli assiomi 1.1 e 1.3.

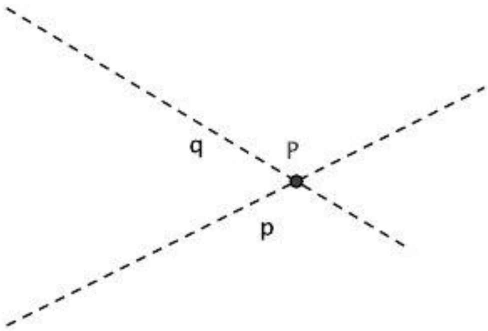

FIGURA 2. Le pieghe *p* e *q*, non parallele, danno origine al punto P.

Assioma 2.3. *Dati due punti distinti si può sempre trovare una piega che porta un punto sull'altro.*

L'assioma 2.3 sancisce l'esistenza dell'unico asse della simmetria assiale che porta un punto dato nell'altro. La figura 3 illustra la situazione. Osserviamo che l'unica piega postulata dall'assioma 2.3 realizza l'asse del segmento che ha per estremi i due punti assegnati, costruzione che è possibile anche con riga e compasso

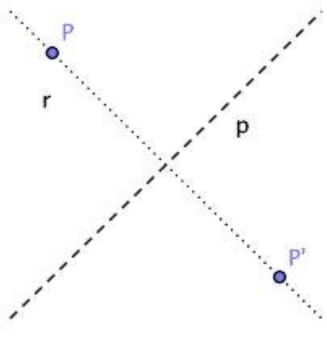

FIGURA 3. La piega *p* che porta il punto P nel punto P'.

Assioma 2.4. *Date due rette distinte si può sempre trovare una piega che porta una retta sull'altra.*
L'assioma 2.4 viene realizzato scegliendo una delle due bisettrici dell'angolo formato tra le due rette date, nel caso in cui queste ultime due non siano tra loro parallele. Nel caso in cui sono parallele, allora l'unica piega è la retta che si trova alla stessa distanza dalle due rette date. Si veda la figura 4 nel caso di rette non parallele. L'assioma 2.4 permette di costruire, nel caso di non parallelismo delle rette assegnate, le bisettrici dell'angolo da esse formato, costruzione che sappiamo bene essere possibile anche con riga e compasso.

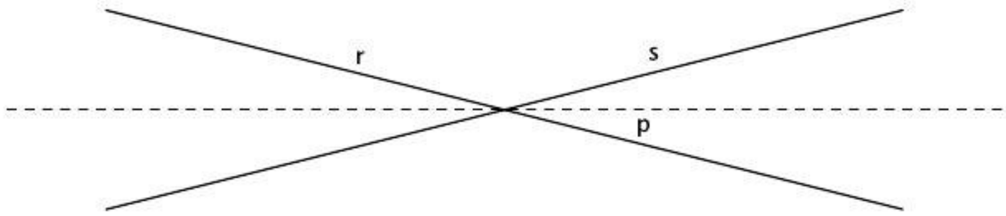

FIGURA 4. Una piega *p* che porta la retta *r* nella retta *s*.

Assioma 2.5. *Dati due punti distinti e una retta si può trovare una piega che fissa uno dei due punti, e porta l'altro punto sulla retta data.*

Tale assioma è leggermente più delicato rispetto ai precedenti. La figura 5 mostra per bene la situazione: sono dati P, Q, r e il punto P viene mandato nel punto $P' \in r$ lungo la piega p passante per il punto Q.

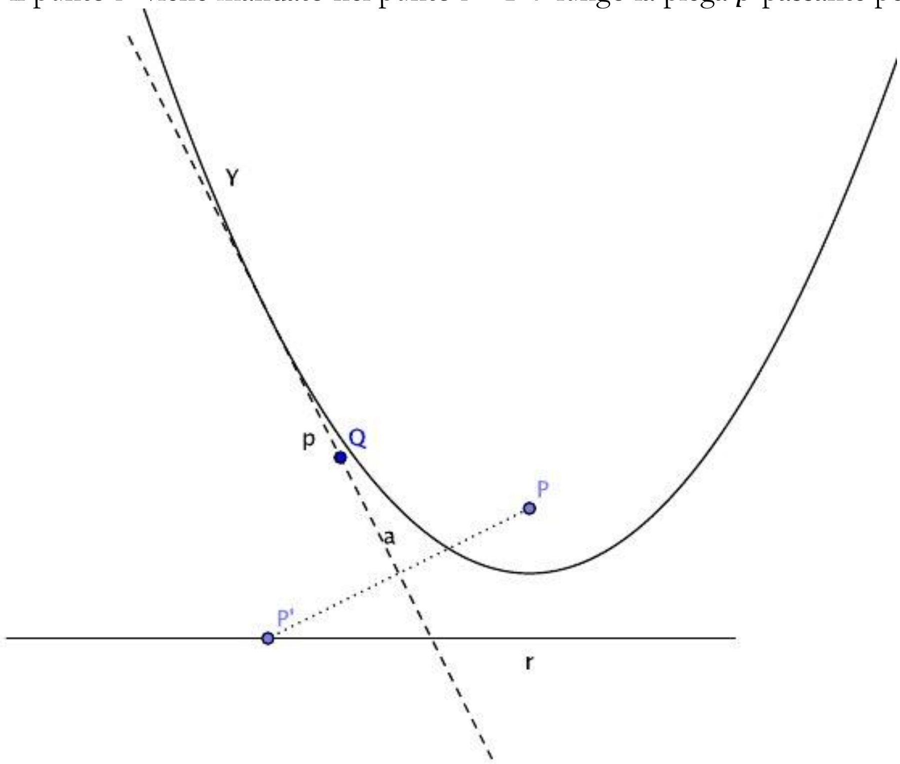

FIGURA 5. Una piega p per un punto dato Q che porta un altro punto dato P in un punto P' giacente su una retta data r; notiamo anche la parabola γ di fuoco P e direttrice r che risulta tangente alla piega p.

L'assioma 2.5 è invece fondamentalmente diverso dai precedenti, in quanto non è sempre possibile trovare una piega che verifichi la condizione descritta dall'assioma. Più precisamente siano dati P, Q distinti e sia data la retta r. Si possono presentare due casi. Supponiamo che $P \in r$. Allora in tal caso la piega postulata esiste ed è unica, ed è la retta ortogonale a r passante per Q. Supponiamo ora di essere invece nel caso, più interessante, in cui sia $P \notin r$$, come descritto nella figura 5. Supponiamo che r sia la retta di equazione $y = 0$, e cerchiamo la piega come retta di equazione $y = mx + q$. Se $Q = (x_Q, y_Q)$ e $P = (0,1)$ allora si verifica facilmente che deve essere

$$m^2 + 2mx_Q + (2y_Q - 1) = 0$$

Tale equazione ammette soluzioni reali se e solo se

$$x_Q^2 + 1 - 2y_Q \geq 0$$

ovvero

$$y_Q \leq \frac{x_Q^2 + 1}{2}$$

Ne segue che si ha soluzione se e solo se il punto Q giace al di sotto della parabola γ di equazione

$$y = \frac{x^2+1}{2}$$

Osserviamo che la parabola γ è anche la parabola che ha fuoco in $(0,1)$ e direttrice l'asse x; inoltre la retta $y = mx + q$ è tangente a tale parabola. In generale, si può verificare che la piega tratteggiata postulata dall'assioma 2.5 esiste (ma non è unica) se Q giace al di sotto della parabola che ha fuoco in P e direttrice r; inoltre, in tal caso la piega è tangente a tale parabola. Da tutto ciò si può dedurre per via rigorosa, ma non è difficile convincersi visto che la parabola è una conica, che il quinto assioma permette la risoluzione dei problemi di secondo grado. Ne segue che i primi cinque assiomi proposti per gli origami sono del tutto equivalenti, in termini di possibilità di costruzione, alla geometria della riga e del compasso. Dunque i primi cinque assiomi degli origami permettono di costruire, dal punto di visto algebrico, tutti i numeri che stanno in estensioni di $\mathbb{Q}$ di grado 2^h, per un certo $h \in \mathbb{N}$.
Siamo ora pronti a analizzare l'ultimo assioma proposto per gli origami.

Assioma 2.6. *Dati due punti distinti e due rette distinte si può trovare una piega che manda un punto su una retta e l'altro punto sull'altra retta.*

Rivediamo anzitutto nel dettaglio l'enunciato, facendo riferimento alla figura 6: dati due punti distinti P e Q e date due rette distinte ℓ e ℓ' si può trovare una piega che manda P in $P' \in \ell$ e Q in $Q' \in \ell'$. Supponiamo che la piega esista, e denotiamo la retta rispettiva di sostegno con d. Fissiamo un punto $R \in d$. Allora il punto P viene mandato in $P' \in \ell$ mediante una piega che fissa il punto R. Per quanto visto in precedenza, la retta d è tangente alla parabola che ha fuoco in P e direttrice ℓ. Allo stesso modo la retta d risulta essere tangente alla parabola che ha fuoco in Q e direttrice ℓ'. L'assioma 3.6 permette quindi di trovare una tangente comune a due parabole distinte, nel caso in cui quest'ultima esista.

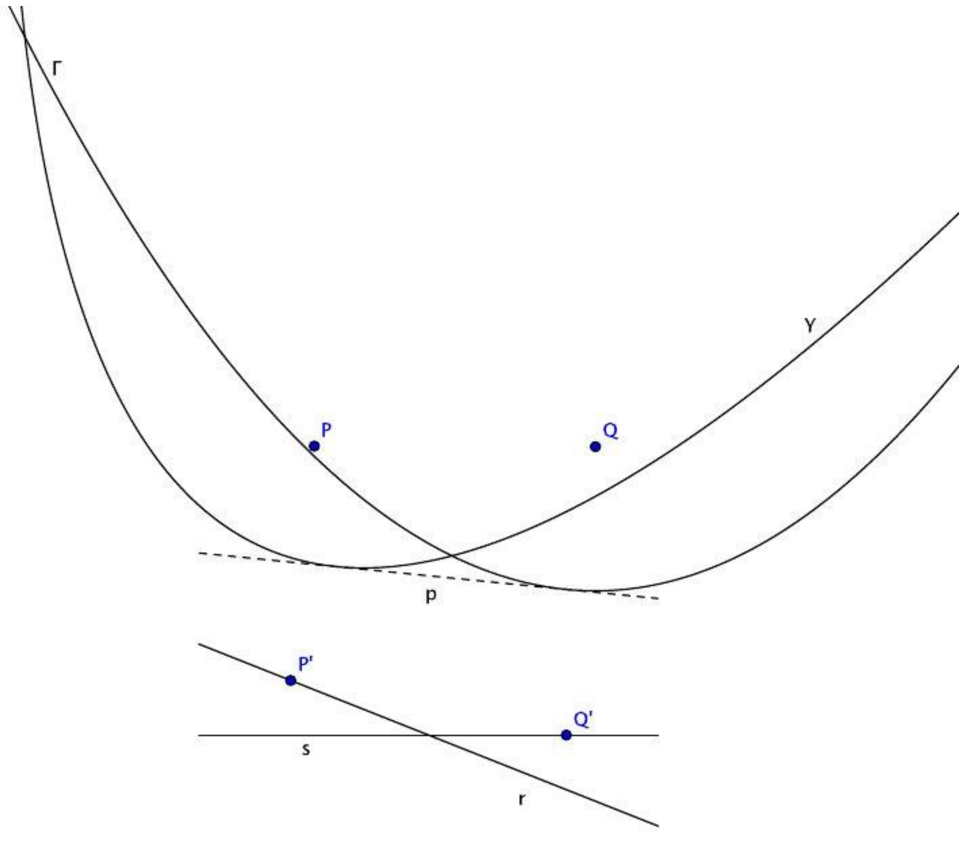

FIGURA 6. Una piega p che porta un punto dato P in un punto P' su una retta data r e contemporaneamente porta un altro punto dato Q in un'altra retta data s; notiamo le parabole γ e Γ, rispettivamente di fuoco e direttrice (P,r) e (Q,s), le quali hanno la retta p come tangente comune.

Cerchiamo di capire mediante un esempio di che tipo di problema si tratta. Dato $a > 0$, consideriamo la parabola con fuoco in $(0, a)$ e con direttrice la retta la retta di equazione $y = -a$: essa ha equazione

$$y = \frac{x^2}{4a}$$

Consideriamo ora la parabola con fuoco nel punto $(1,0)$ e con direttrice la retta di equazione $x = -1$: essa ha equazione

$$x = \frac{y^2}{4}.$$

Si verifica facilmente che queste due parabole hanno una tangente comune, che è la retta di equazione

$$y = -\frac{x}{\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{a}$$

Ne segue che intersecando tale tangente con l'asse delle y otteniamo un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{a}$. Ecco svelata la potenza degli origami: l'assioma 3.6 permette di risolvere tutti i problemi di terzo grado. Possiamo quindi ragionevolmente concludere affermando che:

Teorema 2. *Un numero reale r è costruibile con gli origami se e soltanto se esiste un numero finito di numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tali che*

i. $r \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.
ii. $\alpha_1^p \in \mathbb{Q}$ e $\alpha_i^p \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1})$ per ogni $i = 2, \dots, n$, con $p = 2, 3$.

Gli origami permettono quindi la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, essendo questi problemi entrambi di terzo grado. Osserviamo che la geometria degli origami permette in ogni caso la costruzione di numeri algebrici, benché più di quelli costruibili con riga e compasso. In particolare quindi nessun numero trascendente è costruibile nemmeno con gli origami: la quadratura del cerchio resta dunque un problema impossibile anche per gli origami.
Concludiamo questo breve articolo mostrando nel dettaglio come si può procedere per trisecare un generico angolo; per maggiori dettagli su questa costruzione e per altre costruzioni rimandiamo il lettore a [3].

3. La trisezione dell'angolo

Per quanto esposto nella sezione 1 sappiamo che la trisezione del generico angolo φ è un problema di terzo grado, dunque risolubile con gli origami. Per capire il procedimento, prima supporremo di avere già la trisezione effettuata e quindi capire che tipo di costruzione possibile con gli origami è compatibile con la trisezione; dunque passeremo a descrivere l'algoritmo costruttivo.
La costruzione che presenteremo vale per un angolo $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. È facile ricondurre a questo caso tutti gli altri casi. Infatti basta trovare $n \in \mathbb{N}$ tale per cui $\frac{\varphi}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: costruendo così $\theta = \frac{\varphi}{3n}$ basta allora considerare $\psi = n\theta$ per avere la soluzione $\varphi = 3\psi$.
Passiamo quindi a presentare l'idea che sta alla base della trisezione di un angolo $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, appoggiando le nostre considerazioni sulla figura 7.

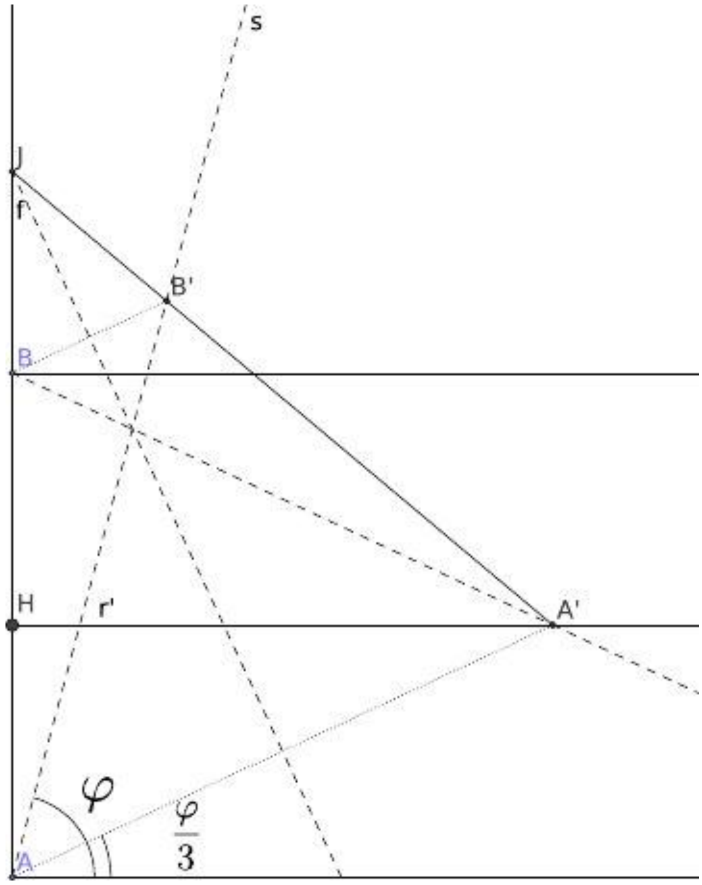

FIGURA 7. Costruzione alla base della trisezione di φ.

Supponiamo di essere in possesso della trisezione dell'angolo φ, come in figura. L'idea che sta alla base di tutto è costruire i punti A', B, B' in modo tale che la retta su cui giace il segmento AA' sia parallela alla retta su cui giace il segmento BB', e tale che il triangolo $AA'J$ sia isoscele sulla base AA'. Allora, in tal caso basta considerare la piega tratteggiata f come in figura, ovvero la bisettrice dell'angolo al vertice $A\hat{J}A'$. Ne segue che, avendo a disposizione soltanto la retta s individuata dall'angolo φ, se siamo in grado, per ogni scelta di un punto B sul segmento AJ, di costruire il punto H, allora la piega p che manda B sulla retta s e che manda A sulla retta r', che esiste grazie all'assioma 3.6, permette di individuare il punto A', e quindi di costruire l'angolo $\frac{\varphi}{3}$. Tutto ciò che va capito è quindi la posizione del punto H nella configurazione come in figura: il punto H è il punto medio del segmento AB. Infatti, essendo $A'\widehat{B'}B = A\hat{B}B' = 90° + \frac{\varphi}{3}$ ed essendo $A\widehat{B'}B = \frac{2\varphi}{3}$ si ha $A\hat{B}A' = A\widehat{B'}A' = 90° - \frac{\varphi}{3}$, da cui $A\hat{B}A' = A'\hat{A}B$, e dunque il triangolo $AA'B$ è isoscele sulla base AB; ne segue che $A'H$, essendo altezza sulla base, è anche mediana di AB.

Sfruttando la matematica descritta sopra possiamo descrivere l'algoritmo operativo che permette di trisecare un generico angolo acuto φ. I passaggi descritti sono illustrati in figura 8.

Step 1: Per prima cosa prendiamo il foglio e lo pieghiamo in modo da individuare l'angolo di partenza che vogliamo trisecare. Considerando il vertice del foglio, che battezziamo A, come vertice dell'angolo, un lato del foglio come lato dell'angolo ed un qualunque punto appartenente all'altro lato dell'angolo.

Step 2: Adesso tracciamo due rette r ed r' parallele al lato dell'angolo che giace sul bordo del foglio in modo tale che la retta r' sia equidistante da r e dal bordo del foglio. In questo modo si ottiene il punto B come intersezione di r e del bordo verticale del foglio.

Step 3: Il terzo passaggio è quello cruciale: si deve piegare il foglio in modo da mandare il punto A sulla retta r' ed il punto B sulla piega iniziale, trovando così i punti A' e B', rispettivamente. La piega appena realizzata corrisponde alla retta f nel disegno.

Step 4: La trisezione dell'angolo è così completata: la retta g individua, infatti, un angolo di ampiezza $\frac{\varphi}{3}$.

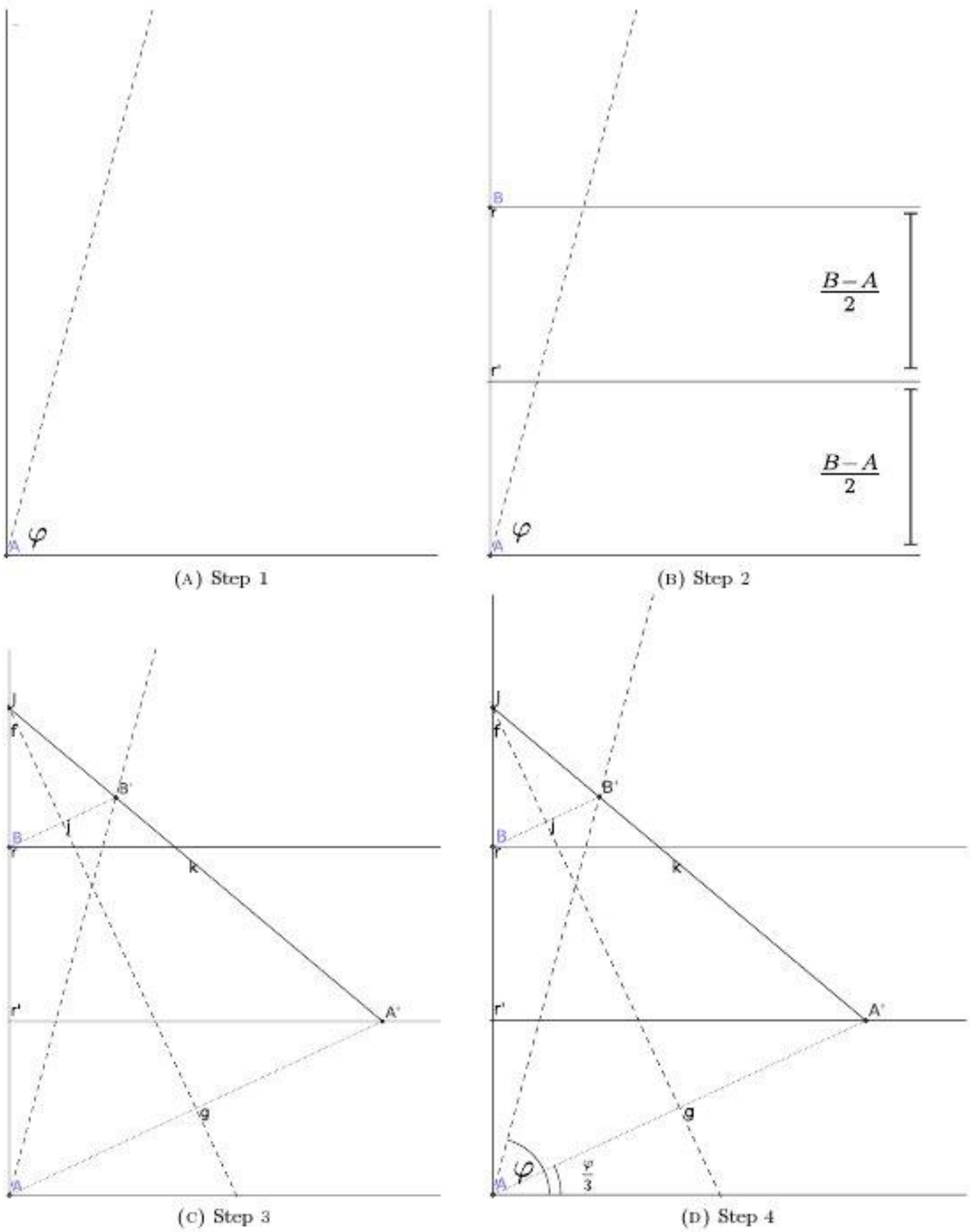

FIGURA 8. Algoritmo per la trisezione di φ.

Riferimenti bibliografici

[1] R. C. ALPERIN, A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers, "New York J. Math.", 6 (2000), pp. 119-133.
[2] L. GECCHELIN, Matematica tra le pieghe, "Matematicamente.it Magazine", 5 (2008), pp. 4-14.
[3] T. HULL, *Project origami. Activities for exploring mathematics*, A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusets (USA), 2006.