

• Numero 16 – Dicembre 2011 •



Numbered logs  
by Tricky

<http://www.flickr.com/photos/sovietuk/11934687/>

---

MATEMATICA TRA LE PIEGHE – CERCHI DI FIBONCCI – TEOREMA DI HELLY  
– COORDINATE GEOGRAFICHE – FUNZIONI DI SEGMENTI – NUMERI  
FIGURATI – INTEREST RATE SWAP – LIBRI

---

## Come proporre un contributo

### *Istruzioni per gli autori*

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

### MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito*  
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce  
ISSN 2035-0449

#### *Direttore responsabile*

Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it

#### *Vicedirettore*

Luca Lussardi  
lucalussardi@matematicamente.it

#### *Redazione*

Flavio Cimolin  
flaviocimolin@matematicamente.it  
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

#### *Hanno collaborato a questo numero*

Paolo Bonicatto, Stefano Borgogni, Gabriella D'Agostino, Antonio Guglielmi, Massimiliano Leoni, Daniela Molinari, Luca Lussardi, Giovanni Lucca, Michele Mazzucato, Bruno Sanchini, Andreana Zucco,

# Sommario

<b>159.</b> Matematica tra le pieghe II . . . . .	5
P. Bonicatto, M. Leoni, L. Lussardi	
<b>160.</b> I cerchi di Fibonacci ed uno sviluppo in serie per il numero $\pi$ . . . . .	14
Giovanni Lucca	
<b>161.</b> Intersezione di insiemi convessi: il Teorema di Helly . . . . .	20
Andreana Zucco	
<b>162.</b> Determinazione approssimata delle coordinate geografiche terrestri . . . . .	25
Michele T. Mazzucato	
<b>163.</b> Alcune funzioni di segmenti . . . . .	30
Bruno Sanchini	
<b>164.</b> Numeri figurati . . . . .	38
Stefano Borgogni	
<b>165.</b> Considerazioni sulla valutazione di un interest rate swap . . . . .	47
G. D'Agostino, A. Guglielmi	
<b>166.</b> Lo scaffale dei libri: . . . . .	58
<i>L'uomo che vide l'infinito</i> di Robert Kanigel	
<i>Le menzogne di Ulisse</i> di Piergiorgio Odifreddi	

# Editoriale

In questo numero si torna a parlare degli origami e del loro rapporto con la geometria; si parla di un numero che non manca mai in una trattazione di matematica:  $\pi$  raggiunto con una catena di cerchi, dove ognuno di essi è tangente ai due cerchi precedente e a una retta comune; si descrive un curioso corollario al teorema di Helly che ha a che fare con le esposizioni di quadri. Miche Mazzucato torna a parlarci della determinazione pratica delle coordinate geografiche terrestri, Bruno Santini di un suo tema di studio: le famiglie di funzioni di segmenti. Si parla poi di numeri figurati, di interest rate swap. Il numero di chiude con un paio di buone letture di matematica.

Antonio Bernardo

# 159. Matematica tra le pieghe II

Paolo Bonicatto, Massimiliano Leoni, Luca Lussardi

paolo.bonicatto@gmail.com; leoni.massimiliano1@gmail.com; l.lussardi@dmf.unicatt.it

## Introduzione

In un recente articolo ([2]) viene illustrato un interessante rapporto tra geometria e origami, essendo quest'ultimo, come tutti ben sanno, la celebre arte giapponese di piegare la carta. In particolare, l'ultima sezione di [2] è dedicata ad un breve cenno circa i legami tra origami e costruzioni con riga e compasso: l'uso degli origami permette infatti di risolvere alcuni dei problemi dell'antichità notoriamente impossibili da risolvere con riga (non graduata) e compasso.

Ricordiamo che una costruzione geometrica si dice effettuabile con riga e compasso se con una sola riga, non graduata, e con un compasso, è possibile, procedendo per vari passaggi, costruire la configurazione data; ad esempio assegnati due punti nel piano è possibile costruire il punto medio del segmento utilizzando solamente righello e compasso, oppure ancora un triangolo equilatero che ha come base il segmento di estremi i punti assegnati. Torneremo nella prossima sezione ad analizzare nel dettaglio la geometria della riga e del compasso illustrando gli assiomi che in essa si pongono.

Lo scopo di questo articolo è quello di approfondire questo legame tra geometria della riga e compasso e origami, riproponendo anzitutto in modo più dettagliato e critico l'assiomatica recentemente proposta per uno studio geometrico delle costruzioni basate sugli origami, e passando poi a mostrare esplicitamente come gli origami permettano di risolvere alcuni dei problemi dell'antichità, come la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo.

## 1. La geometria della riga e del compasso

430 a.C. circa: la peste imperversava in tutto il bacino del mediterraneo e non si trovava alcun rimedio per risolvere la difficile situazione. Un giorno gli ateniesi decisero di interrogare l'oracolo al fine di far cessare l'epidemia. Ecco la risposta dell'oracolo:

*Per far cessare la peste, dovrete duplicare l'altare consacrato ad Apollo nell'isola di Delo.*

L'altare di Apollo a Delo aveva la forma di un cubo. Gli ateniesi costruirono semplicemente un altro altare con spigolo doppio rispetto al lato del già esistente altare. Risultato? La peste non cessò, e questo destò grande stupore nei greci, fino a quando si resero conto che il nuovo altare costruito aveva volume ben otto volte il precedente, e non due: infatti se  $\ell$  era lo spigolo dell'altare originario, allora raddoppiare lo spigolo, ovvero costruire un altare cubico di spigolo  $2\ell$ , portava ad un volume di  $(2\ell)^3 = 8\ell^3$ . Impotenti di fronte al fatto, i greci decisero di ricorrere ai matematici: Archita di Taranto (428a.C.-347a.C.), Menecmo (380a.C.-320a.C.), Ippia di Elide (443a.C.-?a.C.). Tutti questi improvvisarono metodi meccanici che erano in grado di tracciare curve particolari nel piano, ad esempio coniche. Purtroppo però tutte queste soluzioni, benché estremamente ingegnose, non aiutavano sul piano concreto la costruzione del nuovo altare. La peste non cessava e i greci decisero di rivolgersi a Platone (428 a.C.-347 a.C.). Il grande filosofo rispose:

*Se, per bocca dell'oracolo, Apollo ha imposto la costruzione di quell'altare, dovete capire che non è certo perché avesse bisogno di un altare doppio. Il punto è che rimproverava ai greci di trascurare la matematica e biasimava il loro disprezzo per la geometria. Nel desiderio di risolvere a tutti i costi il problema non avete esitato a ricorrere a mezzi razionali e a utilizzare sistemi empirici. Così facendo, non perdetevi irrimediabilmente il meglio della Geometria?*

E la peste cessò.

La storia leggendaria sopra raccontata, tramandataci da Teone di Smirne (70-135), si riferisce al celebre problema della *duplicazione del cubo*: in parole molto povere l'obiettivo è costruire, con l'uso solamente di riga, non graduata, e compasso, un segmento di lunghezza  $\sqrt[3]{2}$ , essendo noto il segmento di lunghezza

1. Il problema della duplicazione del cubo è, come si dice in matematica, un *problema di terzo grado*: infatti ciò che si cerca di costruire è un segmento che abbia lunghezza pari alla soluzione dell'equazione  $x^3 - 2 = 0$ , che è per l'appunto un'equazione algebrica di terzo grado.

Un altro celebre problema dell'antichità è il cosiddetto problema della *trisezione dell'angolo*: dividere un angolo assegnato in tre angoli uguali tra loro, utilizzando, al solito, solo riga e compasso. Anche per questo problema sono state trovate soluzioni meccaniche ingegnose, ma non una soluzione con riga e compasso. E anche in questo caso si tratta di un problema di terzo grado. Infatti se  $\alpha \in [0, 2\pi)$  è un dato angolo allora in base alle note formule goniometriche si ha

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \left( \frac{\alpha}{3} \right) - 3 \cos \left( \frac{\alpha}{3} \right)$$

Ne segue che  $\cos \left( \frac{\alpha}{3} \right)$  è soluzione di un'equazione di terzo grado. Essendo possibile costruire con riga e compasso  $\cos \alpha$ , noto  $\alpha$ , segue che è possibile costruire con riga e compasso anche  $\frac{\alpha}{3}$  purché uno sia in grado di risolvere con riga e compasso l'equazione di terzo grado  $4x^3 - 3x = a$ , con  $a$  termine noto.

Esiste, infine, un terzo problema dell'antichità, che però non rientra nella stessa categoria dei precedenti, la *quadratura del cerchio*: costruire un quadrato che ha la stessa area di un cerchio assegnato o, in parole povere, costruire un segmento di lunghezza  $\pi$ , noto il segmento di lunghezza 1, tutto ciò, ben inteso, sempre e solo con riga e compasso. Stavolta non si tratta di un problema di terzo grado, né di grado  $n > 3$ : infatti,  $\pi$  non è mai soluzione di un'equazione della forma

$$(2.1) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

La dimostrazione di questo fatto non è banale, e risale a Lindemann (1852-1939) che la pubblicò nel 1882. In matematica si dice anche che  $\pi$  è un numero *trascendente*, mentre tutti i numeri, razionali o no che siano, che si ottengono come soluzioni di equazioni della forma (2.1) sono detti *numeri algebrici*.

Ciò che accomuna i tre problemi dell'antichità descritti è, come Platone suggeriva, l'*impossibilità* della loro risoluzione con l'uso esclusivo di riga non graduata e compasso.

Nella geometria della riga e compasso si possono introdurre i seguenti assiomi euclidei di costruzione, sostanzialmente risalenti a Euclide, vissuto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C.-283 a.C.):

**Assioma 1.1** *Per due punti distinti si può tracciare una retta.*

**Assioma 1.2.** *Dati un punto  $P$  e un raggio positivo  $r$ , si può tracciare una circonferenza con centro  $P$  e raggio  $r$ .*

Gli assiomi 1.1 e 1.2 non meritano particolari commenti: si tratta semplicemente di assiomi evidentemente validi se uno pretende di poter usare riga e compasso per le proprie costruzioni.

**Assioma 1.3.** *È possibile considerare il punto di intersezione tra due rette distinte non parallele tra loro.*

L'assioma 1.3 si riflette nella capacità di risolvere graficamente un sistema di equazioni di primo grado. Ne segue che riga e compasso permettono di costruire le soluzioni a problemi di primo grado, come ad esempio il punto medio di un segmento.

**Assioma 1.4.** *È possibile considerare i punti di intersezione tra una retta ed una circonferenza.*

**Assioma 1.5.** *È possibile considerare i punti di intersezione tra due circonferenze.*

Gli assiomi 1.4 e 1.5 dal punto di vista analitico dicono la stessa cosa, dal momento che trovare l'intersezione tra due circonferenze equivale a trovare l'intersezione tra una retta ed una circonferenza. In particolare, essi permettono di risolvere equazioni di secondo grado, dal momento che un sistema retta-circonferenza ha per risolvente un'equazione di secondo grado.

Intuitivamente dunque sembrerebbe che gli assiomi 1.1-1.5 permettano di risolvere problemi di primo o secondo grado. In realtà, per essere più rigorosi si deve affermare che esiste una caratterizzazione algebrica più generale dei numeri costruibili con riga e compasso, che fa uso di alcuni risultati di una parte dell'algebra denominata *teoria dei campi*. È infatti interessante notare che l'insieme dei numeri

costruibili mediante una successione finita di operazioni 1.1-1.5 ha una struttura di *campo*: in poche parole, dati due numeri reali  $a, b$  costruibili, la loro somma  $a + b$ , la loro differenza  $a - b$ , il loro prodotto  $ab$  e il loro rapporto  $\frac{a}{b}$  sono anch'essi costruibili. Ancora, si potrebbe dimostrare che tale campo, che d'ora in poi denoteremo con  $\mathfrak{C}$ , contiene il campo ben noto dei numeri razionali,  $\mathbb{Q}$ . Per chi fosse interessato a questa dimostrazione, è sufficiente ricordare il teorema di Talete e mostrare che ogni numero razionale della forma  $\frac{1}{n}$  appartiene a  $\mathfrak{C}$ . In termini tecnici, si dice che  $\mathfrak{C}$  è un'estensione di  $\mathbb{Q}$ : denoteremo con  $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  l'estensione di  $\mathbb{Q}$  di elementi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , che risulta essere sempre un sottocampo di  $\mathbb{R}$ .

Il risultato profondo è raccolto nel teorema seguente.

**Teorema 1.** *Un numero reale  $r$  è costruibile con riga e compasso se e soltanto se esiste un numero finito di numeri reali  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tali che*

- i.  $r \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .
- ii.  $\alpha_1^2 \in \mathbb{Q}$  e  $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1})$  per ogni  $i = 2, \dots, n$ .

Ora la questione è valutare il *grado* dell'estensione  $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ : il grado di un'estensione è, in un certo senso, una misura della grandezza del nuovo campo. Si osserva che tale ampliamento si realizza anche come successione di estensioni semplici (diciamo un'estensione *semplice* quando è della forma  $\mathbb{Q}(a)$  per un opportuno  $a$ ) che hanno tutti grado 1 o 2. Da qui, per un noto fatto di teoria dei campi, la cosiddetta *moltiplicatività del grado sulle torri*, segue che l'estensione  $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ha grado su  $\mathbb{Q}$  una potenza di 2, diciamo  $2^h$  con  $h \in \mathbb{N}$ .

Questo fatto, che può sembrare abbastanza scontato agli addetti ai lavori, è in verità la prova finalmente rigorosa dell'impossibilità di risolvere i tre problemi dell'antichità con riga e compasso. Infatti, per il teorema appena enunciato, se un numero è costruibile, allora esso deve necessariamente appartenere a un'estensione di  $\mathbb{Q}$  di grado una potenza di 2: quindi, siccome  $\sqrt[3]{2}$  sta in un ampliamento di grado 3, non è costruibile. Ancora, il fatto che il grado sia una potenza di 2 e, dunque, in particolare, un numero finito, ci permette di concludere che nessun numero trascendente è costruibile (si può infatti far vedere che i numeri trascendenti sono tutti e soli quelli che danno luogo a estensioni di grado infinito). Quindi, anche la quadratura del cerchio non è possibile con gli assiomi 1.1-1.5. Infine, per la trisezione dell'angolo, abbiamo già osservato nella sezione precedente che si tratta di un problema di terzo grado, pertanto dal punto di vista algebrico siamo ricondotti ad un'estensione di grado 3 di  $\mathbb{Q}$ , e dunque anche la trisezione dell'angolo (generico) non è possibile con riga e compasso.

## 2. Assiomatizzazione degli origami

In analogia alla geometria della riga e del compasso, per la geometria degli origami è stato proposto un set di assiomi che descrivono, in modo inequivocabile, le operazioni che l'arte giapponese permette di effettuare. Tali assiomi sono anche detti **assiomi di Huzita**, e sono stati proposti da Hatori, Huzita, Justin e Lang: per una trattazione matematica rigorosa si veda [1].

**Assioma 2.1.** *Per due punti distinti si può sempre trovare una piega.*

Per quanto riguarda l'assioma 2.1 c'è ben poco da aggiungere: dati due punti sopra il nostro foglio, possiamo sempre piegarlo lungo la congiungente i due punti, la cosa appare più che ragionevole. In particolare in tal caso la piega è anche unica; si veda la figura 1.

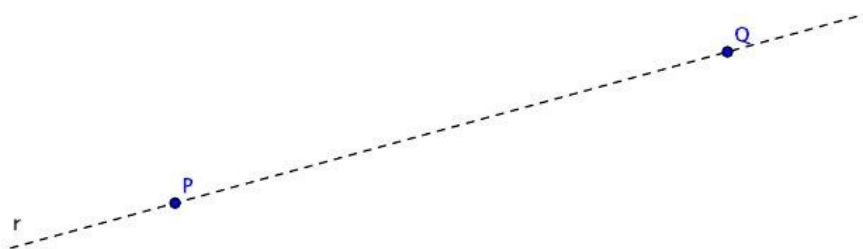


FIGURA 1. La piega  $p$  che passa per i punti P e Q.

**Assioma 2.2.** *Date due pieghe non parallele e distinte si può sempre trovare il loro punto di intersezione.*

Anche questo assioma non sembra particolarmente sorprendente: se pieghiamo il nostro foglio di carta lungo due ipotetiche rette, allora individuamo un unico punto di intersezione tra di esse, a meno che le pieghe non siano parallele. Si veda la figura 2. Osserviamo che gli assiomi 2.1 e 2.2 sono in analogia con gli assiomi 1.1 e 1.3.

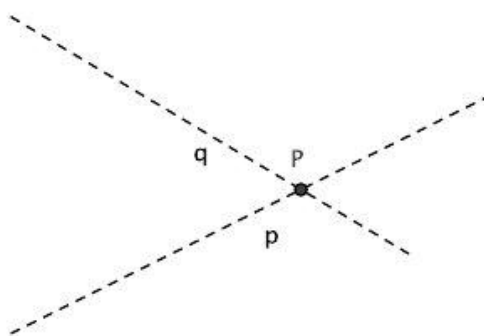


FIGURA 2. Le pieghe  $p$  e  $q$ , non parallele, danno origine al punto P.

**Assioma 2.3.** *Dati due punti distinti si può sempre trovare una piega che porta un punto sull'altro.*

L'assioma 2.3 sancisce l'esistenza dell'unico asse della simmetria assiale che porta un punto dato nell'altro. La figura 3 illustra la situazione. Osserviamo che l'unica piega postulata dall'assioma 2.3 realizza l'asse del segmento che ha per estremi i due punti assegnati, costruzione che è possibile anche con riga e compasso

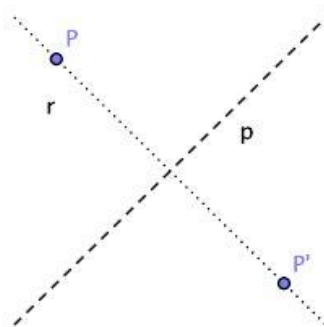


FIGURA 3. La piega  $p$  che porta il punto P nel punto P'.

**Assioma 2.4.** *Date due rette distinte si può sempre trovare una piega che porta una retta sull'altra.*

L'assioma 2.4 viene realizzato scegliendo una delle due bisettrici dell'angolo formato tra le due rette date, nel caso in cui queste ultime due non siano tra loro parallele. Nel caso in cui sono parallele, allora l'unica piega è la retta che si trova alla stessa distanza dalle due rette date. Si veda la figura 4 nel caso di rette non parallele. L'assioma 2.4 permette di costruire, nel caso di non parallelismo delle rette assegnate, le bisettrici dell'angolo da esse formato, costruzione che sappiamo bene essere possibile anche con riga e compasso.



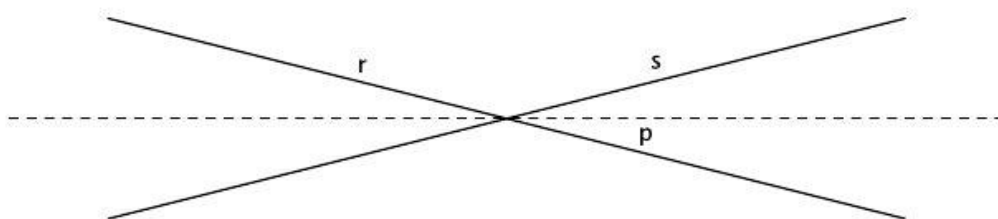


FIGURA 4. Una piega  $p$  che porta la retta  $r$  nella retta  $s$ .

**Assioma 2.5.** *Dati due punti distinti e una retta si può trovare una piega che fissa uno dei due punti, e porta l'altro punto sulla retta data.*

Tale assioma è leggermente più delicato rispetto ai precedenti. La figura 5 mostra per bene la situazione: sono dati  $P, Q, r$  e il punto  $P$  viene mandato nel punto  $P' \in r$  lungo la piega  $p$  passante per il punto  $Q$ .

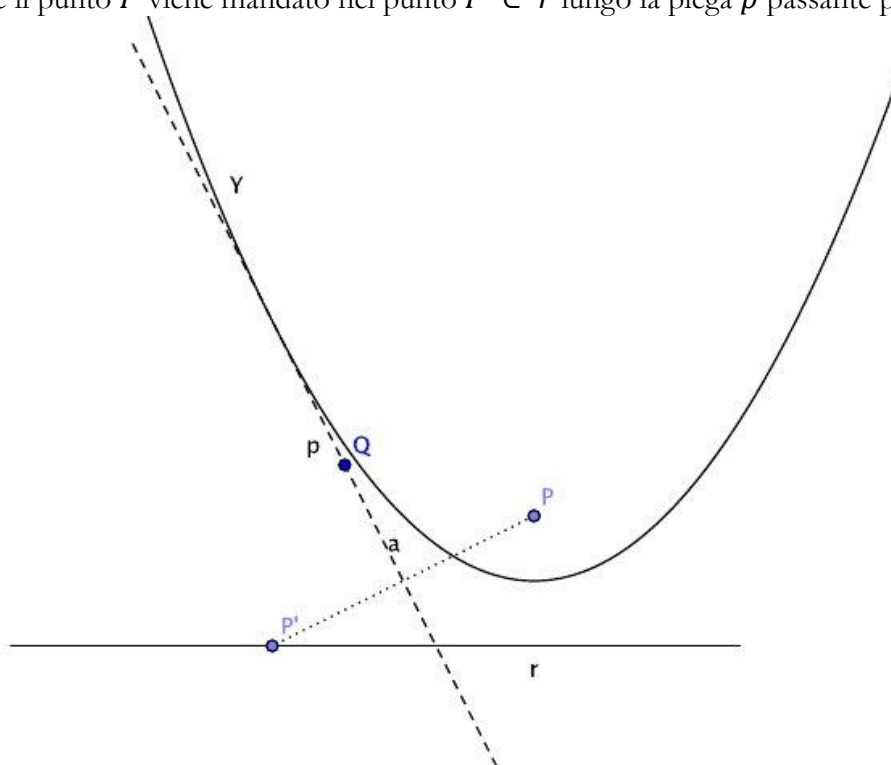


FIGURA 5. Una piega  $p$  per un punto dato  $Q$  che porta un altro punto dato  $P$  in un punto  $P'$  giacente su una retta data  $r$ ; notiamo anche la parabola  $\gamma$  di fuoco  $P$  e direttrice  $r$  che risulta tangente alla piega  $p$ .

L'assioma 2.5 è invece fondamentalmente diverso dai precedenti, in quanto non è sempre possibile trovare una piega che verifichi la condizione descritta dall'assioma. Più precisamente siano dati  $P, Q$  distinti e sia data la retta  $r$ . Si possono presentare due casi. Supponiamo che  $P \in r$ . Allora in tal caso la piega postulata esiste ed è unica, ed è la retta ortogonale a  $r$  passante per  $Q$ . Supponiamo ora di essere invece nel caso, più interessante, in cui sia  $P \notin r$ , come descritto nella figura 5. Supponiamo che  $r$  sia la retta di equazione  $y = 0$ , e cerchiamo la piega come retta di equazione  $y = mx + q$ . Se  $Q = (x_Q, y_Q)$  e  $P = (0, 1)$  allora si verifica facilmente che deve essere

$$m^2 + 2mx_Q + (2y_Q - 1) = 0$$

Tale equazione ammette soluzioni reali se e solo se

$$x_Q^2 + 1 - 2y_Q \geq 0$$

ovvero

$$y_Q \leq \frac{x_Q^2 + 1}{2}$$

Ne segue che si ha soluzione se e solo se il punto  $Q$  giace al di sotto della parabola  $\gamma$  di equazione

$$y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Osserviamo che la parabola  $\gamma$  è anche la parabola che ha fuoco in  $(0,1)$  e direttrice l'asse  $x$ ; inoltre la retta  $y = mx + q$  è tangente a tale parabola. In generale, si può verificare che la piega tratteggiata postulata dall'assioma 2.5 esiste (ma non è unica) se  $Q$  giace al di sotto della parabola che ha fuoco in  $P$  e direttrice  $r$ ; inoltre, in tal caso la piega è tangente a tale parabola. Da tutto ciò si può dedurre per via rigorosa, ma non è difficile convincersi visto che la parabola è una conica, che il quinto assioma permette la risoluzione dei problemi di secondo grado. Ne segue che i primi cinque assiomi proposti per gli origami sono del tutto equivalenti, in termini di possibilità di costruzione, alla geometria della riga e del compasso. Dunque i primi cinque assiomi degli origami permettono di costruire, dal punto di vista algebrico, tutti i numeri che stanno in estensioni di  $\mathbb{Q}$  di grado  $2^h$ , per un certo  $h \in \mathbb{N}$ . Siamo ora pronti a analizzare l'ultimo assioma proposto per gli origami.

**Assioma 2.6.** *Dati due punti distinti e due rette distinte si può trovare una piega che manda un punto su una retta e l'altro punto sull'altra retta.*

Rivediamo anzitutto nel dettaglio l'enunciato, facendo riferimento alla figura 6: dati due punti distinti  $P$  e  $Q$  e date due rette distinte  $\ell$  e  $\ell'$  si può trovare una piega che manda  $P$  in  $P' \in \ell$  e  $Q$  in  $Q' \in \ell'$ . Supponiamo che la piega esista, e denotiamo la retta rispettiva di sostegno con  $d$ . Fissiamo un punto  $R \in d$ . Allora il punto  $P$  viene mandato in  $P' \in \ell$  mediante una piega che fissa il punto  $R$ . Per quanto visto in precedenza, la retta  $d$  è tangente alla parabola che ha fuoco in  $P$  e direttrice  $\ell$ . Allo stesso modo la retta  $d$  risulta essere tangente alla parabola che ha fuoco in  $Q$  e direttrice  $\ell'$ . L'assioma 3.6 permette quindi di trovare una tangente comune a due parabole distinte, nel caso in cui quest'ultima esista.

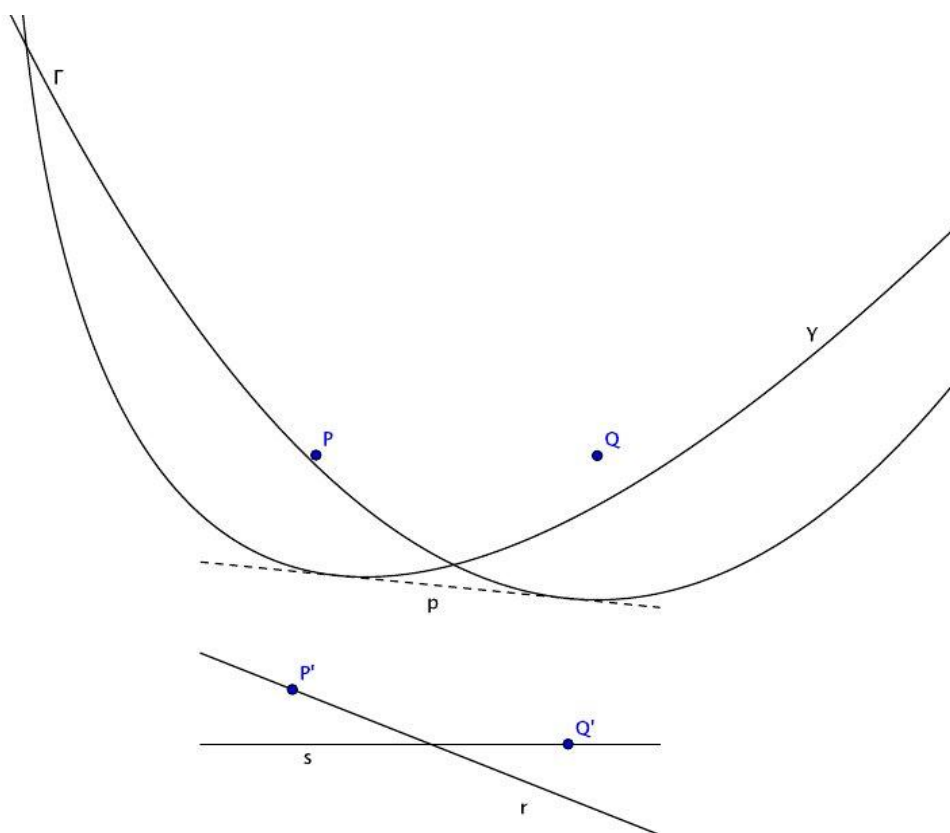


FIGURA 6. Una piega  $p$  che porta un punto dato  $P$  in un punto  $P'$  su una retta data  $r$  e contemporaneamente porta un altro punto dato  $Q$  in un'altra retta data  $s$ ; notiamo le parabole  $\gamma$  e  $\Gamma$ , rispettivamente di fuoco e direttrice  $(P, r)$  e  $(Q, s)$ , le quali hanno la retta  $p$  come tangente comune.

Cerchiamo di capire mediante un esempio di che tipo di problema si tratta. Dato  $a > 0$ , consideriamo la parabola con fuoco in  $(0, a)$  e con direttrice la retta di equazione  $y = -a$ : essa ha equazione

$$y = \frac{x^2}{4a}$$

Consideriamo ora la parabola con fuoco nel punto  $(1, 0)$  e con direttrice la retta di equazione  $x = -1$ : essa ha equazione

$$x = \frac{y^2}{4}.$$

Si verifica facilmente che queste due parabole hanno una tangente comune, che è la retta di equazione

$$y = -\frac{x}{\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{a}$$

Ne segue che intersecando tale tangente con l'asse delle  $y$  otteniamo un segmento di lunghezza  $\sqrt[3]{a}$ . Ecco svelata la potenza degli origami: l'assioma 3.6 permette di risolvere tutti i problemi di terzo grado. Possiamo quindi ragionevolmente concludere affermando che:

**Teorema 2.** *Un numero reale  $r$  è costruibile con gli origami se e soltanto se esiste un numero finito di numeri reali  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tali che*

- i.  $r \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .
- ii.  $\alpha_1^p \in \mathbb{Q}$  e  $\alpha_i^p \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1})$  per ogni  $i = 2, \dots, n$ , con  $p = 2, 3$ .

Gli origami permettono quindi la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, essendo questi problemi entrambi di terzo grado. Osserviamo che la geometria degli origami permette in ogni caso la costruzione di numeri algebrici, benché più di quelli costruibili con riga e compasso. In particolare quindi nessun numero trascendente è costruibile nemmeno con gli origami: la quadratura del cerchio resta dunque un problema impossibile anche per gli origami.

Concludiamo questo breve articolo mostrando nel dettaglio come si può procedere per trisecare un generico angolo; per maggiori dettagli su questa costruzione e per altre costruzioni rimandiamo il lettore a [3].

### 3. La trisezione dell'angolo

Per quanto esposto nella sezione 1 sappiamo che la trisezione del generico angolo  $\varphi$  è un problema di terzo grado, dunque risolubile con gli origami. Per capire il procedimento, prima supporremo di avere già la trisezione effettuata e quindi capire che tipo di costruzione possibile con gli origami è compatibile con la trisezione; dunque passeremo a descrivere l'algoritmo costruttivo.

La costruzione che presenteremo vale per un angolo  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ . È facile ricondurre a questo caso tutti gli altri casi. Infatti basta trovare  $n \in \mathbb{N}$  tale per cui  $\frac{\varphi}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$ : costruendo così  $\theta = \frac{\varphi}{3n}$  basta allora considerare  $\psi = n\theta$  per avere la soluzione  $\varphi = 3\psi$ .

Passiamo quindi a presentare l'idea che sta alla base della trisezione di un angolo  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , appoggiando le nostre considerazioni sulla figura 7.

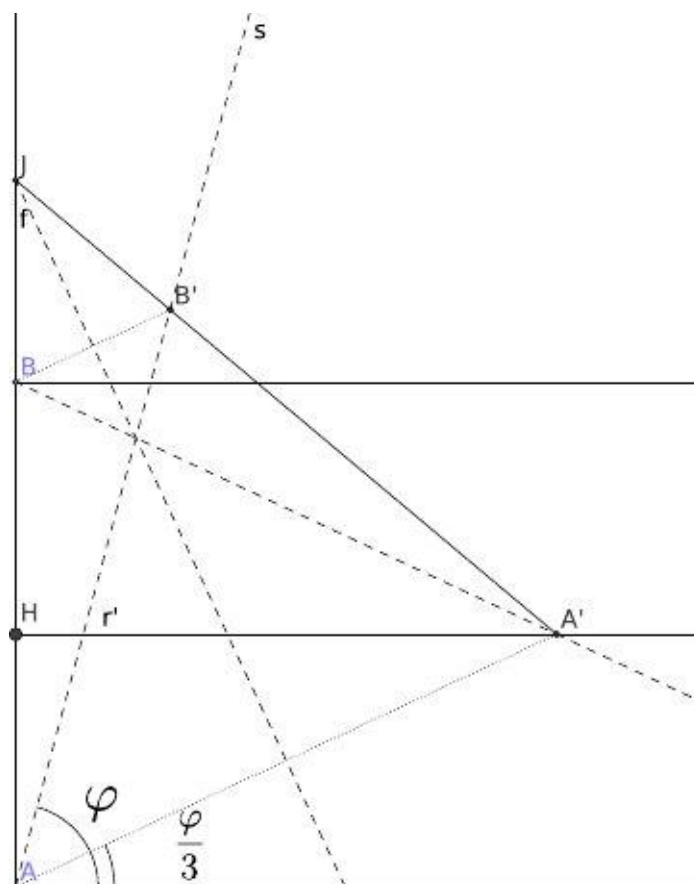


FIGURA 7. Costruzione alla base della trisezione di  $\varphi$ .

Supponiamo di essere in possesso della trisezione dell'angolo  $\varphi$ , come in figura. L'idea che sta alla base di tutto è costruire i punti  $A', B, B'$  in modo tale che la retta su cui giace il segmento  $AA'$  sia parallela alla retta su cui giace il segmento  $BB'$ , e tale che il triangolo  $AA'J$  sia isoscele sulla base  $AA'$ . Allora, in tal caso basta considerare la piega tratteggiata  $f$  come in figura, ovvero la bisettrice dell'angolo al vertice  $A\hat{J}A'$ . Ne segue che, avendo a disposizione soltanto la retta  $s$  individuata dall'angolo  $\varphi$ , se siamo in grado, per ogni scelta di un punto  $B$  sul segmento  $AJ$ , di costruire il punto  $H$ , allora la piega  $p$  che manda  $B$  sulla retta  $s$  e che manda  $A$  sulla retta  $r'$ , che esiste grazie all'assioma 3.6, permette di individuare il punto  $A'$ , e quindi di costruire l'angolo  $\frac{\varphi}{3}$ . Tutto ciò che va capito è quindi la posizione del punto  $H$  nella configurazione come in figura: il punto  $H$  è il punto medio del segmento  $AB$ . Infatti, essendo  $A'\hat{B}'B = A\hat{B}B' = 90^\circ + \frac{\varphi}{3}$  ed essendo  $A\hat{B}'B = \frac{2\varphi}{3}$  si ha  $A\hat{B}A' = A\hat{B}'A' = 90^\circ - \frac{\varphi}{3}$ , da cui  $A\hat{B}A' = A'\hat{A}B$ , e dunque il triangolo  $AA'B$  è isoscele sulla base  $AB$ ; ne segue che  $A'H$ , essendo altezza sulla base, è anche mediana di  $AB$ .

Sfruttando la matematica descritta sopra possiamo descrivere l'algoritmo operativo che permette di trisecare un generico angolo acuto  $\varphi$ . I passaggi descritti sono illustrati in figura 8.

*Step 1:* Per prima cosa prendiamo il foglio e lo pieghiamo in modo da individuare l'angolo di partenza che vogliamo trisecare. Considerando il vertice del foglio, che battezziamo  $A$ , come vertice dell'angolo, un lato del foglio come lato dell'angolo ed un qualunque punto appartenente all'altro lato dell'angolo.

*Step 2:* Adesso tracciamo due rette  $r$  ed  $r'$  parallele al lato dell'angolo che giace sul bordo del foglio in modo tale che la retta  $r'$  sia equidistante da  $r$  e dal bordo del foglio. In questo modo si ottiene il punto  $B$  come intersezione di  $r$  e del bordo verticale del foglio.

*Step 3:* Il terzo passaggio è quello cruciale: si deve piegare il foglio in modo da mandare il punto  $A$  sulla retta  $r'$  ed il punto  $B$  sulla piega iniziale, trovando così i punti  $A'$  e  $B'$ , rispettivamente. La piega appena realizzata corrisponde alla retta  $f$  nel disegno.

Step 4: La trisezione dell'angolo è così completata: la retta  $g$  individua, infatti, un angolo di ampiezza  $\frac{\varphi}{3}$ .

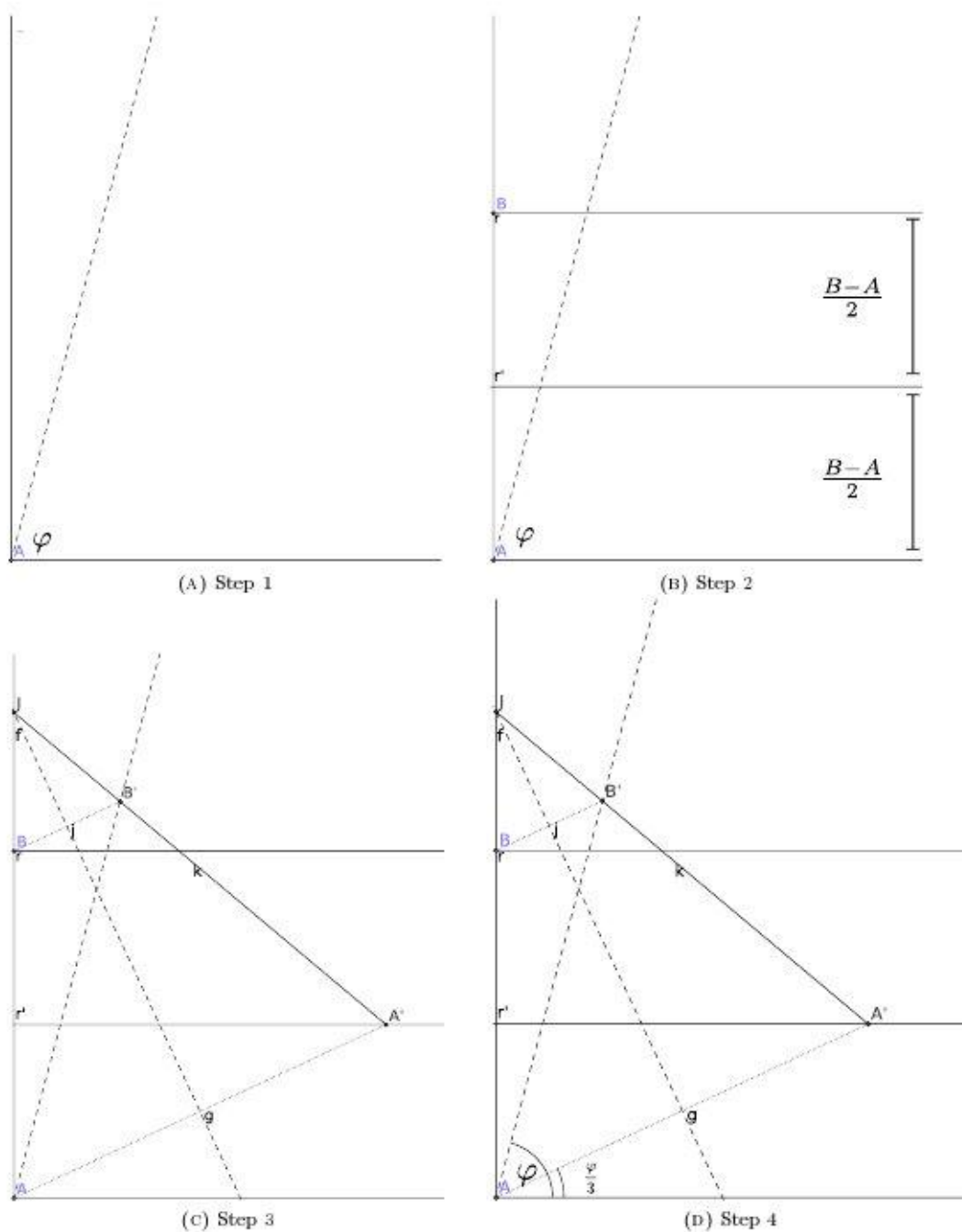


FIGURA 8. Algoritmo per la trisezione di  $\varphi$ .

### Riferimenti bibliografici

- [1] R. C. ALPERIN, A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers, “New York J. Math.”, 6 (2000), pp. 119-133.
- [2] L. GECHELIN, Matematica tra le pieghe, “Matematicamente.it Magazine”, 5 (2008), pp. 4-14.
- [3] T. HULL, *Project origami. Activities for exploring mathematics*, A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts (USA), 2006.

# 160. I cerchi di Fibonacci ed uno sviluppo in serie per il numero $\pi$

Giovanni Lucca  
vanni\_lucca@inwind.it

## Abstract

We consider a particular circles chain where, each circle belonging to it, is tangent to the two previous ones and to a common straight line. Such a chain allows to express the number  $\pi$  (PI) by means of a series expansion of inverse tangent functions related to Fibonacci numbers only.

Si prende in considerazione una particolare catena di cerchi dove ogni cerchio è tangente ai due precedenti e ad una retta in comune. Tale catena consente di ricavare uno sviluppo in serie per il numero  $\pi$  (PI) dove ogni termine è dato da funzioni arcotangente il cui argomento è espresso unicamente mediante numeri di Fibonacci.

## 1. Introduzione

Prendendo spunto da [1], definiamo la catena di cerchi di Fibonacci come segue.

Sia data una retta  $\gamma$  ed una coppia di cerchi  $C_1$  e  $C_2$  aventi raggio  $1^1$  e mutuamente tangenti tra loro ed alla retta  $\gamma$ . La successione di cerchi di Fibonacci è data dalla sequenza ricorsiva  $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$  dove ogni  $C_n$  è tangente a  $C_{n-1}, C_{n-2}$  e  $\gamma$ . Si veda Fig.1.

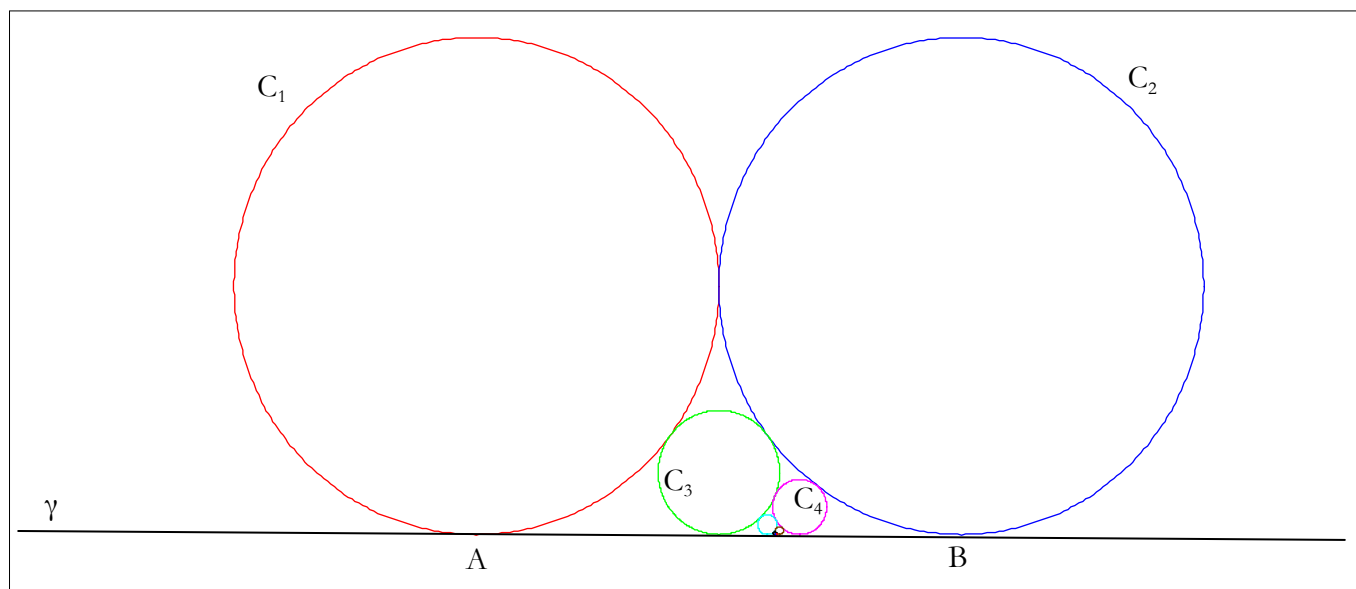


Fig.1. Catena di cerchi di Fibonacci

Utilizzando la formula di Cartesio [3], che mette in relazione i raggi di quattro cerchi mutuamente tangenti (cioè il problema di Soddy o delle quattro monete), si può mostrare che vale la seguente relazione:

<sup>1</sup> Si potrebbe anche considerare il caso di due raggi qualsiasi come in [2], ma in questo lavoro manteniamo, per semplicità, tale ipotesi di partenza.

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n-2}}} \quad (1)$$

ove  $r_n$  è il raggio del cerchio n-esimo.

Applicando il teorema di Cartesio abbiamo supposto che uno dei quattro cerchi sia la retta comune  $\gamma$  che può essere vista come caso limite di un cerchio avente raggio infinito.

Ricordando che  $r_1=1$  ed  $r_2=1$  e ponendo:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \quad (2)$$

otteniamo da (1) la ben nota formula ricorsiva di Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (3)$$

Per tale ragione, i cerchi in Fig.1 possono definirsi *cerchi di Fibonacci*.

## 2. Punto limite della catena di cerchi

Definiamo un sistema di riferimento cartesiano avente asse x coincidente con la retta  $\gamma$  e siano rispettivamente  $(X_1, 1)$  e  $(X_1+2, 1)$  le coordinate dei centri dei cerchi  $C_1$  and  $C_2$ .

Vogliamo trovare le coordinate del centro del generico cerchio n-esimo e calcolare il punto limite della catena.

Ricordando che ogni cerchio della catena è tangente a  $\gamma$ , dalla (2) deduciamo che l'ordinata  $Y_n$  del centro del generico cerchio n-esimo è:

$$Y_n = r_n = \frac{1}{F_n^2} \quad (4)$$

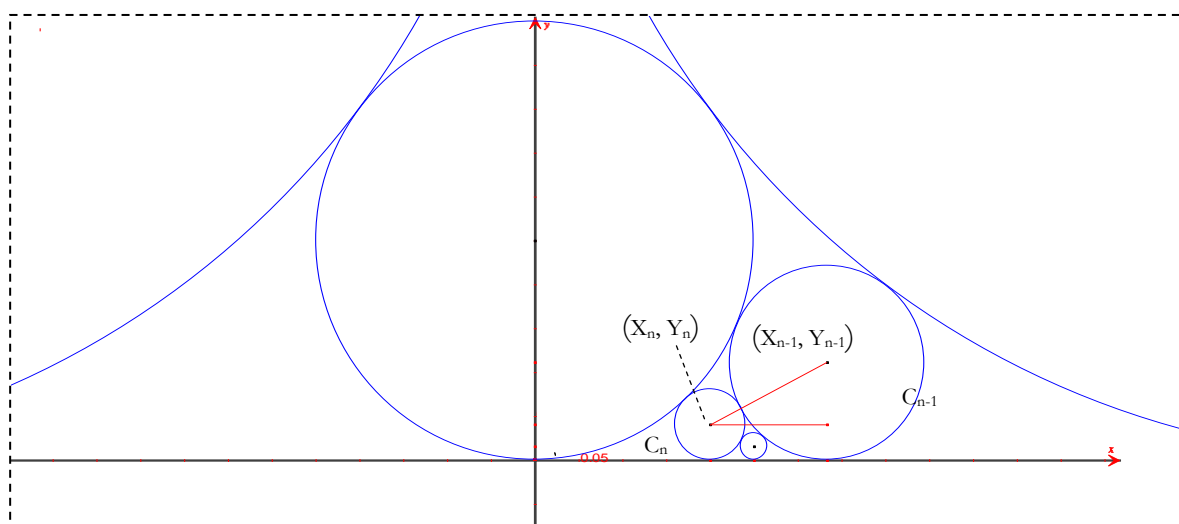


Fig.2: costruzione geometrica legata alla formula (5)

Per quanto riguarda l'ascissa del centro  $X_n$ , guardando al triangolo rettangolo in Fig.2 e ricordando la (4), possiamo scrivere:

$$(X_n - X_{n-1})^2 + \left( \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_{n-1}^2} \right)^2 = \left( \frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n-1}^2} \right)^2 \quad (5)$$

Risolvendo rispetto a  $X_n$ , si ottiene la seguente formula ricorsiva:

$$X_n = X_{n-1} + (-1)^n \frac{2}{F_n F_{n-1}} \quad (6)$$

o, equivalentemente:

$$X_n = X_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{2}{F_k F_{k-1}} \quad (7)$$

La formula (7) consente di calcolare il punto limite  $X_\infty$  della catena per  $n \rightarrow \infty$ :

$$X_\infty = X_1 + 2\phi \quad (8)$$

essendo  $\phi$  il numero aureo dato da:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (9)$$

Il risultato fornito dalla (8) è basato sulla seguente identità [4]:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k-1}} = \phi \quad (10)$$

Per quanto riguarda la posizione del punto  $X_\infty$ , è utile notare che il segmento AB di Fig.1, compreso tra i due punti di tangenza dei primi due cerchi con la retta  $\gamma$ , è suddiviso dal punto limite  $X_\infty$  secondo il rapporto aureo. Infatti si può facilmente verificare che vale la seguente proporzione:

$$(X_B - X_A) : (X_\infty - X_A) = (X_\infty - X_A) : (X_B - X_\infty) \quad (11)$$

Prima di concludere il paragrafo, aggiungiamo un'altra espressione per  $X_n$  che sarà utile nel seguito cioè:

$$X_n = X_1 + 1 + \frac{F_{n-3}}{F_n} \quad n \geq 4 \quad (12)$$

La (12) è basata sulla seguente identità:

$$1 + \frac{F_{n-3}}{F_n} = \sum_{k=2}^n \frac{2(-1)^k}{F_k F_{k-1}} \quad n \geq 4 \quad (13)$$

Si veda l'Appendice per una dimostrazione mediante il principio di induzione.



### 3. Uno sviluppo in serie per $\pi$

In questo paragrafo deduciamo, per mezzo dei cerchi di Fibonacci, uno sviluppo in serie per il numero  $\pi$  in termini di funzioni arcotangente il cui argomento è dato mediante espressioni razionali di soli numeri di Fibonacci; in letteratura, esistono altre due formule di questo tipo [5], [6]; quella che ora proponiamo è differente e nuova.

Scegliamo un conveniente sistema di riferimento cartesiano (Fig.3) con l'ascissa del centro del primo cerchio posta a  $X_1=-1$ .

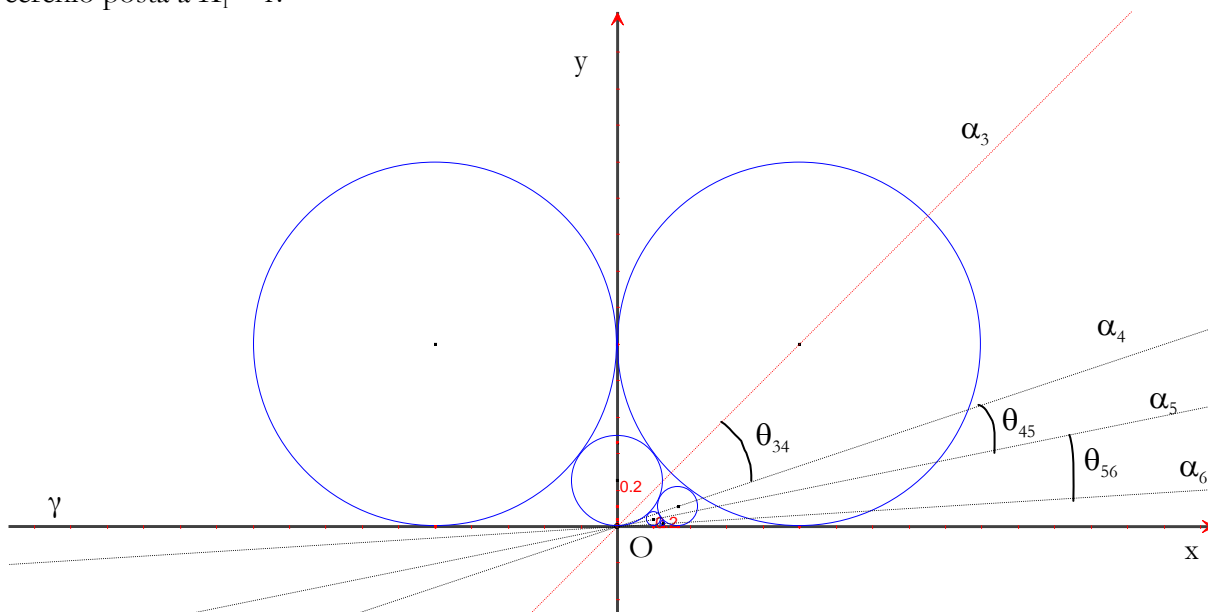


Fig.3:  $\pi/4$  come somma infinita degli angoli tra le rette  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k+1}$

Pertanto, dalla (12), abbiamo che:

$$X_n = \frac{F_{n-3}}{F_n} \quad n \geq 4 \quad (14)$$

Inoltre, l'angolo tra la generica retta  $\alpha_n$  (passante per l'origine e per il centro del cerchio n-esimo) ed il semiasse positivo delle x è dato da:

$$t_{(F_n F_{n-3})} = \arctan\left(\frac{Y_n}{X_n}\right) = \arctan\left(\frac{1}{F_n F_{n-3}}\right) \quad n \geq 4 \quad (15)$$

Gli angoli  $t_{(F_n F_{n-3})}$  appartengono alla famiglia dei cosiddetti numeri di Gregory [7].

Dalla Fig.3, vediamo che la retta  $\alpha_3$  è bisettrice del primo quadrante; quindi, possiamo scrivere:

$$\frac{\pi}{4} = \theta_{34} + \sum_{k=4}^{\infty} \theta_{kk+1} \quad (16)$$

dove gli angoli  $\theta_{kk+1}$  (per  $k \geq 4$ ) sono dati da:

$$\theta_{kk+1} = t_{F_k F_{k-3}} - t_{F_{k+1} F_{k-2}} \quad (17)$$

Ora, forniamo una espressione per il primo angolo  $\theta_{34}$ . Esso può essere scritto come:

$$\theta_{34} = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{F_4 F_1}\right) = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \quad (18)$$

Inoltre, per mezzo della seguente identità [8]:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad -1 < x < 1, -1 < y < 1 \quad (19)$$

e ricordando che:

$$\arctan(-x) = -\arctan(x) \quad (20)$$

possiamo scrivere:

$$\theta_{34} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{F_3}\right) \quad (21)$$

Per quanto riguarda il generico angolo  $\theta_{kk+1}$  (for  $k \geq 4$ ), dalla (15) e (17) abbiamo:

$$\theta_{kk+1} = \arctan\left(\frac{1}{F_k F_{k-3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{F_{k+1} F_{k-2}}\right) \quad (22)$$

Utilizzando ancora la (19) e la (20), si arriva a:

$$\theta_{kk+1} = \arctan\left(\frac{F_{k+1} F_{k-2} - F_k F_{k-3}}{F_{k+1} F_k F_{k-2} F_{k-3} + 1}\right) \quad (23)$$

Per mezzo della identità di Gelin-Cesaro [4], cioè:

$$F_{k+1} F_k F_{k-2} F_{k-3} + 1 = F_{k-1}^4 \quad (24)$$

e della identità:

$$F_{k+1} F_{k-2} - F_k F_{k-3} = F_{k-1}^2 + 2(-1)^{k-1} \quad (25)$$

possiamo scrivere:

$$\theta_{kk+1} = \arctan\left(\frac{F_{k-1}^2 + 2(-1)^{k-1}}{F_{k-1}^4}\right) \quad (26)$$

Infine, dalle (16), (21) e (26), abbiamo:

$$\pi = 4 \arctan\left(\frac{1}{F_3}\right) + 4 \sum_{k=4}^{\infty} \arctan\left(\frac{F_{k-1}^2 + 2(-1)^{k-1}}{F_{k-1}^4}\right) \quad (27)$$

che è la serie per  $\pi$  che intendiamo proporre.

## Appendice

Dimostriamo l'identità:

$$1 + \frac{F_{n-3}}{F_n} = \sum_{k=2}^n \frac{2(-1)^k}{F_k F_{k-1}} \quad n \geq 4 \quad (A1)$$

Applichiamo il principio di induzione e denotiamo con P(n) la proposizione da dimostrarsi cioè la formula (A1).

P(4) è vera:

Si ottiene immediatamente sostituendo n=4 in (A1); infatti calcolando i due membri, si ha che sono entrambi uguali a 4/3.

P(n) ⇒ P(n+1):

Iniziamo scrivendo:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(-1)^k}{F_k F_{k-1}} = \sum_{k=2}^n \frac{2(-1)^k}{F_k F_{k-1}} + \frac{2(-1)^{n+1}}{F_{n+1} F_n} = 1 + \frac{F_{n-3}}{F_n} + \frac{2(-1)^{n+1}}{F_{n+1} F_n} = 1 + \frac{F_{n-3} F_{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{F_{n+1} F_n} \quad (A2)$$

Usando la identità di d'Ocagne [4], si ha che:

$$F_{n-3} F_{n+1} + 2(-1)^{n+1} = F_{n-2} F_n \quad (A3)$$

Sostituendo la (A3) nel numeratore della frazione all'ultimo membro della (A2), si ha infine:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(-1)^k}{F_k F_{k-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n+1}} \quad (A4)$$

che è P(n+1).

Pertanto, la proposizione P(n) vale per ogni n ≥ 4.

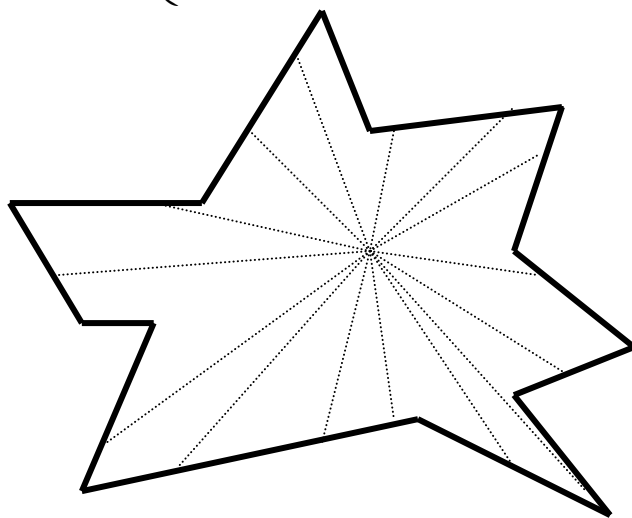
## Bibliografia

- [ 1 ] G. Minton, "Problems of Circles Tangency", The Harvard College Mathematics Review 1.2, p. 47-53. [http://www.thehcmr.org/issue1\\_2/circle\\_tangency.pdf](http://www.thehcmr.org/issue1_2/circle_tangency.pdf).
- [ 2 ] G. Lucca, "Generalized Fibonacci Circle Chains", Forum Geometricorum, Volume 10 (2010) p. 131-133, <http://forumgeom.fau.edu/FG2010volume10/FG201014.pdf>
- [ 3 ] E. W. Weisstein, "Descartes Circles Theorem", From MathWorld A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/DescartesCircleTheorem.html>
- [ 4 ] P. Chandra, E. W. Weisstein: "Fibonacci Number", MathWorld A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>.
- [ 5 ] J. Arndt, C. Haenel, "PI-Unleashed", p.75, Springer, 2001
- [ 6 ] R. Knott, "PI and the Fibonacci Numbers", <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html>
- [ 7 ] E. W. Weisstein, "Gregory Number". From MathWorld A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/GregoryNumber.html>
- [ 8 ] E. W. Weisstein, "Inverse Tangent". From MathWorld A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/InverseTangent.html>

# 161. Intersezione di insiemi convessi: il Teorema di Helly

di Andreana Zucco

Se in una pinacoteca, comunque scelti tre quadri, c'è un posto da dove è possibile rimirarli tutti e tre, allora esiste un posto dove è possibile vedere tutti i quadri di questa pinacoteca senza spostarsi. Forse il visitatore avrà bisogno di una vista lunga o di un teleobiettivo, ma da un punto potrà rimirarli tutti, stando magari comodamente seduto. Questo risultato è un corollario al famoso teorema di Helly.



## Un cenno storico

Eduard Helly (Vienna 1884-Chicago 1943), matematico austriaco, ebbe una vita talmente travagliata, che non gli consentì di fare lunghe ricerche e di ottenere i riconoscimenti che avrebbe meritato. Si laureò nel 1907 a Vienna. Negli anni successivi insegnò in un ginnasio, pubblicò quattro volumi su problemi di geometria e aritmetica e nel 1914 si arruolò nell'esercito austriaco.

Durante la prima guerra mondiale fu catturato dai russi e rimase prigioniero in Siberia fino al 1920. Tornato a Vienna, per vivere lavorò in banca fino al 1929, ma la banca fallì. Fu assunto da una compagnia di assicurazioni, ma nel 1938 fu licenziato, perché ebreo. Fu costretto ad emigrare negli Stati Uniti dove morì nel 1943.

Le sue ricerche furono poche, ma ricche di risultati importanti per l'analisi funzionale. Tuttavia, il teorema di cui ci occuperemo riguarda la geometria convessa. Tale teorema fu scoperto da Helly nel 1913 e lo comunicò a Radon, il quale ne pubblicò una prima dimostrazione nel 1921.

## Premesse

Come premesse al teorema di Helly, vediamo alcuni esercizi.

**Esercizio 1.** *Se una famiglia finita è formata da segmenti chiusi  $[a_1, b_1], \dots, [a_m, b_m]$  di una stessa retta aventi un punto comune a due a due, allora questa famiglia ha intersezione non vuota.*

Infatti se indichiamo con  $b_s$  il minimo fra tutti i  $b_s$ , dal fatto che l'intersezione fra qualsiasi segmento  $[a_i, b_i]$  e il segmento  $[a_s, b_s]$  non è vuota segue che  $b_s \geq a_i$  e pertanto  $b_s$  appartiene a tutti i segmenti della famiglia. Così anche il massimo degli  $a_i$ , sia  $a_t$ , appartiene a tutti gli intervalli della famiglia, per cui anche tutti i punti fra  $a_t$  e  $b_s$  sono comuni ■

Prima di vedere l'esercizio successivo occorre premettere la seguente definizione.

**Definizione 1.** Un insieme di punti del piano è detto **convesso** se contenendo due punti, contiene anche il segmento che li congiunge.

Ad esempio un'ellisse piena è una figura convessa, mentre una corona circolare non lo è.

**Esercizio 2.** Date nel piano quattro figure convesse tali che ogni loro terna abbia un punto comune, allora tutte e quattro le figure hanno almeno un punto comune.

*Dimostrazione.* Siano  $A_0, A_1, A_2, A_3$  le quattro figure convesse e siano:

- $a_0$  il punto comune di  $A_1, A_2, A_3$ ,
- $a_1$  il punto comune di  $A_0, A_2, A_3$ ,
- $a_2$  il punto comune di  $A_0, A_1, A_3$ ,
- $a_3$  il punto comune di  $A_0, A_1, A_2$ .

Poiché i punti  $a_0, a_1, a_2$  appartengono tutti al convesso  $A_3$ , tutto il triangolo appartiene ad  $A_3$  e così per le altre terne di punti.

Si possono presentare due casi:

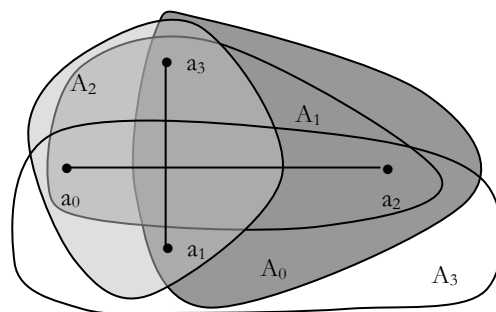
1. Uno dei quattro punti  $a_0, a_1, a_2, a_3$  (per esempio  $a_0$ ) appartiene al triangolo individuato dagli altri tre ( $a_1, a_2, a_3$ ). In tal caso  $a_0$  appartiene anche ad  $A_0$ , per cui  $a_0$  appartiene a  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_0$ .

L'osservazione resta valida anche se ad esempio il triangolo  $\text{conv}(a_1, a_2, a_3)$  diventa un segmento  $[a_1, a_3]$ .

Infatti in tal caso  $a_2 \in [a_1, a_3]$ , quindi  $a_2 \in A_2$  (perché  $a_1 \in A_2$  ed  $a_3 \in A_2$ ) perciò

$$a_2 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_0.$$

2. I quattro punti sono vertici di un quadrilatero (come nel disegno), in tal caso l'intersezione delle due diagonali è un punto di  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_0$  ■

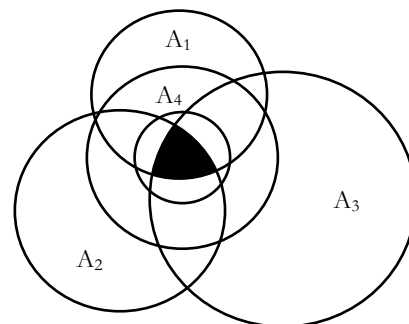


**Osservazione 1.** L'ipotesi di convessità è essenziale.

Come contro-esempio costruiamo una famiglia  $\mathcal{F}$  costituita da tre cerchi  $A_1, A_2, A_3$  che si intersecano (vedi figura) e da una corona circolare  $A_4$  (che non è convessa) che intersechi  $A_1 \cap A_2, A_3 \cap A_1,$

$A_2 \cap A_3$ , ma non  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ .

L'intersezione di tre sottoinsiemi qualsiasi non è vuota, mentre non esiste un punto comune ai quattro insiemi.



## Il teorema

**Teorema di Helly** (nel piano, caso finito). Date  $n$  figure convesse nel piano tali che ogni loro terna abbia un punto comune, allora tutte le  $n$  figure hanno un punto comune.

*Dimostrazione.* Si dimostra per induzione. Se il numero delle figure è quattro, il teorema vale come provato nell'esercizio precedente.

Supponiamo vero il teorema per  $k$  figure e lo dimostriamo per  $k+1$  figure.

Siano  $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}$  le  $k+1$  figure convesse e sia  $B = B_k \cap B_{k+1}$  che essendo intersezione di due convessi è convesso. Consideriamo le  $k$  figure convesse  $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B$ : se sono distinte da  $B$ , ogni tre hanno un punto comune per ipotesi, ma anche  $B_j, B_i, B$  hanno un punto comune perché  $B_j, B_i, B_k, B_{k+1}$  sono quattro convessi tali che ogni tre hanno un punto comune quindi esiste un punto comune a tutte e quattro (per quanto dimostrato nell'esercizio precedente) che è anche punto comune a  $B_j, B_i, B$ .

Poiché per ogni tre figure c'è un punto comune, per l'ipotesi induttiva esiste un punto comune a tutte le  $k$  figure  $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B$  quindi anche a  $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}$  ■

**Osservazione 2.** Nel teorema si parla di terne, tale numero 3 non può essere sostituito da un numero più piccolo.

Come contro-esempio se nel piano consideriamo la famiglia formata da tre segmenti, lati di un triangolo, ogni coppia di tali insiemi si interseca nei vertici, ma non c'è un punto comune a tutti gli elementi della famiglia.

Supponiamo ora che nel piano, la famiglia di convessi considerata non sia finita, ma formata da infinite figure convesse, sempre tali che ogni terna abbia un punto comune. Per il teorema visto nel caso finito, se consideriamo un qualunque numero finito di queste, l'intersezione non è vuota. Ciò nonostante non si può dire in generale che le figure date abbiano un punto comune. Tuttavia il teorema vale ancora anche se la famiglia non è finita, purché formata da insiemi chiusi e limitati.

**Teorema di Helly** (nel piano, caso infinito). *Data una famiglia infinita di figure convesse chiuse e limitate nel piano, tali che ogni tre di esse hanno un punto in comune, allora tutte le figure della famiglia hanno un punto comune.*

Per la dimostrazione si può consultare [Y-Bo].

**Osservazione 3.** Se la famiglia non è finita, né formata da insiemi al tempo stesso chiusi e limitati, non vale il teorema.

Come primo contro-esempio consideriamo in  $\mathbf{R}^2$  la famiglia  $\mathcal{F}$ , non finita, formata dai semispazi del piano cartesiano  $x \geq 1$ ,  $x \geq 2$ ,  $x \geq 3, \dots$ . Tali semispazi sono insiemi convessi, chiusi ma non limitati; l'intersezione di un numero finito di essi non è vuota ma non esiste un punto comune a tutti.

Come secondo contro-esempio consideriamo, sulla retta reale, la famiglia infinita  $\mathcal{F}$  dei segmenti semiaperti  $F_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$  ove  $n$  è un numero naturale ed il numero 0 è escluso. Gli elementi di  $\mathcal{F}$  sono convessi, limitati ma non chiusi; l'intersezione di un numero finito di essi non è vuota, ma non esiste un punto comune a tutti.

Vediamo ora alcune conseguenze del teorema di Helly, le dimostrazioni omesse si possono trovare su [Y-Bo].

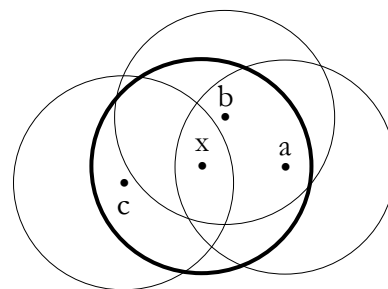
**Teorema.** *Se nel piano  $n$  punti sono tali che tre di essi, comunque scelti, possono essere racchiusi in un cerchio di raggio  $r$ , allora tutti gli  $n$  punti possono essere racchiusi in un cerchio di raggio  $r$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo provare che esiste nel piano un punto  $h$  la cui distanza da tutti gli altri punti non è maggiore di  $r$ , cioè che esiste un punto  $h$  del piano che appartiene a tutti i cerchi di raggio  $r$  aventi centro in uno qualunque dei punti dati.

Per il teorema di Helly, affinché  $n$  cerchi di raggio  $r$  ed aventi centro in uno dei punti dati abbiano intersezione non vuota è sufficiente provare che tre qualunque di questi cerchi hanno intersezione non vuota.

Per ipotesi ogni terna di punti  $a, b, c$ , può essere racchiusa in un cerchio di raggio  $r$  e centro  $x$ . Poiché la distanza di  $a$  da  $x$  è minore di  $r$ , il punto  $x$  sta nel cerchio di centro  $a$  e raggio  $r$ . Così tale punto  $x$  appartiene al cerchio di raggio  $r$  e di centro  $b$  e al cerchio di raggio  $r$  e centro  $c$ , in quanto anche la distanza di  $x$  da  $b$  e da  $c$  è minore di  $r$ .

Perciò possiamo applicare il teorema di Helly e concludere che il punto  $h$  esiste ■



**Corollario** (Teorema di Jung). *Se  $n$  punti del piano sono tali che per ogni loro terna nessun lato del triangolo da essa individuato è maggiore di  $d$ , allora tutti gli  $n$  punti possono essere racchiusi in un cerchio di raggio  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .*

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente è sufficiente provare che tre qualunque dei punti dati, indichiamoli con  $a, b, c$ , possono essere racchiusi in un cerchio di raggio  $r = \frac{d}{\sqrt{3}}$ .

Nessun lato del triangolo  $(a,b,c)$  è maggiore di  $d$  per ipotesi. Se il triangolo è ottusangolo oppure rettangolo, è completamente racchiuso dal cerchio avente come diametro il lato maggiore. Tale cerchio ha raggio  $r \leq \frac{d}{2}$  ovviamente minore di  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .

Se il triangolo  $(a,b,c)$  è acutangolo il raggio del cerchio circoscritto è minore od uguale a  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  in quanto uno degli angoli del triangolo, ad esempio l'angolo in  $a$ , è maggiore od uguale di  $60^\circ$ . Il lato  $bc$ , come corda di un arco con angolo al centro compreso tra  $120^\circ$  e  $180^\circ$ , è maggiore od uguale ad  $r\sqrt{3}$ , dove  $r$  è il raggio circoscritto al triangolo  $(a,b,c)$  quindi:  $d \geq \text{distanza}(b,c) \geq r\sqrt{3}$ , da cui

$$r \leq \frac{d}{\sqrt{3}} \blacksquare$$

Nel seguito ci serviremo della seguente definizione:

**Definizione 2.** *Si definisce diametro di una figura piana la massima distanza fra due suoi punti.*

**Esempi.** Il diametro di un'ellisse piena coincide con l'asse maggiore; il diametro di un triangolo ottusangolo con la misura del suo lato maggiore.

**Teorema di Jung.** *Ogni figura piana (non necessariamente convessa) di diametro  $d$  può essere inclusa in un cerchio di raggio  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .*

Tale risultato può essere illustrato nel seguente modo: se su una tovaglia c'è una macchia di diametro  $d$ , allora si può certamente coprire con un tovagliolo rotondo di raggio  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .

Nel teorema seguente (citato all'inizio quando abbiamo fatto riferimento alla pinacoteca) per poligono si intende ogni figura piana avente come contorno una poligonale chiusa non intrecciata.

**Teorema di Krasnosel'skii** (1946). *Se per ogni terna  $a, b, c$  di punti di frontiera di un arbitrario poligono  $K$ , esiste un punto  $x$  tale che tutti e tre i segmenti  $[x,a], [x,b], [x,c]$  giacciono internamente al poligono, allora esiste all'interno di  $K$  un punto  $h$ , tale che tutti i segmenti che congiungono  $h$  coi punti della frontiera del poligono  $K$ , giacciono internamente al poligono.*

**Osservazione.** Una figura  $K$  per la quale esiste un punto  $h$  tale che tutti i segmenti che congiungono  $h$  con i punti di frontiera di  $K$  sono contenuti in  $K$ , viene detta a forma di *stella* o *stellata*. Quindi il teorema precedente dà una condizione necessaria e sufficiente per un poligono piano di essere a forma di stella (star-shaped).

Altra conseguenza del teorema di Helly è il seguente teorema, che trova applicazioni nella teoria della approssimazione di funzioni.

**Teorema della trasversale comune.** *Si considerino nel piano  $n$  segmenti di rette parallele, se per ogni terna esiste una retta che li interseca, allora esiste una retta che interseca tutti i segmenti.*

Tale risultato è dovuto a L.A.Santaló (1942) ed è stato discusso in un lavoro di H.Rademacher e I.J.Schoenberger (1950).

Per risultati analoghi si può vedere l'articolo di B.Grünbaum "On common Transversal" Arch. Math., vol.9, 1958, oppure [D-G-K] .

Per chi ha dimestichezza anche con dimensioni superiori, osserviamo che il teorema di Helly è vero anche nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbf{R}^n$ , ove  $n$  è un numero naturale.

**Teorema di Helly** (1913) (nel caso generale). *Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia finita di  $k$  insiemi convessi di  $\mathbf{R}^n$ , con  $k > n$ . Se l'intersezione di  $n + 1$  qualsiasi insiemi di  $\mathcal{F}$  non è vuota, allora esiste un punto comune a tutti gli insiemi di  $\mathcal{F}$ . La precedente proprietà vale anche per una famiglia infinita di convessi, purché chiusi e limitati.*

Le dimostrazioni di Köning e Radon si trovano ad esempio in [F-Z].

A proposito di questa ultima versione del teorema nel caso generale, citiamo il caso del teorema di Kirchberger (1903), la cui dimostrazione originale era lunga circa 24 pagine. Utilizzando il teorema di Helly, nel 1950 Rademacher e Schoenberger fecero una dimostrazione molto più breve, diciamo una pagina.

Prima di citarlo, ricordiamo che due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $\mathbf{R}^n$  si dicono separati strettamente da un iperpiano  $H$  se appartengono a semispazi aperti differenti determinati da  $H$ .

**Teorema di Kirchberger** (1903). *Siano  $X$  ed  $Y$  due sottoinsiemi finiti di  $\mathbf{R}^n$ . Se per ogni sottoinsieme  $S$  di  $X \cup Y$  formato da  $n + 2$  punti, gli insiemi  $S \cap X$  ed  $S \cap Y$  sono separati strettamente da un iperpiano, allora esiste un iperpiano che separa strettamente  $X$  ed  $Y$ .*

Per conoscere ulteriori notizie e un'ampia bibliografia, non ho dubbi nel consigliare ai più esperti il lavoro di J.Eckhoff "Helly, Radon and Carathéodory Type Theorems" pag.389-448 di [G-W].

## Testi consigliati

[Be] M. BERGER, *Géométrie*, Cedic Nathan, Paris (1977)

[D-G-K] L.DANZER-B.GRUNBAUM-V.KLEE, "Helly's theorem and its relatives", in *Convexity, Proc. of Symposia in Pure Math.*, vol.VII (Amer. Math. Soc.) (1963)

[F-Z] P.FAVRO – A.ZUCCO, *Appunti di Geometria Convessa*, quaderno didattico n.34, Dip. Matematica, Univ. Torino (2005)

[G-W ] P. M. GRUBER, J. M. WILLS, *Handbook of Convex Geometry*, North Holland Matematical Library (1993)

[V] F.A.VALENTINE, *Convex sets*, N.Y. MC Graw-Hill, (1964)

[Y-Bo] YAGLOM-BOLTYANSKII, *Convex figures*, Holt, Rinehart e Winston, New York (1961).



# 162. Determinazione approssimata delle coordinate geografiche terrestri

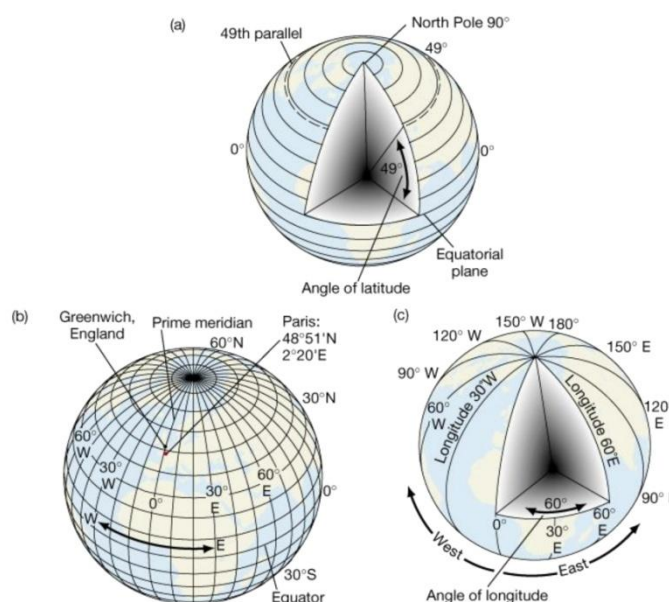
Michele T. Mazzucato

*...cercherò stanotte di precisare la nostra latitudine e domani a mezzogiorno la nostra longitudine.*

Cyrus Smith l'ingegnere protagonista nel cap. XIII de L'île misterieuse (1874) di Jules Verne (1828-1905)

Il sistema di coordinate geografiche terrestri si compone della longitudine (dal latino *longitudo* = lunghezza) corrispondente alla distanza angolare del meridiano di un luogo dal meridiano fondamentale (Greenwich) e distinta in longitudine est da  $0^\circ$  a  $+180^\circ$  verso oriente e longitudine ovest da  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  verso occidente e della latitudine (dal latino *latitudo* = larghezza) corrispondente alla distanza angolare di un luogo dall'equatore e distinta in latitudine nord da  $0^\circ$  a  $+90^\circ$  e in latitudine sud da  $0^\circ$  a  $-90^\circ$ .

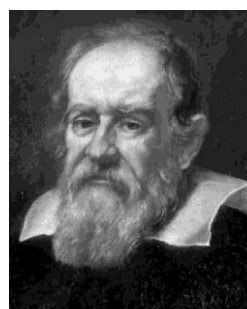
La determinazione della longitudine avviene mediante la differenza di due tempi, quello locale e quello del meridiano fondamentale, nei quali si verifica un medesimo fenomeno astronomico. Per determinarla, si hanno il metodo delle eclissi lunari proposto da Ipparco di Nicea nel II secolo a.C., il metodo delle distanze lunari proposto nel XV secolo da Johannes Werner (1468-1522), il metodo dei fenomeni mutui dei satelliti gioviani utilizzato da Galileo Galilei (1564-1642) oppure il metodo dell'ora.



Ipparco di Nicea



Johann Werner



Galileo Galilei

La determinazione della latitudine si può effettuare mediante osservazioni alla stella Polare (per l'emisfero boreale), con altre stelle, con la durata dell'arco diurno oppure con il Sole. Nel seguito viene esposto il metodo della culminazione superiore solare (passaggio del Sole al meridiano locale) che può permettere il raggiungimento di una precisione di circa 15-20 chilometri.

### Calcolo della longitudine (primo giorno)

Supponiamo che in data 25 gennaio si voglia determinare la longitudine del luogo in cui ci troviamo.

Intorno alle ore 11:00 locali (prima misura ante meridiana) si prende nota, con la massima precisione possibile, dell'ora in cui la punta di una asticella verticale (gnomone) tocca un punto di una circonferenza, per esempio: 11h 10m 20s.

Intorno alle ore 13:00 locali (seconda misura post meridiana) si prende nota, con la massima precisione possibile, dell'ora in cui la punta dello stesso gnomone tocca un secondo punto della medesima circonferenza, per esempio: 13h 15m 10s.

Si effettua la media aritmetica delle due misure orarie, questo valore corrisponde alla culminazione superiore solare del luogo in cui ci troviamo:

$$(11h 10m 20s + 13h 08m 10s) = 24h 18m 30s / 2 = 12h 09m 15s$$

Dalla TAB. 1 si legge l'orario di culminazione superiore solare a Greenwich alla data del 25 gennaio, ossia: 12h 12m 18s.

Si effettua la differenza tra la culminazione di Greenwich con quella locale tenendo conto del fuso orario in cui ci si trova (per esempio in Italia -1 ora):

$$12h 12m 18s - (12h 09m 15s - 1h) = 1h 03m 03s$$

Si trasforma tale differenza oraria in differenza angolare moltiplicando per  $15^\circ$  ( $360^\circ/24h = 15^\circ$  di longitudine = 1 ora):  $1h 03m 03s \cdot 15^\circ$ .

Dato che la culminazione locale è inferiore a quella di Greenwich, per la data in esame, il luogo si trova ad est di Greenwich (diversamente sarebbe stata a ovest di Greenwich).

Pertanto la longitudine del luogo è  $15^\circ 45' 45''$  est.

### Calcolo della latitudine (secondo giorno)

Dalla TAB. 1, in corrispondenza del giorno seguente (ossia il 26 gennaio nel nostro caso), si legge l'orario di culminazione superiore solare a Greenwich e la declinazione solare: 12h 12m 31s e  $-18^\circ 40'$

La differenza temporale rispetto al giorno precedente risulta di

$$12h 12m 18s - 12h 12m 31s = 13s$$

valore che si aggiunge alla culminazione superiore solare locale trovata per il giorno 25 gennaio:

$$12h 09m 15s + 0h 0m 13s = 12h 09m 28s$$

Nell'istante 12h 09m 28s del giorno 26 gennaio misureremo la lunghezza dell'ombra del gnomone, per esempio 14cm.

Si determina l'altezza solare dividendo la lunghezza nota e misurata del gnomone (supponiamo di 7 cm) con la lunghezza dell'ombra misurata nell'istante e facendo l'arcotangente del quoziente, per esempio:

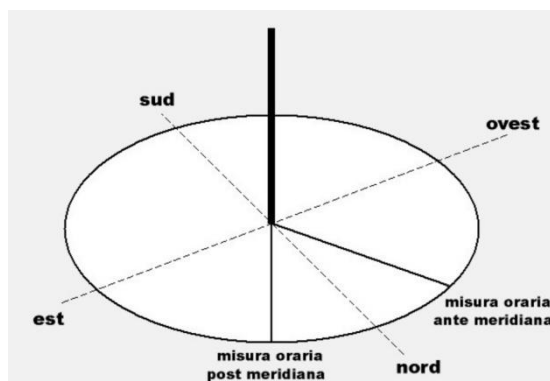
$$7cm/14cm = 0.5000, \text{ arcotangente} = 26^\circ 33' 54''$$

Questo valore ( $26^\circ 33' 54''$ ) può essere corretto diminuendolo del valore della rifrazione atmosferica (che fa risultare gli oggetti osservati più in alto rispetto alla loro posizione reale) corrispondente all'altezza solare ricavabile dalla TAB. 2 che è  $1' 59''$  ottenendo

$$26^\circ 33' 54'' - 1' 59'' = 26^\circ 31' 55''$$

La latitudine si ricava mediante la seguente formula:

$$(90^\circ - \text{altezza solare}) + \text{declinazione solare}$$



da cui

$$(90^\circ - 26^\circ 31' 55'') + (-18^\circ 40') = 44^\circ 48' 05''$$

Pertanto la latitudine del luogo è  $44^\circ 48' 05''$  nord

Da tenere conto che:

- la verticalità dell'asticella (gnomone) può essere garantita dall'uso di un filo a piombo;
- l'orizzontabilità del piano o del righello per la misura delle lunghezze delle ombre può essere garantita dall'uso di una livella torica;
- l'operazione deve essere eseguita in un luogo illuminato dal Sole diverse ore prima e dopo mezzogiorno e il più possibile orizzontale;
- nell'istante della culminazione superiore solare (mezzogiorno) corrisponde la minima lunghezza delle ombre nell'arco della giornata;
- bisogna considerare l'eventuale presenza dell'ora legale;
- 1 secondo, 1 minuto e 1 grado d'arco corrispondono, rispettivamente, a circa 30 metri, 1850 metri e 111 chilometri sulla superficie terrestre;
- la trasformazione angolare fra sistema sessagesimale e sessadecimale e viceversa si effettua nel seguente modo:

da sessagesimale a sessadecimale			
<b>39° 25' 39".140</b>	= 39	= 39.000 000 °+	
	= 25/60	= 0.416 667 +	
	= 39.140/3600	= 0.010 872 =	
		-----	
		<b>39.427 539°</b>	
da sessadecimale a sessagesimale			
<b>39.427 538 889°</b>	= 39.427 539 - 39 =	0.427 539	
		0.427 539 · 60 =	25.652 333
		25.652 333 - 25 =	0.652 333
		0.652 333 · 60 =	39.139 999
		<b>39.140</b>	
		-----	
		<b>39° 25' 39".140</b>	

## Bibliografia

- CORBELLINI G., *Guida all'100orientamento*, Zanichelli, Bologna 1985
- FACCIOLO C., *Osservazioni celesti e navigazione astronomica*, Il Frangente, Verona 2003
- FERRARI G., *Relazioni e formule per lo studio delle meridiane piane*, Modena 1998
- MADDALENA E., *Orienteering*, Hoepli, Milano 1988
- MAZZUCATO M.T., *Elementi di Orientamento*, Maggioli, Rimini 2007
- SOBEL D., *Longitudine*, Rizzoli, Milano 1996
- VANIN G., *Astronomia viva!*, 2a ed., UAI 1999

TAB. 1 – Orario culminazione superiore solare a Greenwich								
data	N	E	$\delta_s$			Greenwich		
<b>01 gen</b>	<b>1</b>	<b>-03m 31s</b>	<b>-22°</b>	<b>52'</b>		<b>12h 03m 31s</b>		
02 gen	2	-03 59	-22	47		12 03 59		
03 gen	3	-04 27	-22	42		12 04 27		
04 gen	4	-04 54	-22	36		12 04 54		
05 gen	5	-05 21	-22	29		12 05 21		
06 gen	6	-05 48	-22	22		12 05 48		
07 gen	7	-06 13	-22	15		12 06 13		
08 gen	8	-06 39	-22	07		12 06 39		
09 gen	9	-07 04	-21	59		12 07 04		
10 gen	10	-07 28	-21	51		12 07 28		
11 gen	11	-07 52	-21	42		12 07 52		
12 gen	12	-08 16	-21	32		12 08 16		
13 gen	13	-08 38	-21	22		12 08 38		
14 gen	14	-09 00	-21	12		12 09 00		
<b>15 gen</b>	<b>15</b>	<b>-09 22</b>	<b>-21</b>	<b>02</b>		<b>12 09 22</b>		
16 gen	16	-09 43	-20	51		12 09 43		
17 gen	17	-10 03	-20	39		12 10 03		
18 gen	18	-10 22	-20	27		12 10 22		
19 gen	19	-10 41	-20	15		12 10 41		
20 gen	20	-10 59	-20	03		12 10 59		
21 gen	21	-11 16	-19	50		12 11 16		
22 gen	22	-11 33	-19	37		12 11 33		
23 gen	23	-11 49	-19	23		12 11 49		
24 gen	24	-12 04	-19	09		12 12 04		
25 gen	25	-12 18	-18	54		12 12 18		
26 gen	26	-12 31	-18	40		12 12 31		
27 gen	27	-12 44	-18	25		12 12 44		
28 gen	28	-12 56	-18	09		12 12 56		
29 gen	29	-13 07	-17	54		12 13 07		
30 gen	30	-13 17	-17	37		12 13 17		
31 gen	31	-13 26	-17	21		12 13 26		

Nota. I valori dell'equazione del tempo E e della declinazione solare  $\delta S$  sono stati calcolati utilizzando le seguenti formule di Gianni Ferrari [Relazioni e formule per lo studio delle meridiane piane, Modena 1998, pp. 232-237] ricavate con gli sviluppi di Fourier:

$$E = + 7.3670 \cdot \cos(0.9856474 \cdot N + 85.837) +$$

$$+ 9.9182 \cdot \cos(1.9712947 \cdot N + 109.984) +$$

$$+ 0.3060 \cdot \cos(2.9569421 \cdot N + 103.642) +$$

$$+ 0.2027 \cdot \cos(3.9425894 \cdot N + 128.678) \dots$$

$$\delta S = + 0.3838 +$$

$$+ 23.2623 \cdot \cos(0.9856474 \cdot N - 169.883) +$$

$$+ 0.3552 \cdot \cos(1.9712947 \cdot N - 175.526) +$$

$$+ 0.1342 \cdot \cos(2.9569421 \cdot N - 148.378) +$$

$$+ 0.0326 \cdot \cos(3.9425894 \cdot N + 2.929) \dots$$

dove N è il numero dei giorni trascorsi dall'inizio dell'anno e con risultato espresso in minuti di tempo per l'equazione del tempo e in gradi d'arco per la declinazione del Sole.

TAB. 2 – Rifrazione atmosferica					
h	R	h	R	h	R
0°	34' 29"	30°	1' 43"	60°	0' 34"
1°	24 20	31°	1 39	61°	0 33
2°	18 13	32°	1 35	62°	0 32
3°	14 21	33°	1 32	63°	0 30
4°	11 44	34°	1 28	64°	0 29
5°	9 53	35°	1 25	65°	0 28
6°	8 31	36°	1 22	66°	0 27
7°	7 27	37°	1 19	67°	0 25
8°	6 37	38°	1 16	68°	0 24
9°	5 57	39°	1 14	69°	0 23
10°	5 23	40°	1 11	70°	0 22
11°	4 56	41°	1 09	71°	0 21
12°	4 32	42°	1 06	72°	0 19
13°	4 11	43°	1 04	73°	0 18
14°	3 54	44°	1 02	74°	0 17
15°	3 38	45°	1 00	75°	0 16
16°	3 24	46°	0 58	76°	0 15
17°	3 12	47°	0 56	77°	0 14
18°	3 01	48°	0 54	78°	0 13
19°	2 51	49°	0 52	79°	0 12
20°	2 42	50°	0 50	80°	0 10
21°	2 34	51°	0 48	81°	0 09
22°	2 26	52°	0 47	82°	0 08
23°	2 20	53°	0 45	83°	0 07
24°	2 13	54°	0 43	84°	0 06
25°	2 07	55°	0 42	85°	0 05
26°	2 02	56°	0 40	86°	0 04
27°	1 57	57°	0 39	87°	0 03
28°	1 52	58°	0 37	88°	0 02
29°	1 47	59°	0 36	89°	0 01

Nota. I valori della rifrazione atmosferica R (con R0°= 34' 29" e R90°= 0' 00") sono stati determinati con la seguente formula di George G. Bennett [The Calculation of Astronomical Refraction in Marine Navigation, Journal of the Royal Institute of Navigation (British), Vol. 35, No. 2, May 1982, pp. 255-259], valida per misure effettuate al livello del mare, a 1010 mbar di pressione atmosferica e 10 °C di temperatura:

$$R = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(h + \frac{7.31}{h + 4.4}\right)}$$

dove h è l'altezza apparente dell'astro sull'orizzonte (in gradi) e con risultato espresso in minuti d'arco.

# 163. Alcune funzioni di segmenti

Bruno Sanchini  
brunosanchini@yahoo.it

## Sunto

Si utilizza l'equazione di segmenti:  $y = \pm [tg\theta_0|x| + k(b - atg\theta_0)]$  con  $(ak)^2 \leq x^2 \leq (R\cos^n\theta_0 + ak)^2$ ;  $R > 0$ ;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ,  $n$  intero positivo; con  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$  non contemporaneamente uguali a zero, al fine di trovare altre equazioni.

We use the segment's equation:  $y = \pm [tg\theta_0|x| + k(b - atg\theta_0)]$  such that  $(ak)^2 \leq x^2 \leq (R\cos^n\theta_0 + ak)^2$ ;  $R > 0$ ;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ,  $n$  is a positive integer; with  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$  not equals to zero at the same time, in order to find other equations.

## Nozioni preliminari

Si ricercano equazioni, appunto, e i conseguenti diagrammi, di particolari famiglie di segmenti. La questione diventa fattibile se si parte dall'analisi dell'equazione qui sopra scritta.

Se si considera l'equazione:

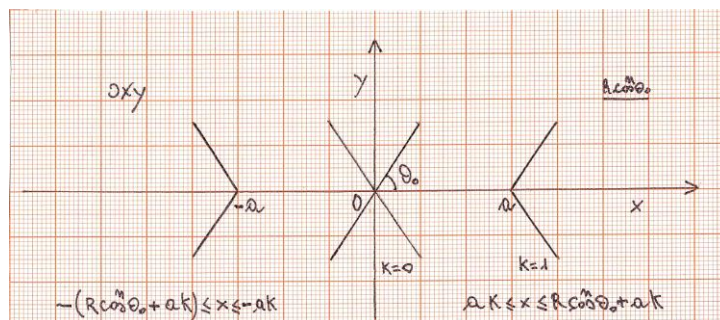
$$y = \pm [tg\theta_0|x| + k(b - atg\theta_0)]$$

nel caso in cui  $b=0$ , si ottiene un'equazione particolare:

$$(1) \quad y = \pm tg\theta_0(|x| - ak)$$

Con  $(ak)^2 \leq x^2 \leq (R\cos^n\theta_0 + ak)^2$ ;  $R > 0$ ;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ;  $n$  intero positivo;  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $a > 0$ ; il cui diagramma è una curva, simmetrica rispetto all'origine degli assi, formata da una fila di infinite coppie di segmenti che sono inclinati sull'asse delle  $x$  di un angolo  $\theta_0$ .

Data la (1), è possibile rappresentarne il diagramma:



**Particolari famiglie di segmenti**

Si considerino:

a) l'equazione

$$y = \pm \operatorname{tg} \theta_0 (|x| - ak);$$

$$(ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2; a > 0; R > 0; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; n \text{ intero positivo}; k = 0, 2, 4, 6, \dots \text{ (I equazione)}$$

b) L'equazione ausiliaria

$$y = \pm \operatorname{tg} \theta_0 (R \cos^n \theta_0 + ak - |x|);$$

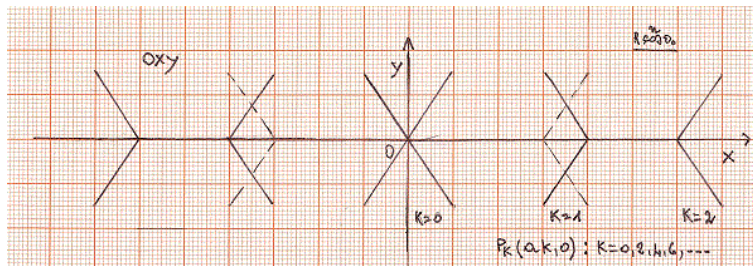
$$(ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2; a > 0; R > 0; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; n \text{ intero positivo}; k = 1, 3, 5, \dots \text{ (II equazione)}$$

affinché i suoi valori di  $y$  che si hanno in corrispondenza dei valori di  $x$  si susseguano in ordine inverso dall'ordine in cui si susseguirebbero nella I equazione se considerati in corrispondenza degli stessi valori attribuiti ad  $x$  con  $k = 1, 3, 5, \dots$

Di seguito si utilizza la notazione in parentesi graffa per indicare le due equazioni I e II citate e si considera la seguente funzione:

$$(2) \quad y = \begin{cases} \pm \operatorname{tg} \theta_0 (|x| - ak); & (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2, \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \pm \operatorname{tg} \theta_0 (R \cos^n \theta_0 + ak - |x|); & (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2, \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

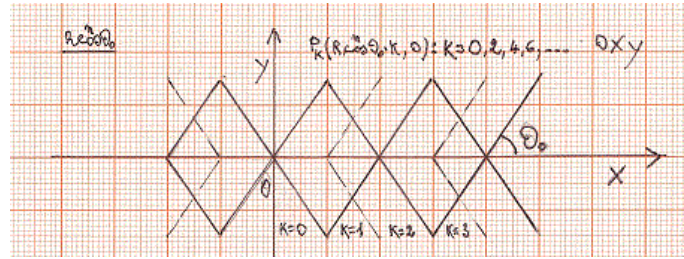
dove  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0; a > 0; n$  intero positivo, da cui il diagramma seguente in cui ai tratteggi si sostituiscono in ordine inverso i valori di  $y$ .



Se nella equazione precedente si pone  $a = R \cos^n \theta_0$ , si ha l'equazione:

$$(3) \quad \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} \pm (|x| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left( \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \pm [R \cos^n \theta_0 (1+k) - |x|]; & k^2 \leq \left( \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

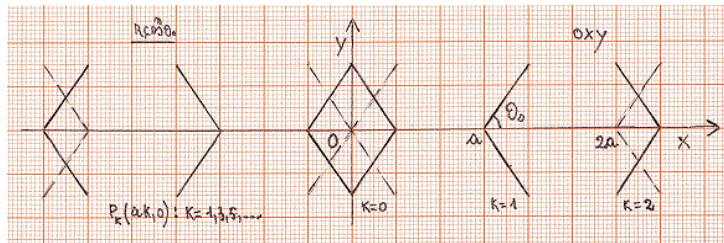
dove  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0; n$  intero positivo, e di conseguenza la sua rappresentazione geometrica risulta essere:



Ora consideriamo l'espressione:

$$(4) \quad \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} \pm(|x| - ak); & (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2; \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ \pm[R \cos^n \theta_0 (1+k) - |x|]; & (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2; \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

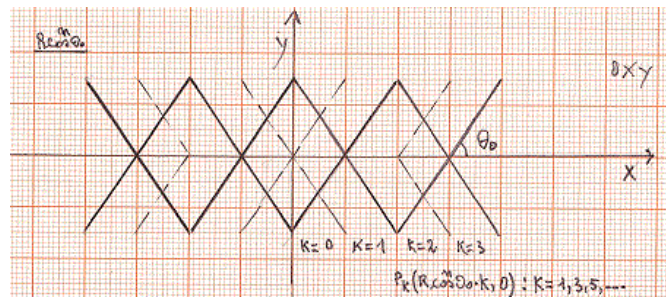
dove  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0; a > 0; n$  intero positivo, questa differisce dalla (2) per i valori di  $k$ . È possibile disegnare il suo diagramma:



Di seguito, se nella (4) poniamo  $a = R \cos^n \theta_0$ , abbiamo la seguente equazione:

$$(5) \quad \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} \pm(|x| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{x}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ \pm[R \cos^n \theta_0 (1+k) - |x|]; & k^2 \leq \left(\frac{x}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Dove  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0; a > 0; n$  intero positivo, nonché il suo diagramma:

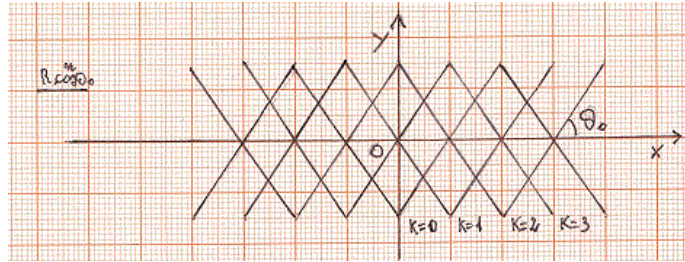


Associando le equazioni (3) e (5), si ottiene la funzione:



$$(6) \quad \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} \pm(|x| - R \cos^n \theta_0 k) \\ \pm[R \cos^n \theta_0 (1+k) - |x|] \end{cases}$$

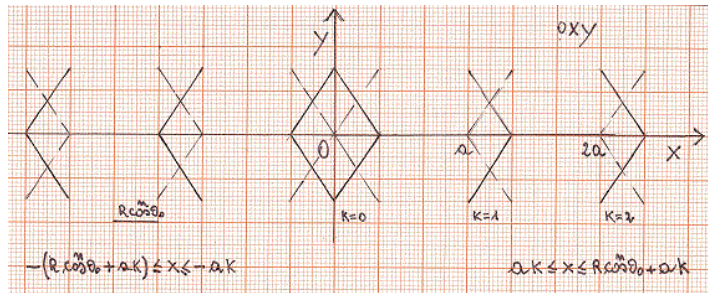
con  $k^2 \leq \left(\frac{x}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ;  $R > 0$  da cui segue il diagramma:



Dallo studio della (2) e (4) segue l'equazione:

$$(7) \quad y = \pm \operatorname{tg} \theta_0 (R \cos^n \theta_0 + ak - |x|)$$

con  $(ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta_0 + ak)^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ;  $R > 0$ ;  $a > 0$  da cui si ha il seguente grafico:

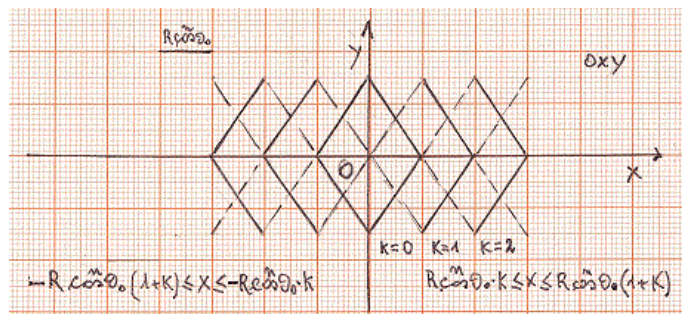


Se si considera la (7) quando  $a = R \cos^n \theta_0$  si ha la:

$$(8) \quad y = \pm \operatorname{tg} \theta_0 [R \cos^n \theta_0 (1+k) - |x|]$$

con  $k^2 \leq \left(\frac{x}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $n$  intero positivo;

$0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ;  $R > 0$ ; da cui segue il grafico seguente in cui si devono osservare le parti a tratto continuo:

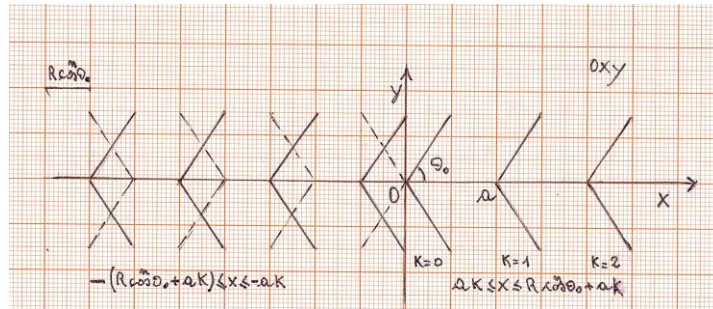


Consideriamo la funzione:

$$(9) \quad \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} \pm(|x| - ak) = \pm(x - ak); & ak \leq x \leq R \cos^n \theta_0 + ak; \\ \pm(R \cos^n \theta_0 + ak - |x|) = \\ = \pm(R \cos^n \theta_0 + ak + x); & -(R \cos^n \theta_0 + ak) \leq x \leq -ak; \end{cases}$$

con  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots; n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0; a > 0$ .

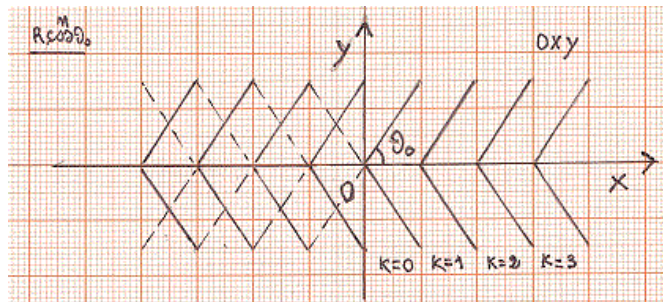
Questa avrà il seguente diagramma:



Se nella (9) si pone  $a = R \cos^n \theta_0$  si ha la seguente equazione:

$$(10) \quad \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} \pm(x - R \cos^n \theta_0 k); & k \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq 1 + k; \\ \pm(R \cos^n \theta_0 (1 + k) + x); & -(1 + k) \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq -k; \end{cases}$$

con  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots; n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0$  e il suo corrispondente diagramma:

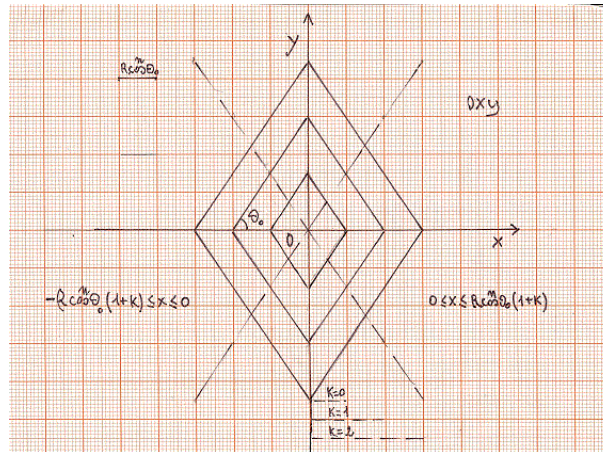


Se consideriamo la (8) modificandone il suo campo di esistenza dei valori di  $x$ , ne seguirà l'equazione:

$$(11) \quad y = \pm \operatorname{tg} \theta_0 [R \cos^n \theta_0 (1 + k) - |x|]$$

con  $0 \leq x^2 \leq [R \cos^n \theta_0 (1 + k)]^2; k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots; n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0$  e di conseguenza il corrispondente diagramma che limiteremo a dodici segmenti, ossia al contorno di tre parallelogrammi concentrici nell'origine degli assi cartesiani  $Oxy$ .

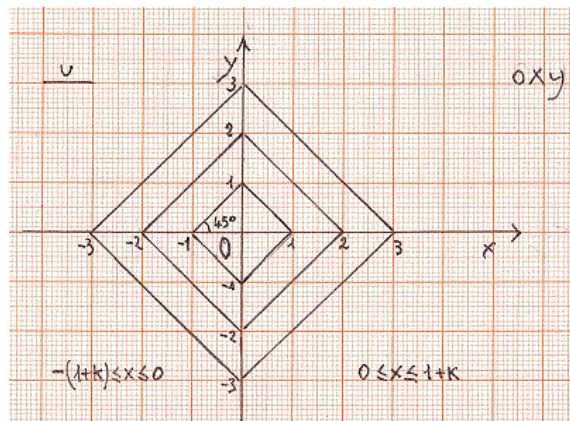
In realtà i parallelogrammi saranno infiniti e la (11) ne rappresenterà i loro contorni.



In particolare, se nella (11) poniamo  $R \cos^n \theta_0 = 1$  con  $\theta_0 = 45^\circ$ , avremo la seguente equazione:

$$(12) \quad y = \pm [(1+k) - |x|]$$

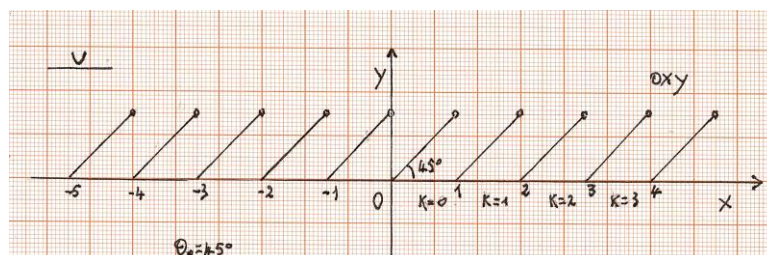
con  $0 \leq x^2 \leq (1+k)^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  e quindi il diagramma:



Quale caso particolare della (10) con  $R \cos^n \theta_0 = 1$  e  $\theta_0 = 45^\circ$ , escludendo i segni negativi e i valori  $x = 1+k$  e  $x = -k$ , si ottiene l'equazione:

$$(13) \quad y = \begin{cases} x - k; & k \leq x < 1+k \\ 1+k + x; & -(1+k) \leq x < -k, \end{cases}$$

con  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  e della quale segue il grafico:

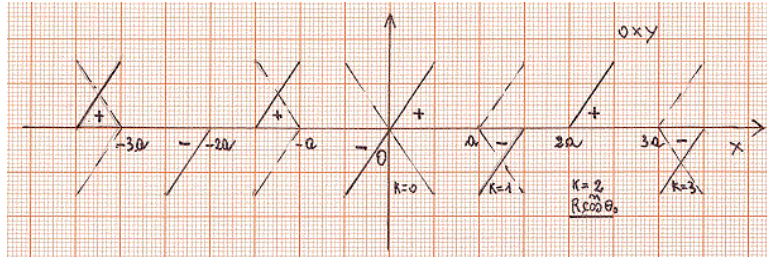


In particolare il diagramma è quello di una nota funzione detta "parte decimale o mantissa di x":  $f(x) = \text{mant}x = x - E(x)$ . Infatti sappiamo che quest'ultima funzione  $f(x) = x - E(x)$  ha lo stesso diagramma di quello in figura. La funzione  $E(x)$  è la funzione di Legendre.

Se, a partire dall'equazione (2), considero l'equazione:

$$(14) \quad \frac{y}{\text{tg } \theta_0} = \begin{cases} +(|x| - ak) = x - ak; & ak \leq x \leq R \cos^n \theta_0 + ak; & k = 0, 2, 4, \dots \\ -(|x| - ak) = x + ak; & -(R \cos^n \theta_0 + ak) \leq x \leq -ak; & k = 0, 2, 4, \dots \\ -\left(R \cos^n \theta_0 + ak - |x|\right) = & ak \leq x \leq R \cos^n \theta_0 + ak; & k = 1, 3, 5, \dots \\ = x - \left(R \cos^n \theta_0 + ak\right) & \\ +\left(R \cos^n \theta_0 + ak - |x|\right) = & -(R \cos^n \theta_0 + ak) \leq x \leq -ak; & k = 1, 3, 5, \dots \\ = x + R \cos^n \theta_0 + ak & \end{cases}$$

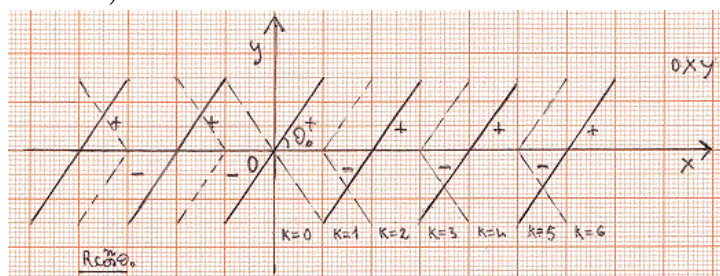
con  $n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0; a > 0$  si ottiene che il seguente diagramma:



Se nella (14) si pone  $a = R \cos^n \theta_0$  seguirà la funzione:

$$(15) \quad \frac{y}{\text{tg } \theta_0} = \begin{cases} x - R \cos^n \theta_0 k; & k \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq 1 + k; & k = 0, 2, 4, \dots \\ x + R \cos^n \theta_0 k; & -(1 + k) \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq -k; & k = 0, 2, 4, \dots \\ x - R \cos^n \theta_0 (1 + k) & k \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq 1 + k; & k = 1, 3, 5, \dots \\ x + R \cos^n \theta_0 (1 + k) & -(1 + k) \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq -k; & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

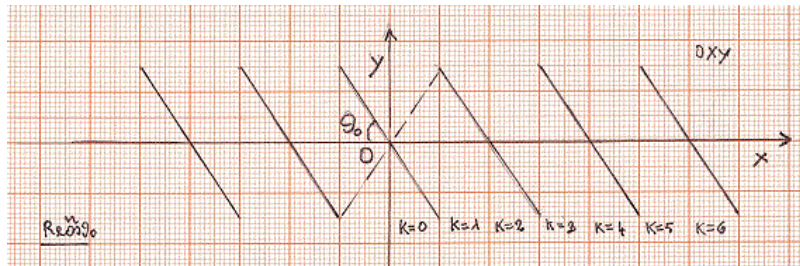
con  $n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; R > 0$ . Il suo diagramma è quello che segue e si tratta di una particolare famiglia di segmenti paralleli a quello di estremi  $(R \cos^n \theta_0, R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0)$  e  $(-R \cos^n \theta_0, -R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0)$ .



Cambiando di segno la funzione (15) segue l'equazione:

$$(16) \quad -\frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} = \begin{cases} x - R \cos^n \theta_0 k; & k \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq 1+k; & k = 0, 2, 4, \dots \\ x + R \cos^n \theta_0 k; & -(1+k) \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq -k; & k = 0, 2, 4, \dots \\ x - R \cos^n \theta_0 (1+k); & k \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq 1+k; & k = 1, 3, 5, \dots \\ x + R \cos^n \theta_0 (1+k); & -(1+k) \leq \frac{x}{R \cos^n \theta_0} \leq -k; & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

con  $n$  intero positivo;  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ ;  $R > 0$  e avente il seguente grafico.

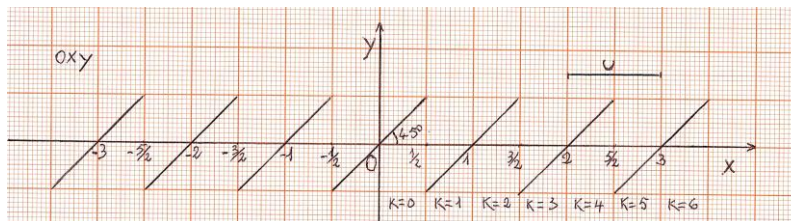


In questo caso si tratta di una particolare famiglia di segmenti paralleli a quello di estremi  $(-R \cos^n \theta_0, R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0)$  e  $(R \cos^n \theta_0, -R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0)$ .

Se nella (f15) si pone  $R \cos^n \theta_0 = \frac{1}{2}$  e  $\theta_0 = 45^\circ$  seguirà la seguente equazione:

$$(17) \quad y = \begin{cases} x - \frac{1}{2}k; & \frac{1}{2}k \leq x \leq \frac{1}{2}(1+k); & k = 0, 2, 4, \dots \\ x + \frac{1}{2}k; & -\frac{1}{2}(1+k) \leq x \leq -\frac{1}{2}k; & k = 0, 2, 4, \dots \\ x - \frac{1}{2}(1+k); & \frac{1}{2}k \leq x \leq \frac{1}{2}(1+k); & k = 1, 3, 5, \dots \\ x + \frac{1}{2}(1+k); & -\frac{1}{2}(1+k) \leq x \leq -\frac{1}{2}k; & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

di cui segue il grafico che rappresenta infiniti segmenti paralleli inclinati di  $45^\circ$  sull'asse delle  $x$ .



Se escludiamo dal grafico della (17) gli estremi degli infiniti segmenti che lo compongono, mentre associamo allo stesso diagramma i punti presi sull'asse delle  $x$ , le cui ascisse sono date da  $x = \pm(k + \frac{1}{2})$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , si ha il noto diagramma della funzione chiamata "eccesso di  $x$ ":  $y = (x)$ .

# 164. Numeri figurati

Stefano Borgogni  
stfbrg@rocketmail.com

## Sunto

Per numeri figurati si intendono i numeri interi che possono essere rappresentati mediante uno schema geometrico regolare, nel piano o nello spazio. Queste configurazioni sono note già dall'antichità greca<sup>1</sup> e nel corso dei secoli al loro studio si sono dedicati anche matematici di prima grandezza: basti citare, tra gli altri, i nomi di Eulero, Gauss, Fermat e Lagrange.

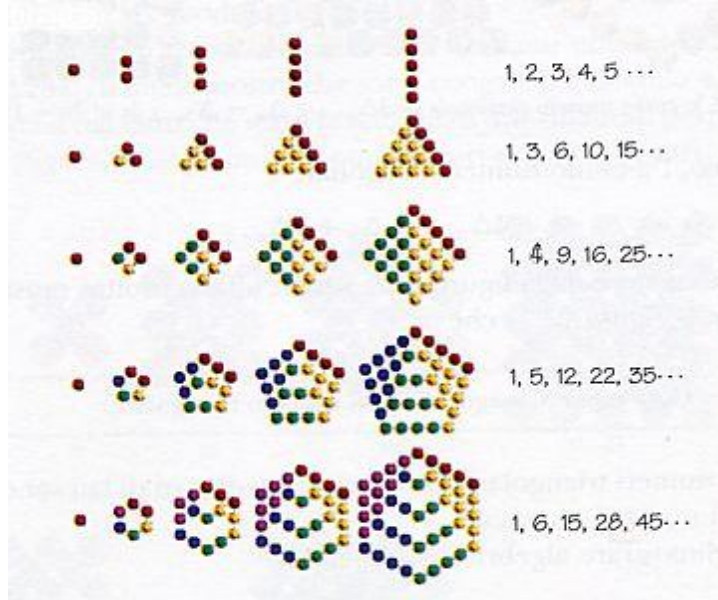
Il presente studio intende esaminare in maniera approfondita l'argomento, raccogliendo in un *unicum* le principali caratteristiche di questi numeri figurati.<sup>2</sup>

Oltre ai più noti numeri poligonali e piramidali, su cui esiste un'ampia letteratura, saranno trattate configurazioni meno studiate, come i numeri poligonali centrati e i numeri "stella". Inoltre, si prenderanno in esame diverse proprietà delle serie formate da tali numeri, nonché le relazioni che intercorrono tra le une e le altre.

## 1. Numeri poligonali

Questo primo paragrafo parla dei numeri poligonali, che costituiscono le disposizioni più semplici. Si tratta di collocare sul piano  $N$  oggetti in modo da formare un poligono regolare di dimensioni via via maggiori; il numero di oggetti è per l'appunto il numero poligonale cercato.

Come spesso accade in matematica, una figura può chiarire il concetto meglio di tante parole.



Numeri Triangolari, Quadrati, Pentagonali ed Esagonali

Vediamo in rapida sintesi i numeri che derivano dalle prime quattro figure piane, iniziando con i *Numeri Triangolari* (1, 3, 6, 10, 15 etc.). Per costruzione, essi equivalgono alla somma dei primi  $N$  numeri interi; infatti, si possono graficamente rappresentare disponendo sul piano un oggetto, poi due, poi tre e così via.

<sup>1</sup> I matematici della scuola pitagorica furono i primi ad analizzare le proprietà di questi numeri e a definirli Triangolari, Quadrati etc. Inoltre, Diofanto di Alessandria (III-IV secolo d.C.), celebre soprattutto per le equazioni in cui si cercano soltanto soluzioni intere (equazioni diofantine), scrisse - tra le altre cose - un intero trattato sui numeri poligonali.

<sup>2</sup> Il tema è già comparso su questo stesso sito (F. Cimolin, *Numeri figurati*, agosto 2007), ma allora si trattava di una panoramica estremamente sintetica.

Tra le varie proprietà di questi numeri ne segnaliamo una: tutti i numeri perfetti<sup>3</sup> sono anche Triangolari.

Subito dopo troviamo i *Numeri Quadrati* (1, 4, 9, 16, 25 etc.), che - ovviamente - non sono nient'altro che i quadrati dei successivi numeri interi.

Aumentando progressivamente il numero di lati di queste raffigurazioni, si ottengono i *Numeri Pentagonali* (1, 5, 12, 22, 35 etc.), poi i *Numeri Esagonali* (1, 6, 15, 28, 45 etc.). Va segnalato che questi ultimi corrispondono esattamente ai numeri Triangolari di posto dispari (primo, terzo, quinto e così via).

Il discorso potrebbe continuare, ma ci fermiamo qui; nell'appendice sarà, comunque, riportata la formula generale che permette - detto S è il numero di lati di un poligono - di ricavare l'N-esimo numero S-gonale.<sup>4</sup>

Un discorso a parte merita il cosiddetto Teorema di Fermat sui numeri poligionali.

Questo teorema, congetturato dal matematico francese,<sup>5</sup> afferma che qualunque numero intero può essere scritto come somma di al più N numeri poligionali di N lati (eventualmente ripetuti); dunque, ogni intero può essere espresso come somma di non più di 3 Triangolari, 4 Quadrati, 5 Pentagonali e così via. Ad esempio, si può scrivere 31 come 15+10+6 (tre numeri Triangolari) oppure come  $5^2+2^2+1^2+1^2$  (quattro Quadrati).

Vale la pena di sottolineare che il Teorema “dei quattro quadrati”, caso particolare di quello generale di Fermat, compare anche nella “Arithmetica” del già citato Diofanto di Alessandria.

## 2. Numeri poligionali centrati

I numeri poligionali centrati sono numeri figurati assai meno conosciuti rispetto ai poligionali “normali”, dai quali differiscono in quanto vengono generati a partire dal centro di un poligono regolare anziché da un vertice.

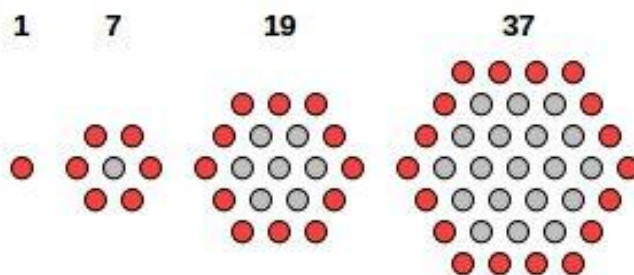
In altre parole, lasciando da parte il numero 1, i Triangolari centrati cominciano con 4 (i tre vertici di un triangolo più il centro), quelli Quadrati con 5 e così via.

Riportiamo brevemente alcune caratteristiche relative a questi numeri, cominciando, analogamente a quanto visto in precedenza, con i *Numeri Triangolari centrati* (1, 4, 10, 19, 31 etc.).

Questi numeri hanno una proprietà degna di nota: la somma dei primi N numeri Triangolari centrati dà la costante di un *quadrato magico* di lato N. Ad esempio, 1+4+10+19 vale 34, che è giust'appunto la costante del quadrato magico 4x4.

L'elenco prosegue con i *Numeri Quadrati centrati* (1, 5, 13, 25, 41 etc.), i *Numeri Pentagonali centrati* (1, 6, 16, 31, 51 etc.) e i *Numeri Esagonali centrati* (1, 7, 19, 37, 61 etc.).

I numeri della prima e della terza tipologia sono tutti dispari e le loro cifre finali seguono una successione sempre uguale; è facile verificare che la stessa proprietà vale per tutti i numeri S-gonali centrati con S pari.



I primi 4 Numeri Esagonali centrati

<sup>3</sup> I numeri perfetti sono quelli equivalenti alla somma dei propri divisori, 1 compreso. La serie dei numeri perfetti comincia con 1, 6, 28, 496, 8.128.

<sup>4</sup> Analogamente, nell'appendice si troveranno anche le formule di costruzione relative ai numeri figurati descritti nel prosieguo del testo, insieme all'elenco dei primi 10 numeri di ogni serie.

<sup>5</sup> Fermat disse di averlo dimostrato, ma la sua prova non fu mai trovata (così come è avvenuto per l'assai più celebre congettura riguardante le soluzioni intere dell'equazione  $x^N + y^N = z^N$ , risolta definitivamente da A. Wiles nel 1995). Il caso dei Quadrati fu dimostrato nel 1772 da Lagrange; Gauss provò il caso dei Numeri Triangolari nel 1796, mentre Cauchy dimostrò il teorema nella sua interezza nel 1813.

### 3. Numeri stella

I numeri Stella si costruiscono allo stesso modo di quelli poligonali centrati, ma partendo da una stella regolare a 6 punte. A parte il caso banale di  $N = 1$ , la prima stella ha 13 punti: 7 per l'esagono più il suo centro, 6 per le punte della stella stessa.

Queste configurazioni sono molto interessanti e tra esse se ne trova una universalmente nota: si tratta della scacchiera della dama cinese, che nella sua versione standard ha complessivamente 121 buchi, disposti nella forma di una stella a sei punte: 121 è il quinto numero Stella.



*La scacchiera standard della dama cinese*

Analogamente a quanto appena osservato per i numeri S-gonali centrati con S pari, tutti i Numeri Stella (1, 13, 37, 73, 121 etc.) sono dispari e l'ultima cifra ricorre ciclicamente; in questo caso la successione è 1, 3, 7, 3, 1.

### 4. Numeri poliedrici e piramidali

Fino ad ora siamo rimasti nel piano. Ma che cosa succede se allarghiamo il discorso allo spazio tridimensionale?

Questa estensione dà origine a numeri che, per uniformità, si possono definire “numeri poliedrici”.

Evidentemente, la questione a questo punto si complica, considerando la grande varietà di figure solide esistenti, anche restringendo il campo a quelle che presentano una qualche regolarità.

Per brevità, in questo studio ci limiteremo a considerare tre tipologie di numeri poliedrici: i Cubici, i Piramidali triangolari (che corrispondono esattamente ai Tetraedrici) e i Piramidali quadrati, lasciando da parte le forme derivanti dagli altri tre poliedri regolari platonici (Ottaedro, Dodecaedro, Icosaedro) o dai cosiddetti “poliedri archimedei”.

Sui *Numeri Cubici* (1, 8, 27, 64, 81 etc.) non vale la pena di soffermarsi più di tanto, poiché essi sono semplicemente i cubi dei successivi numeri interi.

Più interessanti, invece, sono le configurazioni originate da una piramide avente per base un poligono regolare. Graficamente, si possono rappresentare tali numeri come un mucchio di sfere (esempio tipico: le palle di cannone) appoggiate l'una sull'altra in modo da formare una piramide.

La prima disposizione nello spazio genera i *Numeri Piramidali triangolari* (1, 4, 10, 20, 35 etc.), che possiamo ottenere immaginando di sovrapporre via via triangoli equilateri sempre più piccoli.

Vediamo ancora i Numeri Piramidali quadrati (1, 5, 14, 30, 55 etc.), la cui formula risolutiva<sup>6</sup> è

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

. Questi numeri hanno una notevole applicazione pratica: l'N-esimo Piramidale quadrato dà esattamente il numero totale di quadrati contenuti in una griglia NxN. Ad esempio, il numero di quadrati diversi contenuti in una normale scacchiera 8x8 è 204, ossia l'ottavo numero Piramidale quadrato.

<sup>6</sup> Una formula equivalente a questa si trova nel *Liber abaci* (1202) di Leonardo Pisano, più noto come Fibonacci.



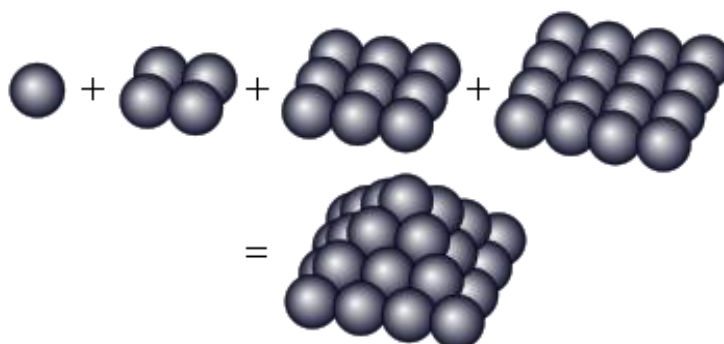
## 5. Relazioni tra numeri di tipologie diverse

Come è facile immaginare, i numeri figurati dei diversi raggruppamenti hanno molteplici relazioni tra di loro. Se ne potrebbero citare a decine, mettendo a confronto due a due le numerose tipologie di cui si è parlato, ma per ovvi motivi se ne evidenzieranno soltanto alcune, scelte tra quelle più immediate e significative per le loro possibili applicazioni.

Una prima, interessante correlazione è quella che lega tra loro i numeri poligonali e i corrispondenti numeri Piramidali: la somma dei primi  $N$  numeri Triangolari equivale all' $N$ -esimo numero Tetraedrico, la somma dei primi  $N$  Quadrati dà l' $N$ -esimo numero Piramidale quadrato e così via.

Ad esempio,  $1+3+6+10$  vale 20 (quarto numero Tetraedrico), mentre  $1+6+15$  dà 22 (terzo numero Piramidale esagonale).

Con una rappresentazione grafica si può comprendere meglio la regola, che vale per qualsiasi piramide regolare.



*Il numero Piramidale quadrato 30 è la somma dei Quadrati 1, 4, 9 e 16*

Altre relazioni che intercorrono tra diverse tipologie di numeri figurati sono le seguenti.

- La somma di due numeri Triangolari successivi è un Quadrato (es.  $6+10 = 16$ ).
- Tutti i numeri Quadrati centrati sono la somma di 2 Quadrati successivi (es.  $13 = 4+9$ ).
- Tra i numeri Esagonali centrati e i numeri Stella vale la relazione  $2E-1 = St$  (es.  $37 \times 2 - 1 = 73$  dove 37 e 73 sono i quarti elementi delle due serie).
- ogni numero Esagonale centrato rappresenta la differenza tra due Cubi consecutivi ( $8-1 = 7$ ;  $27-8 = 19$  etc.); da ciò discende che la somma dei primi  $K$  numeri Esagonali centrati vale  $K^3$ .

## 6. Numeri appartenenti a più tipologie

Viene spontaneo chiedersi se vi siano numeri contemporaneamente appartenenti a due o più tipologie tra quelle descritte.

Il caso più significativo è senza dubbio quello dei numeri contemporaneamente Triangolari e Quadrati. Graficamente, si tratta di trovare un numero  $N$  di oggetti tale che essi possono essere disposti a formare sia un triangolo equilatero sia un quadrato; da un punto di vista matematico il problema equivale a quello di trovare coppie di numeri interi  $M, N$  tali che  $N(N+1) = 2M^2$ .

E' immediato verificare che esistono numeri Triangolari/Quadrati (basta prendere il 36); assai meno facile è rispondere alla domanda: "tali numeri sono infiniti o la serie si interrompe a un certo punto?" Il problema fu risolto dal grande Eulero,<sup>7</sup> il quale nel 1730 dimostrò che essi sono infiniti e indicò un modo per ricavarli.

La formula generatrice, non propriamente agevole, è

<sup>7</sup> Vale la pena di sottolineare che esistono riferimenti ai numeri Triangolari/Quadrati ancora più antichi: essi compaiono già nell'enigma dei "Buoi del Sole", attribuito niente meno che ad Archimede. Per maggiori dettagli si veda il sito <http://www.dm.unito.it/~cerruti/giugno-agosto-03.html#pell1>.

$$\frac{\left[ (1 + \sqrt{2})^{2N} - (1 - \sqrt{2})^{2N} \right]^2}{32}$$

Come si può immaginare dalla presenza degli esponenziali nella formula, i numeri crescono rapidamente: i primi termini della serie sono infatti 1, 36, 1.225, 41.616 e 1.413.721.

Un'interessante proprietà geometrica dei Triangolari/Quadrati è che danno origine, tramite un semplice algoritmo<sup>8</sup>, a triangoli rettangoli aventi un cateto più lungo dell'altro esattamente di un'unità, talora chiamati anche "triangoli zoppi". Il numero 1 produce la terna pitagorica fondamentale 3-4-5; da 36 si ottiene il triangolo 20-21-29 e così via.<sup>9</sup>

Ma lasciamo questo caso particolare per tornare al discorso generale sui numeri appartenenti a due diverse categorie. Vi sono tre situazioni possibili, poiché le coppie di tipologie possono avere in comune:

- A. nessun numero (a parte 1, che appartiene a tutti i raggruppamenti);
- B. un insieme finito di numeri;
- C. infiniti numeri.

Ad esempio, la coppia Quadrati/Piramidali 3 rientra nel caso B, in quanto solo 1, 4 e 19.600 appartengono contemporaneamente alle due tipologie indicate.

Come per il caso dei Triangolari/Quadrati, la difficoltà non sta tanto nel trovare numeri appartenenti a due gruppi diversi (basta confrontare le tabelle dei primi 20 o 30 elementi di ogni serie e - se ci sono numeri comuni - qualcuno di essi salta fuori di sicuro), quanto piuttosto nel verificare se la serie è infinita oppure no. In altre parole, si tratta di risolvere le equazioni derivanti dalle formule risolutive dei diversi tipi di numeri ricercandone esclusivamente le soluzioni intere.

L'analisi di tali equazioni esula dall'ambito del presente testo; ci limitiamo qui a presentare una semplice tabella che riporta i risultati ottenuti mettendo a confronto alcune coppie di tipologie.

Coppia di tipologie	Caso	Elenco dei numeri
Triangolari - 3 centrati	C	1 - 10 - 136 - 1.891 - 26.335 ... etc.
Quadrati - 4 centrati	C	1 - 25 - 841 - 28.561 ... etc.
Pentagonali - 5 centrati	C	1 - 51 - 3.151 - 195.301 ... etc.
Esagonali - 6 centrati	C	1 - 91 - 8.911 - 873.181
Triangolari - 6 centrati	B	solo 1 - 91 - 8.911
Quadrati - 6 centrati	C	1 - 169 - 32.761 ... etc.
Triangolari - Stella	C	1 - 253 - 49.141 ... etc.
Quadrati - Stella	C	1 - 121 - 11.881 ... etc.
6 centrati - Stella	C	1 - 37 - 1.261 - 42.841 ... etc.
Triangolari - Piramidali 3	B	solo 1 - 10 - 120 - 1.540 - 7.140
Quadrati - Piramidali 3	B	solo 1 - 4 - 19.600
Triangolari - Piramidali 4	B	solo 1 - 55 - 91 - 208.335
Quadrati - Piramidali 4	B	solo 1 - 4.900
Piramidali 3 - Piramidali 4	A	solo 1

Aggiungiamo ancora una notevole proprietà dei numeri Quadrati/Stella: l'espressione  $3QS+2$  produce tutti i numeri che possono essere espressi come somma di più quadrati consecutivi.

Un esempio può chiarire meglio il discorso: 365 (tre volte il Quadrato/Stella 121 più 2) equivale a  $13^2 + 14^2$  e anche a  $10^2 + 11^2 + 12^2$ .

<sup>8</sup> Per saperne di più su questo algoritmo, si veda: Martin Gardner, *Time travel and other mathematical bewilderments*.

<sup>9</sup> Una piccola divagazione. I triangoli così costruiti raggiungono rapidamente dimensioni gigantesche: il triangolo "zoppo" derivato dal centesimo di questi numeri ha cateti talmente grandi che, posto uno di essi equivalente a un anno-luce, la differenza con l'altro sarebbe migliaia di volte inferiore al diametro di un elettrone!

L'analisi potrebbe continuare prendendo in esame i numeri che appartengono contemporaneamente a tre o più tipologie; per brevità, ci limitiamo ad evidenziarne alcuni - escludendo i numeri fino a 20, che sono troppo "facili" - senza ulteriori approfondimenti.

Numero	Tipologie	(numero e descrizione)
91	4	Triangolari - Esagonali - 6 centrati - Piramidali 4
1.891	4	Triangolari - Esagonali - 3 centrati - 5 centrati
64	3	Quadrati - Triangolari centrati - Cubici
120	3	Triangolari - Esagonali - Piramidali 3
181	3	4 centrati - 5 centrati - Stella
276	3	Triangolari - Esagonali - 5 centrati
946	3	Triangolari - Esagonali - Piramidali 6
1.225	3	Triangolari - Quadrati - Esagonali

Dunque, limitandoci a considerare numeri ragionevolmente piccoli (fino a non più di 4 cifre), quelli più presenti tra le varie tipologie sono 91 e 1.891. Curiosamente, entrambi terminano per -91 e la loro radice numerica è 1.

## 7. Altri dati comparativi sulle serie

Un esame comparato dei numeri delle diverse serie può mettere in luce svariate proprietà; nel presente studio esaminiamo due aspetti: cifre terminali dei numeri e rapporto tra N-esimi numeri di serie diverse per N che tende all'infinito.

### ***Cifre terminali***

E' facile verificare che le cifre terminali dei diversi tipi di numeri figurati seguono regole ben precise, riportate nella seguente tabella.

Tipologia numeri	Cifre finali possibili
Triangolari	1, 3, 5, 6, 8, 0
Quadrati	1, 4, 5, 6, 9, 0
Pentagonali	1, 2, 5, 6, 7, 0
Esagonali	1, 3, 5, 6, 8, 0
Triangolari centrati	1, 4, 5, 6, 9, 0
Quadrati centrati	1, 3, 5
Pentagonali centrati	1, 6
Esagonali centrati	1, 7, 9
Stella	1, 3, 7
Cubici	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0
Piramidali base 3	1, 4, 5, 6, 9, 0
Piramidali base 4	1, 4, 5, 6, 9, 0
Piramidali base 5	1, 3, 5, 6, 8, 0
Piramidali base 6	1, 2, 5, 6, 7, 0

La tabella evidenzia in particolare che:

l'unica cifra con cui può terminare qualunque gruppo di numeri figurati è 1, com'è logico visto che il numero 1 appartiene a tutte le tipologie;

come già accennato, i numeri S-gonali centrati con S pari e i numeri Stella possono terminare soltanto con una cifra dispari;

i numeri più “esigenti” sono i Pentagonali centrati,<sup>10</sup> che accettano solo 1 e 6 come cifra finale; al contrario, i Cubici possono terminare con una qualunque delle 10 cifre; i Piramidali base 3 e base 4 si comportano allo stesso modo (ma ciò non vale in generale per Piramidali di ogni base S).

**Rapporto-limite tra numeri delle varie tipologie**

Un altro elemento degno di interesse è il rapporto tra gli N-esimi numeri delle varie tipologie; in altre parole, si tratta di esaminare il limite a cui tende tale rapporto al crescere di N.

Mettendo in relazione le formule di costruzione, è facile ricavare i vari risultati; li riportiamo nella tabella seguente, che raggruppa un sottoinsieme ristretto delle numerosissime, possibili combinazioni.

Rapporto	Tende a <sup>11</sup>	Rapporto	Tende a
Triangolari - Quadrati	0,5 1/2	3 centrati - 4 centrati	0,75 3/4
Triangolari - Pentagonali	0,333 1/3	3 centrati - 5 centrati	0,6 3/5
Triangolari - Esagonali	0,25 1/4	3 centrati - 6 centrati	0,5 3/6
Quadrati - Pentagonali	0,667 2/3	4 centrati - 5 centrati	0,8 4/5
Quadrati - Esagonali	0,5 2/4	4 centrati - 6 centrati	0,667 4/6
Pentagonali - Esagonali	0,75 3/4	5 centrati - 6 centrati	0,833 5/6
Triangolari - 3 centrati	0,333 1/3	Triangolari - Stella	0,333 1/3
Quadrati - 4 centrati	0,5 2/4	Quadrati - Stella	0,667 2/3
Pentagonali - 5 centrati	0,6 3/5	Pentagonali - Stella	1 3/3
Esagonali - 6 centrati	0,667 4/6	Esagonali - Stella	1,333 4/3
Piramidali 3 - Piramidali 4	0,5 1/2	Piramidali 3 - Cubici	0,167 1/6
Piramidali 3 - Piramidali 5	0,333 1/3	Piramidali 4 - Cubici	0,333 2/6
Piramidali 3 - Piramidali 6	0,25 1/4	Piramidali 5 - Cubici	0,5 3/6
Piramidali 4 - Piramidali 5	0,667 2/3	Piramidali 6 - Cubici	0,667 4/6
Piramidali 4 - Piramidali 6	0,5 2/4		
Piramidali 5 - Piramidali 6	0,75 3/4		

Che cosa ci dice questa tabella?

In primo luogo, si può osservare che il limite dei rapporti tra le tipologie di numeri indicate è sempre espresso da una frazione molto semplice. Inoltre, esistono regole generali che permettono di estendere i risultati della tabella a numeri figurati con un numero qualsiasi di lati; vediamo alcune.

- Il rapporto tra serie diverse di numeri poligonali centrati tende al rapporto tra il numero di lati dei poligoni di origine. Ad esempio, il rapporto tra numeri Triangolari centrati e Pentagonali centrati si avvicina sempre più a 3/5.
- Se chiamiamo L il numero dei lati, il rapporto tra numeri L-gonali e numeri L-gonali centrati tende a  $\frac{L-2}{L}$ .
- Il limite del rapporto tra numeri S-gonali e numeri Stella è  $\frac{S-2}{3}$ .
- I valori del rapporto tra le diverse classi di numeri Piramidali sono esattamente uguali a quelli tra numeri poligonali corrispondenti. Ad esempio, il valore limite del rapporto Quadrati-Esagonali (0,5 ossia 1/2) è lo stesso che si registra per il rapporto Piramidali 4-Piramidali 6.

<sup>10</sup> Per la verità, esistono serie i cui elementi possono terminare soltanto con la cifra 1 (ad esempio, i numeri Decagonali centrati: 1, 11, 31, 61, 101 etc.), ma esulano dall'insieme trattato in questo studio.

<sup>11</sup> Le frazioni non sono sempre espresse ai minimi termini al fine di agevolare la lettura delle regole in relazione ai poligoni origine dei diversi numeri figurati.

Detti  $S_1$  e  $S_2$  il numero di lati dei numeri poligonali o piramidali considerati, il limite si ricava con la formula  $\frac{S_1 - 2}{S_2 - 2}$ .

- Il rapporto tra numeri Piramidali con base  $S$ -gonale e numeri Cubici si avvicina sempre più al valore  $\frac{S - 2}{6}$ .

## APPENDICE

Si riporta, infine, una tabella riepilogativa con i primi 10 numeri delle diverse serie di numeri figurati e le corrispondenti formule di costruzione. Per maggiore completezza, si sono aggiunti i dati relativi ad alcune serie che non sono state esaminate nel testo.

<b>Nome</b>	<b>Formula</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
Triangolari	$(N^2+N) / 2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadrati	$N^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonali	$(3N^2-N) / 2$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Esagonali	$2N^2-N$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Ettagonali	$(5N^2-3N) / 2$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Ottagonali	$3N^2-2N$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Ennagonali	$(7N^2-5N) / 2$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonali	$4N^2-3N$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370
Endecagonali	$(9N^2-7N) / 2$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415
Dodecagonali	$5N^2-4N$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460
<i>S-gonali</i>	$(S-2)N^2-(S-4)N / 2$										
3 centrati	$(3N^2+3N+2) / 2$	1	4	10	19	31	46	64	85	109	136
4 centrati	$N^2+(N-1)^2$	1	5	13	25	41	61	85	113	145	181
5 centrati	$(5N^2-5N+2) / 2$	1	6	16	31	51	76	106	141	181	226
6 centrati	$3N^2-3N+1$	1	7	19	37	61	91	127	169	217	271
7 centrati	$(7N^2-7N+2) / 2$	1	8	22	43	71	106	148	197	253	316
8 centrati	$4N^2-4N+1$	1	9	25	49	81	121	169	225	289	361
<i>S-gonali centrati</i>	$(SN^2-SN+2) / 2$										
Stella	$6N(N-1)+1$	1	13	37	73	121	181	253	337	433	541
Cubici	$N^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1.000
Piramidali 3	$N(N+1)(N+2) / 6$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	286
Piramidali 4	$N(N+1)(2N+1) / 6$	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385
Piramidali 5	$N(N+1)(3N) / 6$	1	6	18	40	75	126	196	288	405	550
Piramidali 6	$N(N+1)(4N-1) / 6$	1	7	22	50	95	161	252	372	525	715
Piramidali 7	$N(N+1)(5N-2) / 6$	1	8	26	60	115	186	308	456	645	880
Piramidali 8	$N(N+1)(6N-3) / 6$	1	9	30	70	135	211	364	540	765	1.045
<i>Piramidali S</i>	$N(N+1) [(S-2)N+5-S] / 6$										

# 165. Considerazioni sulla valutazione di un interest rate swap

Gabriella D'Agostino, Antonio Guglielmi\*

gabriella.dagostino@unisalento.it; antonio.guglielmi@istruzione.it

## Abstract

The aim of this paper is to present an introductory dissertation on pricing of a interest rate swap in the local Italian Public Administrations. In the first part of paper We will begin by defining the interest rate swap and outlining the main features. Then We present the principal method of pricing. Finally We present a short case study.

## 1. Introduzione

Sino al 2001 l'offerta finanziaria per le amministrazioni locali si è limitata ad una scelta tra mutui della Cassa Depositi e Prestiti a tasso fisso e mutui presso Istituti di Credito ordinario con tassi massimi fissati da decreti ministeriali. Con la Legge finanziaria del 2002 il legislatore ha dato agli Enti locali sia la possibilità di emettere titoli obbligazionari, sia la possibilità di sottoscrivere contratti di finanza derivata. Da quel momento molte amministrazioni pubbliche hanno deciso di sottoscrivere contratti derivati, ovvero contratti il cui valore è legato all'andamento di beni o indici finanziari sottostanti, per rimodulare la struttura delle proprie passività finanziarie. Raramente, infatti, questi contratti riguardano l'asset delle amministrazioni, ma quasi esclusivamente attengono ad un liability management. Sul mercato si possono individuare molteplici fattispecie contrattuali riguardanti strumenti finanziari di questa natura, infatti possono avere caratteristiche e scadenze standardizzate ed essere contrattati su mercati istituzionali regolamentati (come i contratti *future*), o avere natura flessibile per profilo, flussi e scadenze, ed essere scambiati su mercati *Over the counter* (Otc) da banche, istituti di intermediazione finanziaria e gestori di fondi comuni d'investimento.

Lo strumento derivato più diffuso tra gli Enti locali è lo swap sui tassi di interesse o *interest rate swap* (IRS), che data la sua flessibilità è considerato uno strumento idoneo ad una gestione dinamica della struttura complessiva dell'indebitamento dell'Ente.

## 2. Interest Rate Swap

È opportuno definire qual è lo schema contrattuale e quali sono le caratteristiche di un interest rate swap. Riferendosi alla forma più semplice di IRS, quella definita *plain vanilla*, possiamo definire un contratto di IRS letteralmente un scambio di posizioni debitorie, una a tasso fisso ed una a tasso variabile. Posto che il soggetto A abbia già in essere un finanziamento a tasso fisso (o variabile) con un intermediario finanziario, può accordarsi con un soggetto B riguardo al pagamento degli interessi riferiti allo stesso capitale (il c.d. capitale nozionale) per la vita residua del finanziamento, o per un altro definito lasso di tempo, scambiando il proprio tasso fisso (variabile) con un tasso variabile (fisso) che il soggetto B si impegna a versare contestualmente. In realtà non avviene mai lo scambio delle intere cedole, ma soltanto dei differenziali tra cedole a tasso fisso e cedole a tasso variabile. Su ogni scadenza. Il capitale nozionale non è mai coinvolto nello scambio, ma è soltanto la base di calcolo delle cedole.

---

\* Benché frutto di un lavoro comune ai due autori, la stesura dei paragrafi 2 e 3 è da attribuire a Gabriella D'Agostino, la stesura dei paragrafi 4 e 5 ad Antonio Guglielmi, introduzione e conclusioni ad entrambi gli autori.

Gabriella D'Agostino, Dottore di Ricerca - Università del Salento, Dipartimento di Scienze Economiche e Matematico - Statistiche, Via per Monteroni -7100 Lecce (LE), e-mail: gabriella.dagostino@unisalento.it.

Antonio Guglielmi, Phd, ITC "G. Calò" - ITT sede di Oria, Via E. Di Alicarnasso -72024 Oria (BR), e-mail: antonio.guglielmi@istruzione.it

Un contratto di IRS, dunque, permette di trasformare agevolmente contratti di finanziamento da tasso fisso a variabile e viceversa. È uno strumento finanziario estremamente flessibile, infatti, la libertà contrattuale che lo caratterizza consente di personalizzare la periodicità di ogni singola gamba, prevedere un piano di ammortamento del nozionale, pagare o riscuotere premi (Up-front) e commissioni, gestire l'estinzione anticipata totale o parziale; nonché utilizzare anziché un solo tasso (solitamente l'Euribor) una combinazione di tassi in percentuali diverse con clausole barriera o minimo garantito.

Gli elementi contrattuali che intervengono nello schema di un IRS sono: *il capitale nozionale*, ossia il capitale teorico di base per il calcolo dei flussi di interesse ( $C$  se fisso,  $D_k$  se variabile); *la data di negoziazione*, ovvero la data in cui si stipula il contratto di IRS; *la data iniziale*, ossia la data di decorrenza del contratto; *la data finale*, ossia la data in cui il contratto ha termine; *le date intermedie di pagamento*, ovvero le date in cui vengono pagate le cedole calcolate a tasso fisso e a tasso variabile. Occorre definire, inoltre, la parte contrattuale che si impegna a corrispondere cedole a tasso fisso (*il debitore tasso fisso*) e quella che verserà gli interessi a tasso variabile (*il debitore tasso variabile*), nonché *la gamba fissa* del contratto, ovvero il flusso di cedole calcolate a tasso fisso e *la gamba variabile*, ovvero quella costituita dal flusso cedolare calcolato a tasso variabile.

Il contratto deve indicare, inoltre, *il tasso fisso di riferimento* e l'eventuale *spread del tasso fisso*, da sommare allo stesso, ed *il tasso parametro variabile*, ovvero il parametro di indicizzazione rilevato alle scadenze di riferimento, solitamente l'Euribor 6M, *il tasso soglia*, che rappresenta la barriera del tasso parametro variabile il cui raggiungimento, alla data del fixing, determinerà la modifica delle condizioni di calcolo del tasso variabile e lo *spread* da sommare al *tasso variabile* ed anche le date in cui quest'ultimo deve essere rilevato.

Le cedole sono rilevate in ragione del *fattore moltiplicativo*, "act/360", dove "act" = giorni effettivi di calendario, mentre "360" è il numero di giorni che convenzionalmente compongono l'anno.

Poiché la posizione del soggetto A deve essere in equilibrio finanziario con quella del soggetto B alla stipula, il contratto di IRS può prevedere la corresponsione di un *Up-front* ( $U_F$ ), ossia una somma corrisposta alla data di negoziazione o di inizio del contratto affinché la differenza attualizzata tra la gamba fissa e la gamba variabile sia nulla.

Un Ente locale che sottoscrive un contratto di finanziamento a tasso fisso conosce, al momento della stipula, l'ammontare esatto delle cedole che dovrà pagare sino alla scadenza del contratto, ma ciò espone al contempo l'Ente locale al rischio di dover pagare un tasso superiore rispetto al tasso vigente sul mercato in caso di una discesa dei tassi.

Per contro, un Ente locale che sottoscrive un contratto di finanziamento a tasso variabile in ogni scadenza pagherà cedole che sono calcolate in base ad un tasso di riferimento, che segue le oscillazioni del mercato. Nel caso di una diminuzione del tasso, l'Ente locale avrà un risparmio, ma simmetricamente un aumento dei tassi genererà delle perdite rispetto ad un contratto a tasso fisso.

Pertanto, se si prevede una crescita dei tassi è opportuno passare dal tasso variabile a quello fisso, mentre se si prevede una discesa dei tassi è opportuno passare da un tasso fisso ad un tasso variabile.

È di fondamentale importanza fare previsioni corrette sul futuro andamento del mercato sia al momento della stipula del contratto, per decidere se optare per il tasso fisso o quello variabile, sia successivamente, per monitorare l'andamento del mercato ed eventualmente cogliere l'opportunità di contenere il costo del denaro modificando le condizioni contrattuali per passare dal tasso fisso a quello variabile, o viceversa, coerentemente con le proprie aspettative.



### 3. Il calcolo dei flussi ed il valore di mercato di un IRS

L'interest rate swap è costituito da due serie di flussi di cassa di segno opposto. Per calcolare il valore attuale del contratto è necessario individuare con esattezza tali flussi ed attualizzarli. Dalla differenza tra i due sarà possibile determinare il valore corrente dello swap.

Uno dei due flussi è detto *gamba fissa* ed è costituito da versamenti periodici calcolati ad un tasso fisso; mentre l'altro flusso è detto *gamba variabile* poiché determinato da versamenti periodici calcolati ad un tasso variabile di riferimento.

La cedola della gamba fissa in ogni periodo è il prodotto tra il capitale nozionale, il tasso fisso (a cui è sommato lo spread, se previsto) per il *day count* (solitamente 30/360).

Quando l'IRS è di tipo *amortizing* le cedole vengono calcolate in riferimento al debito residuo del periodo. Quindi la gamba fissa di un IRS con nozionale costante è data da

$$I = C \cdot i \cdot \text{day count} \left( \frac{30}{360} \right)$$

con  $C$  capitale nozionale,  $i$  tasso fisso periodale su base annua e scadenze distribuite su uno scadenario equidistanziato.

Alla data  $\bar{t}$ , con  $t < \bar{t} < t_n$ , ossia intermedia tra la data di stipula e la data di scadenza del contratto il valore attuale della gamba fissa è:

$$V_{GF} = I \cdot \sum_{t_k > \bar{t}} v(\bar{t}, t_k)$$

con  $v(\bar{t}, t_k)$  fattore di sconto valutato in  $\bar{t}$ .

Se si considerano, invece, cedole a tasso fisso riferite ad un mutuo sottostante con capitale decrescente, ossia di tipo *amortizing*, con scadenze equidistanziate: saranno calcolate sulla base di:

$$I_k = D_k \cdot i \cdot \text{day count} \left( \frac{30}{360} \right)$$

con  $D_k$  debito residuo al periodo precedente sulla base del quale deve essere calcolata la cedola corrente.

Il valore di mercato alla data  $\bar{t}$  di tale flusso sarà espresso da:

$$V_{GF} = \sum_{t_k > \bar{t}} I_k \cdot v(\bar{t}, t_k)$$

Per il calcolo della gamba variabile ( $V_{GV}$ ), invece, occorre utilizzare tassi variabili, non noti alla stipula, né alla data di valutazione, agganciati agli indici di riferimento. Questi vengono ricavati, dalla struttura per scadenza quotata dal mercato alla data di valutazione. Si assume, cioè, che i tassi futuri del mercato, che determineranno le future quote di interesse, siano uguali ai tassi a termine impliciti nella struttura a pronti osservata sul mercato alla data  $\bar{t}$ . Ciò non vuol dire che si ha un'ipotesi di evoluzione deterministica (ovvero in condizioni di certezza) della struttura dei tassi di interesse basata sull'uguaglianza tra i tassi a pronti futuri e i corrispondenti tassi a termine, ma piuttosto che alla data  $\bar{t}$  di valutazione il mercato, che incorpora le aspettative degli operatori, valuta i futuri tassi uguali ai tassi a termine impliciti nella struttura a pronti osservata alla data  $\bar{t}$ .

Per calcolare il flusso degli interessi variabili ( $J_k$ ) nel caso di un contratto *swap plain vanilla* indicizzato con spread avremo:

$$J_k = C \cdot [r(t_{k-1}) + \bar{s}] \cdot \frac{Act}{360}$$

con  $r(t_{k-1})$  tasso su base annua rilevato in  $t_{k-1}$  e relativo al periodo  $[t_{k-1}, t_k]$  e  $\bar{s}$  spread riferito all'anno.

Se si effettua la valutazione alla data  $\bar{t}$  avremo:

$$J_k = C \cdot [i(\bar{t}, t_{k-1}, t_k) + \bar{s}] \cdot \frac{Act}{360}$$

con  $i(\bar{t}, t_{k-1}, t_k)$  tasso forward valutato in  $\bar{t}$  riferito al periodo  $[t_{k-1}, t_k]$  su base annua. Occorre sottolineare che se  $\bar{t} = t_{k-1}$  allora  $i(t_{k-1}, t_{k-1}, t_k) = r(t_{k-1})$ , ossia il tasso a pronti  $i(t_{k-1}, t_{k-1}, t_k)$  coincide con il tasso di mercato  $r(t_{k-1})$ .

Nel caso di un titolo *amortizing* avremo:

$$\bar{J}_k = D_k \cdot [i(\bar{t}, t_{k-1}, t_k) + \bar{s}] \cdot \frac{Act}{360}$$

Per valutare, ad una generica data  $\bar{t}$ , un contratto IRS occorre pertanto determinare sulla base della curva dei tassi spot e sulla curva dei rendimenti futuri i tassi impliciti. Una volta determinati i tassi forward sarà possibile calcolare i flussi variabili futuri. La somma del differenziale tra flusso certo e flusso incerto, così determinato, attualizzato per tutte le scadenze determina il valore del contratto alla data in cui si è determinata la curva dei tassi impliciti.

Tale valore al momento della definizione del contratto dovrebbe essere nullo. Valori diversi dallo zero determinano la definizione di un Up-front per riportare il contratto in equilibrio.

Il contratto di un IRS *amortizing index linked* semestrale in  $\bar{t} \in ]t, t_n[$  sarà così determinato:

$$W_{IRS} = \sum_{t_k > \bar{t}} D_k \cdot \left[ i \cdot \frac{180}{360} - i(\bar{t}, t_{k-1}, t_k) \cdot \frac{Act}{360} \right] \cdot v(\bar{t}, t_k)$$

#### 4. Alcune opzioni presenti nei contatti IRS

Spesso i sottoscrittori di un contratto di IRS mettono in atto strategie protettive per immunizzarsi dal rischio di un ribasso troppo consistente dei tassi o di un rialzo troppo oneroso di quest'ultimo. A questo scopo si combinano il contratto di IRS con opzioni di tipo floor o di tipo cap.

L'opzione cap è una opzione che fissa un tetto massimo all'oscillazione del tasso variabile verso l'alto, infatti per tassi al di sopra della soglia stabilita si attiva l'opzione e quindi ci si protegge dall'aumento dei tassi. L'opzione floor, invece, è un'opzione che fissa invece una base all'oscillazione del tasso variabile che protegge dal ribasso dei tassi. La composizione tra l'acquisto di un'opzione cap e la vendita di un'opzione floor genera un contratto collar, grazie a quest'ultimo si fissa un range entro cui potrà oscillare il tasso variabile.

In un contratto collar il tasso è definito dalle relazioni:

$$j(t_{k-1}, t_k) = \begin{cases} s_1 + \bar{s} & \text{se } r(t_{k-1}) \leq s_1 \\ r(t_{k-1}) + \bar{s} & \text{se } s_1 < r(t_{k-1}) < s_2 \\ s_2 + \bar{s} & \text{se } r(t_{k-1}) \geq s_2 \end{cases}$$

ossia:

$$j(t_{k-1}, t_k) = \bar{s} + \max\{s_1; r(t_{k-1})\} - \max\{0; (r(t_{k-1}) - s_2)\}$$

Cioè:

$$j(t_{k-1}, t_k) = \bar{s} + s_1 + \max\{0; [r(t_{k-1}) - s_1]\} - \max\{0; [r(t_{k-1}) - s_2]\}$$

Utilizzando questa sintassi si può così definire la cedola di un IRS con collar come:

$$J_k = D_k \cdot [\bar{s} + s_1 + \max\{0; (r(t_{k-1}) - s_1)\} - \max\{0; (r(t_{k-1}) - s_2)\}]$$

Nel caso di debito decrescente, ovviamente nel caso di nozionale fisso  $D_k = C$ .

Ponendoci in  $\bar{t}$ , e utilizzando la curva dei tassi forward avremo:

$$\bar{J}_k = D_k \left[ \bar{s} + s_1 + \max\{0; (i(\bar{t}, t_{k-1}, t_k) - s_1)\} - \max\{0; (i(\bar{t}, t_{k-1}, t_k) - s_2)\} \right] \frac{Act}{360}$$

## 5. Un caso di studio

Si supponga di analizzare uno specifico contratto che presenta le caratteristiche contrattuali riportate nella tabella seguente. Si tratta di un contratto di IRS con collar che presenta le stesse caratteristiche contrattuali sottoscritte da alcune Amministrazioni locali del Salento, si è comunque preferito modificare alcune caratteristiche contrattuali per rispettare la riservatezza dell'Ente.

Capitale nozionale	Euro 3.000.000,00 (in ammortamento a quote costanti)
Data di negoziazione	29/06/07
Data iniziale	31/12/06
Scadenza contratto	31/12/16
Scadenza periodica del contratto	Semestrale
Tasso parametro A	Al 31/12/07 il 3,4500% (compreso spread) Al 30/06/08 il 3,4500% (compreso spread) Al 31/12/08 il 3,4500% (compreso spread) Al 30/06/09 il 3,4500% (compreso spread) Dal 01/07/09 - il 3,50% + spread se Euribor a 6 mesi è minore o uguale al 3,50%; - Euribor al 6 mesi + spread se Euribor a 6 mesi è compreso tra il 3,50% e il 5,80%; - il 5,80% + spread se Euribor a 6 mesi è superiore o uguale al 5,80%.
Base tasso parametro A	Giorni effettivi/360
Spread tasso parametro A	0,36%
Debitore tasso parametro A	Ente Locale
Base tasso parametro B	30/360
Rilevazione tasso parametro B	Ultimo giorno lavorativo del periodo precedente.
Debitore tasso parametro B	Banca
Tasso parametro B	4,4%
Up-front	18.006,06 (a favore dell'Ente locale)

### 5.1 Descrizione dell'operazione finanziaria

La struttura del contratto con scadenza al 31 dicembre 2016 ed un importo nozionale di riferimento di Euro 3.000.000,00 (soggetto ad un piano di ammortamento con quota capitale costante), prevedeva che

L'Ente locale versi rate semestrali (30/06 e 31/12 di ogni anno) da calcolare, a partire dal 01/07/2009 in ragione di un tasso di interesse parametrato all'Euribor 6M maggiorato di uno spread di 36 punti base, purché lo stesso parametro non sia inferiore al 3,50% o superiore al 5,80%. Il superamento del tasso cap (5,80%) comporta il pagamento di interessi calcolati al tasso del 6,16% (tasso cap + spread), mentre un tasso inferiore del tasso floor (3,50%) comportata il pagamento di interessi calcolati al tasso del 3,86% (tasso floor + spread). Dal momento della stipula e sino al 30 giugno 2009 si prevede che l'Ente locale versi cedole ad un tasso fisso del 3,45%.

Il tasso debitorio  $j(t_{k-1}, t_k)$  per l'Ente locale, pertanto, è definito dalle relazioni:

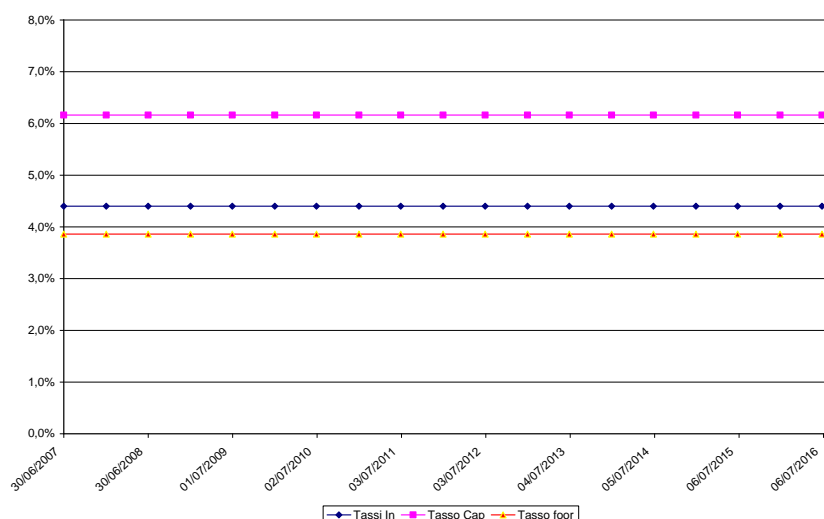
$$j(t_{k-1}, t_k) = \begin{cases} 3,5\% + 0,36\% & \text{se } r(t_{k-1}) \leq 3,5\% \\ r(t_{k-1}) + 0,36\% & \text{se } 3,5\% < r(t_{k-1}) < 5,8\% \\ 5,8\% + 0,36\% & \text{se } r(t_{k-1}) \geq 5,8\% \end{cases}$$

Per converso la controparte, la Banca, si impegna a versare rate calcolate sul capitale nozionale in ammortizing in ragione di un tasso costante fissato al 4,4%.

L'opzione collar ha la finalità di contenere il rischio di rialzo dei tassi d'interesse, infatti, permette di limitare il tasso massimo, rinunciando al contempo a beneficiare di un eventuale ribasso dei tassi d'interesse, poiché si è sottoscritta una soglia minima (floor).

La figura seguente riporta:

- I tassi in, ossia i tassi che la Banca si impegna a pagare, che sono pari a quelli che l'Ente locale avrebbe dovuto pagare per tutta la durata del contratto sui debiti sottostanti allo swap;
- Il tasso floor comprensivo dello spread, che è il tasso minimo che l'Ente si è impegnato a versare anche in caso di ribasso consistente dei tassi;
- Il tasso cap comprensivo dello spread, ossia il tasso il tasso massimo che si potrà richiedere all'Ente di versare anche per picchi più consistente dei tassi.



L'area compresa tra i tassi in ed il tasso floor complessivo dello spread è l'area di guadagno per il Comune, infatti se l'Euribor a 6M si attesta in questa zona il contratto genera dei differenziali positivi, mentre l'area compresa tra il tasso cap comprensivo dello spread ed i tassi in è l'area di guadagno per la Banca.

Nel complesso l'operazione presenta, come si evince dalla rappresentazione grafica, un limitato vantaggio per l'Ente locale, che beneficia di un contenuto risparmio in termini di interesse per valori del parametro di riferimento inferiori al 3,5% (54 punti base), ma di un consistente peggioramento in caso di un aumento dei tassi (176 punti base).

Il contratto prevede a favore dell'Ente locale un Up-front di Euro 13.499,50. Se il contratto avesse previsto uno spread del 0,1399294% il valore della gamba fissa e della banca variabile sarebbero stati uguali e pertanto l'Up-front sarebbe stato nullo.

Il contratto prevede che il tasso a debito per l'Ente locale per i primi due anni, ovvero le prime quattro scadenze sia pari al 3,45%. Questa condizione tipica di molti contratti di interest rate swap ha il solo scopo di garantire entrate certe nei due anni successivi alla stipula del contratto e procrastinare l'aleatorietà dello stesso. Infatti nei due anni successivi alla stipula l'Ente locale paga un tasso del 3,45% ed incassa un tasso del 4,4%.

Nella tabella 2 in allegato sono stati riportati tutti i calcoli necessari alla valutazione del contratto alla data della stipula. La struttura per scadenza dei tassi forward è stata calcolata seguendo la procedura indicata nel paragrafo n. 3.

## 5.2 Valutazione dell'operazione finanziaria al 15/09/2011

Pare opportuna una premessa metodologica che consente di distinguere due prospettive di analisi. La prima attiene infatti ad una valutazione storica della successione di flussi finanziari che si sono verificati per effetto del contratto posto in essere (Up-front e flussi periodici), mentre la seconda attiene ad una valutazione prospettica dei flussi finanziari attesi traducibili nel valore del mark to market, ovvero del controvalore (positivo o negativo) del contratto alla data di valutazione dello stesso.

La distinzione tra flussi di cassa realizzati e flussi di cassa prospettici (impliciti nella quotazione del mark to market), è determinante per valutare coerentemente l'operazione finanziaria. Non è possibile infatti considerare conveniente un contratto semplicemente perché lo stesso ha generato in passato dei flussi di cassa positivi, dal momento che un giudizio più completo deve considerare anche il valore dei flussi finanziari che si avranno (o meglio si potrebbero avere) in futuro. Una valutazione della convenienza del contratto deve perciò scaturire dallo scenario passato e quello futuro giudicato attendibile.

Fatte queste brevi premesse il contratto derivato stipulato ha generato solo flussi positivi per l'Ente locale, per un totale di Euro 55.746,16, oltre l'Up-front. Nella tabella n. 1 sono riportati i calcoli dei flussi finanziari generati dal contratto.

Tabella 1 Calcolo dei flussi finanziari generati dal contratto di IRS con collar sino al 31/12/2011

Scadenza	Capitale	Euribor	Tasso applicato	Act/360	Cedola Banca	Cedola Ente Locale	Differenza cedolare
30/06/2007	3.000.000						
31/12/2007	2.850.000	## ##	3,450%	0,511	62.700,00	50.255,00	12.445,00
30/06/2008	2.700.000	## ##	3,450%	0,506	59.400,00	47.092,50	12.307,50
31/12/2008	2.550.000	## ##	3,450%	0,511	56.100,00	44.965,00	11.135,00
30/06/2009	2.400.000	1,322%	3,450%	0,503	52.800,00	41.630,00	11.170,00
31/12/2009	2.250.000	0,994%	3,860%	0,511	49.500,00	47.339,04	2.160,96
30/06/2010	2.100.000	1,041%	3,860%	0,503	46.200,00	43.685,55	2.514,45
31/12/2010	1.950.000	1,227%	3,860%	0,511	42.900,00	41.421,66	1.478,34
30/06/2011	1.800.000	1,788%	3,860%	0,503	39.600,00	37.860,81	1.739,19
31/12/2011	1.650.000	## ##	3,860%	0,511	36.300,00	35.504,28	795,72
						Totale	55.746,16

Tabella 2: Calcolo dei flussi cedolari stimati e del MTM del contratto alla data della stipula

Data di valutazione			Floor	3,500%	Tasso Banca	4,400%			
29/06/07			Spread	0,360%	Banca 30/360	0,5			
			Cap	5,800%					
Data Pagamento cedola	Capitale da rimborsare	Fattore di sconto	Tasso a termine su base annua	Tasso applicato	Act/360	Cedola Banca	Cedola EL	Differenza tra le Cedole	Diff. tra Cedole attualizzate
30/06/2007	3.000.000,00	1,0000000000							
31/12/2007	2.850.000,00	0,9785936047	4,423%	<b>3,450%</b>	0,511	66.000,00	52.900,00	13.100,00	12.819,58
30/06/2008	2.700.000,00	0,9560686457	4,595%	<b>3,450%</b>	0,506	62.700,00	49.708,75	12.991,25	12.420,53
31/12/2008	2.550.000,00	0,9340641693	4,652%	<b>3,450%</b>	0,511	59.400,00	47.610,00	11.790,00	11.012,62
30/06/2009	2.400.000,00	0,9120668617	4,710%	<b>3,450%</b>	0,503	56.100,00	44.231,88	11.868,13	10.824,52
31/12/2009	2.250.000,00	0,8909829465	4,725%	5,085%	0,511	52.800,00	62.381,54	<b>-9.581,54</b>	<b>-8.536,99</b>
30/06/2010	2.100.000,00	0,8702550551	4,741%	5,101%	0,503	49.500,00	57.708,06	<b>-8.208,06</b>	<b>-7.143,11</b>
31/12/2010	1.950.000,00	0,8501053634	4,749%	5,109%	0,511	46.200,00	54.838,56	<b>-8.638,56</b>	<b>-7.343,68</b>
30/06/2011	1.800.000,00	0,8303594673	4,757%	5,117%	0,503	42.900,00	50.168,89	<b>-7.268,89</b>	<b>-6.035,80</b>
31/12/2011	1.650.000,00	0,8110020825	4,765%	5,125%	0,511	39.600,00	47.152,49	<b>-7.552,49</b>	<b>-6.125,09</b>
30/06/2012	1.500.000,00	0,7920342001	4,773%	5,133%	0,506	36.300,00	42.821,47	<b>-6.521,47</b>	<b>-5.165,22</b>
31/12/2012	1.350.000,00	0,7734413221	4,782%	5,142%	0,511	33.000,00	39.420,61	<b>-6.420,61</b>	<b>-4.965,97</b>
30/06/2013	1.200.000,00	0,7552245595	4,790%	5,150%	0,503	29.700,00	34.956,95	<b>-5.256,95</b>	<b>-3.970,18</b>
31/12/2013	1.050.000,00	0,7373693413	4,799%	5,159%	0,511	26.400,00	31.640,39	<b>-5.240,39</b>	<b>-3.864,10</b>
30/06/2014	900.000,00	0,7198774600	4,807%	5,167%	0,503	23.100,00	27.279,16	<b>-4.179,16</b>	<b>-3.008,49</b>
31/12/2014	750.000,00	0,7026591883	4,818%	5,178%	0,511	19.800,00	23.816,77	<b>-4.016,77</b>	<b>-2.822,42</b>
30/06/2015	600.000,00	0,6857858388	4,828%	5,188%	0,503	16.500,00	19.562,30	<b>-3.062,30</b>	<b>-2.100,08</b>
31/12/2015	450.000,00	0,6692414993	4,838%	5,198%	0,511	13.200,00	15.941,23	<b>-2.741,23</b>	<b>-1.834,54</b>
30/06/2016	300.000,00	0,6530313421	4,849%	5,209%	0,506	9.900,00	11.849,70	<b>-1.949,70</b>	<b>-1.273,22</b>
31/12/2016	150.000,00	0,6371020591	4,860%	5,220%	0,511	6.600,00	8.003,90	<b>-1.403,90</b>	<b>-894,43</b>
<b>TOTALE</b>								<b>-18.006,06</b>	

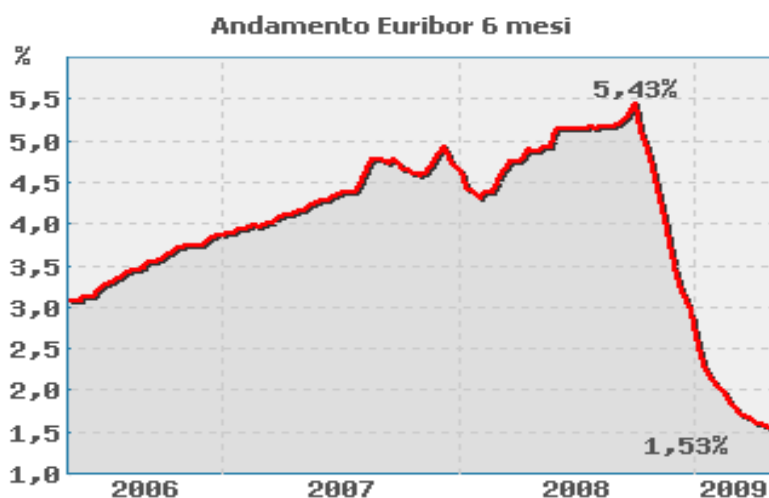
Tabella 3: Calcolo dei flussi cedolari stimati e del MTM del contratto alla data del 15/09/2011

<b>Data di valutazione</b>	<b>Floor</b>	<b>3,500%</b>	<b>Tasso Banca</b>	<b>4,400%</b>
<b>15/09/11</b>	<b>Spread</b>	<b>0,360%</b>	<b>Banca 30/360</b>	<b>0,5</b>
	<b>Cap</b>	<b>5,800%</b>		

Data Pagamento cedola	Capitale da rimborsare	Fattore di sconto	Tasso a termine su base annua	Tasso applicato	Act/360	Cedola Banca	Cedola EL	Differenza tra le Cedole	Diff. tra Cedole attualizzate
30/06/2011	1.800.000,00								
15/09/2011		1,0000000000							
31/12/2011	1.650.000,00	0,9953786897	<b>1,770%</b>	3,860%	0,511	39.600,00	32.552,67	7.047,33	7.014,77
30/06/2012	1.500.000,00	0,9847761393	1,107%	3,860%	0,506	36.300,00	29.271,67	7.028,33	6.921,33
31/12/2012	1.350.000,00	0,9793681448	1,535%	3,860%	0,511	33.000,00	26.634,00	6.366,00	6.234,66
30/06/2013	1.200.000,00	0,9719374878	1,717%	3,860%	0,503	29.700,00	23.288,67	6.411,33	6.231,42
31/12/2013	1.050.000,00	0,9637015430	1,967%	3,860%	0,511	26.400,00	20.715,33	5.684,67	5.478,32
30/06/2014	900.000,00	0,9543603937	2,231%	3,860%	0,503	23.100,00	17.466,50	5.633,50	5.376,39
31/12/2014	750.000,00	0,9438888631	2,512%	3,860%	0,511	19.800,00	14.796,67	5.003,33	4.722,59
30/06/2015	600.000,00	0,9322531377	2,713%	3,860%	0,503	16.500,00	11.644,33	4.855,67	4.526,71
31/12/2015	450.000,00	0,9198578374	2,915%	3,860%	0,511	13.200,00	8.878,00	4.322,00	3.975,63
30/06/2016	300.000,00	0,9067380261	3,021%	3,860%	0,506	9.900,00	5.854,33	4.045,67	3.668,36
31/12/2016	150.000,00	0,8933443961	3,131%	3,860%	0,511	6.600,00	2.959,33	3.640,67	3.252,37
<b>TOTALE</b>									<b>57.402,54</b>

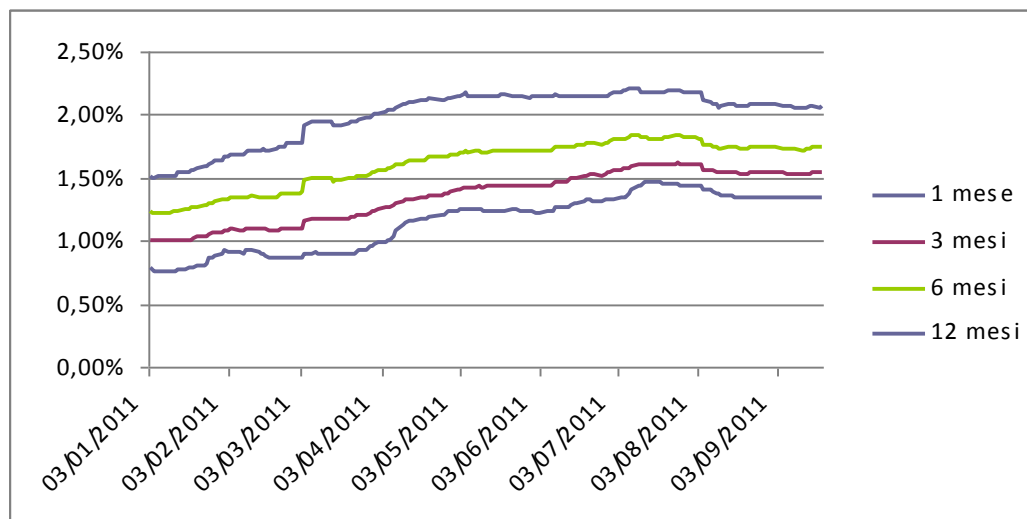
L'effetto finanziario favorevole prodotto sui bilanci dell'Ente Locale deve essere ovviamente valutato alla luce del valore economico degli impegni assunti dal Comune stesso nei confronti della Banca. Il drastico cambiamento dello scenario macroeconomico intervenuto nel corso del 2008 e le forti tensioni sui tassi d'interesse (vedi grafico seguente) registrate nel corso degli ultimi anni se, da un lato, sino al 30/06/2009 non hanno prodotto per l'Ente locale nessun effetto finanziario immediato a causa del tasso bloccato al 3,95%, dall'altro hanno modificato gli elementi che portano alla quantificazione del mark to market. Infatti se il contratto alla data di stipula (30/06/2007) aveva un valore di Euro 18.006,06 (l'Up-front) a favore della Banca, alla data del 15/09/2011 la quotazione è decisamente migliorata e risulta pari a Euro 57.402,54 a favore dell'Ente locale (vedi tabella n. 3).

Nel grafico seguente è rappresentato l'andamento dell'Euribor a 6 mesi, dal quale si evince che il contratto ha beneficiato del tasso bloccato tra al 3,95 nel periodo in cui l'Euribor è stato superiore al tasso Banca, mentre successivamente al 30/06/2009 l'Euribor è sempre stato inferiore al tasso Banca. Pertanto sino alla fine dell'anno 2011 il contratto ha generato flussi positivi per l'Ente locale.



Ma in una valutazione coerente che prenda in considerazione tutte le variabili macroeconomiche, esogene al sistema Banca - Ente locale, non si può prescindere dal considerare gli eventi degli ultimi

mesi che lasciano intravedere, soprattutto alla luce del declassamento di S&P del rating dei titoli di Stato Italiano e del rischio di default della Grecia, scenari di instabilità finanziaria e di crisi monetaria non solo dei Paesi direttamente coinvolti, ma di tutta l'Eurozona. Nel grafico seguente sono rappresentati i valori dell'Euribor a 1M; 3M, 6M e 12M, dai quali si evince un trend crescente.



La quantificazione del mark to market non discende ovviamente dalla conoscenza certa del livello dei tassi d'interesse futuri che andranno a definire i flussi finanziari sino al termine del contratto, ma dal ricorso alla struttura a termine dei tassi d'interesse (curva forward implicita) che consente di approssimare quali siano le aspettative di tasso incorporate nell'attuale configurazione dei tassi d'interesse sulle diverse scadenze. Il valore dei flussi futuri e il conseguente valore di estinzione anticipata del contratto sono riferibili esclusivamente alla situazione rilevata alla data del 15/09/2011 e quindi suscettibile di variazioni giornaliere anche considerevoli derivanti dalle oscillazioni dei tassi di mercato di riferimento e dalla volatilità dei mercati stessi. Diverse condizioni di mercato potrebbero generare pertanto valutazioni e considerazioni difformi rispetto alle conclusioni in essere. Occorre inoltre considerare che il mark to market è una grandezza che dipende dal modello utilizzato per la sua valutazione e dalla scelta dei parametri e dalle stime effettuate sull'andamento futuro del mercato, cioè dalle informazioni di cui si dispone al momento della valutazione.

Vale la pena ricordare che L'Ente locale non beneficia di un ulteriore ribasso dei tassi d'interesse avendo con l'opzione collar fissato una barriera che blocca l'entità minima dei tassi passivi, mentre è esposto al progressivo aumento dei flussi negativi in presenza di un rialzo dei tassi sino al raggiungimento della barriera cap, che farebbe entrare in vigore l'opzione collar. Ne discende che sebbene l'operazione di conversione dei debiti da tasso fisso a tasso variabile si stia sviluppando positivamente per il Comune, l'acquisto dell'opzione collar sta in parte penalizzando l'Ente locale, perché non permette al tasso parametrato di scendere sotto il 3,75%.



## 6. Conclusioni

Questo lavoro si è proposto di fornire un contributo che fosse d'aiuto nell'operare scelte in ambito finanziario avvalendosi di strumenti di finanza derivata per mettere in atto strategie di liability management a fine di hedging.

In questo ambito, di sicuro interesse, soprattutto alla luce delle ricadute economiche e sociali che l'utilizzo di contratti IRS da parte di Enti pubblici comporta su tutta la comunità territoriale, è necessario aver ben chiari gli strumenti da utilizzare e gli obiettivi da perseguire, poiché occorre compiere scelte oculate che non espongano l'amministrazione a rischi e costi troppo onerosi.

Tuttavia, pur analizzando dettagliatamente questi strumenti finanziari, non è comunque possibile eliminare del tutto quell'aleatorietà insita nel contratto stesso ma, operando valutazioni coerenti con le aspettative del mercato, è possibile contenere il rischio di rialzi e di ribassi troppo onerosi del tasso d'interesse.

E', inoltre, possibile come è stato illustrato, in questo breve contributo, mettere in atto strategie di copertura associando opzioni cap e floor al contratto IRS per contenere l'oscillazione del tasso variabile in un range ritenuto "soportabile" dai bilanci dell'Ente (ed altrettanto conveniente da parte della Banca).

Come nel caso di studio, può accadere tuttavia se da un lato la definizione del collar permette di avere perdite contenute, comprime e mortifica le possibilità di guadagno, nel rispetto dell'ovvio principio che maggiori rischi debbano essere bilanciati da migliori opportunità di guadagno.

Talvolta accade però che la determinazione di una soglia floor troppo elevata rispetto a quelli che sono i rendimenti correnti non consente di approfittare del livello contenuto dei tassi di mercato e se a questo si associa un tetto del collar altrettanto elevato ciò comporta un'onerosità del contratto maggiore rispetto a quanto il mercato richiederebbe.

Alla luce di tali considerazioni, si è avvertita la necessità di fornire un contributo che fosse spunto per una maggiore riflessione ed analisi trattando contratti di questo genere e fornisse al contempo strumenti tecnico-matematici per valutare correttamente un contratto di IRS.

## Bibliografia essenziale

ANZILLI L., D'AGOSTINO G., GUGLIELMI A., SCOLOZZI D., *Liability management negli Enti locali. L'esperienza nel Consorzio dei Comuni del Nord Salento - Valle della Cupa*, Edizioni Publigrac, 2010.

BRIGO D., MERCURIO F., *Interest rate models – Theory and Practice*, New York, Springer – Verlag Berlin, 2006.

CASTELLANI G., DE FELICE M., MORIONI F., *Manuale di finanza. Teoria del portafoglio e mercato azionario*, Bologna, Il Mulino, 2005.

COMMISSIONE VI FINANZE, *Le problematiche relative agli strumenti finanziari derivati*, Camera dei Deputati, Roma, 2007.

D'AGOSTINO G., GUGLIELMI A., Il modello matematico sottostante alla curva dei rendimenti della BCE, *Matematicamente.it Magazine*, (15) Maggio 2011, pp. 5-11.

HULL J. C., *Opzioni Futures e altri derivati*, Milano, Prentice – Hall International, 2008.

MENEGUZZO M., (a cura di), *Manuale di finanza innovativa per le amministrazioni pubbliche*. Soveria Mannelli, Rubettino Editore, 2008.

MENONCIN G., *Misurare e gestire il rischio finanziario*, Milano, Springer – Verlag Italia, 2009.

SACCOMANNI F., Le problematiche relative agli strumenti finanziari derivati, *Atti della 6<sup>a</sup> Commissione permanente (Finanze)*, 2007.

SCIANDRA L., I derivati negli Enti Locali: origine, dimensioni e criticità, *Rapporto ISAE – Finanza Pubblica*, 2008, pagg. 94- 124.

SPECA M., *Gli Interest rate swap negli Enti locali: rischi, opportunità e nuovo profili giuridico*, Società italiana di Economia Pubblica, 2002, pagg. 771- 821.

## 166. Lo scaffale dei libri

### “L'uomo che vide l'infinito – La vita breve di Srinivasa Ramanujan, genio della matematica” di Robert Kanigel

Nato il 22 dicembre 1887 in India, Srinivasa Ramanujan scoprì la matematica nel 1903, con il libro di matematica di Carr, un matematico mediocre, che aveva raccolto gli appunti delle sue lezioni. Ramanujan fu irretito dalla matematica pura e perse interesse per tutto il resto: tranne che in matematica, andava male in tutte le materie e per questo fu cacciato dalla scuola; senza un lavoro, passava il suo tempo a bighellonare, così ogni tanto pativa la fame. Cominciò a riportare i suoi appunti in alcuni quaderni, che erano il frutto del suo duro lavoro, ma anche dell'assenza di convenzioni nella quale si trovò a crescere, visto il suo insuccesso accademico.

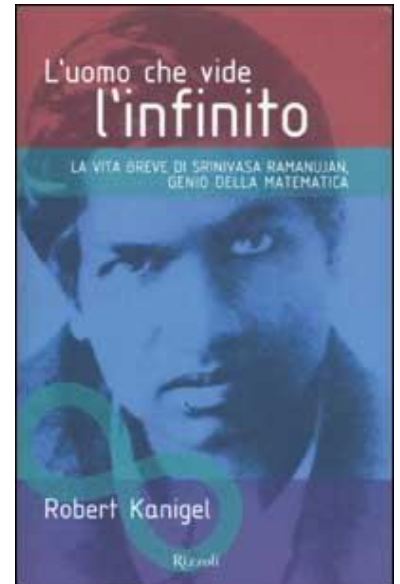
Verso la fine del 1908, dopo aver sopportato a lungo le sue scelte, i genitori gli organizzarono un matrimonio combinato. Ramanujan abbandonò le sue ambizioni di fare il matematico: voleva solo un lavoro e la possibilità di un futuro, di una nuova vita.

A diciotto mesi dalle nozze, cominciò a cercare di vendere il suo lavoro, i suoi quaderni di appunti. Pubblicò il suo primo articolo sul Journal, riguardante le serie: dava dimostrazioni abbozzate e incomplete e trovava

collegamenti tra cose che sembravano senza rapporto, ma con questa pubblicazione stava cominciando a farsi notare. Così scrisse ad alcuni matematici europei: Baker e Hobson diedero una risposta negativa e il 16 gennaio del 1913, Ramanujan scrisse a G.H. Hardy che, più giovane degli altri due, si lasciò colpire dalla stranezza dei teoremi del matematico indiano. Hardy non sapeva che fare del lavoro di Ramanujan, ma il suo amore per ciò che era inaspettato e non ortodosso, la sua apertura alle novità, lo fecero decidere per una collaborazione. Rispose così con una lettera prodiga di incoraggiamenti e la carriera di Ramanujan fece un balzo in avanti: ricevette una borsa di studio dal Presidency College di Madras che gli permise di dedicarsi esclusivamente alla matematica. Doveva semplicemente presentare, ogni tre mesi, un resoconto dei progressi fatti.

Raggiunto Hardy a Cambridge, Ramanujan si mostrò molto produttivo e felice: la sua originalità non gli permetteva formalismi, ma la sua intuizione rischiava di minare la sua crescita in campo matematico. Era stata una fortuna per Ramanujan finire tra le mani di Hardy, visto che questi riuscì a guidarlo senza bloccare il suo entusiasmo. Ramanujan non aveva doveri ufficiali nel college e poteva fare quello che voleva: si immergeva nella matematica senza preoccupazioni né finanziarie né familiari.

Agli inizi del 1916, cominciò per lui un periodo di forte tensione nervosa: la guerra, la nostalgia della famiglia e della vita in India, la consapevolezza di essere sempre e comunque uno straniero tra gli inglesi, ebbero serie conseguenze psicologiche. Neppure Hardy riuscì a impedire che Ramanujan cadesse in una crisi ancora più profonda: l'unica cosa in comune tra i due era la matematica e l'inglese non arrivò mai a conoscere veramente Ramanujan. Il lavoro intenso – a volte lavorava per trenta ore consecutive e poi dormiva per venti ore – la mancanza di regolarità, equilibrio e riposo sconvolsero la sua vita: al suo terzo anno in Inghilterra, la malattia sembrava in attesa di insorgere. La



caduta in una profonda depressione spinse Ramanujan a gettarsi sui binari davanti a un convoglio in arrivo: una guardia lo vide e lo salvò in extremis. Dopo questo gesto, consapevole dell'importanza delle onorificenze accademiche per l'indiano, Hardy ottenne la sua nomina alla Royal Society, ma non bastò.

Malato, tornò in India nell'aprile del 1919: lo attendeva un'epidemia di influenza, che avrebbe ucciso milioni di persone ed egli stesso aveva uno stato di salute alquanto precario. Ramanujan lavorò ancora alla matematica, fino a poco prima di morire: nel suo ultimo anno di vita, le sue capacità intellettive si fecero più acute e brillanti. Morì il 26 aprile del 1920.

Daniela Molinari

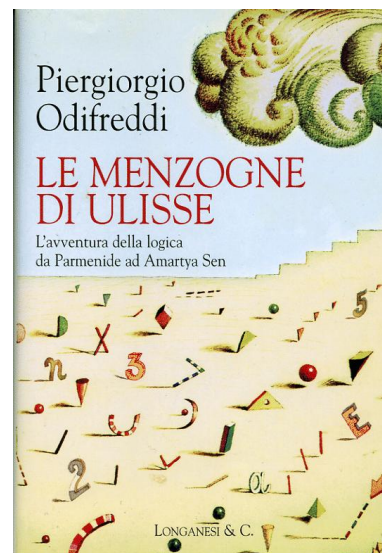
## “Le menzogne di Ulisse – L'avventura della logica da Parmenide ad Amartya Sen” di Piergiorgio Odifreddi

Il libro si presenta come una storia della filosofia e della matematica insieme, in considerazione del fatto che da Platone a Leibniz “umanesimo e scienza sono state considerate due facce complementari di una stessa medaglia”. Odifreddi ci propone alcune vicende intellettuali della matematica come se fossero semplici storie: le avventure dei maggiori logici e le loro massime conquiste intellettuali.

La logica è lo studio del pensiero come esso si esprime attraverso il linguaggio e deve guidarci nella scoperta della verità; essa nasce nel momento in cui il pensiero umano separa il vero dal falso. Il primo a parlare della logica in tal senso fu Parmenide e le sue idee vennero poi sviluppate da Platone, ma soprattutto da Aristotele. La logica di Aristotele – nota come “classica” – non fu messa in discussione fino al Novecento, a dimostrazione di quanto fosse avanti rispetto ai tempi: essa “giunse a completa maturità matematica, superando finalmente i suoi infantili e paradossali vagiti metafisici”. In contrapposizione alla logica aristotelica, si sviluppò quella stoica: Aristotele e Crisippo, esponente più importante della scuola stoica, possono essere considerati, a pari merito, i massimi logici dell'antichità. Quest'ultimo forgiò gli strumenti essenziali della logica preposizionale e diede contributi essenziali alla matematica.

Nel 1274, Lullo abbozzò un'idea che solo nel Novecento si rivelerà in tutta la sua potenza: scomporre le nozioni linguistiche e assegnare a queste dei numeri. Voleva, in altre parole, tradurre il linguaggio naturale in quello numerico: aveva addirittura progettato un prototipo di meccanismo per automatizzare il pensiero, un lontano precursore dei moderni calcolatori. Il lavoro di Lullo influenzò Leibniz, che nel 1666 lo citò nella sua *Ars combinatoria*, nella quale si proponeva di ridurre il pensiero all'aritmetica. In quest'opera, troviamo anche un abbozzo dell'aritmetica binaria, il linguaggio ufficiale dell'informatica.

George Boole fu il primo a capire il vero segreto dell'aritmetica binaria. Modesto professore, riuscì a far uscire la logica dalla filosofia, facendola entrare nel campo delle scienze: “Dopo il terremoto prodotto da Boole, la logica ha quindi cessato di essere un'occupazione per soli filosofi, psicologi e linguisti, com'era stata fino a metà Ottocento e ha invaso gli istituti e le facoltà di matematica, di informatica, di ingegneria e di scienze cognitive”. Compì l'analisi algebrica della logica sillogistica di Aristotele e di quella preposizionale di Crisippo, riconoscendo la nascosta complementarità dei due approcci. L'idea di Boole era molto semplice: le problematiche della logica preposizionale venivano ridotte a un semplice e



banale calcolo. L'algebra di Boole divenne la base, nel 1938, per l'ingegnere Claude Shannon, della teoria dell'informazione, visto che ogni cosa venne tradotta in termini di circuiti elettrici o elettronici.

Agli inizi del Novecento, Gottlob Frege era convinto di poter fondare l'intera matematica sulla logica, ma una lettera di Bertrand Russell mise in evidenza una contraddizione, che determinò la fine delle tesi di Frege e il fallimento della pubblicazione del suo lavoro. Nel 1921, Wittgenstein ritenne di aver realizzato la soluzione finale del problema logico: per lui il linguaggio era riducibile alla logica proposizionale.

Per la geometria, la negazione del postulato delle parallele, nella prima metà dell'Ottocento, da parte di Nikolaj Lobačevskij e János Bolyai, fornì una risposta alternativa a quella euclidea, ma al tempo stesso fece perdere a questa branca della matematica parte della sua credibilità. Hilbert propose di ritrovare la fiducia mediante una riduzione della geometria all'analisi, ovvero alla teoria dei numeri reali. Il nuovo stile fu applicato non solo alla geometria, ma a tutte le branche della matematica, logica compresa, per la quale il maggiore problema divenne quello della completezza. Gödel e Turing dimostreranno l'irrealizzabilità di questo programma. Gödel preferì affrontare di petto le principali questioni fondazionali della logica e della matematica: il suo lavoro è considerato il contributo più importante che la logica matematica abbia mai ricevuto, egli la cambiò per sempre con i suoi risultati, riuscendo a raggiungere profondità inimmaginabili in precedenza. Nella sua tesi di dottorato del 1931 scoprì che non era possibile estendere il teorema di completezza alla matematica: nel sistema ci sono affermazioni indecidibili. In altre parole, i teoremi di incompletezza dimostrano che la matematica non è riducibile alla logica.

Alan Turing, nella sua tesi di laurea, aveva concepito il "calcolatore" con tecniche di progettazione uguali a quelle usate da Gödel per i suoi teoremi di incompletezza. Sfruttò l'analogia tra i sistemi matematici e i programmi informatici per trasformare la formula non dimostrabile di Gödel in un'operazione non calcolabile, il problema della fermata, scoprendo l'ind decidibilità della logica. Il teorema di indecidibilità esclude la possibilità che ci sia un meccanismo in grado di distinguere la verità dalla falsità così come il teorema di incompletezza esclude la possibilità di dimostrare tutte le verità in matematica.

Daniela Molinari

**MAGAZINE**  
**MATEMATICAMENTE.IT** *Rivista trimestrale di matematica,  
per curiosi e appassionati  
distribuita gratuitamente sul sito*

**Anno 5 Numero 16 DICEMBRE 2011**

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it