

“Assonanze amazzoniche”, di Renato Centonze

NEWS – LA MATEMATICA È DIFFICILE? –

UN MODELLO PER LE CONCHIGLIE – LATITUDINE E LONGITUDINE: COME MISURARLE – PREVISIONI SUL PREZZO DEL PETROLIO – LA PALESTRA DELLA MATEMATICA – MATEMATICA D’OGGI: LA TEORIA DEI GIOCHI – LA FORMULA ... DI EULERO – LO SCAFFALE DEI LIBRI – RECEN ... SITI – RECEN...SOFT - GIOCHI MATEMATICI – CRUCIVERBA MATEMATICO

Sommario

News <i>di Andrea Vitiello</i>	Pag. 3
La matematica è difficile? <i>di Luca Lussardi</i>	Pag. 8
Un modello per le conchiglie <i>di Giovanni Lucca</i>	Pag. 11
Latitudine e longitudine: come misurarle nel cortile di casa <i>di Diego Alberto</i>	Pag. 27
Previsioni sul prezzo del petrolio <i>di Antonello Urso</i>	Pag. 33
La palestra della matematica <i>di Luca Caridà</i>	Pag. 38
Matematica d'oggi: la teoria dei giochi <i>di Fioravante Patrone</i>	Pag. 40
La formula... di Eulero <i>di Flavio Cimolin</i>	Pag. 43
Lo scaffale dei libri <i>di Antonio Bernardo</i>	Pag. 47
Recen... siti <i>di Flavio Cimolin</i>	Pag. 51
Recen... soft <i>di Luca Barletta</i>	Pag. 52
Giochi matematici <i>di Luciano Sarra</i>	Pag. 57
Il cruciverba matematico <i>di Antonio Bernardo</i>	Pag. 58

Editoriale



Sono passati sette anni da quando il sito *www.matematicamente.it* si è affacciato timidamente sul web alla ricerca di una sua identità.

Uno dei temi di fondo che mi sono posto sin dalle prime pagine pubblicate è stato quello di capire cosa potesse essere un sito di matematica: un'enciclopedia della matematica, un formulario, un supporto alla didattica in classe, una raccolta delle migliori pratiche del lavoro creativo di insegnanti creativi, uno spazio per la cultura matematica che a scuola viene trascurata a vantaggio delle tecniche di calcolo, una comunità che, collaborativamente e alla pari, cerca di chiarirsi cosa sia la matematica, una rivista *online* che dà spazio a chi ha voglia di fare piccoli studi per passione.

In questi anni ho cercato di seguire tutte queste piste senza tralasciarne alcuna, e ho cercato di accogliere le esigenze e le curiosità dei visitatori, nonché gli interessi e le passioni dei collaboratori che man mano si sono aggregati.

Il momento mi è sembrato maturo per fare quest'ulteriore esperienza: una rivista *online* molto simile a una cartacea. L'obiettivo è spingere ancora più avanti lettori e collaboratori a migliorarsi, a perfezionare i loro scritti, a individuare temi di interesse comune, a guardare con più attenzione al mondo della ricerca matematica

Antonio Bernardo

News

di Andrea Vitiello



Le medaglie Fields 2006

Molti si chiedono perché non esista il Premio Nobel per la matematica. Possibile che il suo ideatore abbia pensato alla fisica, alla chimica, alla medicina, alla letteratura, alla pace e non alla matematica? Va ricordato che il Premio Nobel per le scienze economiche fu istituito postumo nel 1968.

A dire il vero, circola da oltre un secolo la voce che Alfred Nobel avesse preso in antipatia la matematica dopo aver saputo del tradimento di sua moglie con il celebre matematico svedese dell'epoca Gösta Mittag-Leffler. Fonti più attendibili, invece, pur ammettendo le antipatie di Nobel verso il succitato connazionale, additano le cause della mancata istituzione di un Premio per la matematica al totale disinteresse di Nobel nei confronti della materia, da lui ritenuta poco utile nelle applicazioni.

Esiste tuttavia un importante premio, che è da tutti considerato il massimo riconoscimento per un matematico: la Medaglia Fields. Conviene, in ogni caso, parlare di Medaglie Fields, poiché ogni volta se ne assegna più di una. Ideatore di tali medaglie fu un certo John Charles Fields, matematico canadese che fu impegnato nell'organizzazione del Congresso Internazionale dei Matematici del 1924.

Quell'anno fu scelta Toronto come sede per il congresso, che si teneva abitualmente ogni quattro anni (fatta eccezione per il 1916), a partire dal 1900. Per essere precisi, il primo congresso mondiale risale al 1897 con sede Zurigo, poi se ne tenne uno tre anni dopo a Parigi e da allora tale congresso si tiene con una certa regolarità ogni quattro anni.

Tornando a J.C. Fields, egli riuscì a raccogliere un'ingente somma di denaro grazie ai finanziamenti per il Congresso di Toronto e, a seguito di tale convegno, decise di utilizzare il denaro rimastogli per l'istituzione di un premio, che sarebbe stato assegnato regolarmente ad ogni successivo congresso.

Il premio consisteva nella consegna di due medaglie (più una somma in denaro) ad altrettanti giovani matematici che più degli altri si fossero distinti nell'ambito della ricerca durante il quadriennio precedente ogni congresso.



La medaglia Fields

Giovani? Eh già, per poter ricevere la Medaglia Fields bisogna avere un'età non superiore ai quarant'anni, almeno al momento del conseguimento della scoperta per la quale si è premiati. Nelle intenzioni del loro creatore, difatti, le medaglie non dovevano considerarsi un punto di arrivo per i matematici affermati, ma un incentivo per i giovani a conseguire importanti risultati nel campo della ricerca matematica.

In verità, la prima consegna del riconoscimento avvenne solo nel 1936 durante il Congresso di Oslo; ovviamente le medaglie presero il nome dal loro ideatore, che frattanto era morto nell'agosto del 1932. Purtroppo, per ragioni belliche, i congressi del 1940, 1944 e 1948 non si tennero, quindi non ci fu alcuna assegnazione di Medaglie Fields fino al 1950, anno del Congresso di Cambridge (Massachusetts); per fortuna, da quel momento in poi, ogni successiva assegnazione si è regolarmente tenuta.

Addirittura nel 1966 fu deciso di portare il numero di medaglie assegnate da due a quattro, data la grande quantità di produzione matematica che ha caratterizzato gli ultimi decenni. Una curiosità: soltanto un italiano è riuscito nell'impresa di ottenere una Medaglia Fields; si tratta di Enrico Bombieri, il quale ha vinto il prestigioso premio nel 1974 per le proprie ricerche sulla teoria delle superfici minime e sulla teoria dei numeri.

Proprio quest'anno (2006 n.d.r.) si è tenuto il 25° Congresso Internazionale dei Matematici, con sede Madrid. Il 22 agosto 2006, in occasione dell'inaugurazione del convegno, il re spagnolo Juan Carlos avrebbe dovuto consegnare le solite quattro Medaglie Fields. Ma le cose non sono andate esattamente così: solo tre medaglie sono state effettivamente consegnate, rispettivamente al russo Andrei Okounkov, all'australiano Terence Tao e al franco-tedesco Wendelin Werner. Infatti, l'altro matematico che avrebbe dovuto ricevere l'ambita medaglia, il russo Grigorij Perelman, ha deciso di rifiutarla assieme al premio in denaro di 15.000 euro; non solo, non si è neanche presentato al congresso.

Tale rinuncia era già stata preannunciata da Perelman a John Ball, presidente dell'Unione Matematica Internazionale, il quale ha cercato invano di convincere il matematico russo a recedere dalla propria decisione. I motivi di questo rifiuto non sono chiari; anzi, circolano voci discordanti in proposito. L'unica cosa certa è che Perelman è una persona fuori dagli schemi: chi lo conosce sa che è un tipo schivo e introverso, lungi dallo stereotipo del matematico moderno che fonda la propria attività sul confronto e lo scam-

bio di idee; anzi, da alcuni anni, ormai, è completamente isolato dalla comunità matematica.



Il matematico russo Grigorij Perelman

Ma cerchiamo di conoscere un po' meglio queste grandi menti, queste colonne portanti della matematica dei nostri giorni...

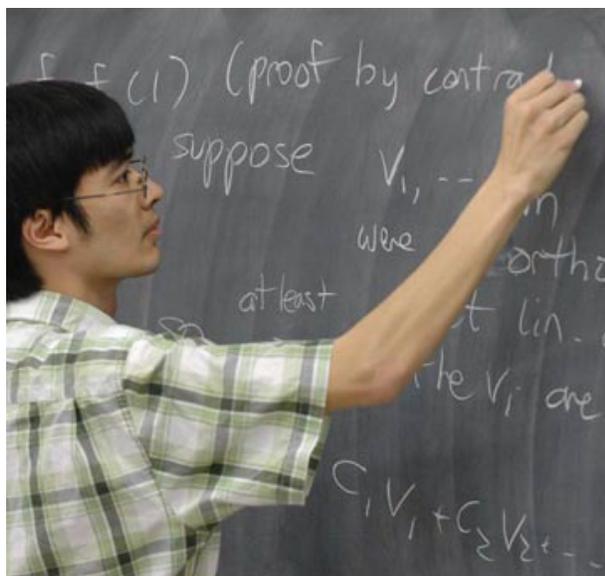
Andrei Okounkov è nato a Mosca nel 1969 e ha conseguito il dottorato presso l'Università di Stato di Mosca nel 1995 sotto la guida di Alexander Kirillov. È professore a Princeton dal 2002 e in precedenza è stato assistente a Berkeley. La sua attività si basa soprattutto sulla teoria della rappresentazione e sulle sue applicazioni alla geometria algebrica, alla fisica matematica, alla teoria della probabilità e alle funzioni speciali.

Ed è stato proprio grazie ai contributi dati alla teoria della probabilità, alla geometria algebrica e alla teoria delle rappresentazioni che egli è riuscito ad ottenere la Medaglia Fields. In particolare, Okounkov è riuscito a trovare uno stretto, per quanto inaspettato, legame tra queste tre diverse aree della matematica.

Wendelin Werner è cittadino francese dal 1977, pur essendo nato in Germania nel 1968. Ha studiato all'École Normale Supérieure dal 1987 al 1991, anno in cui è diventato ricercatore presso il CNRS, il più importante ente statale di ri-

cerca francese. Ha conseguito il dottorato nel 1993 presso l'Università di Parigi VI, sotto la supervisione di Jean-François Le Gall.

Attualmente Werner è professore presso l'Università di Parigi-Sud a Orsay, e insegna part-time all'École Normale Supérieure. Werner lavora nell'ambito dell'evoluzione stocastica, della geometria del moto browniano e della teoria dei campi; con metodi propri dell'analisi complessa classica è riuscito a dimostrare un'ipotesi attribuita a Mandelbrot: la dimensione frattale dell'involuppo di un movimento browniano nel piano è $4/3$.



Terence Tao, primo australiano a vincere la Medaglia Fields, è nato ad Adelaide nel 1975 e fin da piccolo si è sempre distinto in campo matematico, tanto da essere considerato da tutti un "bambino prodigio". Tantissimi sono i riconoscimenti già ricevuti durante la sua pur breve carriera. A 21 anni aveva già conseguito il Ph.D. a Princeton (l'equivalente del dottorato di ricerca italiano). Dall'età di 24 anni è professore all'Università di Los Angeles, la famosa UCLA. Mente poliedrica, Tao si occupa principalmente di equazioni differenziali parziali, combinatoria, teoria dei numeri e analisi armonica.

Forse, però, la figura che più incuriosisce, anche per la singolare faccenda della rinuncia, è quella di Grigoriy Perelman.

Egli è nato esattamente 40 anni fa, nel 1966, a Leningrado (oggi San Pietroburgo), in quella che allora era chiamata Unione Sovietica. Ha studiato in Russia e ha ottenuto il dottorato verso la fine degli anni '80. La sua attività si è divisa tra l'Istituto Steklov di San Pietroburgo e gli Stati Uniti, in particolar modo Berkeley. Straordinari sono i contributi da lui offerti alla geometria riemanniana e alla topologia geometrica, e ancor più stupefacente sarebbe l'impatto che potrebbero avere certi teoremi da lui dimostrati, sui quali però c'è ancora una revisione in corso.

Ma allora c'è da chiedersi come mai un matematico così brillante abbia rinunciato a un premio prestigioso come la Medaglia Fields. L'unica fonte di informazioni attendibile a riguardo sembra essere un articolo apparso sul quotidiano *New Yorker*; l'articolo, che reca la firma di Sylvia Nasar e David Gruber, riporta anche delle frasi dello stesso Perelman:

Perelman disse ripetutamente di essersi ritirato dalla comunità matematica e di non considerarsi più un matematico di professione. Egli citò una controversia che aveva avuto anni prima con un collaboratore circa il modo di assegnare la paternità di una certa dimostrazione e disse di essere rimasto costernato dalla scarsa etica della materia (la matematica, ndt).

Queste frasi avvalorerebbero la tesi di coloro i quali sostengono che Perelman abbia rifiutato il premio come forma di protesta nei confronti della comunità matematica, alle cui convenzioni e alle cui dinamiche tutt'altro che etiche (almeno a suo avviso) non ha intenzione di adeguarsi.

Oppure, forse Perelman è semplicemente indifferente alla questione del premio, sentendosi già pienamente appagato:

La Medaglia Fields non aveva nessun interesse per lui, spiegò Perelman. «Era del tutto irrilevante per me», disse, «tutti sanno che, se la dimostrazione è corretta, non c'è bisogno di alcun riconoscimento ulteriore».

Perelman, infatti, era stato scelto come vincitore del premio per il suo contributo alla geometria e per la sua rivoluzionaria intuizione sulla struttura analitica e geometrica del flusso di Ricci.

I suoi risultati, tuttavia, dovrebbero aprire le porte alla risoluzione della celebre *congettura di Poincaré*. Tale congettura fu enunciata nel 1904 dal matematico e fisico francese Jules-Henry Poincaré e tuttora costituisce il principale problema irrisolto della topologia.

Essa non è altro che un caso particolare di un enunciato molto più generale che recita più o meno così: ogni varietà chiusa n dimensionale omotopicamente equivalente alla n -sfera è omeomorfa alla n -sfera. Nel corso degli anni è stata provata la veridicità di questa proposizione per ogni valore di n diverso da 3.

Difatti, i casi con $n = 1$ o $n = 2$ sono banali; nel 1960, l'americano Stephen Smale riuscì a provare che la proposizione è vera per qualunque valore di n da 5 in su; il caso in cui $n = 4$ è stato dimostrato nel 1981 da Michael Freedman, anch'egli americano (sia Freedman che Smale hanno ottenuto una Medaglia Fields).

Quando n assume il valore 3, la congettura di Poincaré può essere interpretata nel modo seguente: l'unica varietà tridimensionale priva di buchi, cioè dove qualsiasi cammino chiuso si può contrarre fino a diventare un punto, è la sfera.

Nel 2002 Perelman ha pubblicato direttamente su Internet un'ipotetica dimostrazione di tale congettura, e già questo fatto destò molto scalpore, poiché mise in risalto il totale disinteresse del matematico russo verso le più quotate riviste matematiche internazionali. A dire il vero, Perelman sostiene di aver dimostrato la *congettura di geometrizzazione di Thurston*, una proposizione avanzata per la prima volta da William Thurston verso la fine degli anni '70 e che comprende la congettura di Poincaré come caso particolare. Ad oggi, l'opera di Perelman è ancora al vaglio di una commissione, alla quale spetta l'arduo compito di confermarne o confutarne l'ortodossia; è interessante, però, notare che finora non è stata trovata alcuna inesattezza.

E dire che nel 2000 il Clay Institute, una fondazione americana facente capo al magnate Landon Clay, aveva già messo in palio, per la risoluzione della congettura di Poincaré, la cifra record di un milione di dollari. A questo punto, sarebbe

interessante capire se Perelman sia intenzionato ad accettare il milione di dollari del Clay Institute, qualora il suo lavoro risultasse corretto, oppure voglia rifiutare anche quest'altro premio. La Nasar l'ha interrogato in proposito, ma...:

Perelman non volle dire se la sua avversione ai premi si estendesse anche al milione di dollari messo in palio dall'Istituto Clay. «Non deciderò se accettare il premio prima che mi venga offerto», disse.

Per ulteriori info:

Sito del Fields Institute: www.fields.utoronto.ca/aboutus/jcfields/fields_medal.html



Renato Centonze, *Onda sonora: i suoni dell'alba*

Equazioni Matematiche e Scientifiche più veloci del 40%

MathType per Windows e Macintosh

MathType è la versione professionale e completa di Equation Editor in Microsoft Office. Aggiunge centinaia di caratteristiche a Microsoft Word / Power Point che Equation Editor non ha e li trasforma in un integrato ambiente di scrittura di testi scientifici, di realizzazione diapositive e di creazione di pagine web.

Velocizza il tuo lavoro!

I test hanno dimostrato che utilizzando MathType invece che Equation Editor lo svolgimento di un lavoro risulta del 40% più veloce.

Demo gratuita valida per 30 giorni disponibile su:
www.dessci.com/CreActive

Per informazioni o offerte personalizzate:

www.CreActive.net
Tutto il Software per la Scienza e il Business

Tel. 0575.333.297 Email: staff@creactive.net



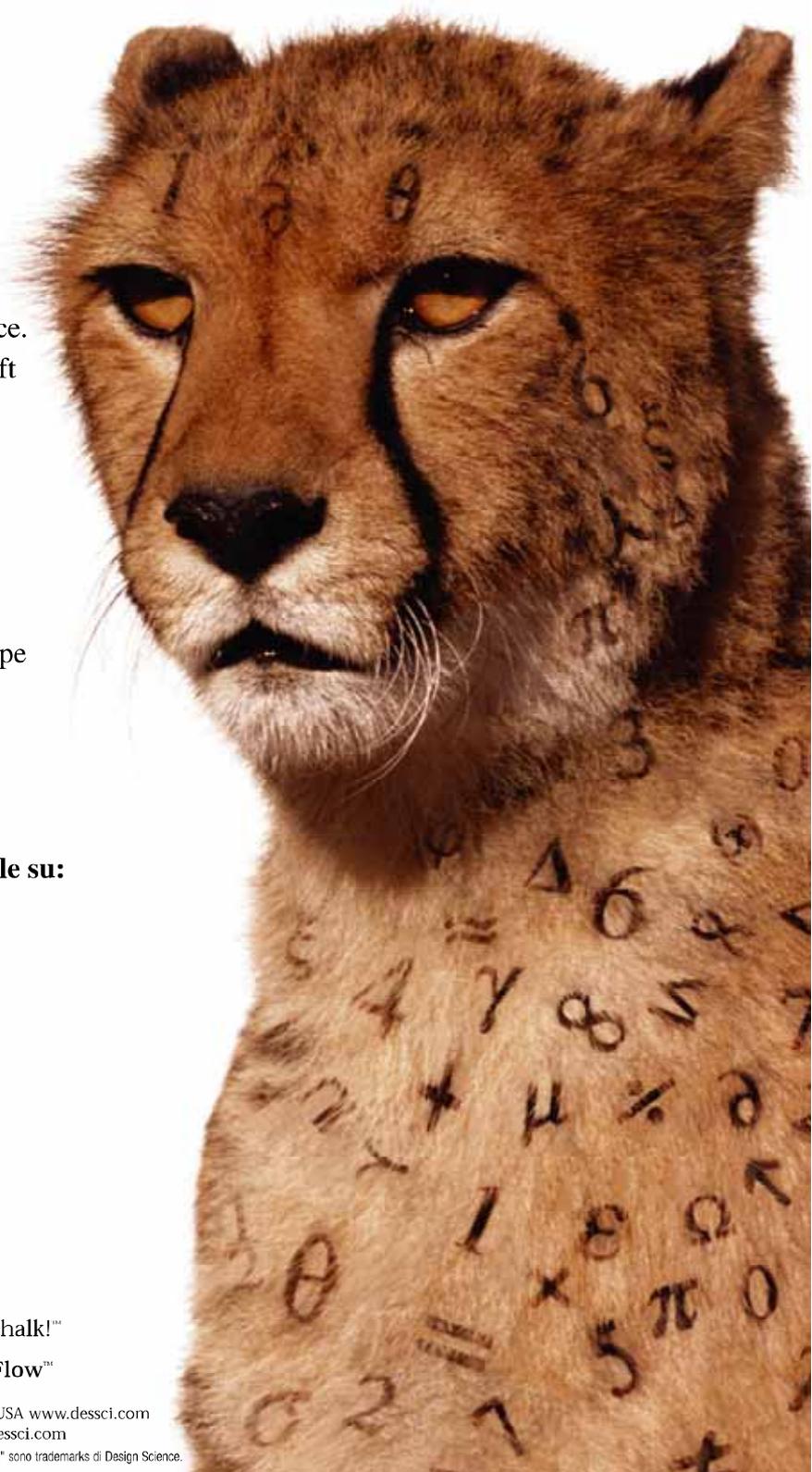
MathType™

The best thing for writing equations since chalk!™

MathType™ WebEQ™ MathPlayer™ MathFlow™

Design Science, Inc. 4028 Broadway, Long Beach, CA 90803, USA www.dessci.com
Telephone: 562-433-0685, Fax: 562-433-6969, Email: sales@dessci.com

MathType, "The best thing for writing equations since chalk!" e "How Science Communicates" sono trademarks di Design Science.



La matematica è difficile?

di Luca Lussardi

La maggior parte degli studenti risponderebbe di sì, mentre quasi tutti i loro insegnanti di matematica sarebbero pronti a dire no, argomentando che in realtà la matematica appare difficile a chi non si dedica con il dovuto impegno (ma cosa è facile senza impegnarsi?) Chi ha ragione? È vero che basta impegnarsi seriamente, o la matematica possiede una difficoltà intrinseca, indipendentemente da quanto ci applichiamo ad essa?

A questo proposito è curioso il seguente racconto di un episodio accaduto veramente.

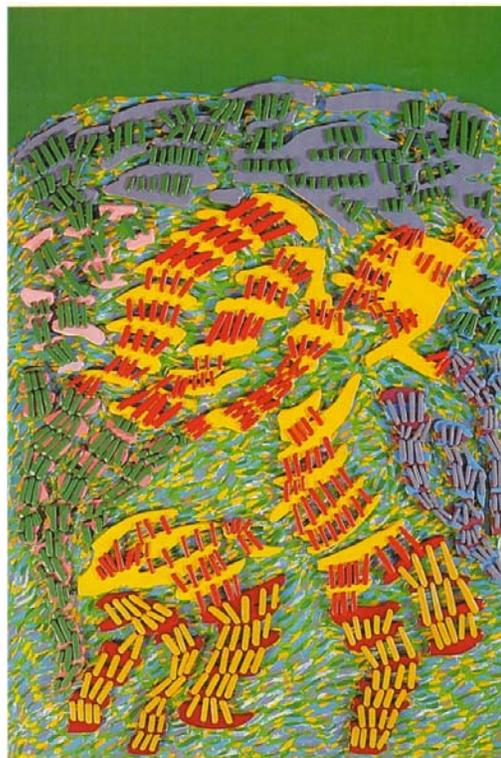
Anni fa uscì in commercio una delle tante versioni della fortunata serie di bambole Barbie; questo modello aveva una particolarità: parlava, ovviamente attraverso un disco di frasi pre-registrate, recitando frasi di argomento scolastico. Ebbene una di queste diceva: *la matematica è difficile*. A causa di ciò, vi fu una serie proteste da parte degli insegnanti di matematica, tant'è che la Mattel, la casa produttrice della bambola, fu costretta a ritirare dal mercato il modello parlante. Ne uscì un nuovo modello che recitava: *la matematica è diversa*. Insegnanti e Mattel fecero pace. La bambola Barbie, qui, prende il posto dello studente contro l'insegnante.

Ma perché la matematica è diversa? E diversa in che cosa? Diversa da che cosa?

La verità è che la matematica non è affatto diversa: non è diversa da nessun altro campo del sapere. Infatti, aveva ragione Barbie, e quindi gli studenti: *la matematica è difficile*.

Quest'affermazione non deve certo intimorire o scoraggiare il lettore, ma è un dato di fatto; e chiunque cerca di sostenere il contrario, non sa veramente che cosa sia la matematica. Nonostan-

te ciò, qualsiasi persona può dedicarsi ad essa, in quanto la matematica è prodotta dalla mente umana e non da computer superpotenti.



“La grande danza”, di Renato Centonze

La ragione principale che rende difficile la matematica è nascosta nella sua stessa natura. Per studiarla e per fare nuova matematica si utilizzano capacità dedicate allo studio e alla ricerca di relazioni tra oggetti e/o persone del mondo reale che ci circonda. È più difficile, quindi, usare tali strumenti, messi a disposizione dalla nostra mente, per studiare relazioni tra oggetti che non vivono o non si vedono, ma sono creati dalla mente stessa: gli oggetti matematici sono *astratti*.

Benché essi possano alcune volte essere visualizzati attraverso modelli concreti, nel mo-

mento in cui si vogliono studiare con precisione le corrispondenti proprietà matematiche uno è costretto a ricordare la natura astratta di tali oggetti (basti pensare ai numeri). Questo tipo di discorso, basato fondamentalmente sulla fisiologia del nostro cervello, potrebbe non trovare d'accordo tutti; in fin dei conti, non sappiamo ancora bene come funzioni veramente la nostra mente.

Allo scopo di giustificare in modo scientifico quanto detto, è stato creato, da alcuni psicologi americani, un semplice test, detto *test di Wason*, che rende abbastanza evidente il fatto che non esiste una difficoltà intrinseca in un ragionamento, ma la difficoltà dipende dalla natura degli oggetti su cui stiamo ragionando.

Si consideri questa prima situazione: si hanno 4 carte le quali hanno un numero stampato su una faccia, e una lettera stampata sull'altra. Disponendo le 4 carte in fila si legge la seguente successione: $E - K - 4 - 7$. C'è poi un'altra regola: se una carta ha stampata una vocale su un lato, allora deve avere sull'altro lato un numero pari. La domanda è: quali carte si devono girare per controllare che tale regola sia rispettata?

Immagino che quasi tutti abbiano pensato di girare anzitutto la prima carta, quella contrassegnata dalla lettera E : giusto. Infatti, in base alla regola, sull'altro lato ci deve essere un numero pari, quindi il voltare questa carta permette di validare o confutare la regola data. Credo invece che meno persone avranno azzeccato la sola altra carta da girare allo scopo di confermare la validità della regola: l'ultima, quella contrassegnata dal numero 7. Perché serve girare anche questa carta? Il motivo è fondamentalmente semplice: se sull'altro lato ci fosse una vocale, allora la regola sarebbe falsa, da cui la necessità di voltare questa carta per assicurarsi che sull'altro lato non vi sia stampata una vocale.

Credo poi che tutti abbiano pensato, giustamente, che non è necessario voltare la carta contrassegnata dalla lettera K : qualsiasi numero vi sia stampato sull'altro lato non influisce sulla verità della regola. Così come la carta contrassegnata dal 4 non va necessariamente voltata: qual-

siasi lettera ci sia sull'altro lato va d'accordo con la regola data.

Si consideri ora la seguente seconda situazione: ad una festa nella quale si possono bere bevande alcoliche e bevande analcoliche vi sono sia ragazzi che possono bere alcolici, sia ragazzi che non li possono bere (per questioni di età). Ci si deve assicurare che tutto si svolga regolarmente.

Ebbene, a un tavolo ci sono 4 ragazzi, di cui non si conosce l'età, per cui non si può valutare immediatamente se essi stiano infrangendo la legge o no. Vi sono però le loro carte d'identità poste di fronte a ciascun proprietario. Le prime due carte sono coperte, e quindi non è possibile leggere l'età: il primo ragazzo sta bevendo una birra ed il secondo ragazzo sta bevendo una Coca-cola. Le altre due carte d'identità sono invece visibili, quindi è possibile leggere l'età: il terzo ragazzo ha l'età prevista per bere alcolici, mentre il quarto ragazzo non ha l'età adatta. Non si sa, però, che tipo di bibita questi ultimi due ragazzi stiano bevendo.

La domanda è dunque la seguente: quali carte d'identità e quali bevande si devono controllare per assicurarsi che tutto si stia svolgendo senza infrangere la legge?

Immagino, stavolta, che quasi tutti risponderanno immediatamente ed in modo corretto. Infatti, basta sollevare la carta d'identità del primo ragazzo, che sta bevendo birra, allo scopo di controllarne l'età; poi accertarsi di cosa stia bevendo il quarto ragazzo, che mostra la carta d'identità con un'età inadatta al consumo di alcolici.

A cosa serve il test? Ebbene, nonostante la prima questione sembri molto più difficile della seconda, dal punto di vista strettamente logico i due quesiti sono identici. Infatti, si considerino le seguenti associazioni:

- *La carta ha una vocale - Il ragazzo sta bevendo alcolici*
- *La carta ha una consonante - Il ragazzo sta bevendo analcolici*

- *La carta ha un numero pari - Il ragazzo ha l'età per bere alcolici*
- *La carta ha un numero dispari - Il ragazzo non ha l'età per bere alcolici*

La regola “Se una carta ha una vocale, allora sull'altro lato deve avere un numero pari” diventa dunque “Se il ragazzo sta bevendo alcolici, allora deve avere l'età prescritta dalla legge”. Si tratta, quindi, dello stesso identico problema.

Il risultato del test è abbastanza chiaro: ragionando con oggetti astratti come numeri e lettere abbiamo avuto difficoltà a capire quali fossero le risposte esatte; avendo invece di fronte la stessa situazione logica, ma costituita da oggetti concreti, abbiamo trovato la soluzione molto più facilmente. E questo esempio dimostra proprio che la difficoltà non sta nel ragionamento, altrimenti avremmo trovato difficile anche la situazione concreta; ma sta nel fatto che nel primo caso siamo stati costretti a ragionare su oggetti astratti, ovvero abbiamo usato quelle particolari - ma possedute da tutti - capacità di cui sopra, in una situazione in cui entrano in gioco oggetti di natura astratta.

Il fatto che gli enti matematici siano astratti ha anche un'altra importante conseguenza, che porta alla seconda fondamentale motivazione per cui la matematica possiede una difficoltà intrinseca.

Per stabilire se un'affermazione matematica è vera, non è possibile basarsi sull'evidenza o sull'esperienza (non si stanno considerando oggetti reali, visibili o persone). Si è costretti a dedurre l'eventuale verità in modo puramente logico, basandosi solo sul ragionamento e partendo dalla verità di affermazioni già ottenute precedentemente. È l'unico modo, se uno ci pensa un attimo, per non correre il rischio di incappare in errori. Va da sé che all'inizio si sfruttano intuizioni varie per saggiare l'eventuale verità dell'affermazione (in realtà per un matematico questa è la parte più difficile della sua attività di ricerca).

Questa necessità di precisione porta al cosiddetto *formalismo matematico*. Quando una persona comune (cioè che non sia un matematico) vede una pagina di simboli matematici, vede solamente i simboli per quello che sono graficamente, e non per quello che vogliono significare: è l'insieme di questi simboli che costituisce il formalismo matematico. La situazione non è la stessa se la pagina viene vista da un matematico.

Si supponga, per capire, di avere di fronte uno spartito musicale di una musica nota. La pagina piena di simboli disposti su 5 righe parallele non ha nessun significato in sé, ma quando si fanno scorrere le note intonando a mente la melodia, ecco che la musica prende vita. La stessa cosa vale per una pagina di matematica: quando è un matematico a leggerla, la matematica prende vita nella sua mente e diventa bella e armoniosa come una melodia. Con ciò si vuole dire che il formalismo matematico nasconde la vera essenza della matematica: esso serve ai matematici per comunicare tra di loro i risultati raggiunti.

Riassumendo, esistono due motivi per i quali la difficoltà della matematica è intrinseca: da una parte il fatto che per fare matematica sfruttiamo capacità portate per fare altro; dall'altra parte, il fatto che il fare matematica esige una precisione assoluta, e di conseguenza l'uso di un formalismo opportuno.

Tutto ciò, però, non deve scoraggiare il lettore. Infatti, nonostante le difficoltà della matematica siano intrinseche e non dipendano da noi, chiunque può dedicarsi ad essa: i prerequisiti mentali sono posseduti da tutti, e sono costituiti dalle stesse capacità che ci consentono di parlare o di fare ragionamenti su qualsiasi argomento.

[1] Keith Devlin, *Il gene della Matematica*, Longanesi, 2002.

[2] G. H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti, 1989.

Un modello per le conchiglie

di Giovanni Lucca

INTRODUZIONE

Questo articolo illustra un modello matematico a 4 parametri per la descrizione di superfici tridimensionali che modellizzano la forma delle conchiglie spiraliformi. Vengono inoltre presentati alcuni esempi generati mediante personal computer con l'intento di mostrare l'influenza dei singoli parametri sulla forma assunta dalla superficie.

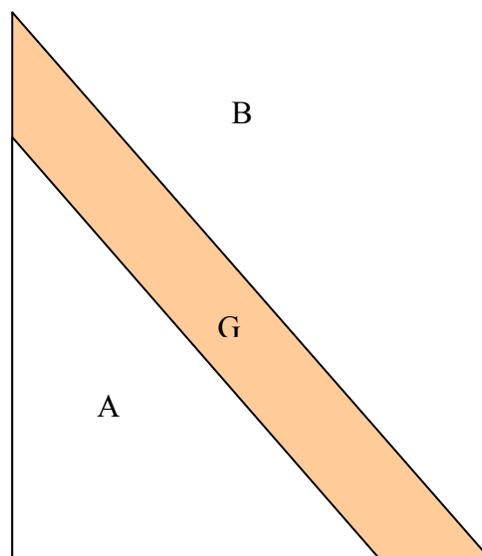
CRESCITA, AUTOSIMILARITÀ E SPIRALI

Osservando la maggior parte delle conchiglie e, soffermandosi sugli aspetti puramente geometrici, tre sono le caratteristiche fondamentali sui quali poter basare un modello che possa rappresentarne gli elementi essenziali:

- la presenza di un'origine dalla quale la conchiglia nasce e si accresce nel tempo;
- la presenza, più o meno evidente, di una spirale con centro nell'origine sopra menzionata e le cui spire si avvolgono attorno a un asse passante per l'origine stessa;
- le proprietà gnomoniche di cui la conchiglia gode.

In particolare, in geometria, per *gnomone* si intende una figura geometrica G che, aggiunta ad un'altra A , viene a formare una nuova figura B geometricamente simile ad A (si veda fig.1 per un semplice esempio).

Fig.1. Esempio di figure gnomoniche; il trapezio G è lo gnomone del triangolo A che, unito ad esso, forma un nuovo triangolo B simile ad A .



Questi tre punti sintetizzano l'aspetto peculiare della crescita delle conchiglie ben espressa da Sir D'Arcy Wentworth

Thomson in [1] con la seguente frase: “... è caratteristica peculiare delle conchiglie a spirale, per esempio, che esse non alterino la loro forma mentre crescono. Ogni incremento è simile al precedente e ogni ciclo di accrescimento rimane della forma primitiva. ... Ma la conchiglia mantiene immutata la sua forma malgrado il suo accrescimento asimmetrico; essa cresce cioè solo a una estremità... Questa notevole proprietà di accrescimento terminale è caratteristica, tra le varie curve matematiche, solo nella spirale equiangolare.”

In altre parole, la conchiglia, come il mollusco all'interno di essa, cresce in grandezza, ma non cambia di forma, e la sua crescita procede nello spazio per gnomoni successivi dell'intera struttura preesistente, lungo una spirale equiangolare manifestando così una continua caratteristica di autosimilarità. E per meglio comprendere questo concetto si può guardare la fig.2 dove viene mostrata la crescita per gnomoni successivi, lungo archi di spirale equiangolare che si sviluppano rispetto all'origine O , di un immaginario mollusco bidimensionale.

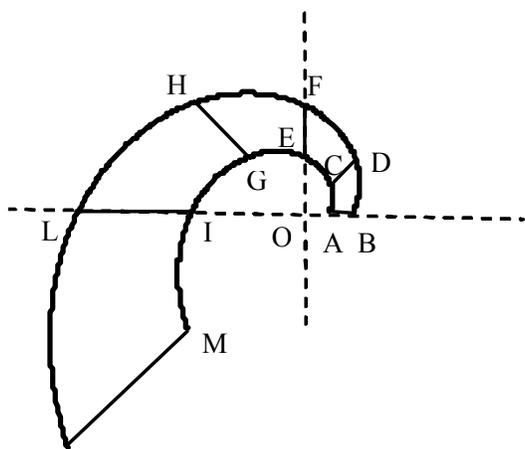


Fig.2. Crescita per gnomoni successivi di una conchiglia bidimensionale.

Quindi, ad esempio, se la conchiglia ad un certo istante t è rappresentata dal quadrilatero $ABDC$, la sua crescita, in un intervallo Δt è data dallo gnomone $CDFE$ che, unito ad $ABDC$, forma il quadrilatero $ABFE$, ovvero l'immagine della conchiglia all'istante $t + \Delta t$; notiamo anche la similitudine geometrica dei due quadrilateri $ABDC$ e $ABFE$; le stesse osservazioni valgono se consideriamo il quadrilatero $ABFE$ con lo gnomone $EFHG$ e così via.

L'estensione al caso reale, cioè quello tridimensionale, è analoga; la principale differenza è che il punto O va sostituito da una retta che rappresenta l'asse di simmetria della conchiglia ed i quadrilateri vanno sostituiti con dei “tubi incurvati” disposti secondo archi di spirale equiangolare tridimensionale.

In conclusione, possiamo quindi affermare che le proprietà di autosimilarità della conchiglia sono la diretta conseguenza delle medesime proprietà che ha la spirale equiangolare e che descriveremo nel prossimo paragrafo.

Vi è tuttavia un'altra importante osservazione da fare circa il ruolo della spirale equiangolare; infatti, con la sua forma specifica, caratterizzata da alcuni parametri che vedremo in seguito, influenza direttamente e in maniera significativa anche la forma della conchiglia stessa. In altre parole, essa può essere vista come una curva strutturale o portante, nello spazio, che la conchiglia deve seguire nel corso

della sua crescita; pertanto alcuni dei parametri che descrivono la forma della conchiglia sono i medesimi parametri che descrivono la corrispondente spirale.

CENNI SULLA SPIRALE EQUIANGOLARE

Come abbiamo visto, la spirale equiangolare è di fondamentale importanza per una modellizzazione matematica della crescita e della geometria delle conchiglie. Riteniamo quindi utile dedicare questo paragrafo alla descrizione delle principali caratteristiche di tale curva necessarie per il prosieguo. Tratteremo prima della spirale equiangolare piana e, successivamente, di quella nello spazio.

Spirale equiangolare nel piano

Una generica spirale nel piano può essere generata facendo contemporaneamente ruotare e dilatare un segmento OP attorno a un estremo fisso O , che è detto *polo*; in tal modo, l'altro estremo P descrive, nel corso del suo movimento, la spirale. Ora, a seconda delle leggi che descrivono nel tempo la rotazione e la dilatazione del segmento OP , abbiamo differenti tipi di spirale. La spirale equiangolare (detta anche *logaritmica*) è quindi un particolare tipo di spirale ed è caratterizzata da:

- una posizione iniziale e un valore iniziale del segmento OP nel piano: nel seguito assumeremo per convenzione che il segmento OP giaccia inizialmente sull'asse delle x di un sistema cartesiano ortogonale nel piano e con origine O coincidente col polo della spirale. Inoltre il valore iniziale di OP sia D ;
- una velocità angolare di rotazione costante nel tempo; quindi l'angolo θ tracciato dal segmento OP durante la sua rotazione cresce linearmente nel tempo (si assume come positiva una rotazione in senso antiorario misurata a partire dal semiasse positivo delle ascisse);
- una legge di dilatazione del segmento OP esponenziale rispetto all'angolo θ .

Da un punto di vista matematico, l'operazione sopra descritta può essere effettuata mediante una trasformazione di rotazione ed omotetia [2] su un vettore r del piano di componenti $r_x=D$ e $r_y=0$; il vettore risultante di questa trasformazione esprime la spirale equiangolare in forma parametrica rispetto al parametro θ . In pratica si ha:

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{k\theta} & 0 \\ 0 & e^{k\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \quad \theta \in [\theta_{in}, \theta_{fin}] \quad (1)$$

Nella (1) k è una costante, strettamente legata alle caratteristiche di crescita della spirale mentre l'intervallo $[\theta_{in}, \theta_{fin}]$ definisce i valori iniziali e finali del parametro θ , il fatto di fornire la restrizione $\theta \in [\theta_{in}, \theta_{fin}]$, è legata alla esigenza di rappresentare la curva su un intervallo finito. Ciò è chiaramente in relazione al fatto che ogni conchiglia ha dimensioni finite. D'ora in poi, per ragioni di brevità, ometteremo l'indicazione $\theta \in [\theta_{in}, \theta_{fin}]$ restando però inteso che tale ipotesi rimane comunque valida.

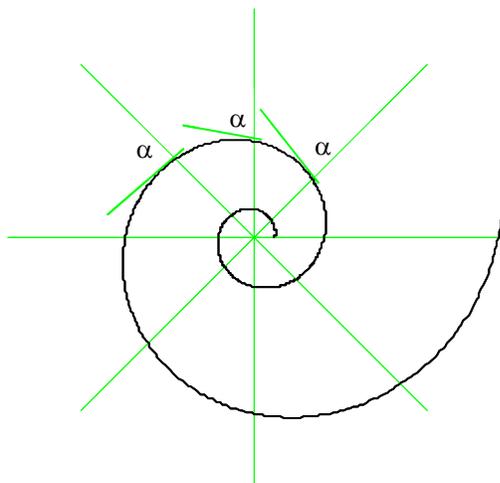


Fig.3. Esempio di spirale equiangolare.

Sempre nella (1), la prima matrice, partendo da sinistra, rappresenta la trasformazione di omotetia (dilatazione se $k > 0$, contrazione se $k < 0$) mentre la seconda matrice rappresenta la trasformazione di rotazione. In fig.3 è mostrato un esempio di spirale equiangolare piana. Dalla (1) si ottengono le coordinate cartesiane $x(\theta)$ e $y(\theta)$:

$$\begin{cases} x(\theta) = D \cos \theta e^{k\theta} \\ y(\theta) = D \sin \theta e^{k\theta} \end{cases} \quad (2)$$

È importante mettere in relazione il parametro k presente nel fattore esponenziale $e^{k\theta}$ delle formule precedenti con il parametro α , mostrato nella fig.3; più precisamente α è l'angolo formato tra la tangente alla spirale in un generico punto e la semiretta radiale passante per il polo della spirale ed il punto stesso.

Si può dimostrare che l'angolo α è sempre uguale in ogni punto della spirale; da questa proprietà deriva il nome di spirale equiangolare dato a questa curva, e sempre da tale proprietà originano le caratteristiche di autosimilarità della curva.

La relazione che lega k e α è:

$$k = \cot(\alpha) \quad (3)$$

Può essere utile introdurre il parametro W che quantifica il tasso di espansione delle spire corrispondente ad un giro completo dell'angolo θ , infatti W è definito come:

$$W = \frac{De^{k(\theta+2\pi)}}{De^{k\theta}} = e^{2\pi \cot(\alpha)} \quad (4)$$

Vediamo dalla (4) che per piccoli valori di α si hanno altissimi tassi di espansione della spirale che vanno diminuendo al crescere di α fino al caso limite $\alpha=90^0$ per cui $W=1$ e la spirale degenera in un cerchio. Questo spiega perché le *conchiglie discoidi* (che sono caratterizzate da valori moderatamente piccoli di α e quindi da valori molto elevati di W) si sviluppano compiendo solo una frazione di giro in modo da mantenere dimensioni limitate. Al contrario, le *conchiglie turbinato*, quelle cioè caratterizzate

da vari avvolgimenti, hanno l'angolo α compreso all'incirca tra 80^0 e 90^0 con valori di W nell'ordine di qualche unità; questo appunto consente una crescita della conchiglia con parecchie spire.

Spirale equiangolare nello spazio

La naturale estensione nello spazio tridimensionale della spirale equiangolare piana, detta comunemente *elico-spirale*, (fig. 4) è definita in maniera analoga alla (1) mediante una trasformazione di rotazione, attorno all'asse z , e di omotetia su un vettore r_0 dello spazio.

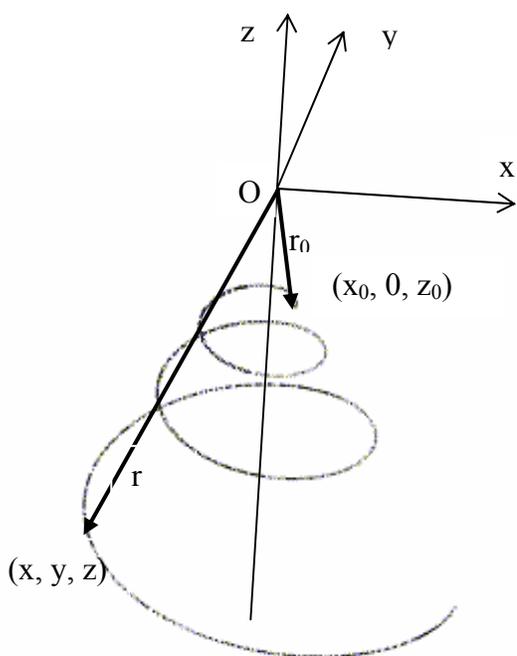


Fig. 4. Esempio di elico-spirale.

Il vettore risultante di questa trasformazione esprime la elico-spirale in forma parametrica rispetto al parametro θ che rappresenta l'angolo di rotazione attorno all'asse z . ($\theta > 0$ per rotazioni antiorarie con θ misurato a partire dal semiasse positivo delle ascisse); come nel caso della spirale nel piano assumiamo che l'angolo $\theta \in [\theta_{in}, \theta_{fin}]$. Scegliendo per comodità $r_{0x} = D$, $r_{0y} = 0$ e $r_{0z} = z_0$ (ove $z_0 < 0$ per convenzione), il generico vettore $r(\theta)$ ha componenti $x(\theta)$, $y(\theta)$, $z(\theta)$ date da:

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta \cot(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\theta \cot(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\theta \cot(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Nella (6), l'angolo α assume un significato identico a quello visto precedentemente per la spirale equiangolare piana; è cioè legato alla rapidità di crescita delle spire. Dalla (5) si ottiene:

$$\begin{cases} x(\theta) = D \cos \theta e^{\theta \cot(\alpha)} \\ y(\theta) = D \sin \theta e^{\theta \cot(\alpha)} \\ z(\theta) = z_0 e^{\theta \cot(\alpha)} \end{cases} \quad (6)$$

Vediamo dalla (6) che tre sono i parametri che caratterizzano la elico-spirale:

- l'angolo α di cui abbiamo già detto;
- la coordinata D che rappresenta la distanza del punto iniziale della curva dall'asse z (ovvero la distanza laterale da tale asse);
- la coordinata z_0 del punto iniziale.

Se i parametri α e D sono gli stessi della spirale equiangolare piana (infatti la spirale piana può essere vista come la proiezione della elico spirale sul piano xy), il parametro z_0 è una peculiarità della elico spirale ed è in relazione all'avanzamento della curva lungo l'asse verticale attorno al quale si avvolgono le spire. A tal proposito, ricordando la (6) osserviamo che in ogni punto della elico-spirale vale la relazione:

$$\frac{|z_0|}{D} = \frac{|z(\theta)|}{\sqrt{x^2(\theta) + y^2(\theta)}} = T \quad (7)$$

ovvero il rapporto tra la componente verticale (in modulo) e quella orizzontale è sempre pari ad una costante che chiamiamo T . Ora con l'ausilio della fig.5 possiamo dare un significato geometrico al parametro T ; infatti si vede immediatamente che vale la relazione:

$$T = \cot(\beta) \quad (8)$$

dove l'angolo β è rappresentato in fig.5.

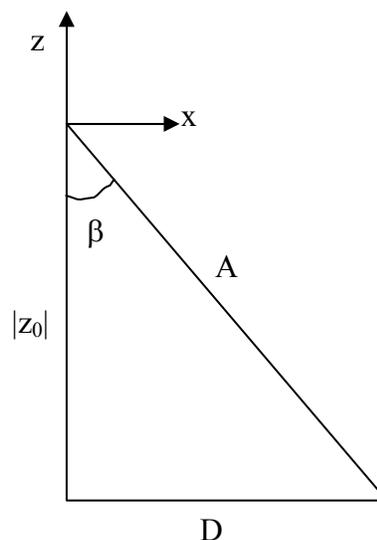


Fig.5. Angolo β che caratterizza la elico-spirale.

La formula (7) implica anche che ogni punto della elico-spirale appartiene alla superficie laterale di un cono con asse coincidente con quello della elico-spirale e semiangolo di apertura uguale a β .

In generale, possiamo dire che, a parità di α e D e dell'intervallo $[\theta_{in}, \theta_{fin}]$, per valori piccoli dell'angolo β la curva tende ad essere allungata; mentre, per valori di β prossimi a 90^0 , la curva presenta un aspetto più tozzo ed allargato. In particolare, per $\beta=90^0$ si ha $T = 0$ e la elico-spirale diviene una spirale piana.

EQUAZIONI DELLA SUPERFICIE

Il meccanismo di generazione della superficie che rappresenta la conchiglia è ben descritto, sempre in [1], da D'Arcy Thompson con le seguenti parole:

“La superficie di qualsiasi conchiglia, sia essa discoide o turbinata, può essere immaginata come generata dalla rivoluzione, attorno a un asse fisso, di una curva chiusa la quale, rimanendo sempre geometricamente simile a se stessa, vada continuamente aumentando di dimensione; poiché la scala della figura aumenta in progressione geometrica mentre l'angolo di rotazione aumenta in progressione aritmetica e il centro di similitudine rimane fisso, la curva tracciata nello spazio da punti corrispondenti della curva generatrice è in ogni caso una spirale equiangolare. [...] Può essere considerata come figura generatrice qualsiasi sezione della conchiglia, sia essa parallela, normale o comunque inclinata rispetto all'asse. Comunemente essa è ritenuta identica alla bocca della conchiglia; in tal caso essa è una curva pressappoco piana e di forma semplice ma in numerosi altri casi è complicata di forma e i suoi confini non giacciono su un piano. Ma in tali casi possiamo sostituirla con la sua sezione, tagliando la conchiglia elicoide attraverso il suo asse”.

La curva generatrice può essere chiusa oppure aperta, e può assumere differenti forme, ma molto comunemente ha una forma più o meno ellittica; si può subito arguire, quindi, che la forma della curva generatrice riveste una notevole importanza e determina in maniera consistente la forma e l'aspetto generale della conchiglia.

Nella fig.6 sono rappresentati gli aspetti geometrici essenziali per comprendere il meccanismo di generazione della superficie della conchiglia.

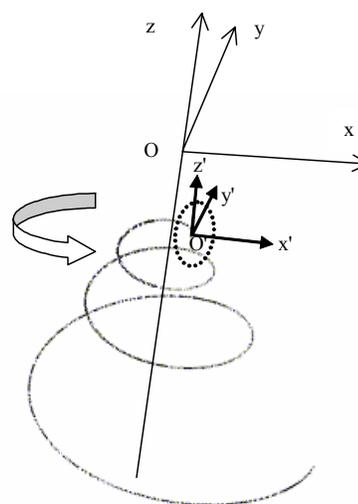


Fig.6. Elementi geometrici fondamentali per la generazione della superficie della conchiglia; la freccia grande indica la rotazione della curva generatrice attorno all'asse z.

In essa possiamo notare il centro di similitudine O , la curva generatrice (tratteggiata) ed una curva portante, la elico-spirale, che nasce dal centro della curva generatrice O' . Ai punti O e O' sono associate

due terne cartesiane destrorse, una fissa (quella con origine in O) ed una mobile (quella con origine in O'), solidale con la curva generatrice che dobbiamo immaginare muoversi lungo la elico-spirale ed al contempo espandersi in modo da generare una sorta di tubo di dimensioni crescenti che si avvolge attorno all'asse z . Come già osservato precedentemente, a proposito della elico-spirale, le operazioni matematiche che ci permettono di tradurre quanto descritto a parole nella citazione tratta dal libro di D'Arcy Thompson sono una rotazione attorno all'asse delle z (posizionato lungo la direzione di crescita della conchiglia) assieme ad una crescita (omotetia) che proceda con una opportuna progressione geometrica tale da rispettare il principio di autosimilitudine.

Descrivendo la curva generatrice in forma parametrica in funzione di un opportuno parametro s , si ha che essa può venire espressa mediante il seguente vettore:

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \\ h(s) \end{bmatrix} \quad (9)$$

essendo f , g e h tre funzioni note del parametro s che caratterizzano la forma della curva generatrice.

L'operazione di omotetia è nel nostro caso esprimibile mediante la seguente matrice $O(\theta)$ già utilizzata per definire la elico-spirale (vedi formula (5)):

$$[O(\theta)] = \begin{bmatrix} e^{\theta \cot \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\theta \cot \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\theta \cot \alpha} \end{bmatrix} \quad (10)$$

mentre l'operazione di rotazione attorno all'asse z è esprimibile mediante la matrice $R(\theta)$ data da:

$$[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & V \sin \theta & 0 \\ -V \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nelle (9) e (11) θ rappresenta l'angolo di rotazione attorno all'asse delle z misurato a partire dal semiasse positivo delle x e considerato positivo se in senso antiorario, mentre V è un parametro che definisce il senso di avvolgimento della superficie attorno all'asse delle z ($V=1$ in senso orario (destrogiro) $V=-1$ in senso antiorario (levogiro)).

Fatte queste premesse, la relazione generale che fornisce le equazioni in forma parametrica della superficie della conchiglia è:

$$\begin{bmatrix} X(s, \theta) \\ Y(s, \theta) \\ Z(s, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta \cot \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\theta \cot \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\theta \cot \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & V \sin \theta & 0 \\ -V \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \\ h(s) \end{bmatrix} \quad s \in [s_{\min}, s_{\max}] \quad \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \quad (12)$$

da cui:

$$\begin{cases} X(s, \theta) = e^{\theta \cot \alpha} (\cos \theta f(s) + V \sin \theta g(s)) \\ Y(s, \theta) = e^{\theta \cot \alpha} (-V \sin \theta f(s) + \cos \theta g(s)) \\ Z(s, \theta) = e^{\theta \cot \alpha} h(s) \end{cases} \quad s \in [s_{\min}, s_{\max}] \quad \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \quad (13)$$

Nelle (12) e (13) notiamo che sono definiti anche gli intervalli di definizione per i parametri s e θ , in particolare, per quanto riguarda s , se $s_{\min} = s_{\max}$ abbiamo che la curva generatrice è chiusa. D'ora in poi ometteremo, per brevità, nelle equazioni che seguiranno, gli intervalli di definizione dei parametri.

Per definire esplicitamente la superficie descritta dalle (13), occorre caratterizzare le funzioni $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$ presenti nella (9).

Come già osservato, la curva generatrice che meglio si presta a descrivere l'apertura della conchiglia è l'ellisse; conviene fornire per i nostri scopi una rappresentazione parametrica dell'ellisse in funzione dell'angolo polare s definito come in fig.7 assieme ad altre grandezze già definite precedentemente; inoltre, per semplicità, si assume che l'ellisse giaccia sul piano xz .

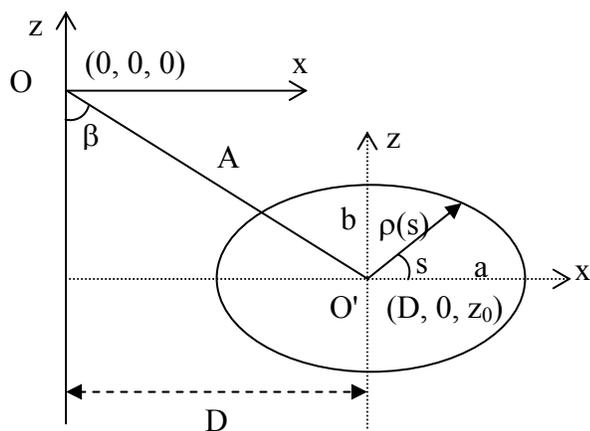


Fig.7: Curva generatrice ellittica avente semiassse orizzontale a e verticale b ; l'ellisse è definita in funzione del parametro s .

L'ellisse, rispetto al centro di similitudine O è definita mediante le seguenti equazioni in forma parametrica:

$$\begin{cases} x(s) = \rho(s) \cos(s) + D \\ y(s) = 0 \\ z(s) = \rho(s) \sin(s) + z_0 \end{cases} \quad (14)$$

essendo $\rho(s)$ la distanza di un punto generico dell'ellisse dal suo centro O' di coordinate $(D, 0, z_0)$; tale distanza è espressa dalla formula:

$$\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(s)}{a^2} + \frac{\sin^2(s)}{b^2}}} \quad (15)$$

con a e b la lunghezza dei semiassi orizzontali e verticali rispettivamente.

Ricordando le (9), (15), (7) e (8) e sostituendo la (14) nella (13) si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(s, \theta) = e^{\theta \cot \alpha} \left(\frac{\cos s}{\sqrt{\frac{\cos^2(s)}{a^2} + \frac{\sin^2(s)}{b^2}}} + D \right) \cos \theta \\ Y(s, \theta) = -V e^{\theta \cot \alpha} \left(\frac{\cos s}{\sqrt{\frac{\cos^2(s)}{a^2} + \frac{\sin^2(s)}{b^2}}} + D \right) \sin \theta \\ Z(s, \theta) = e^{\theta \cot \alpha} \left(\frac{\sin s}{\sqrt{\frac{\cos^2(s)}{a^2} + \frac{\sin^2(s)}{b^2}}} - D \cot \beta \right) \end{array} \right. \quad (16)$$

Le (16) sono dunque le equazioni in forma parametrica di un modello semplificato di conchiglia caratterizzato dai seguenti cinque parametri:

- D che è in relazione alla distanza della curva generatrice dall'asse;
- α che è in relazione al fattore di crescita della conchiglia;
- β che caratterizza l'elongazione in senso verticale della conchiglia;
- a e b che descrivono la forma dell'apertura.

Ricordiamo che V , il quale può assumere valore 1 o -1 , è in relazione unicamente al senso di avvolgimento delle spire, ma non influenza, a differenza gli altri parametri, la forma della conchiglia.

È utile adimensionalizzare le equazioni (16) introducendo i seguenti parametri adimensionali;

$$S = \frac{b}{a} \quad (17)$$

$$d = \frac{D-a}{D+a} \quad D \geq a \quad (18)$$

ottenendo così dalla (16):

$$\left\{ \begin{array}{l} X^*(s, \theta) = \frac{X(s, \theta)}{D} = e^{\theta \cot \alpha} \left(\frac{1-d}{1+d} \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s + \frac{\sin^2(s)}{S^2}}} + 1 \right) \cos \theta \\ Y^*(s, \theta) = \frac{Y(s, \theta)}{D} = -Ve^{\theta \cot \alpha} \left(\frac{1-d}{1+d} \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s + \frac{\sin^2(s)}{S^2}}} + 1 \right) \sin \theta \\ Z^*(s, \theta) = \frac{Z(s, \theta)}{D} = e^{\theta \cot \alpha} \left(\frac{1-d}{1+d} \frac{\sin s}{\sqrt{\cos^2 s + \frac{\sin^2(s)}{S^2}}} - \cot \beta \right) \end{array} \right. \quad (19)$$

Le equazioni adimensionali (19) hanno il vantaggio di dipendere da quattro anziché cinque parametri; inoltre questi parametri sono tutti, a loro volta adimensionali. In particolare S ($S \in [0, \infty)$) descrive l'eccentricità dell'apertura (nel caso in cui $S=1$ si ha una apertura di forma circolare) mentre d ($d \in [0, 1)$) è in relazione alla distanza dell'apertura dall'asse della conchiglia (nel caso in cui $d=0$ l'apertura è tangente all'asse).

INFLUENZA DEI PARAMETRI

Possiamo ora, dando specifici valori ai parametri α, β, d, S , rappresentare alcune superfici che già descrivono con buona approssimazione molti aspetti della morfologia delle conchiglie reali.

Ad esempio, le fig. 8 (a,b,c,d) descrivono l'effetto della variazione del parametro β per valori decrescenti mentre i valori degli altri parametri sono costanti e pari a: $\alpha=85^\circ$ (equivalente ad un valore di tasso di espansione delle spire pari a $W=1.733$ (vedi formula (4)), $S=1$ (apertura circolare), $d=0$.

Come si può notare, per $\beta=90^\circ$, si ha una conchiglia *planispirale*, ovvero le spire si avvolgono attorno all'asse della conchiglia senza alcun avanzamento lungo di esso; invece per valori di β decrescenti, la traslazione delle spire lungo l'asse è via via sempre più marcata e le spire stesse sono sempre meno compatte e nel complesso la conchiglia assume una forma più snella e slanciata.

Se invece variamo il parametro d mantenendo α, β ed S costanti pari rispettivamente a: $\alpha=85^\circ, \beta=90^\circ, S=1$ otteniamo le fig. 9 (a,b,c,d); all'aumentare di d , osserviamo, come ci si poteva aspettare, una progressiva separazione delle spire.

Infine, variamo il parametro α mantenendo β, d, S costanti e pari rispettivamente a: $\beta=90^\circ, d=0, S=1$; i risultati sono mostrati nelle fig. 10 (a,b,c,d); si può chiaramente notare la transizione verso forme di conchiglie discoidali, tipiche dei bivalvi, al diminuire dell'angolo α (ovvero al crescere del parametro W) che regola il tasso di espansione delle spire.

Per quanto riguarda il parametro S , nel prossimo paragrafo sono mostrati alcuni esempi di conchiglie aventi aperture ellittiche con gradi di eccentricità differenti.

Dal punto di vista matematico si può affermare che, ad ogni quaterna (α, β, d, S) corrisponde una specifica superficie, ma non è detto che questa sia un modello di conchiglia di mollusco realmente esistente o esistito nel passato; in effetti Raup in [3] ha osservato che le forme reali occupano solo deter-

minati sottoinsiemi, di quell'insieme molto più vasto di valori dei parametri (α , β , d , S), detto *morfospazio*, che sarebbero, almeno in linea ipotetica, possibili; quindi le quattro maggiori specie di invertebrati che hanno conchiglie spiraliformi, cioè bivalvi, brachiopodi, gasteropodi e cefalopodi, occupano solo determinate e limitate regioni all'interno del morfospazio lasciandolo in gran parte vuoto. Questo è un punto di particolare interesse per gli studiosi di morfogenesi, unitamente all'indagine delle cause specifiche che hanno reso impossibile l'evoluzione di determinate forme teoricamente plausibili.

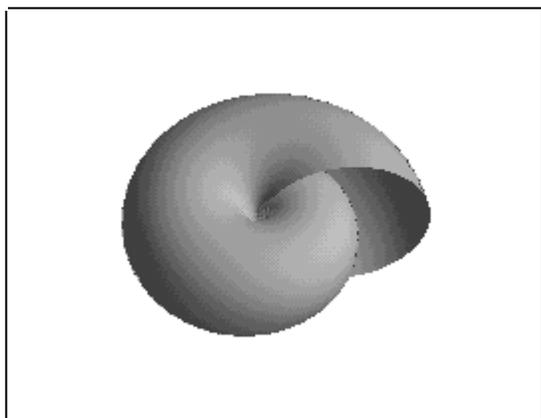


Fig.8a. Caso $\beta=90^0$

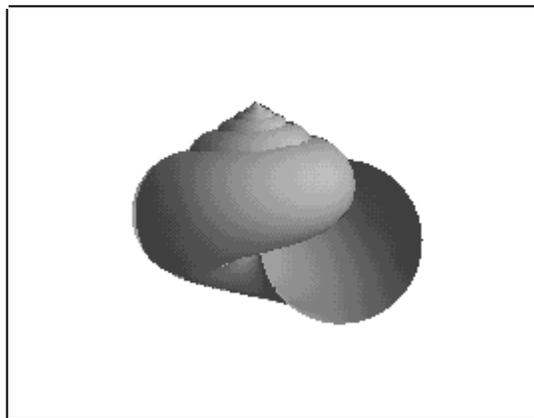


Fig.8b. Caso $\beta=30^0$

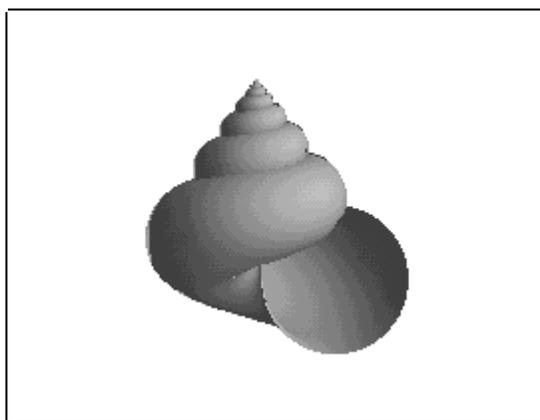


Fig.8c. Caso $\beta=20^0$

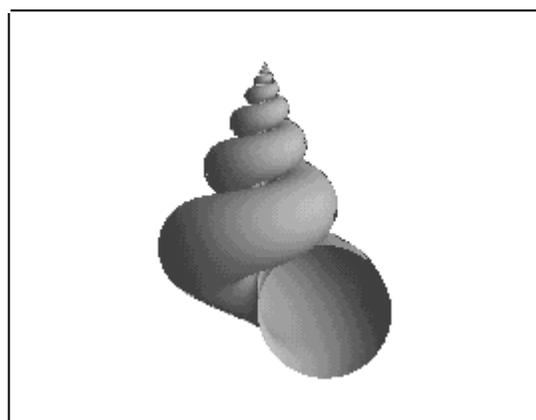


Fig.8d. Caso $\beta=15^0$

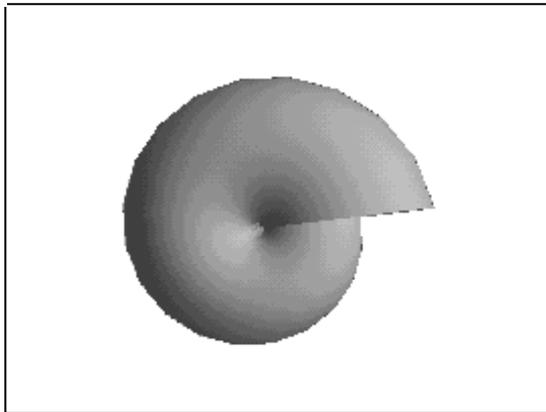


Fig.9a: $d=0$

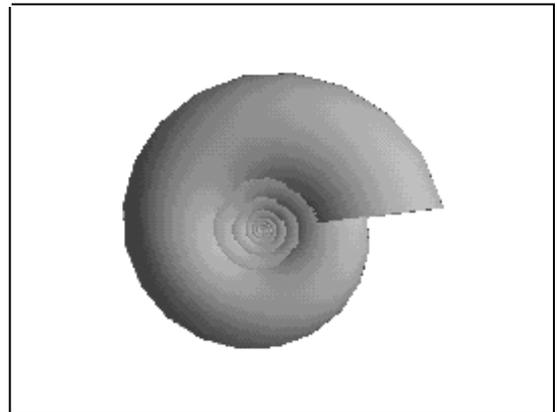


Fig.9b: $d=0.2$

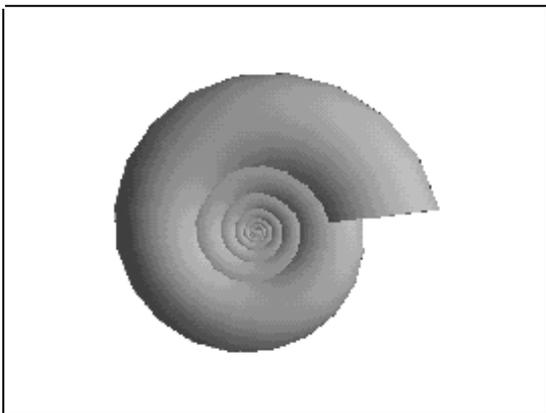


Fig.9c: $d=0.3$

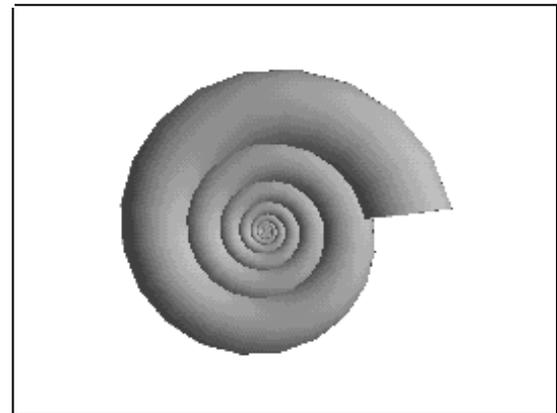


Fig.9d: $d=0.5$

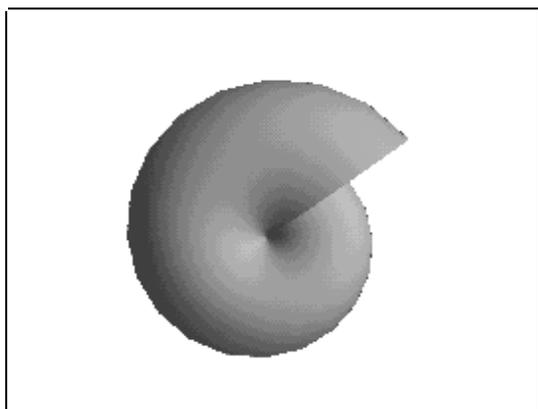


Fig.10a: $\alpha=85^\circ$

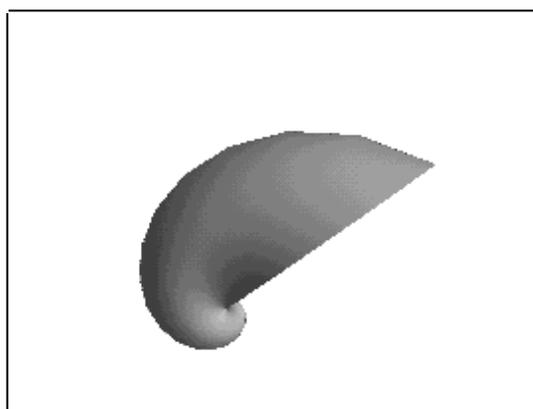


Fig.10b: $\alpha=65^\circ$

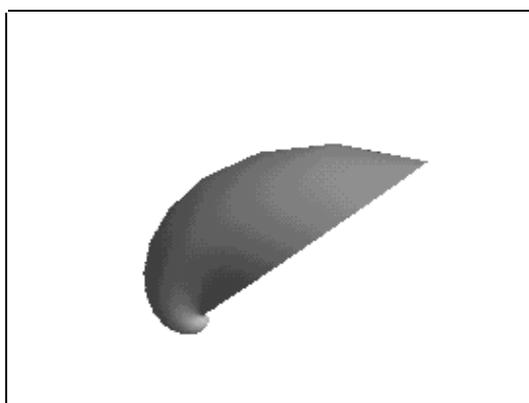


Fig.10c: $\alpha=55^\circ$

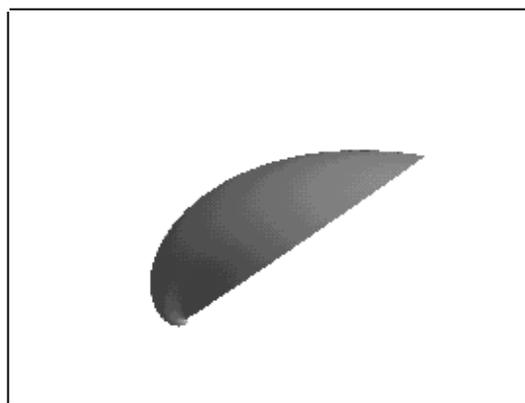


Fig.10d: $\alpha=45^\circ$

ALCUNI MODELLI DI FORME REALI

Sulla base dei dati* forniti in [4], è possibile ottenere un modello semplificato di alcune forme reali viventi o fossili; nella Tab.I che segue sono forniti, per ogni esemplare considerato, i dati necessari alla (19) per poter ottenere una rappresentazione grafica; si veda Fig.11.

Tab.I: Parametri caratterizzanti le forme mostrate in Fig.11 (in tutti i casi $V=1$, cioè il senso di avvolgimento delle spire è in senso orario)

	α^0	β^0	d	S
<i>Astroceras</i> (Ammonite fossile)	83.157	90	0.474	1
<i>Euhoplites</i> (Ammonite fossile)	80.765	90	0.2	0.667
<i>Nautilus</i>	79.796	90	0	0.6
<i>Epitonium</i>	87.136	10	0.2	1.2

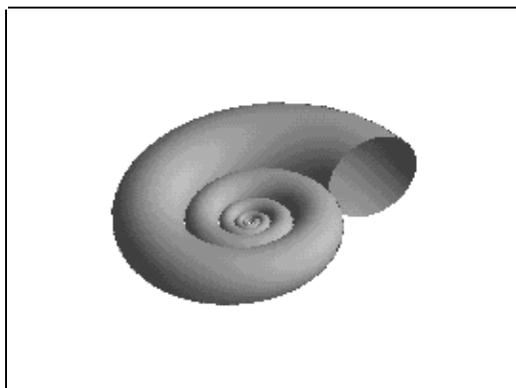


Fig.11a: *Astroceras*

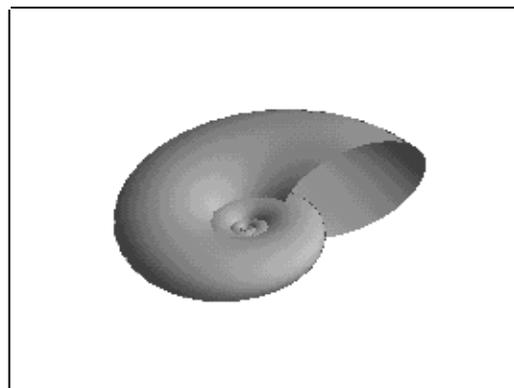


Fig.11b: *Euhoplites*

* Come specificato dagli autori, tali dati non derivano da effettive misure su un esemplare, ma sono stati dedotti in modo da adattare al meglio la superficie ottenuta mediante rappresentazione al computer le foto disponibili dell'esemplare stesso.

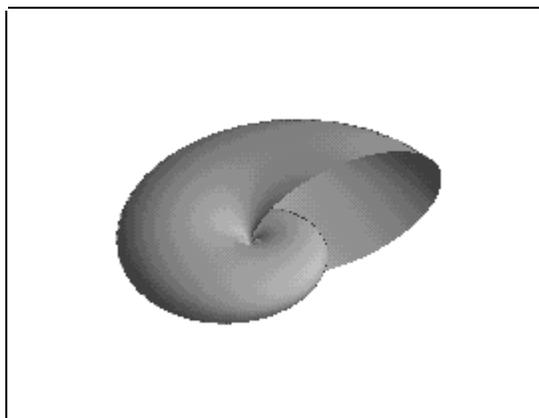


Fig.11c: Nautilus

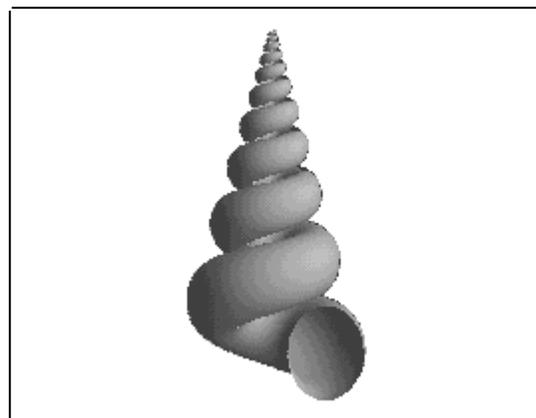


Fig.11d: Enitonium

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Come appare chiaro, il modello descritto in questo articolo non tiene conto dei vari tipi di ornamenti che appaiono su molti generi di conchiglie (protuberanze, coste, rigature), ma si limita a descrivere la conchiglia nella sua forma base. Altro aspetto da menzionare è l'orientamento del piano su cui giace la curva generatrice che potrebbe essere qualunque e non necessariamente coincidente col piano xz . Per questi ed ulteriori elementi di approfondimento rinviamo a lavori che descrivono modelli più complessi [5], [6], [7].

BIBLIOGRAFIA

- [1] D'Arcy W. Thompson: "Crescita e forma" (Edizione ridotta a cura di John Tyler Bonner), cap. VI, Bollati Boringhieri, Torino, 1992.
- [2] F. Calìo, E. Scarazzini: "Metodi matematici per la generazione di curve e superfici", CittàStudiEdizioni, Milano, 1997.
- [3] D. M. Raup: "Geometric Analysis of Shell Coiling: General Problems", *Journal of Paleontology*, Vol.40, no.5, September 1966, p. 1178-1190.
- [4] T. Phillips, S. Brook: "The Mathematical Study of Mollusk Shells", www.ams.org/new-in-math/cover/shell1.html
- [5] M. B. Cortie: "Models for mollusc shell shape", *South African Journal of Science*, Vol.85, July 1989, p. 454-460.
- [6] Illert C. (1990): "Nipponites Mirabilis. A Challenge to Seashell Theory?", *Il Nuovo Cimento*, vol.12 D, n. 10.
- [7] G.Lucca: "Modello matematico per la rappresentazione delle conchiglie", *Parva naturalia*, vol.7, 2005-2006, p.73-90. Disponibile su internet all'indirizzo www.matematicamente.it/applicazioni/conchiglie.pdf

Presenter Service

*Inventive Tool for
Video Proceedings*

*X-Presenter Service® trasformerà
in tempo reale le vostre lezioni
in aula e i vostri convegni
in contenuti multimediali
da distribuire su dvd,
siti internet e piattaforme di
e-learning.*



e-Conference solution

Via Trinchese, 87, 73100 Lecce - Italia
Tel/Fax +39 0832 318300, Skype alba.project
E-mail info@albaproject.it, Web Site www.albaproject.it

Latitudine e longitudine: come misurarle nel cortile di casa

di Diego Alberto

Questo articolo illustra come misurare la latitudine e la longitudine di un luogo: nel caso specifico, il Comune di Foglizzo, in Piemonte.

Per individuare univocamente un punto sulla Terra è sufficiente conoscere due coordinate: latitudine e longitudine. Nella sottostante fig.1¹ possiamo osservare come queste due grandezze vengano definite:

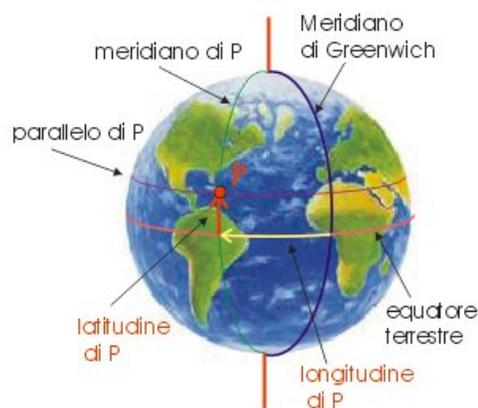


Fig 1

La *latitudine* geografica è la distanza angolare di un punto (P) dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto; la *longitudine* geografica di un luogo (P) è l'angolo tra il meridiano del luogo e il meridiano fondamentale (di Greenwich), è positiva ad ovest e negativa ad est di Greenwich.

Ricordiamo brevemente che per mezzogiorno locale intendiamo l'istante in cui il Sole raggiunge la massima altezza rispetto all'orizzonte (sud) e proietta le ombre più corte dell'intera giornata. Tali ombre indicano il nord geografico. Quest'ora non corrisponde, generalmente, al mezzogiorno nazionale, ovvero quello dei nostri orologi² (vedi *Equazione del Tempo*³).

Si può dimostrare che l'altezza⁴ del Sole è legata alla latitudine del luogo considerato indipendentemente dall'ora solare diurna e dal giorno dell'anno considerati. Per comodità noi sceglieremo di operare all'ora del mezzogiorno locale del giorno dell'Equinozio d'Autunno (23/9), in quanto le correzioni da apportare alle nostre misure, dovute all'inclinazione del piano equatoriale rispetto all'Eclittica, in questo specifico caso sono approssimativamente nulle.

Con riferimento alla figura 2 osserviamo la reciproca posizione della Terra e del Sole; l'inclinazione dell'Equatore rispetto al piano dell'Eclittica xy è di $23^\circ 27'$.

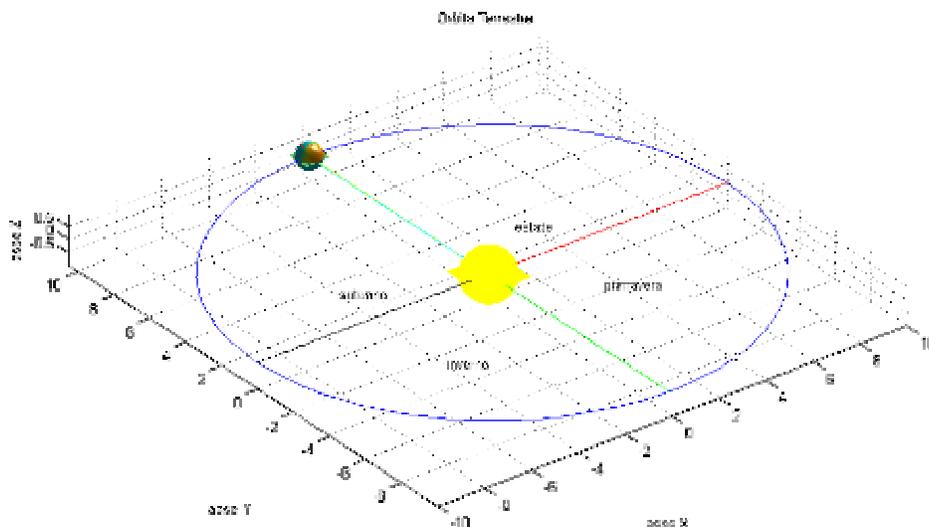


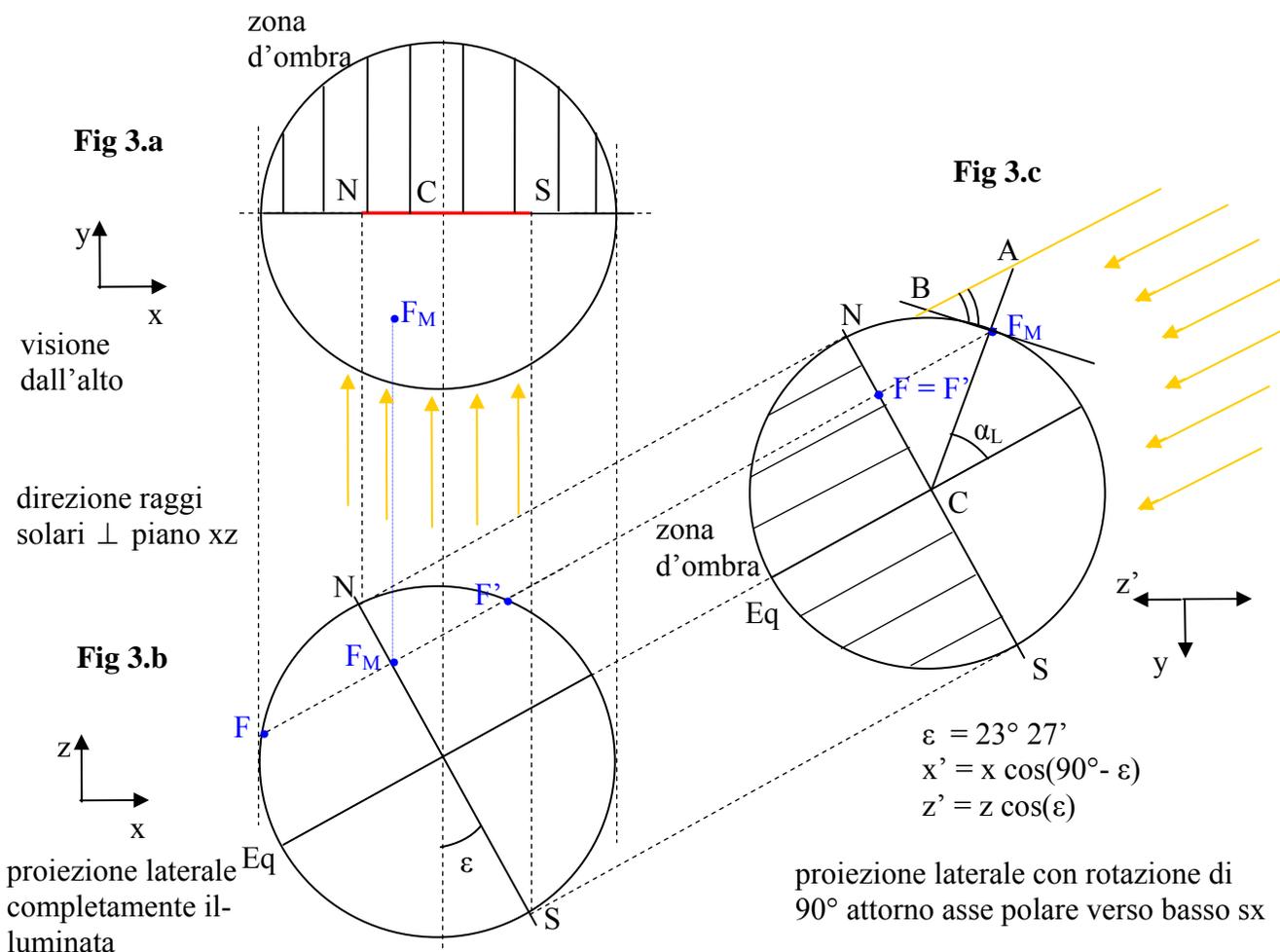
Fig. 2

Possiamo osservare più in dettaglio in fig.3a la proiezione sul piano xy di questa particolare configurazione orbitale, della quale ce ne viene fornita una visione dall'alto. La località è considerata nell'emisfero boreale ed è indicata con la lettera F , l'istante di mezzogiorno locale è individuato dalla lettera F_M ed il segmento FF' rappresenta la proiezione dell'arco di circonferenza percorso durante la fase diurna della giornata dal punto F sul piano xz . Infine sfruttando l'utile proiezione di fig.3b riusciamo a metterci nelle condizioni ideali di fig.3c, in cui al mezzogiorno locale il luogo considerato si trova sulla circonferenza.

Per cominciare dobbiamo avere un'idea indicativa dell'ora del mezzodì locale. Tale ora si può reperire da molti siti di astronomia, tra cui quello dell'Istituto Nautico "Artiglio" di Viareggio⁵, dove però si devono introdurre, e quindi già conoscere, latitudine e longitudine (reperibili approssimative su www.google.earth.com). Sembrerebbe un *empasse*, perché sono quantità che dovremmo ricavare, ma ricordiamo che ci servono solo per ottenere un'ora indicativa del mezzogiorno locale, nell'intorno del quale effettueremo le nostre misurazioni.

Consideriamo ad esempio la località di Foglizzo Canavese, il mezzogiorno locale per la giornata del 23/9 è dato intorno alle 13.22 nazionali. Con un piano in legno opportunamente posto in orizzontale, magari con l'aiuto di livelle a bolle d'aria, possiamo ottenere un valido basamento su cui misurare l'ombra di un oggetto proiettata dal Sole. Al posto di un oggetto generico possiamo utilizzare una sorta di gnomone in legno sostenuto da due squadrette da disegno tecnico, in modo da garantire con semplicità un angolo retto anche con il basamento.

Supponiamo quindi di iniziare le misurazioni alle 13.17 e minuto dopo minuto annotiamo ora e lunghezza dell'ombra. Dopo circa una decina di misurazioni dovremmo sicuramente aver superato l'ora del mezzogiorno locale, la quale corrisponde alla minima lunghezza dell'ombra (in quanto il Sole è nel punto più alto raggiungibile nella giornata).



FF' proiezione della circonferenza disegnata dalla rotazione del punto in 24 ore attorno all'asse terrestre(NS)

Individuata questa ora, tenendo conto che si tratta dell'ora estiva (quindi non solare = invernale) e della correzione dovuta all'*Equazione del Tempo*³ (differenza tra il giorno solare medio e lo specifico giorno considerato), possiamo ricavare la *Costante Locale*³, ovvero il tempo che impiega il Sole a spostarsi, nel suo moto apparente, dal meridiano nazionale di riferimento (Meridiano Etno 15° E da Greenwich per l'Italia) al meridiano locale del luogo che stiamo considerando. Sapendo che 15° corrispondono ad un'ora ($360^\circ / 24$ ore), calcolata la Costante Locale e trasformata in gradi, otteniamo una quantità che sottratta ai 15° di longitudine Est del Meridiano Etno ci restituisce la longitudine della nostra località italiana considerata.

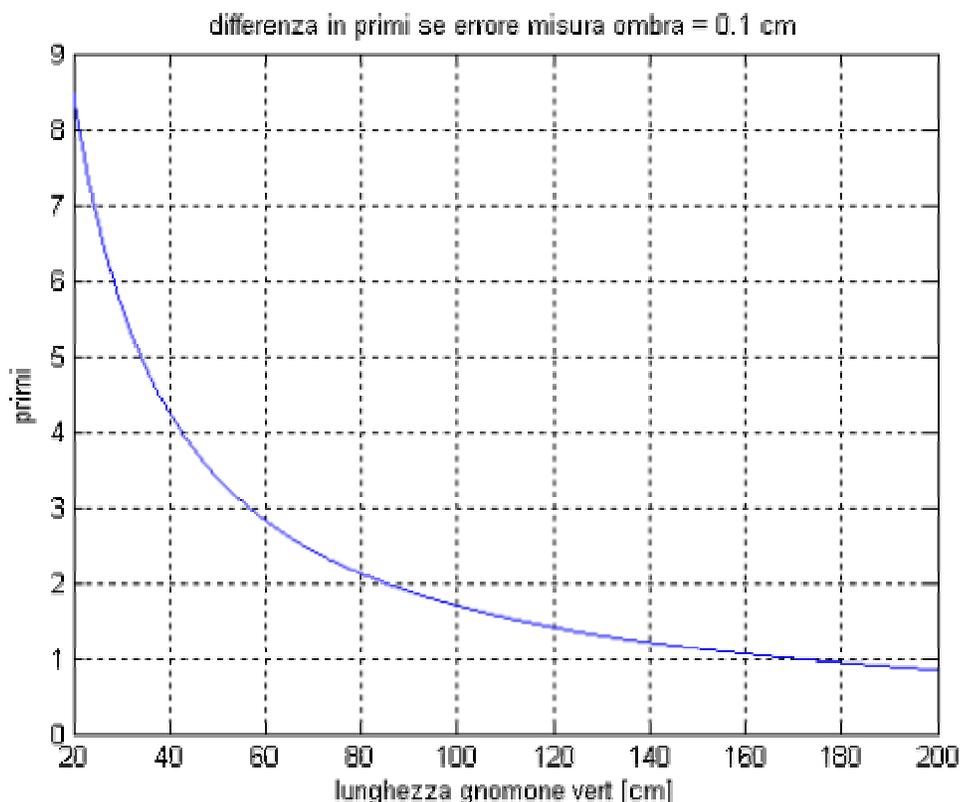
Per quanto riguarda la latitudine (Nord) α_L , con riferimento alla figura 3c, la lunghezza AF_M dell'oggetto perpendicolare a terra è nota, e la misura dell'ombra BF_M al mezzogiorno locale è stata effettuata. Possiamo quindi ricavare:

$$\hat{A}BF_M = \arctan\left(\frac{AF_M}{BF_M}\right) \quad B\hat{F}_MA = 90^\circ \text{ per costruzione}$$

$$F_M\hat{A}B = \alpha_L \text{ opposti al vertice} \quad A\hat{B}F_M = 180^\circ - 90^\circ - \alpha_L$$

$$\alpha_L = 90^\circ - A\hat{B}F_M$$

Resta infine da considerare la lunghezza dello gnomone: supponendo idealmente di non avere errore sulla misura della lunghezza dello stesso, l'errore sulla misura dell'angolo calcolato dipende solo dall'incertezza della misura dell'ombra proiettata. Decidendo di utilizzare un metro millimetrato, l'errore assoluto è dell'ordine del millimetro. Ecco qui di seguito un grafico che mette in relazione l'errore sull'angolo in funzione della lunghezza dello gnomone.



Scegliamo una lunghezza di 175 cm, in modo da avere idealmente un errore dell'ordine di un primo di grado sul calcolo dell'angolo di latitudine.

Ecco i dati delle misurazioni:

<i>ore</i>	<i>min</i>	<i>cm</i>	<i>altezza</i>	<i>latitudine</i>
13	17	176,8	44,71	45° 17' 37''
13	18	176,8	44,71	
13	19	176,8	44,71	
13	20	176,7	44,72	
13	21	176,7	44,72	
13	22	176,7	44,72	
13	23	176,7	44,72	
13	24	176,8	44,71	
13	25	176,8	44,71	

Come si può osservare, abbiamo ottenuto per quattro minuti circa la stessa lunghezza al millimetro, si è quindi optato per il valore di mezzo (ore 13:21:30) che determina comunque un valore di Latitudine Nord di 45° 17' 37'' (anche se abbiamo riportato i secondi, l'errore associato è di circa 1').

Fig.5. L'apparecchiatura utilizzata per determinare latitudine e longitudine.



Essendo la differenza in tempo tra il mezzogiorno nazionale e quello solare di $1h\ 21m\ 30s$ (circa) e la correzione del tempo medio (*Equazione del Tempo*) per la giornata del 23/9 di $+7m\ 14s$, si può ricavare la Costante Locale di Foglizzo: $28m\ 44s$, che trasformata in gradi diventa $7^\circ\ 11'$ (a Ovest del Meridiano Nazionale); quindi possiamo ricavare una Longitudine Est di $7^\circ\ 49'\ 01''$.

I relativi dati ottenuti consultando *Google.Earth* sono Latitudine Nord $45^\circ\ 16'\ 45''$, Longitudine Est $7^\circ\ 49'\ 20''$. Ricordiamo, infine, che la lunghezza di un meridiano è approssimativamente 40009 km , la quale corrisponde ad un angolo giro (360°); di conseguenza, il valore medio⁶ di 1° è $111,121\text{ km}$, quello di $1'$ è 1852 m (che corrisponde al miglio marino) e quello di $1''$ è $30,86\text{ m}$.

Se l'errore che abbiamo commesso nella misurazione della latitudine e longitudine fosse solamente di $1'$, rimarremmo comunque all'interno del nostro Comune, e questo ci gratifica.

Bibliografia e riferimenti

- 1) Immagine e definizioni <http://www.vialattea.net>
- 2) Vedi De Illuminatione Solis – Diego Alberto, marzo 2005 – Biblioteca Comunale Foglizzo – oppure equivalentemente Illuminazione solare giorno per giorno <http://www.matematicamente.it/astrologia/index.htm>
- 3) Equazione del Tempo: vedi cap. 1.7 di uno dei riferimenti al punto 2)
- 4) Altezza del Sole: vedi cap. 1.4-5 di uno dei riferimenti al punto 2)
- 5) Istituto Nautico Artiglio -Viareggio- <http://www.nauticoartiglio.lu.it>
- 6) Si tratta di un valore medio in quanto il meridiano non è una circonferenza perfetta poiché, a causa della forza centrifuga terrestre indotta dalla rotazione, la differenza tra il raggio equatoriale e quello polare è di circa $21,38\text{ km}$
- 7) I grafici di fig. 2, quello relativo all'errore sulla misurazione e quelli delle pagine seguenti sono stati ricavati con il programma *meridia2* ideato e scritto da D. Alberto, marzo 2005, in ambiente operativo Matlab 6.5



Renato Centonze
Grande concerto d'erba

Previsioni sul prezzo del petrolio

di Antonello Urso

Precedentemente, l'indagine sul petrolio non si distingueva da quella sulle altre merci e si rifaceva ai modelli di scambio internazionale della teoria economica tradizionale. Successivamente agli shock petroliferi degli anni '70, il petrolio assunse il ruolo di merce meritevole di particolare attenzione. Tali crisi posero infatti in luce quanto l'economia dei Paesi occidentali fosse dipendente da questa risorsa naturale, e inoltre radicarono la percezione della sua esauribilità. Da allora si assistette a un diffondersi dei modelli di previsione dei prezzi petroliferi da parte di diversi operatori: organismi internazionali, Banche Centrali, Istituti Universitari, etc.

Attualmente ci troviamo in una fase di plateau [Punto di massimo relativo piuttosto appiattito] della produzione annua di petrolio. In pratica ci troviamo in mezzo al famoso *picco di Hubbert* [1]; superata questa fase - che durerà forse meno di un anno - ci si aspetta un declino del tasso di produzione con conseguenti variazioni più consistenti dei prezzi. L'aumento del prezzo di una materia prima in fase di esaurimento aumenta quando il mercato si "accorge" che questa risorsa è destinata a terminare anche se all'inizio apparentemente i dati non sono del tutto disastrosi; questo nel nostro caso è avvenuto circa dal 2004 in poi (anche se c'è stato un primo segnale nell'intervallo 1999-2004) come si può vedere dal seguente grafico, e segnala certamente il livello di allarme del mercato.

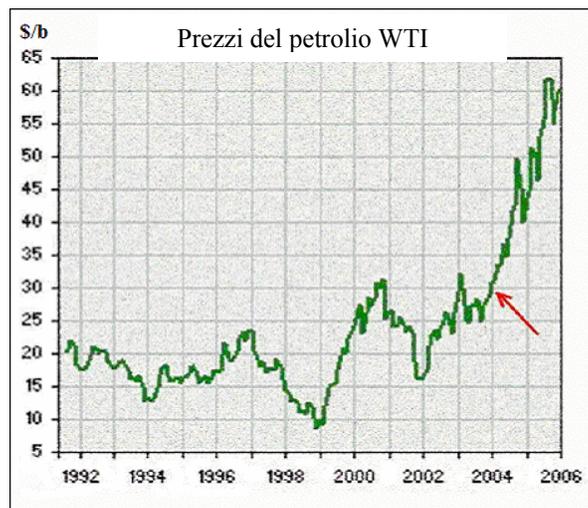


Figura 1

Quando parliamo di prezzo del petrolio ci troviamo in una "zona di frontiera" per quanto riguarda i modelli economici, e in questo campo è giusto parlare più di probabilità che di altro. La nostra società è basata sul modello della "crescita", ed è naturalmente portata ad avere una crescita esponenziale della domanda; d'altro canto l'esauribilità di questa fonte energetica procederà secondo la teoria di Hubbert seguendo un esponenziale decrescente dopo aver raggiunto il picco massimo di produzione annua,

mentre la domanda sarà costretta a modificarsi di conseguenza. Sebbene sia possibile costruire modelli matematici più sofisticati, faremo l'ipotesi più semplice (adatta al breve-medio termine), e cioè che il divario tra domanda e offerta aumenti con legge esponenziale; in tal caso, è logico attendersi un aumento dei prezzi dello stesso tenore [2, 3] (anche se un po' anticipato dall'effetto allarme).

Vista l'importanza dell'argomento, cercheremo in questa sede di ricavare un modello matematico adatto per prevedere il prezzo del petrolio nei prossimi anni, tenendo conto che tali previsioni possono essere tanto meno affidabili quanto più si allontanano in avanti nel tempo.

Il prezzo di una materia prima come il petrolio procede a zig-zag seguendo le leggi del mercato, ma la tendenza dei principali punti di massimo e minimo relativo (rispettivamente in rosso e verde) è abbastanza netta, come si può vedere dalla fig. 2. Poiché all'inizio tutto si confonde con le fluttuazioni dei prezzi tipiche del mercato, dobbiamo stare attenti a prendere in considerazione solo i punti che rispettano un trend di tipo esponenziale crescente.



Figura 2: media mensile dei prezzi in dollari al barile

Avremo in teoria quindi (stimando i prezzi in dollari al barile e il tempo in anni) un esponenziale per interpolare i punti di massimo relativo:

$$P_M = P_{M0} \exp(\tau / k_1) \quad (1)$$

(Dove: $\tau = t - 2000$) e una funzione esponenziale per interpolare i punti di minimo relativo:

$$P_m = P_{m0} \exp(\tau / k_2) \quad (2)$$

Quindi avremo un valore medio:

$$P = (P_M + P_m) / 2 \quad (3)$$

un'incertezza assoluta:

$$\Delta P = (P_M - P_m) / 2 \quad (4)$$

e un'incertezza relativa:

$$E_r = \Delta P / P = (P_M - P_m) / (P_M + P_m) \quad (5)$$

Da un'analisi statistica della media mensile dei prezzi nell'arco di un anno si riscontra che l'incertezza relativa oscilla caoticamente intorno a un valore medio costante nel tempo intorno all'11-12%. Possiamo quindi supporre che l'incertezza relativa sia una costante indipendente dal tempo; questo è possibile come si può vedere se si sostituisce la (1) e (2) nella (5) se: $k_1 = k_2$.

Usando i dati di fig. 2 con il metodo dei minimi quadrati, otteniamo:

$$k_1 \cong 4.22 \quad ; \quad k_2 \cong 4.17 \quad \quad P_{M0} \cong 17.1 \quad ; \quad P_{m0} \cong 13.5$$

Scegliamo quindi un valore medio per il nostro modello matematico: $\bar{k} = 4.2$.

L'incertezza relativa è:

$$P_0 = (P_{M0} + P_{m0})/2 = 15.3 \quad ; \quad \Delta P_0 = (P_{M0} - P_{m0})/2 = 1.8 \quad ; \quad E_r \cong 12\%$$

L'andamento medio del prezzo (*in media mensile*) è:

$$P = 15.3 \exp(\tau / 4.2) \tag{6}$$

La formula valida per: $2007 \geq t > 2003$

Dal seguente grafico possiamo vedere più in dettaglio i particolari; i pallini rossi e verdi e in ultimo i blu (primi 11 mesi del 2006 in media mensile) sono i dati oggettivi, la curva nera rappresenta la (6), mentre le curve tratteggiate rossa e verde rappresentano l'incertezza.

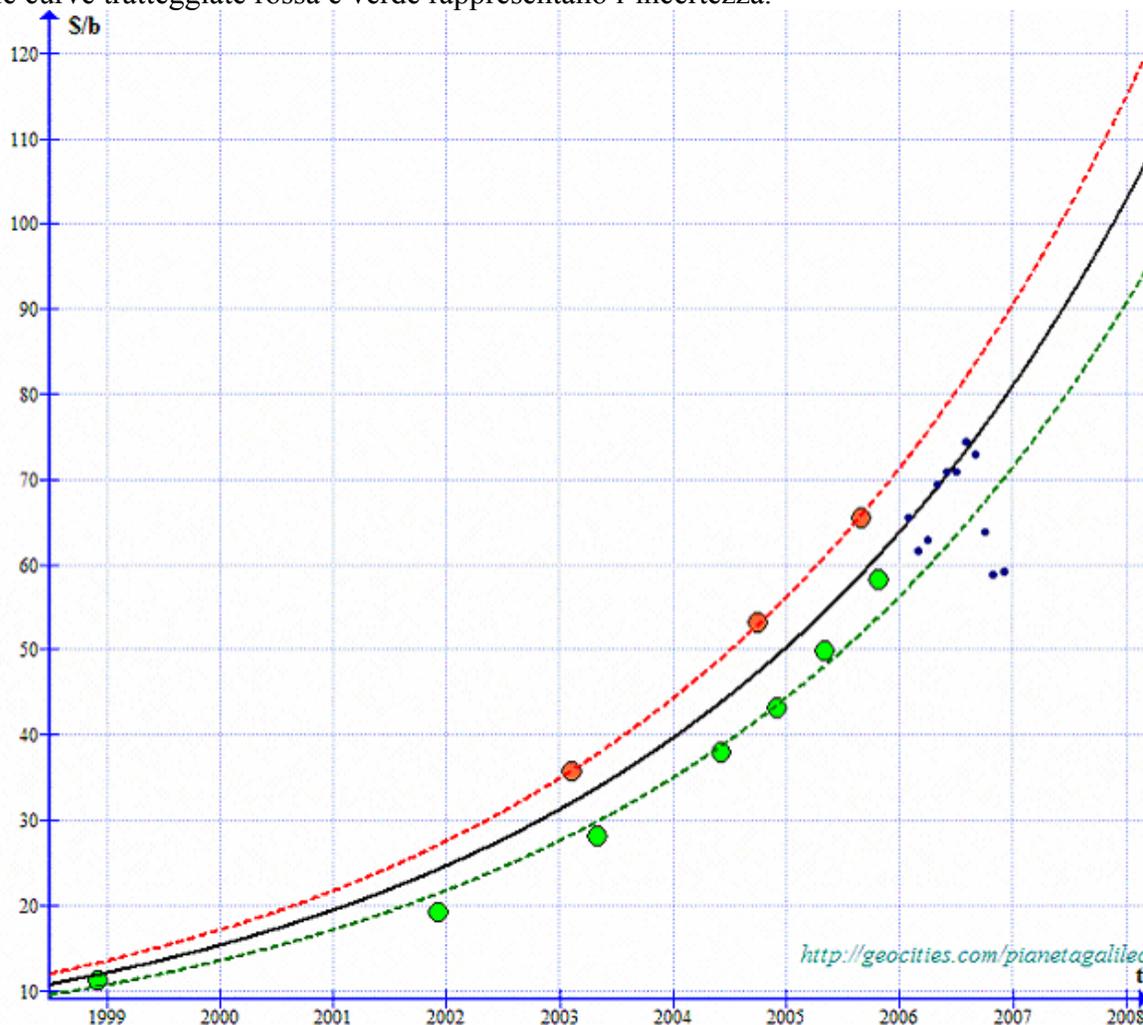


Figura 3

L'accordo è buono, ma poiché negli ultimi mesi c'è stata una caduta del prezzo possiamo fare adesso due ipotesi diverse:

- 1) La discesa è dovuta a fluttuazioni del mercato che tenderanno ad allinearsi al trend teorico. La (6) conserva la sua validità anche per $t > 2007$ e verso la fine dello stesso anno avremo un prezzo di 100 dollari al barile⁶.
- 2) Negli ultimi mesi tale discesa è dovuta probabilmente a una qualità inferiore del petrolio estratto e al calo strutturale della domanda che si è spostata più sul carbone fossile. I prezzi arrivati a questo punto rimarranno pressoché stabili almeno sino alla fine del 2007.

Il prezzo del petrolio naturalmente non salirà all'infinito, ma si arriverà ad un punto "critico" nel quale la bassa qualità del petrolio estratto (*in termini di EROEI*) farà di colpo scendere il prezzo a livelli molto bassi. Si assisterà allora a una discesa continua del prezzo accompagnata da una salita repentina dell'inflazione e del prezzo di gasolio e benzina (*che forse si potrà in parte compensare riducendone la qualità*), dato che ci sarà una maggiore spesa per la necessaria raffinazione.

Riferimenti:

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Picco_di_Hubbert

[2] Pindyck, R. S., 2001a, *The dynamics of commodity spot and futures markets: a primer*, MIT: MA 02142.

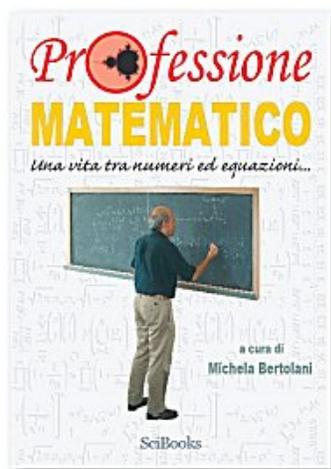
[3] Pindyck, R. S., 2001b, *Volatility and commodity price dynamics*, MIT: MA 02142

<http://petrolio.blogosfere.it>

http://finanza.repubblica.it/scripts/cligipsw.dll?app=KWF&tpl=kwfinanza\petrolio_hp.tpl

<http://www.aspoitalia.net/documenti/bardi/eroei/eroei.html>

<http://geocities.com/pianetagalileo>



PROFESSIONE MATEMATICO

12 interviste-biografie a matematici italiani famosi

(SciBooks, 288 pp., 24,00 €)

Tra gli intervistati:

**Corrado De Concini, Michele Emmer, Enrico Giusti,
Giorgio Israel, Piergiorgio Odifreddi, Mario
Primicerio, Alfio Quarteroni, Edoardo Vesentini!**

Per info, per ordinarne o regalarne una copia vai sul sito:

www.scibooks.it

La palestra della matematica

di Luca Caridà

Matefitness, cioè “allena la mente”. La prima palestra della matematica offre ai propri giocatori l’opportunità di incontrare da vicino questa materia, senza più timori reverenziali.

Matematica e paura: due parole che spesso si ritrovano, senza una colpa, nella stessa frase o nello stesso pensiero. Più o meno tutti abbiamo dovuto affrontare nella nostra vita una sensazione di inquietudine di fronte a un problema matematico: alcuni sono riusciti a vincerla, altri hanno creduto di doversi arrendere nel nome di una dichiarata - ma mai provata - mancata propensione verso la matematica.

A Genova, dall’aprile di quest’anno, è partita la sperimentazione di *Matefitness*: la prima “palestra della mente” rivolta a chi vuole confrontarsi con la paura della matematica o vuole consolidare il proprio amore verso questa disciplina.

Matefitness nasce da un progetto di Manuela Arata, Giovanni Filocamo e Giuseppe Rosolini ed è un’iniziativa promossa dall’Ufficio PSC del Consiglio Nazionale per le Ricerche e da Genova Palazzo Ducale in collaborazione con il Comune di Genova e la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell’Università di Genova. Fondamentale il contributo dell’Associazione Festival della Scienza, dalla cui esperienza provengono gli oltre cinquanta animatori scientifici che operano quotidianamente negli spazi offerti dall’organizzazione di Palazzo Ducale, nel cuore del centro storico di Genova.

La missione fondamentale di questo progetto è quella di demolire il luogo comune secondo cui l’abilità matematica è una dote innata che o si

possiede, o si deve soltanto ammirare da lontano. Adam Smith sosteneva che i numeri sono “fra le idee più astratte che la mente umana sia in grado di formulare”, tuttavia è noto che la capacità di *contare* è universale: la possiedono, cioè, anche i popoli il cui vocabolario matematico contiene solo *uno, due e molti*. Non a caso si deve parlare di un “vocabolario matematico”: la matematica è un linguaggio e come tale può essere imparato. Ciò che può cambiare sono le strategie e i metodi di apprendimento, i fattori che possono ostacolare o favorire la sua comprensione e i percorsi attraverso i quali la matematica può diventare, da peggior nemica, forse non l’amore della propria vita ma almeno una buona compagna di viaggio.



L’ingresso di Matefitness affacciato su piazza Matteotti, sullo scenario di Palazzo Ducale.

Matefitness non intende perseguire fini strettamente didattici, per i quali esistono opportune strutture deputate, bensì vuole costituire quel ponte ideale fra senso comune e conoscenza scientifica la cui mancanza risulta, a oggi, una delle principali cause della difficoltà di confrontarsi con questa disciplina.

Per questo la Palestra della Matematica si rivolge al proprio pubblico (ossia a chiunque) proponendo un approccio informale, ludico, fortemente basato sull'interazione fra l'animatore scientifico e il visitatore che, in Palestra, acquista il titolo di "Giocatore".

L'operatività, il dover fare, il mettere le mani sugli oggetti e doverli manipolare costituisce il vero valore aggiunto di un'esperienza di questo tipo, e permette al visitatore di essere contemporaneamente protagonista e spettatore delle attività che svolge.

Non a caso *Matefitness* si propone come un contesto aperto, nel quale le attività da svolgere sono concordate e incoraggiano all'esplorazione spontanea: non è raro osservare visitatori che entrano in palestra credendo di non aver nulla a che fare con la matematica e si ritrovano, dopo poche ore, a riuscire a formalizzare concetti di una certa complessità.

Ma perché esiste il bisogno di far "scoppiare la pace" fra la matematica e chi la affronta? Il problema non è per nulla banale e non si limita a rimuovere il terribile ricordo della propria profes-



soressa di matematica, o a rendere più gradevoli e solubili i giochi che si trovano pubblicati su giornali e riviste.

La matematica costituisce oggi la base a cui sono associate numerose altre competenze di tipo logico, tecnico e scientifico. Un approccio problematico a questa disciplina può porre un serio ostacolo allo sviluppo di un percorso formativo in molti altri campi. Non è spropositato parlare di un vero e proprio danno sociale: alla base delle scelte o delle rinunce formative di moltissime persone c'è appunto l'ansia di dover aver a che fare con la matematica.

Il rapporto fra animatore scientifico e pubblico: la chiave dell'educazione informale.

Il numero di laureati in materie tecnico-scientifiche in India, Corea e Cina, dove il rapporto fra studenti e matematica è ben più sereno, è esageratamente più grande di quello che possiamo osservare nella maggior parte dei paesi occidentali, dove la *fobia* verso tale disciplina è passata da luogo comune a dato di fatto. Non è azzardato perciò individuare in questa difficile convivenza fra numeri e persone uno dei fattori che incidono, o incideranno, nelle differenze a livello di sviluppo fra il nostro Paese e quelli emergenti.

Dalla riflessione sulle paure che ognuno di noi ha dovuto affrontare di fronte ai primi quadretti si è finito dunque a considerare quali riflessi tali paure possano avere in sistemi complessi e estesi come quelli macroeconomici.

Sullo sfondo, idealmente, si colloca il pensiero di W.W. Sawyer, uno dei più grandi insegnanti di matematica del secolo scorso, che osserva come "la capacità di pensare in termini matematici sarà presto data per scontata, così come lo è attualmente la capacità di leggere un giornale". L'esperienza di *Matefitness* cerca di rappresentare, se vogliamo, un nuovo metodo di lettura creativa della matematica che permetta di rispondere a una necessità emergente nella maniera più semplice, accattivante e utile possibile.

Matematica d'oggi: la teoria dei giochi

di Fioravante Patrone

A chi dare le licenze per i cellulari di terza generazione? E a che “prezzo”? Quali sono i geni che hanno maggior “potere” nell’insorgenza di un certo tipo di cancro? Come mai la via verso il protocollo di Kyoto è stata così irta di ostacoli, e lo sarà ancora? Perché il software per il *peer-to-peer* BitTorrent funziona così bene? È giusto bluffare a poker? Lo sapete che nel gioco “hex” il primo giocatore ha certamente una strategia vincente, anche se nessuno sa quale sia, purché le dimensioni del tavolo di gioco (l’alveare) non siano troppo piccole?

Cos’hanno in comune tutte queste domande concernenti tematiche tanto lontane fra loro, ed alle quali ne potremmo aggiungere ancora molte altre, in campi disparati (logica modale, biologia evuzionistica, *management science*, etc.)? La risposta è ovvia, dato il titolo di questo articolo: la *teoria dei giochi* (TdG). Sono convinto, però, che senza aver potuto leggere il titolo non sarebbe stato così facile rispondere. Va da sé che non spiegherò, in poche paginette, il ruolo della TdG in tutti questi contesti che ho menzionato. Mi limiterò ad alcuni esempi. Ma prima farò un breve cenno a cosa è, in estrema sintesi, la TdG.

La TdG si occupa di situazioni di interazione strategica, in cui più decisori devono fare delle scelte, il complesso delle quali determinerà il “risultato”, l’esito finale. Di norma, i decisori coinvolti hanno delle preferenze rispetto ai possibili esiti finali: preferenze che usualmente sono differenti, a volte persino contrapposte. Ciò che rende difficile la scelta da fare per ciascuno dei decisori coinvolti è che l’esito dipende dalla scelta di tutti, e il fatto che normalmente siano presenti insieme interessi convergenti e divergenti fa sì che non sia affatto ovvio quale decisione prendere.

Un classico caso è il *dilemma del prigioniero*. Trascuro la storia che ha dato il nome a questo esempio, per dare enfasi a ciò che davvero è importante: il modello astratto e la sua analisi. La situazione si può rappresentare con una tabella*:

I \ II	L	R
T	3 3	1 4
B	4 1	2 2

Ora, la caratteristica saliente e molto “fastidiosa” di questo gioco è che esiste un modo “ovvio” di giocarvi per un decisore razionale (per il giocatore I scegliere *B* e per il giocatore II scegliere *R*), che però al contempo dà luogo a un risultato inefficiente: la scelta di (*T,L*) darebbe un risultato migliore per entrambi. Non è il fatto che la conseguenza di un’interazione fra decisori sia inefficiente a disturbare, bensì che siano coinvolti giocatori razionali e intelligenti, i quali hanno, per giunta, un’informazione completa sulla struttura dell’interazione in cui sono coinvolti.

È possibile uscire dalla “trappola” dell’inefficienza qualora siano disponibili certe condizio-

* Il significato della tabella è il seguente. Assumiamo che i due giocatori abbiano a disposizione due scelte ciascuno (*T* o *B* per il giocatore I, *L* o *R* per il giocatore II) e che il risultato derivante dalle scelte operate sia diversamente “apprezzato” dai due giocatori. I numeri in tabella servono proprio per indicare le preferenze dei giocatori. In ogni cella il numero a sinistra riguarda il giocatore I, quello a destra il giocatore II. Da qui leggiamo che, essendovi, per I, il numero 4 in corrispondenza di (*B,L*) e 3 in corrispondenza di (*T,L*), egli preferisce l’esito derivante dalla scelta di (*B,L*) a quello indotto da (*T,L*).

ni. Una è che i giocatori si accordino a giocare (T, L). Ma questo accordo non è stabile se non vi è la possibilità, per i giocatori, di renderlo vincolante: senza tale possibilità, l'accordo è "scritto sull'acqua"; se invece questa possibilità esiste, allora si esce dalla trappola dell'inefficienza (e ci si trova nel contesto dei cosiddetti *giochi cooperativi*). Ma non sempre si ha a disposizione questo "quadro istituzionale".

Un'altra via che porta alla "risoluzione" del dilemma è il dover "giocare" più di una volta. Per fare un esempio molto semplice, si potrebbe immaginare che i giocatori, fatte le scelte ed osservatene i risultati, si trovino a rigiocare con una certa probabilità positiva p . Se così è (e purché il valore di p non sia troppo basso), si può uscire dalla trappola dell'inefficienza usando una strategia del tipo seguente (descriviamo quella per il giocatore I; per II si può usare la strategia "gemella"): "io gioco T la prima volta e poi continuo a giocare T finché l'altro gioca L ; non appena II giocasse R , io passerei a giocare B per sempre".

Ciò che rende questa strategia molto interessante è che non c'è bisogno di alcuna "autorità" esterna ai due giocatori per farla rispettare. In effetti, si può dimostrare che la coppia costituita da questa strategia e dalla sua "gemella" per II soddisfa le condizioni della soluzione più "accreditata" in TdG, ovvero è un *equilibrio di Nash* per il gioco ripetuto (purché, ribadisco, il valore di p non sia troppo piccolo).

Ed eccoci allora al protocollo di Kyoto ed a BitTorrent. Il riferimento a Kyoto è dovuto al fatto che le difficoltà incontrate sulla strada della riduzione dell'emissione dei gas serra sono in parte dovute al fatto che non esiste un'autorità sovranazionale con l'autorevolezza necessaria per far rispettare accordi sottoscritti fra Stati. Da qui la fatica a raggiungere punti di equilibrio nella mediazione, in modo da garantire che gli Stati sottoscrittori non abbiano per lo meno incentivi troppo forti per violare gli accordi sottoscritti.

Per quanto riguarda BitTorrent, ricordo che i sistemi di scambi file mediante il cosiddetto *peer-to-peer* hanno una difficoltà che ricorda molto da vicino quanto avviene nel dilemma del prigioniero: per ogni partecipante è meglio impiegare le sue risorse di connessione per il *download* anziché per l'*upload*. Ma, se tutti facessero così, non ci sarebbero file da "downloadare"! Ebbene, l'idea di Bram Cohen [1], che ha introdotto il protocollo di BitTorrent, è stata quella di sfruttare il fatto che, nello scambio di file di grandi dimensioni, i "*peer*" si trovano in una situazione di interazione ripetuta e, quindi, poter incorporare nel protocollo strumenti di "premio/punizione" del tipo di quelli visti sopra potrebbe teoricamente portare ad una maggiore collaborazione tra i "*peer*" stessi. Cosa che sembra essere dimostrata dal successo che tale protocollo ha avuto.

Detto questo, vorrei brevemente accennare alle altre applicazioni da cui sono partito, per mostrarne la connessione con la TdG.

Le aste per le frequenze da assegnare ai cellulari UMTS (o di "terza generazione"): in Gran Bretagna, il successo in termini di "prezzo di assegnazione" è stato clamoroso. Cosa c'è dietro? La *teoria delle aste*, che è un pezzo significativo della TdG, più precisamente dei cosiddetti "giochi ad informazione incompleta". E, oltre alla teoria (vedi, ad esempio, [3]), anche esperti di TdG "in carne ed ossa", come Binmore e Klemperer, che hanno collaborato con il governo inglese per il "design" dell'asta utilizzata.

Che convenga bluffare a poker, e più precisamente che convenga *bluffare in modo "random"* ma secondo una ben specificata distribuzione di probabilità è un risultato classico della TdG. Un esempio "didattico", riferito a un modellino di poker molto, molto semplificato (difficile pertanto appassionarsi) lo si trova nella mia pagina web [5].

Il gioco "hex" è stato inventato da Piet Hein nel 1942 e poi "re-inventato" da John Nash. Per

chi non lo conoscesse, rinvio a Wikipedia [6] dove c'è una buona descrizione del gioco. Ebbene, come prima cosa si dimostra che vi è per forza un vincitore (la partita non può finire in parità). Cito questo risultato che non è direttamente di TdG per due motivi: uno, è che la dimostrazione è dovuta a Gale [2], che si è occupato di TdG e che ha vissuto nel "milieu" scientifico in cui operava anche Nash; la seconda è che questo è un fatto non banale da provare, nonostante molti siti dedicati a tale gioco lascino a intendere che sia una cosa "ovvia" (classico esempio di "handwaving proof", ovvero il nulla...).

Per quanto riguarda la parte più prettamente di TdG, esiste il teorema di Zermelo-Kuhn, il quale garantisce che vi è un equilibrio di Nash per questo gioco. Essendo naturale modellizzare tale gioco come "gioco a somma zero", vuol dire che un giocatore ha una strategia ottimale. E, quindi, che un giocatore ha un modo per vincere qualunque siano le mosse dell'altro. Assodato ciò, non è difficile dimostrare che il giocatore che possiede una strategia vincente è quello che comincia.

Il punto è che *come sia* una strategia vincente non lo sa nessuno (per lo meno, ad oggi, e per "scacchiere" di dimensione superiore a 9×9).

Concludo con un accenno alle applicazioni della TdG in ambito biochimico-medicale.

La competenza e la testardaggine (temperata dal buon senso) di Stefano Moretti gli hanno permesso di mostrare, per la prima volta al mondo, come sia possibile utilizzare strumenti di TdG nell'analisi dei dati di *microarray*.

La tecnica dei *microarray* è relativamente recente, sostenuta da una tecnologia sofisticata che permette di analizzare dati (ad esempio, il livello di *espressione genica*) relativi a migliaia di geni contemporaneamente in un singolo esperimento. Il guaio è che poi questa massa di dati va analiz-

zata, il che non è per nulla ovvio: varie tecniche matematiche e statistiche vengono utilizzate e sviluppate a tale scopo.

Ciò che ha fatto vedere Moretti è che si può *sensatamente* utilizzare l'idea dei cosiddetti "indici di potere" (studiati in TdG) per stimare quali siano i geni indiziati di coprire un ruolo rilevante nella genesi di malattie, per l'appunto, genetiche, come vari tipi di cancro. Ulteriori informazioni a riguardo si trovano in [5] e [4].

Biblio-sitografia

1. Bram Cohen, BitTorrent e il dilemma del prigioniero:
www.bittorrent.org/bittorrentecon.pdf
2. David Gale: *The Game of Hex and Brouwer Fixed-Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, 86, 818-827, 1979.
3. Paul Klemperer: *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton, 2004.
4. Fioravante Patrone: *Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla Teoria dei Giochi*, Edizioni PLUS, Pisa, 2006.
5. Fioravante Patrone, pagina web (con link alla pagina di divulgazione ed a quella associata al libro sopra citato):
<http://www.diptem.unige.it/patrone>
6. Wikipedia, "Hex":
<http://it.wikipedia.org/wiki/Hex> o, meglio:
[http://en.wikipedia.org/wiki/Hex_\(board_game\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game))

La formula... di Eulero

a cura di Flavio Cimolin



La prima volta che ci si imbatte nella *formula di Eulero* non si può fare a meno di rimanere scioccati, oltre che un po' increduli, di fronte al mistero che la sua semplicità racchiude in così pochi simboli. Numeri che provengono da contesti della matematica completamente diversi incrociano i loro destini in un'uguaglianza che più semplice non si poteva:

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

Di fronte a quella che dalla maggior parte dei matematici è considerata “La” formula più bella della matematica, l'eminente professore, proprio come il suo allievo, trova una difficoltà insormontabile nel tentare di percepirla fino a fondo il significato, e non può che arrendersi nel constatare una profondità più grande di lui. Come mai le due costanti e e π , provenienti da differenti ambiti della matematica, sono legate tramite il numero immaginario i in un modo così bizzarro? Talvolta capita che gli studenti siano addirittura tentati di “rifiutare” l'esistenza dei numeri immaginari, in quanto lontani dalla realtà e apparentemente artificiosi, eppure mai come in questo caso entità così astratte si rivelano intimamente legate ai più elementari dei numeri naturali: l'uno e lo zero.

Si dice che Gauss, forse il più grande e prolifico matematico di tutti i tempi, un giorno abbia ironicamente commentato che, se ad una persona la formula non appare immediatamente ovvia, questi non potrà mai essere un grande matematico! In effetti la dimostrazione è relativamente semplice per chi abbia un minimo di dimestichezza con i numeri complessi e il calcolo integrale... Anche dopo averla accettata, però, la dimostrazione non darà mai la soddisfazione di svelare completamente il profondo segreto che la formula sembra nascondere in sé.

Richard P. Feynman, fisico americano premio Nobel nel 1965 per i suoi studi sull'elettrodinamica quantistica, fu uno dei primi ad eleggerla “formula più bella di tutti i tempi”, quando all'età di 13 anni la inserì con tale appellativo nel suo quaderno di liceale. E come dargli torto? La prima cosa che si nota è che compaiono, una dopo l'altra, come in rassegna, tutte le entità fondamentali della matematica: la costante di Nepero ($e = 2,7182818\dots$), il valore di pi greco ($\pi = 3,14159265\dots$), l'unità immaginaria i (radice quadrata di -1), il numero 1 (elemento neutro per la moltiplicazione) e il numero 0 (elemento neutro per la somma). Anche dal punto di vista storico, i concetti che vengono evocati spaziano attraverso le epoche e i luoghi che hanno fatto la storia della matematica: si pensi al periodo aureo della geometria greca (costante π), agli influssi della matematica indiana, che introdusse il concetto di zero, al dibattito rinascimentale italiano fra Tartaglia e Cardano relativamente alla risoluzione delle equazio-

ni di terzo grado (unità immaginaria i), per poi passare alla nascita dei logaritmi ai tempi di Nepero (costante e), e infine al numero 1, onnipresente in tutte le culture e in tutti i tempi. Com'è possibile che queste entità fondamentali e apparentemente lontane tra loro possano intrecciarsi elegantemente a formare un tutt'uno di così pregevole armonia? Che cosa ci può essere di più mistico di un numero immaginario che interagisce con costanti reali per produrre il niente?

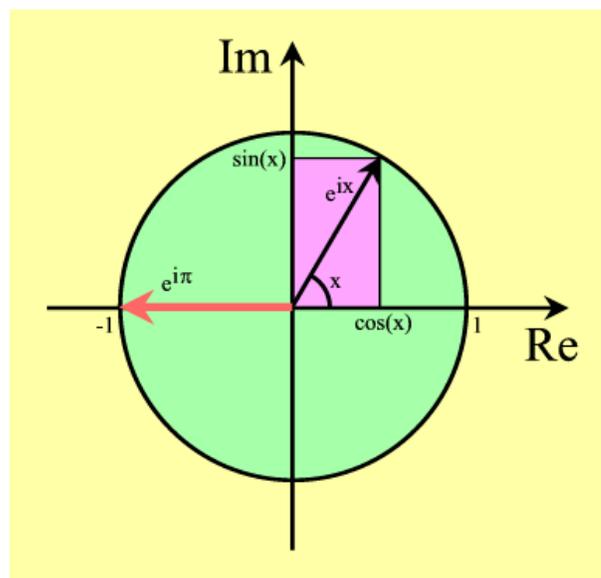
Prima di vedere una pseudodimostrazione della formula di Eulero, è interessante farsi un'idea del settore della matematica da cui è scaturito lo stupefacente risultato: la rappresentazione sul piano cartesiano dei numeri complessi e la loro interazione con l'analisi matematica. Sul piano che viene comunemente detto di Argand-Gauss è possibile rappresentare un qualsiasi numero complesso $a + i b$ proprio come se fosse un vettore che, a partire dall'origine degli assi, raggiunge il punto (a, b) del piano. Le proprietà di questa rappresentazione sono notevoli, e vengono comunemente utilizzate in svariate applicazioni della matematica che spaziano dalla fisica all'elettronica. La proprietà fondamentale che si dimostra essere valida qualora la lunghezza del vettore sia unitaria è la seguente:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

Quest'ultima eguaglianza, ben più generale e interessante dal punto di vista teorico, è la vera e propria formula di Leonhard Euler, uno dei più importanti matematici del XVIII secolo, le cui ricerche, proprio come quelle del suo successore Karl Friedrich Gauss, ebbero influenze in svariate discipline della matematica pura e applicata. La formula apparve per la prima volta nella sua *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata a Losanna nel 1748. Il valore θ costituisce l'angolo fra il vettore e l'asse delle ascisse (ovvero delle "parti reali"). Una rappresentazione schematica (si veda la figura qui accanto) chiarirà il concetto molto meglio delle parole, e questo ci aiuta appunto ad intuire la potenza del metodo di rappresentazione. Al variare dell'angolo x si individuano tutti i punti della circonferenza unitaria. Dalle leggi della trigonometria sappiamo che le loro proiezioni sugli assi coincidono rispettivamente con i valori del seno e del coseno dell'angolo. Cosa accade se usiamo come valore dell'angolo proprio π , ovvero se scegliamo un angolo piatto di 180° ?

Sostituendo nella formula e svolgendo i calcoli si ottiene proprio l'identità di Eulero:

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$



Cerchiamo ora di fornire una vaga idea, nei limiti del possibile, di come abbia fatto il geniale Eulero a scoprire quest'interessante relazione. Il passaggio è in un certo senso l'inverso di quello appena descritto: si sfruttano certe proprietà di sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche per mostrare che l'uguaglianza è valida. Ovviamente non possiamo che tralasciare una fetta fondamentale del discorso, ovvero l'estensione dell'operazione di elevamento a potenza al campo dei numeri complessi... Quanto siamo lontani dalla definizione di potenza che ci era stata data ai tempi delle scuole medie!

Una delle possibilità di definizione del numero di Nepero e , base dei logaritmi naturali, è data dalla seguente serie infinita (già di per sé notevole in eleganza):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Analogamente è possibile dimostrare che:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Una serie di funzioni di questo tipo viene comunemente indicata con il nome di *sviluppo in serie di Taylor*, e può essere ricavata senza troppa difficoltà facendo uso di ben noti teoremi dell'analisi matematica. È interessante notare che la funzione e^x riveste un ruolo di primo piano nel contesto dell'analisi, in quanto è invariante rispetto all'operazione di derivazione (la derivata di e^x è ancora e^x). Da un punto di vista algebrico ciò significa che essa è un "elemento neutro" rispetto alle operazioni di integrazione e derivazione. Una proprietà decisamente di rilievo!

Altri due sviluppi fondamentali sono quelli delle funzioni seno e coseno, che si possono esprimere nella forma seguente:

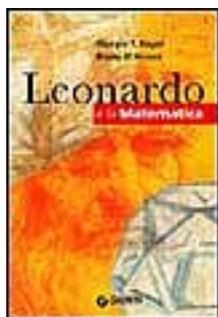
$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

È curioso notare il gioco di alternanza fra i segni "più" e "meno" e fra le potenze pari e dispari presenti negli sviluppi delle funzioni trigonometriche, in contrapposizione all'estrema regolarità della funzione esponenziale. Tenendo conto della proprietà fondamentale dell'unità immaginaria ($i \cdot i = -1$), cosa succede se si calcola lo sviluppo di $e^{i \cdot x}$? E se si calcola quello di $\cos(x) + i \cdot \sin(x)$? Come per magia ecco che i segni, le unità immaginarie, le potenze e i fattoriali si intrecciano alla perfezione e diviene limpida l'uguaglianza! Provare per credere...

Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo



Leonardo e la Matematica
di G.T. Bagni e B. D'Amore
(Giunti, Firenze, 2006, pp.
128, € 10,00)

Leonardo da Vinci (1452-1519) è una figura quasi leggendaria: artista, ingegnere, inventore, scienziato ha dato contributi in ogni campo dello scibile umano, anche nella matematica. In questo libro, G. T. Bagni, storico della matematica, e B. D'Amore, esperto in storia e didattica della matematica, hanno indagato sul contributo che Leonardo ha dato alla matematica. Come in un quadro di Leonardo, i due autori prima di tutto tracciano lo sfondo e poi fanno emergere in primo piano il contributo del genio di Vinci.

Nel XV secolo l'algebra era una forma di matematica elevata e difficile. La risoluzione di equazioni, oggi abbastanza semplice e accessibile agli studenti del biennio della scuola secondaria, era in fase di comprensione e organizzazione. Si sapevano risolvere le equazioni di primo e secondo grado in una incognita, ma le equazioni non venivano espresse nella forma simbolica che usiamo oggi. Risolverle non era affatto facile. Il simbolismo attuale venne infatti introdotto da Viète e Cartesio nella seconda metà del '500, quando Leonardo era morto da tempo. Per scrivere un'equazione, spesso si usava abbreviare le parole della lingua corrente: "*n°. che gioto al suo qdrat° facia.12*", ossia "trovare un numero che aggiunto al suo quadrato fa 12"; oggi scriviamo $x+x^2=12$. Leonardo non dà contributi in questo

campo della matematica, ma si dimostra conoscitore delle tecniche risolutive di equazioni.

Nel campo della geometria, ricordiamo che la geometria analitica non era ancora nata e che i libri di Euclide vennero stampati nelle versioni in greco e latino verso la fine del '400 e i primi anni del '500. Di certo si sa che il primo libro di matematica ad essere stampato è stato *Larte de labbacho*, pubblicato a Treviso nel 1478, e che la prima versione latina degli *Elementi* di Euclide venne stampata a Venezia nel 1482. Uno studioso di geometria rinascimentale era quindi obbligato a studiare l'opera di Euclide in greco o in latino. Leonardo era invece un autodidatta e probabilmente non era una grande conoscitore delle opere di Euclide e di Archimede.

La prospettiva era una disciplina matematica che interessava molto ai pittori ed era nata proprio nel campo dell'arte. Il più importante trattato è l'opera di Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, scritto nel 1475. Pochi anni dopo la pubblicazione del trattato di Piero della Francesca, anche Leonardo si occupa di prospettiva e scrive un trattato andato perduto, probabilmente non era stato nemmeno completato, *Trattato della pittura*. Gli interessi di Leonardo, comunque, erano rivolti più verso le tecniche della pittura che verso gli enti geometrici.

Leonardo è uno studioso attento delle opere del matematico Luca Pacioli. I due si incontrano a Milano nel 1496, diventano amici e discutono spesso di geometria. Rimane particolarmente colpito dalla sezione aurea che Pacioli chiama "divina proporzione". Sono infatti numerosi i disegni e le riflessioni di geometria che Leonardo dedica alla sezione aurea. Bagni e D'Amore mettono in evidenza, però, che i calcoli di Leonardo, anche relativamente alla sezione aurea, sono

‘piuttosto maldestri’. Leonardo, infatti, calcola che per un segmento lungo 12, le lunghezze della sezione aurea e della parte rimanente sono 4 e 8, invece di 4,58 e 7,41. Si tratta, evidentemente, di numeri irrazionali che Leonardo non avrebbe saputo calcolare, ma i valori che egli utilizza sono molto grossolani.

Infine, l’aritmetica studiata ai tempi di Leonardo era molto elementare. Le quattro operazioni dell’aritmetica non erano dominate con facilità, e gli algoritmi descritti ne *L'arte de l'abbacho* erano diversi da quelli che usiamo oggi. I numeri decimali, per esempio, non erano utilizzati e il quoziente della divisione o era un numero intero o veniva espresso in frazioni e la semplificazione di frazioni era poco chiara: gli autori del libro hanno trovato diversi errori e punti oscuri nei calcoli di Leonardo con le frazioni.

Il libro è di facile lettura e risulta adatto a un pubblico vasto. Probabilmente poteva essere arricchito con maggiori dettagli e citazioni, ma la ricostruzione di Leonardo matematico è abbastanza chiara: egli era un buon conoscitore della matematica del suo tempo ma non certo un genio della materia.

* * *



Didattica generale e Didattica disciplinare, la matematica di Bruno D’Amore e Franco Frabboni (Bruno Mondadori, 2005, pp. 150, € 14.00)

La didattica è l’ultima nata delle scienze che si occupano dell’educazione. Sostanzialmente si occupa del trasferimento di conoscenze e di modelli di vita sociale da un ‘emittente’ (un genitore, un insegnante, un mediatore culturale: libro, tv, computer, ...) a un ‘ricevente’ (le età generazionali: infanzia, adolescenza, gioventù, età adul-

ta e senile). Perciò essa è, essenzialmente, scienza della comunicazione all’interno dei contesti formativi.

La didattica ha una doppia identità: la didattica disciplinare e la didattica generale. La *didattica disciplinare* si occupa di curriculum (contenuti essenziali di ciascuna disciplina, linguaggi e metodologie di ricerca), di luoghi della formazione (aula-classe, aula-esercitazione, aula-specializzata), di strategie per l’insegnamento (lezione, lavoro di gruppo, ricerca, tecnologie), di strategie per l’apprendimento (costruzione di percorsi didattici a misura d’allievo), di valutazione. La *didattica generale* si occupa della trasversalità delle conoscenze (curriculum), dei laboratori multidisciplinari e dell’ambiente socioculturale (luoghi della formazione), dell’insegnamento in *team* e dell’apprendimento in gruppo (strategie dell’insegnamento-apprendimento), della valutazione diagnostica e formativa.

Rimane da chiarire l’annosa questione se la didattica sia un’arte, un mestiere, o una disciplina scientifica. Secondo gli autori, la didattica è rimasta a lungo prigioniera di una prima ideologia pedagogica che le ha negato il diritto a uno statuto scientifico sull’idea che il saper insegnare appartiene al ‘talento’ dell’insegnante. La didattica è rimasta prigioniera anche di una seconda ideologia pedagogica secondo la quale essa non possiede la capacità dell’autofondazione scientifica che invece possiede la filosofia dell’educazione. Nella versione del ‘problematicismo didattico’, proposta dagli autori, essa diviene scienza dell’educazione.

Anzitutto, essa osserva e cataloga quei fatti dell’esperienza che, rilevanti per ripetitività/frequenza, possono dare luogo a congetture teoriche, a ipotesi epistemiche; successivamente costruisce un assunto interpretativo, una possibile idea di natura teorica; infine, ritorna ai fatti dell’esperienza elevandoli a banco di prova della teoria precedentemente formalizzata.

L’insegnante, sostengono gli autori, è un mediatore: non dispensa il Sapere di cui è a conoscenza, ma lo trasforma da “sapere accademico” a “sapere da insegnare”. Questa azione è un atto

creativo che tiene conto della singolarità dell'allievo e della situazione reale in cui si trova a operare. Infine, trasforma con un'azione di ingegneria didattica il "sapere da insegnare" in un "sapere insegnato".

In questo passaggio gli autori sottolineano il ruolo del contratto didattico, implicito o esplicito, tra studente e docente, che regola le abitudini del docente attese dall'allievo e i comportamenti degli allievi attesi dal docente.

Per quanto attiene l'insegnamento della matematica e delle discipline scientifiche, gli autori si pongono la questione se gli elementi che lo scienziato colloca per primi nella costruzione logica della propria disciplina debbano necessariamente essere insegnati per primi oppure se non si possa ripercorrere l'evoluzione storica delle idee che hanno portato di epoca in epoca a scegliere gli elementi primi di una disciplina.

Il libro è una sintesi delle riflessioni che gli autori fanno da tempo sulla didattica e sulla didattica della matematica, utile per insegnanti e 'apprendisti' insegnanti.

* * *



Giochi matematici alla corte di Carlomagno

Problemi per rendere acuta la mente dei giovani

di Alcuino di York, Introduzione di R. Franci e testo latino a fronte (Edizioni ETS, 2005, pp. 141, € 12.00)

“Un uomo doveva trasportare aldilà di un fiume un lupo, una capra e un cavolo e non poté trovare altra barca se non una che era in grado di portare soltanto due di essi. Gli era stato ordinato però di trasportare tutte queste cose di là senza alcun danno. Chi è in grado dica in che modo poté trasferirli indenni”.

Per chi ha un minimo di dimestichezza con i giochi matematici ricorderà quante volte si è sen-

tito proporre o ha proposto questo quesito. L'espressione “salvare capra e cavoli” deriva sicuramente da questo antichissimo quesito ormai sedimentato nella nostra cultura e tramandato di generazione in generazione.

Alcuino di York era un monaco inglese che nel 781 venne chiamato alla corte di Carlomagno per istruire i giovani (i suoi figli e i figli di altri nobili). In quel periodo raccolse una serie di problemi divertenti e stimolanti la cui origine si perde nella notte dei tempi e la cui attualità rimane ancora oggi inalterata.

Il testo latino a fronte potrebbe offrire l'opportunità a qualche insegnante di latino e a qualcuno di matematica di lavorare insieme. L'introduzione di Raffaella Franci sul quadro storico e culturale in cui è nato questo 'manuale di matematica' potrebbe coinvolgere anche qualche insegnante di storia.

Gli altri lettori, che non sono insegnanti, troveranno piacevole cimentarsi con quesiti senza tempo e imparare da un vero maestro di matematica. Il monaco Alcuino aveva visto in questo metodo di studio la via per far uscire i Franchi dalla decadenza culturale in cui si trovavano.

* * *



Macchine matematiche: dalla storia alla scuola

di Maria G. Bartolini Bussi e Michela Maschietto
Libro con CD-ROM
(Springer Verlag, 2006, pp. 157, € 22.95)

Presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena si è costituito un laboratorio di ricerca per la didattica della geometria con l'utilizzo di strumenti meccanici concreti e funzionanti nelle mani degli studenti, che riproducono fedelmente le 'macchine matematiche' pro-

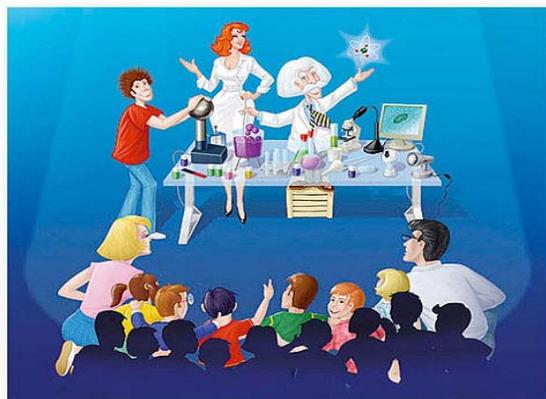
gettate dai grandi dell'antichità: Euclide, Cartesio, Cavalieri, e altri.

Una macchina matematica è uno strumento meccanico che risolve un problema geometrico: la macchina obbliga un punto a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni secondo una legge matematica astratta.

In questo libro sono presentate due categorie di macchine: strumenti meccanici per tracciare curve o realizzare trasformazioni e prospettografi che permettono di realizzare disegni prospettici o modelli di sezioni coniche. Le due categorie rappresentano due stili complementari di pensiero geometrico: quello analitico e quello sintetico.

Il libro è diviso in tre sezioni. La prima presenta le macchine dal punto di vista storico; la seconda ne descrive le possibili applicazioni didattiche; la terza presenta una rassegna di esperimenti didattici fatti in diverse nazioni.

Al libro è allegato un ricco CD-ROM che contiene foto, filmati, animazioni Cabri e Java, schede di approfondimento, testi estesi e quanto non ha trovato posto su carta. A fronte della ricchezza dei materiali, la navigazione del CD risulta un po' tortuosa, strutturata più come un libro che come un testo multimediale interattivo. Consiglio quindi di esplorarlo anche nei meandri più nascosti.



SBALORDISCIENZA

Il laboratorio scientifico itinerante
per grandi e piccini

Per informazioni e prenotazioni:

www.sbalordiscienza.it

Tel.: 050/541772, 338/5436132

Recen... siti

a cura di Flavio Cimolin



"The Meter"

Indirizzo: <http://www.themeter.net/index.htm>

Lingua: italiano e inglese

Le varie unità di misura usate in paesi diversi o in discipline diverse generano una tale confusione che difficilmente si riesce a districarsi.

The meter si propone come un punto di riferimento per coloro che abbiano la necessità di trovare un po' di chiarezza in questi passaggi da un'unità di misura ad un'altra. Contiene una raccolta sistematica di definizioni, descrizioni e tabelle di conversione relative a praticamente tutte le unità di misura utilizzate. Si va dalle misure di lunghezze, superfici, volumi, pesi, angoli, alle dimensioni dei fogli di carta, alle misure sartoriali, ai lubrificanti e a molto altro. Una serie di pagine speciali sono poi dedicate al Sistema Internazionale di misura, ai multipli e sottomultipli delle unità fondamentali e alle loro definizioni fisiche. Spesso le tabelle sono anche accompagnate da note storiche o da curiosità legate al tipo di unità di misura. Insomma, una risorsa *on line* veramente degna di nota da rivedere in caso di necessità!



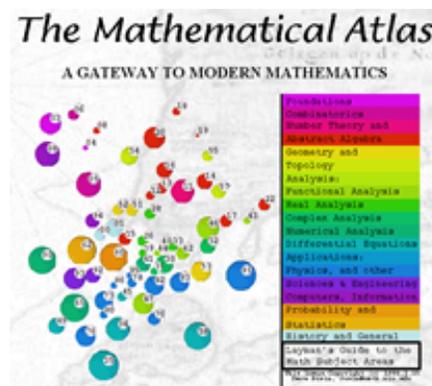
* * *

"The Mathematical Atlas"

Indirizzo: <http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/welcome.html>

Lingua: inglese

Ecco un interessante "Atlante della Matematica" per chi voglia scoprire qualcosa di più su quello che studiano i matematici di professione. Basta colloquiare con alcuni di loro per rendersi conto che gli argomenti di ricerca possono essere lontanissimi uno dall'altro e che la matematica moderna non è più una materia "unitaria" ma è suddivisa in un numero di sottodiscipline che con gli anni non fa che aumentare. Da qui l'idea di fornire un atlante in cui si possano scoprire ben ordinate tutte le discipline e le relazioni che fra di esse intercorrono. Per ognuna disciplina è fornita una descrizione che a parole renda l'idea di quali siano i suoi concetti di base. Ad esempio, si potrà incorrere nella *topologia algebrica*, nel *calcolo combinatorio*, nell'*analisi complessa*, nella *computer algebra*, o nella *teoria dei numeri*.



Recen... Soft

a cura di Luca Barletta



Matematica 5.2 Wolfram research



Non è semplice dare una definizione concisa ed esaustiva del software *Mathematica*, dato che esso integra un potente *kernel* per il calcolo simbolico e numerico ma non si limita solo a questo: elaborazione grafica, documentazione, linguaggio di programmazione e interfaccia verso altre applicazioni sono gli altri aspetti dell'anima di *Mathematica*.

Si possono dare comandi al *kernel* e riceverne le relative risposte attraverso la consueta interfaccia grafica presente nel software originale, oppure si può utilizzarlo come motore di altre applicazioni, come ad esempio *web-applications*.

Considerando il software originale, il *front end* del *kernel* è una pagina di testo interattiva che prende il nome di *notebook*: da questa pagina vengono dati gli input al *kernel*, e sempre su questa pagina vengono visualizzati i risultati sotto forma di formule, grafici, testo o audio; tutti questi elementi vengono automaticamente formattati grazie ad un sistema di documentazione integrato, permettendo così all'utente di ottenere con pochi sforzi un prodotto ordinato e facilmente maneggiabile. Il *notebook*, una volta salvato, assume estensione *.nb* e non è altro che un file ASCII.

A prima vista, l'ambiente di lavoro di *Mathematica*, per come si presenta, potrebbe sembrare ostile: in alto il menu dei comandi, a sinistra un *notebook* ancora bianco, a destra una *palette* con i comandi principali per la matematica simbolica. Un principiante, di fronte a questo scenario, potrebbe trovarsi spiazzato; in questo caso, il consiglio è di consultare la funzionalità *help browser*, oppure il *tutorial* messo a disposizione, entrambi molto ben documentati.

Qual è la filosofia che sta dietro a *Mathematica*? Ogni formula, grafico, documento, e in generale ogni oggetto, viene rappresentato come un'espressione simbolica e trattata come tale dal *kernel*, previa opportuna manipolazione di ogni espressione immessa dall'utente.

Vediamo un esempio: tramite la *palette* dei simboli matematici immettiamo l'espressione:

```
FullForm[ Aeiωt ]
```

La funzione `FullForm` restituisce la rappresentazione simbolica dell'espressione tra parentesi quadre dopo la manipolazione; se si dà ora il comando *shift+invio* compare:

```
Times[A, Power[E, Times[Complex[0, 1], t, \[Omega]]]]
```

Come si nota, l'espressione iniziale è stata decomposta in particelle elementari (A, E, 0, 1, t, Omega), che vengono opportunamente passate come parametri a funzioni annidate (\, Complex, Times, Power). Tutto ciò viene trattato nel *kernel* come una struttura ad albero.

Facciamo ora qualche esempio semplice per capire come muovere i primi passi.

1° esempio

Vogliamo verificare la formula risolutiva delle equazioni algebriche di 2° grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Immettiamo l'equazione nel notebook dichiarando una variabile *eq*:

$$eq = a x^2 + b x + c == 0$$

Da notare che il primo uguale indica un assegnamento, invece il doppio uguale è proprio dell'equazione algebrica; premere invio e digitare il comando:

$$\text{Solve}[eq, x]$$

In questo modo, diciamo al *kernel* di risolvere l'equazione *eq* nella variabile *x*; premendo la combinazione di tasti shift+invio si ha l'output:

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right\} \right\}$$

che è la risposta che ci aspettavamo. Notate come le soluzioni vengono presentate sotto forma di *array*.

2° esempio

Vogliamo calcolare la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione differenziale di diffusione:

$$u_t = \sigma u_{xx}$$

con la condizione iniziale $u(x,0) = \delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac.

Un metodo risolutivo noto in analisi è quello di considerare il problema trasformato tramite trasformazione di Fourier: applichiamo questo metodo.

Cominciamo a scrivere il termine che rappresenta la derivata seconda rispetto a *x* di *u*:

$$\text{termine} = D[u[x, t], x, x]$$

shift+invio e otteniamo

$$u^{(2,0)}[x, t]$$

ora calcoliamo la trasformata di Fourier di questo termine rispetto a *x*:

$$\text{tfl} = \text{FourierTransform}[\text{termine}, x, k]$$

shift+invio e otteniamo

$$-k^2 \text{FourierTransform}[u[x, t], x, k]$$

Il risultato scritto così non ci piace, vorremmo vedere scritta una forma più compatta e non la scritta per esteso `FourierTransform[...]` sostituendola, ad esempio, con `U[t]`:

$$tf2=tf1/.\{\text{FourierTransform}[u[x,t],x,k]\to U[t]\}$$

In pratica, abbiamo scritto una *regola* che associa ad ogni occorrenza di `FourierTransform[u[x, t], x, k]` in `tf1` la scrittura simbolica `U[t]`.

Premendo `shift+invio` abbiamo:

$$-k^2 U[t]$$

Ora possiamo scrivere l'equazione trasformata:

$$eq=D[U[t], t]-\sigma tf2==0$$

Il *kernel* ci risponde con: $k^2 \sigma U[t] + U'[t] = 0$

Trasformiamo anche la condizione iniziale:

$$tfci=\text{FourierTransform}[\text{DiracDelta}[x], x, k]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

La risposta è:

Finalmente si può risolvere l'equazione differenziale con il comando `DSolve`:

$$sol=\text{DSolve}\{eq, U[0]==tfci\}, U[t], t$$

$$\left\{ \left\{ U[t] \rightarrow \frac{e^{-k^2 t \sigma}}{\sqrt{2\pi}} \right\} \right\}$$

Il risultato è:

Anche in questo caso il risultato viene dato come elemento di un *array* e con una regola di sostituzione indicata dalla freccia; assegniamo il risultato ad una variabile di comodo:

$$sol2=U[t]/.sol[[1]]$$

Ora dobbiamo ricavare la soluzione nel dominio antitrasformato, quindi:

$$antisol=\text{InverseFourierTransform}[sol2, k, x]$$

Premendo la solita combinazione `shift+invio` otteniamo il risultato finale:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t\sigma}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t\sigma}}$$

3° esempio

Questa volta vogliamo mettere alla prova le capacità di calcolo numerico e di elaborazione grafica di *Mathematica*; un frattale è quello che serve per testare congiuntamente queste due caratteristiche.

Consideriamo un frattale di Barnsley regolato da queste equazioni ricorsive:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (0.05x_n, 0.6y_n) & 0 < r < 0.1 \\ (0.05x_n, -0.5y_n + 1) & 0.1 < r < 0.2 \\ (0.46x_n - 0.15y_n, 0.39x_n + 0.38y_n + 0.6) & 0.2 < r < 0.4 \\ (0.47x_n - 0.15y_n, 0.17x_n + 0.42y_n + 1.1) & 0.4 < r < 0.6 \\ (0.43x_n + 0.28y_n, -0.25x_n + 0.45y_n + 1) & 0.6 < r < 0.8 \\ (0.42x_n + 0.26y_n, -0.35x_n + 0.31y_n + 0.7) & 0.8 < r < 1 \end{cases}$$

dove r è un numero casuale generato uniformemente tra 0 e 1. Come condizione iniziale scegliamo $(x_0, y_0) = (0.5, 0)$ ed effettuiamo $N=25000$ iterazioni.

In generale, le relazioni che governano le iterazioni saranno del tipo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_i x_n + b_i y_n + e_i \\ y_{n+1} = c_i x_n + d_i y_n + f_i \end{cases}$$

Dove sarà scelta l'equazione i qualora $r < p_i$.

Possiamo immettere i parametri dell'istanza del frattale e le condizioni iniziali

```
a[1]=0.05;a[2]=0.05;a[3]=0.46;a[4]=0.47;a[5]=0.43;a[6]=0.42;
b[1]=0;b[2]=0;b[3]=-0.15;b[4]=-0.15;b[5]=0.28;b[6]=0.26;
c[1]=0;c[2]=0;c[3]=0.39;c[4]=0.17;c[5]=-0.25;c[6]=-0.35;
d[1]=0.6;d[2]=-0.5;d[3]=0.38;d[4]=0.17;d[5]=0.45;d[6]=0.31;
e[1]=0;e[2]=0;e[3]=0;e[4]=0;e[5]=0;e[6]=0;
f[1]=0;f[2]=1.0;f[3]=0.6;f[4]=1.1;f[5]=1.0;f[6]=0.7;
p[1]=0.1;p[2]=0.2;p[3]=0.4;p[4]=0.6;p[5]=0.8;p[6]=1;
total=25000;x[0]=0.5;y[0]=0;
```

Implementiamo le ricorsioni:

```
xx[i_,n_]:=x[n+1]=a[i] x[n]+b[i] y[n]+e[i]
yy[i_,n_]:=y[n+1]=c[i] x[n]+d[i] y[n]+f[i]
```

dove il simbolo $:=$ permette di definire una funzione; il simbolo di sottolineatura che segue i parametri significa che ogni volta che richiameremo le funzioni i parametri andranno a sostituire ogni occorrenza nella funzione. Definiamo r come numero casuale

```
r:=Random[ ]
```

Tramite il comando `Table` creiamo una lista dei risultati:

```
pts=Table[Which[
r<p[1],{xx[1,n],yy[1,n]},
r<p[2],{xx[2,n],yy[2,n]},
r<p[3],{xx[3,n],yy[3,n]},
r<p[4],{xx[4,n],yy[4,n]},
```

```
r<p[5],{xx[5,n],yy[5,n]},
r<p[6],{xx[6,n],yy[6,n]}],{n,0,total}];
```

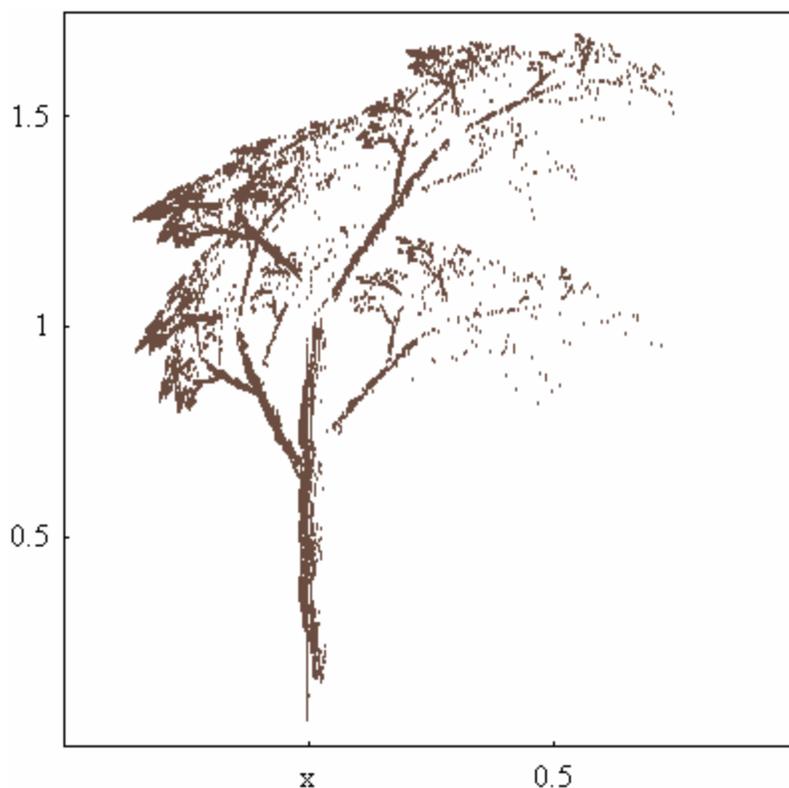
dove il comando `which` ci indirizza sulla branca corretta della nostra ricorsione. Ora, premendo la combinazione `shift+invio` e utilizzando il comando `ListPlot` con alcune opzioni per rendere più gradevole la visualizzazione:

```
ListPlot[pts, AspectRatio->1, Axes->False, Frame->True,
PlotRange->{{-.5, 1.}, {0, 1.75}},
FrameTicks->{{-.5, {0, "x"}}, .5}, {{-.001, "0"}, .5, {-.75, "y"}, 1, 1.5}, {}, {}},
PlotStyle->{RGBColor[106/255, 77/255, 64/255], PointSize[.007]},
TextStyle->{FontFamily->"Times", FontSize->16}, ImageSize->{400, 400}];
```

Otteniamo una figura del genere:

Cosa vi ricorda?

Come visto in questi semplici esempi, *Mathematica* è uno strumento di calcolo, sia numerico che simbolico, molto potente ed efficace. Per un utente alle prime armi probabilmente sarà difficile prendere confidenza con l'ambiente di lavoro, ma una volta fatta qualche esperienza diretta e tenendo sott'occhio l'*help* dovrebbe essere semplice acquisire le competenze necessarie per utilizzare questo software.



Mathematica rappresenta un efficace strumento di didattica ma costituisce soprattutto un valido supporto per la ricerca, non solo nelle università ma anche nelle aziende di tutto il mondo: i settori maggiormente interessati sono quelli dell'ingegneria, dell'economia e delle biotecnologie.

Il fornitore italiano di Mathematica è CreActive (www.creative.net).

Giochi matematici

a cura di Luciano Sarra

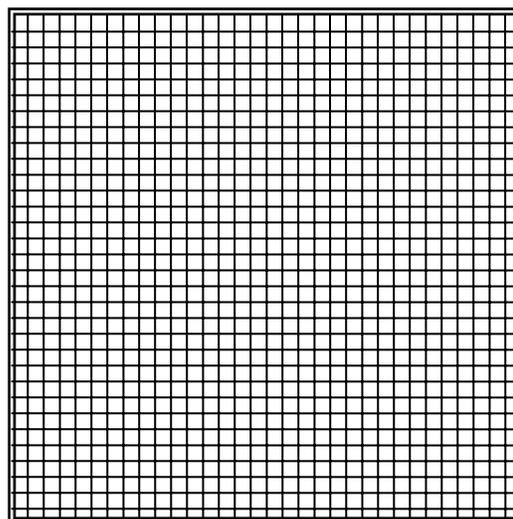


Il setaccio

Si prenda un setaccio di forma quadrata e di lato $25,5\text{ cm}$ costituito da una rete metallica le cui maglie orizzontali e verticali generano dei quadratini ciascuno di lato 5 mm , e si ponga su ogni quadratino un sassolino di dimensioni tali da rimanervi appoggiato.

Supponendo di spingere verso l'alto il setaccio in modo tale che tutti i sassolini spicchino il volo e ricadano sul setaccio, qual è la probabilità che ogni sassolino si ritrovi in un quadratino adiacente a quello che occupava prima?

Invia la tua soluzione a: magazine@sarra.org.
Le soluzioni ritenute più significative ed interessanti saranno pubblicate sul prossimo numero.



A. Bernardo - M. Pedone

MATEMATICO PER GIOCO

*Una vasta raccolta di problemi divertenti
con cui sfidare la vostra intelligenza*

(SciBooks, 248 pp., 14.90 €)

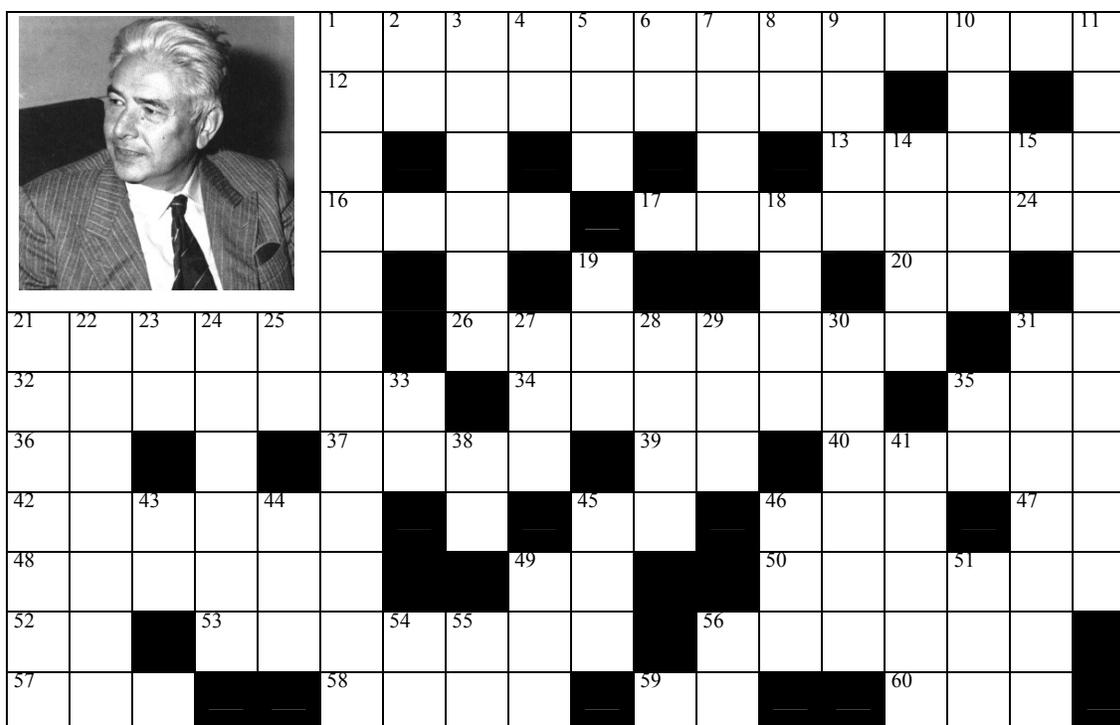
40 originali e intriganti giochi da risolvere!

Per ordinarne o regalarne una copia vai sul sito:

www.scibooks.it

Il cruciverba matematico

a cura di Antonio Bernardo



ORIZZONTALI: 1. Il matematico nella foto - 12. Può esserlo il peso - 13. Lo sono alcune parentesi - 16. Quattro e quattro - 17. Tipo di scavo fatto per valutare la natura di un terreno - 20. Negazione - 21. Può essere quadrata ma anche cubica - 26. I prodotti più noti - 31. Inizio di errore - 32. Quello di un punto è un intervallo aperto che contiene il punto - 34. Chilometri quadrati - 35. Stati Uniti d'America - 36. Inizio di un database - 37. Cantante noto con un numero - 39. Novara - 40. Collega il computer alla linea telefonica - 42. Arrivano alla fine - 45. Società Anonima - 46. Divisione - 47. Doppia nella somma - 48. Ciocca di capelli non liscia - 49. Fa coppia con allora - 50. Lo si dà un libro appena scritto - 52. Santissimo - 53. Lo è un solido il cui asse non è perpendicolare alla base - 56. Strutture algebriche da matrimonio - 57. Dieci più di cento - 58. Moneta europea - 59. Ce ne sono due nei raggi - 60. C'è quello Medio.

VERTICALI: 1. Una funzione che ha l'incognita nell'esponente - 2. Libro di Banana Yoshimoto - 3. Il fisico della gravitazione - 4. Novantanove - 5. Olio inglese - 6. Dipartimento di Fisica - 7. Un tedesco - 8. Iniziali del matematico degli insiemi - 9. Lettera greca - 10. Caratteristica delle matrici - 11. Disegno per idee - 14. Quantificatore universale - 15. In mezzo alla radice - 18. Sorella - 19. Ottuso a metà - 21. Diminuire - 22. Studia le funzioni - 23. Consonanti nei dati - 24. Terreno bagnato dallo Ionio - 25. Cromo - 27. Vocali nel convesso - 28. Vulcano siciliano - 29. Lo Shado di Guerre Stellari - 30. Una nozione basilare dell'analisi - 31. Chiarisce la teoria - 33. Dittongo nel coefficiente - 35. Udine - 38. Radiofrequenza - 41. Ellisse - 43. Tomografia Computerizzata - 44. Indice di Borsa - 45. Sufficienza a scuola - 46. Data Source Name - 49. Né tuo né mio - 51. Mille e cinquantacinque - 54. In mezzo al chiuso - 55. Quoziente Respiratorio - 56. Argento.

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

I contributi da proporre devono riguardare i seguenti temi: storia della matematica e della fisica, didattica della matematica e della fisica, novità dal mondo della ricerca matematica, curiosità matematiche, matematica e cultura.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato Word, carattere Times New Roman, 12 pt, formato della pagina A4, interlinea 1. Le formule possono essere in Microsoft equation editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati. Le immagini devono essere sia nel file Word sia fornite a parte come singoli file. Eventuale materiale scannerizzato deve essere salvato in formato TIF alla risoluzione di 300 dpi.

Nella prima pagina andranno obbligatoriamente indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale, istituzione o ambiente professionale di appartenenza.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (3-6 righe), e dovrà terminare con una bibliografia ed, eventualmente, una sitografia finale. Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia. In ogni caso, i contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Direzione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. All'autore non saranno inviate bozze di alcun tipo.

La responsabilità del contenuto scientifico degli articoli pubblicati è esclusivamente degli autori.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it*

* * *

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Antonio Bernardo, Luca Lussardi,
Flavio Cimolin, Luca Barletta,
Michele Mazzucato

Hanno collaborato a questo numero

Diego Alberto, Antonio Bernardo, Luca Barletta,
Luca Caridà, Flavio Cimolin, Giovanni Lucca,
Luca Lussardi, Fioravante Patrone, Luciano Sarra,
Antonello Urso, Andrea Vitiello

Progetto grafico e impaginazione

Mario Menichella

* * *

Iscrizione al Tribunale di Lecce
n° 953 del 11.12.2006

Copyright © 2007 Matematicamente.it Magazine

Tutti i diritti sono riservati.
Nessuna parte di questa rivista può essere riprodotta senza
l'autorizzazione scritta del direttore.

*Il direttore responsabile è a disposizione per correggere
eventuali involontarie omissioni o inesattezze nella cita-
zione delle fonti di immagini e testi riportati nella rivista.*



Rivista di matematica per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito www.matematicamente.it

Anno 1 Numero 1 - Gennaio 2007

Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Dir. resp. Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it