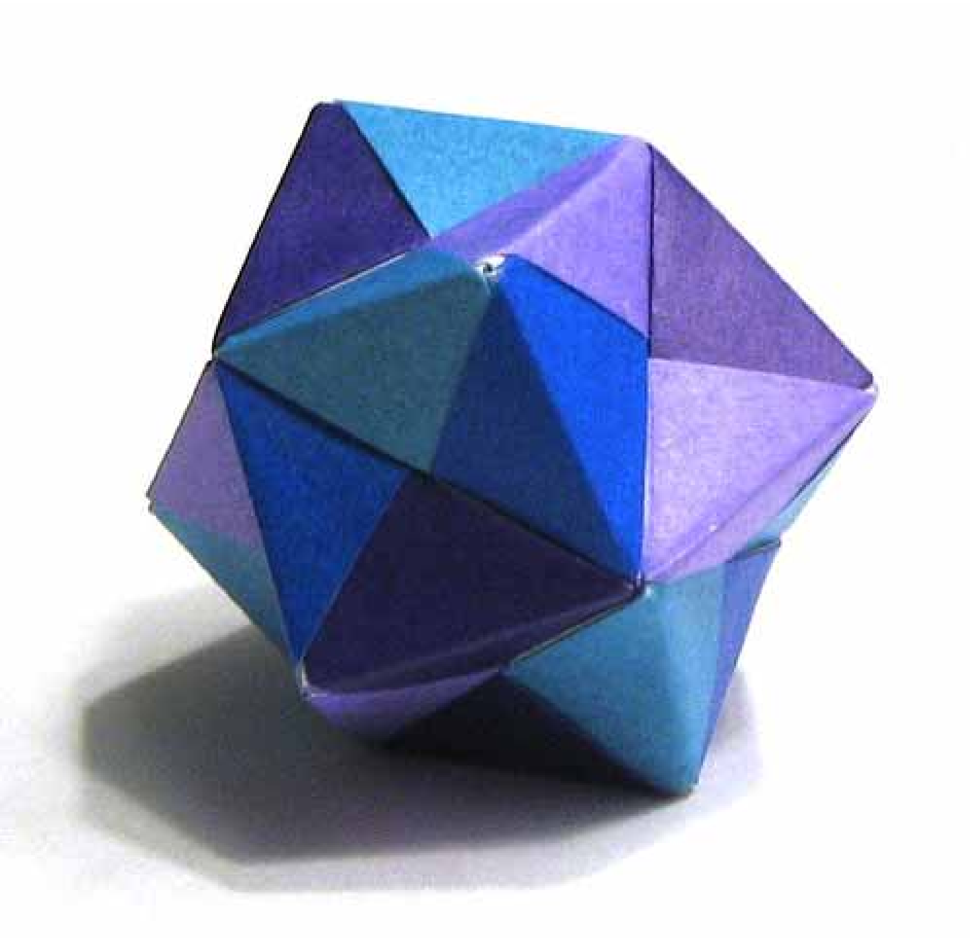
Magazine Matematicamente.it

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it
Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Numero 5 *Gennaio 2008*



Origami stellated octahedron, realizzato con 12 pezzi di origami, Endolith foto
http://flickr.com/photos/omegatron/438272080/in/set-72157600034004019/

ORIGAMI - CAMPI VETTORIALI - L'ANNO NUOVO - STORIA - COMETE - RACCONTO - TEOREMA DEI NUMERI PRIMI - BEPPE SCIENZA - PISA 2006 - GEOGEBRA- GIOCHI MATEMATICI - CRUCIVERBA

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

I contributi da proporre devono riguardare i seguenti temi: storia della matematica e della fisica, didattica della matematica e della fisica, novità dal mondo della ricerca matematica, curiosità matematiche, matematica e cultura.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato Word, carattere Times New Roman, 12 pt, formato della pagina A4, interlinea 1. Le formule possono essere in Microsoft equation editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati. Le immagini devono essere sia nel file Word sia fornite a parte come singoli file. Eventuale materiale scannerizzato deve essere salvato in formato TIF alla risoluzione di 300 dpi.

Nella prima pagina andranno obbligatoriamente indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale, istituzione o ambiente professionale di appartenenza.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (3-6 righe), e dovrà terminare con una bibliografia ed, eventualmente, una sitografia finale. Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia. In ogni caso, i contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. All'autore non saranno inviate bozze di alcun tipo.

La responsabilità del contenuto scientifico degli articoli pubblicati è esclusivamente degli autori.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

www.matematicamente.it

* * *

Sommario

64. Editoriale

In questo numero abbiamo cercato di dare spazio alle diverse 'anime' della matematica, intesa come coltura, didattica, divulgazione. Lucia ci parla dei rapporti tra matematica e origami: l'arte di piegare un foglio di carta non poteva certo sfuggire alle riflessioni dei matematici. Paolo presenta i rapporti tra campi vettoriali ed equazioni differenziali in fisica, un tema con il quale gli studenti spesso si scontrano. Marco ha fatto un po' di conti sul vero inizio del nuovo anno. Luca continua a raccontarci la storia dell'analisi. Mazzucato ci parla delle cosiddette comete di Kreutz. Anna continua nel suo lavoro di mostrare il nocciolo duro del calcolo combinatorio, i 'problemi tipo' che poi permettono di risolvere tanti problemi analoghi. Flavio ci parla dei numeri primi e degli affascinanti attacchi della mente umana verso il fitto mistero dei numeri. Manu ha intervistato Beppe Scienza un matematico discusso che però ha il coraggio di affermare che anche in economia 2+2=4: i giornalisti de Il Sole 24 ore e altre testate di settore, a suo dire non sempre fanno i conti da soli, spesso preferiscono riportare quelli già pronti delle banche. Io e Andrea ci siamo cimentati con l'indagine più discussa del momento, PISA 2006: tante certezze negative ma anche qualche mito da sfatare. A Sergio, che è uno dei più attivi docenti nell'area wiki su Geogebra abbiamo chiesto di indicarci come utilizzare questo software nella secondaria di primo grado. E poi, siti da guardare e libri da leggere. Non mancano neanche in questo numero una piccola sfida di Luca sul latte da versare e un cruciverba di Nicola per veri esperti.

Antonio Bernardo

65. Matematica tra le pieghe

di Lucia Gecchelin

Sunto: *Esiste un rapporto fecondo che lega la matematica all'origami, l'arte di piegare la carta. Numerosi modelli origami rappresentano oggetti geometrici significativi e delle teorie matematiche aiutano a progettare nuovi e particolari modelli. In queste pagine vogliamo esplorare qualche aspetto di questo legame, per stuzzicare la curiosità sulla matematica che può essere affrontata da un punto di vista originale grazie all'origami. Descriveremo le pieghe, osserveremo la piega a "orecchio di coniglio" e riporteremo dei risultati sui* crease pattern*. Parleremo di quadrato e rettangoli nell'origami. Seguirà un breve confronto tra costruzioni con riga e compasso e "assiomi" origami.*

Introduzione

La parola di origine giapponese ORIGAMI, composta dai due ideogrammi 折 *ori* piegare e 紙 *kami* carta, indica sia l'attività del piegare la carta per ottenere figure di qualunque forma, sia l'oggetto piegato. Le regole indicano che a partire da uno o più fogli di carta quadrati, o di forma convessa, si ottenga l'oggetto con il *solo uso della piegatura*, senza incollare e senza mai tagliare. Il gioco sta nello scoprire le possibilità racchiuse in un foglio di carta! Da qui, il piegare la carta diventa arte, sfida, forma di meditazione,…

Le prime proprietà matematiche che si osservano in un modello origami sono geometriche. In diversi modi si possono esplorare le connessioni tra la geometria e la piegatura della carta. Possiamo piegare numerosi modelli che rappresentano esplicitamente oggetti geometrici significativi ma si scopre anche che l'origami permette di affrontare in maniera semplice altri concetti matematici non banali o, viceversa, che ci possiamo servire di teorie matematiche per progettare nuovi e particolari modelli. Per esempio, quando vogliamo trasformare un foglio quadrato in un animale, in un fiore, in un elemento del paesaggio, in una figura umana o in un oggetto astratto, per ciascun elemento caratteristico di questi soggetti dobbiamo utilizzare le parti del foglio per ricavarne delle punte. Il modello finale sarà tanto più piacevole quanta più carta sarà utilizzata in maniera efficiente. Simmetria, equilibrio e proporzioni, diventano così parametri estetici che si possono ricondurre al criterio matematico dell'*ottimizzazione* nell'uso della carta [B1].

I legami tra origami e matematica sono numerosi e affascinanti e vanno insospettabilmente al di là delle relazioni geometriche tra parti del foglio durante la piegatura. Questi legami possono essere raggruppati in tre ambiti [S1], non necessariamente scollegati tra loro:

- *Matematica dell'origami* è la matematica che descrive le leggi soggiacenti all'origami;
- *Origami computazionale* è l'insieme degli algoritmi e della teoria rivolti alla soluzione di problemi origami, attraverso la matematica;
- *Tecnologia origami* è l'applicazione della piegatura per risolvere problemi che sorgono in ingegneria, nel disegno industriale e nella tecnologia in generale (air bag, lenti di telescopi, bicchieri, piegatura delle carte geografiche, ...).

Origamisti, matematici, insegnanti e altri scienziati di tutto il mondo si occupano sempre di più di queste relazioni e vi dedicano anche convegni internazionali. Il primo si è tenuto in Italia, a Ferrara nel 1989, "*The First International Meeting of Origami Science and Technology*" grazie al fisico italo giapponese Humiaki Huzita. Nel 1994 a Otsu in Giappone si è tenuto "*The Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*". Sono seguiti "*The Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education*" nel 2001 ad Asilomar, in California e "T*he Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*" nel 2006 a Pasadena in California.

Le pieghe

Il matematico origamista si trova in un curioso ambiente, con in mano un foglio di carta potrà trasformarlo solo grazie a pieghe successive. Possiamo dire che la piega sia per lui l'ente fondamentale; allora analizziamola come farebbe questo curioso matematico. Ci sono *due* tipi di pieghe: la piega *a monte* e la piega *a valle*. Se il foglio è bianco da entrambe le parti e non vi sono altre pieghe di riferimento, una piega a monte diventa a valle se capovolgiamo il foglio: c'è *un solo* tipo di piega (vedi figura 1).

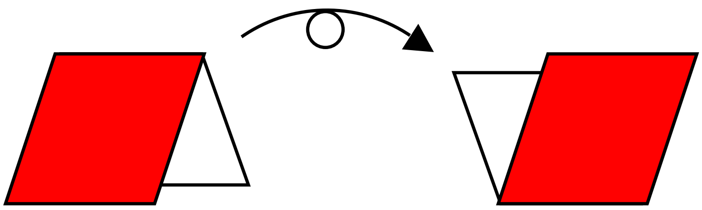


Figura 1. Piega a monte e piega a valle

Se seguiamo le regole alla lettera, per creare un origami non useremo altri strumenti oltre al foglio e alla piegatura, allora anche per trovare punti significativi di riferimento per altre pieghe saranno necessarie delle pieghe. In genere, queste si eseguono, poi si riapre il foglio e si usa qualcuna delle tracce. Allora ci sono *tre* tipi di pieghe: piega a monte, piega a valle e la traccia di una piega. Osserviamo ancora che piega a monte, piega a valle e traccia di una piega sono anche parte di *un continuum* di un angolo piegato. Infatti, una piega a valle non è sempre uguale a un'altra piega a valle, se gli strati di carta non risultano in un modello piatto. Piegando il modello si sfruttano le tre dimensioni dello spazio, le pieghe non sono necessariamente piatte e possono variare a seconda dell'angolo formato dalle due parti in cui dividono il foglio. Formalizzando un po', possiamo scrivere

$$0 <= \text{piega a valle} < 180°$$

$$180° = \text{traccia di una piega}$$

$$180° < \text{piega a monte} <= 360°.$$

Sequenze di pieghe a monte e a valle che si usano frequentemente nell'origami hanno dei nomi propri; alcune sono dette *pieghe* e altre *basi*, perché a partire da esse si creano numerosi modelli le cui caratteristiche si possono già riconoscere nella loro struttura.

Una piega interessante è la *piega a orecchio di coniglio* (figura 2).

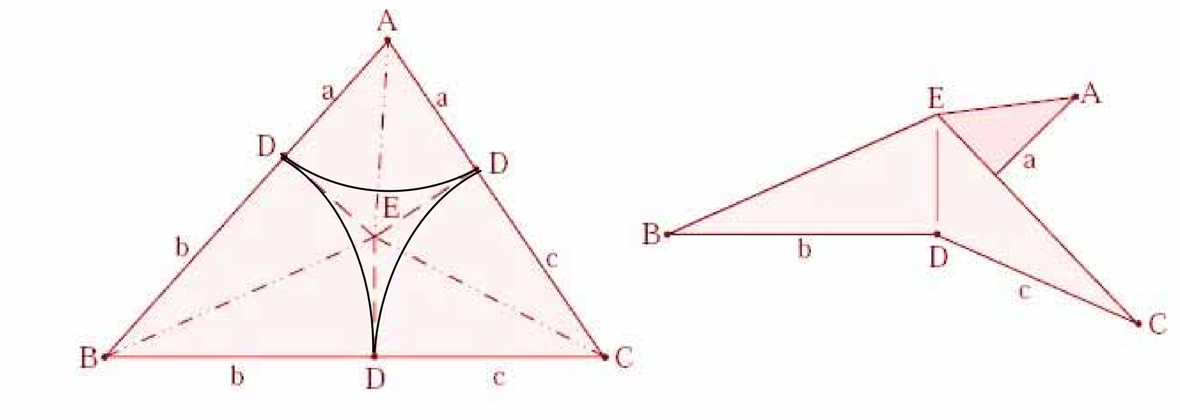


Figura 2. Piega a orecchio di coniglio

Essa si esegue in una porzione triangolare del foglio, piegando a monte lungo le bisettrici del triangolo e concludendo con delle pieghe a valle perpendicolari ai lati in modo che il triangolo piegato sia un *origami piatto*, ossia giaccia tutto su un piano. Osserviamo che, in una qualunque piega a orecchio di coniglio, i lati del triangolo sono tutti allineati e i punti di tangenza degli archi di circonferenza centrati nei vertici del triangolo appartengono alla stessa retta di allineamento e sono coincidenti. La struttura geometrica che soggiace alla piega a orecchio era nota a Euclide, che dimostrò che le *bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto* e che i *triangoli adiacenti* formati da segmenti di bisettrici con vertici il centro e un vertice del triangolo sono *congruenti*. Per provare a piegare qualcosa, un semplice origami che utilizza la piega a orecchio di coniglio, dando vita a un modello di movimento, è il “Wing ding” di Florence Temko nel sito [S7].

Se pieghiamo un origami e riapriamo completamente il foglio, vedremo il *crease pattern* cioè l'insieme delle tracce delle pieghe. Il *crease pattern* fornisce molte informazioni sulla struttura dell'origami e dà una visione d'insieme dell'intero modello; diversamente dal carattere locale delle osservazioni che si possono fare analizzando i "diagrammi", cioè l’insieme dei disegni che illustrano la sequenza di piegatura che conduce al modello finito passo dopo passo. Tipicamente le prime pagine dei libri dedicati agli origami descrivono i simboli utilizzati nei diagrammi per indicare i diversi tipi di pieghe, poi passano a descrivere le sequenze di pieghe usate più frequentemente, dette “basi”. Quattro basi classiche si chiamano “base dell’aquilone”, “base del pesce”, “base della gru”, “base della rana” e sono illustrate in ordine nella figura 3.

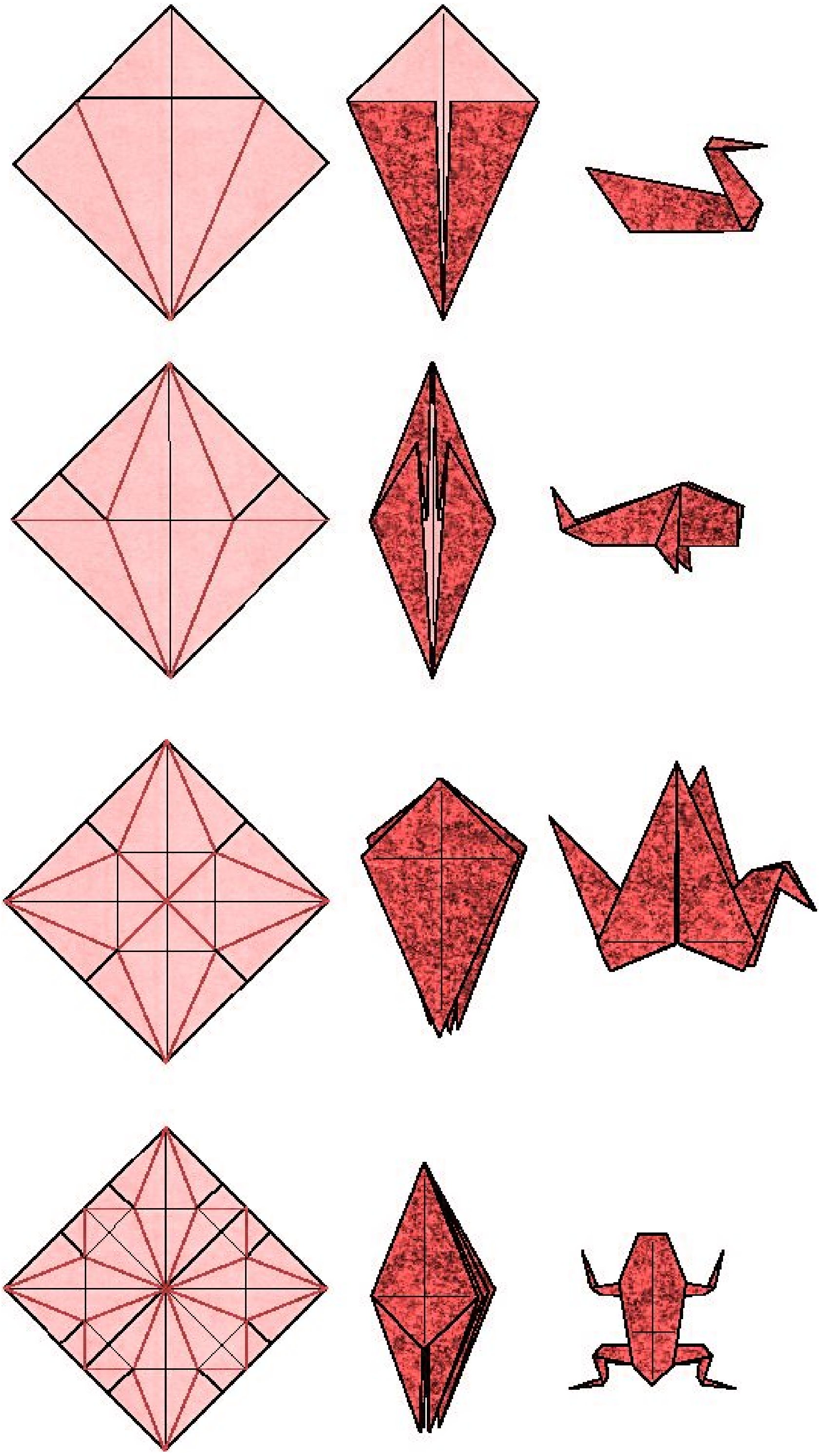


Figura 3. Le quattro basi classiche dell'origami: “base dell’aquilone”, “base del pesce”, “base della gru”, “base della rana”.

Confrontando i *crease pattern* delle quattro basi classiche, si nota che esse sono costituite del medesimo tassello ripetuto da due a sedici volte. Lo riconoscete?

Il matematico origamista si chiederà, dato un foglio di carta e un insieme di linee disegnate su di esso, se questo insieme costituisca il *crease pattern* per un modello origami. Il problema è stato affrontato e si è rivelato assai difficile e in generale senza soluzione. Alcuni risultati *locali* si sono ottenuti per gli origami piatti. Si dimostrano condizioni necessarie e sufficienti sulle pieghe che convergono in un vertice di un origami piatto. In particolare si hanno i seguenti

Teorema di Maekawa-Justin
Attorno a un vertice interno a un *crease pattern* di un origami piatto deve essere

$$M - V = +2 \text{ o } M - V = -2$$

Dove M è l'insieme delle pieghe a monte e V è l'insieme delle pieghe a valle.

Corollario
Il numero di pieghe convergenti in un vertice interno a un crease pattern di un origami piatto è pari.

Corollario (Meguro)
L'insieme delle facce di un *crease pattern* di un origami piatto è sempre colorabile con due colori.

Teorema di Kawasaki
In ogni vertice interno a un crease pattern di un origami piatto, la somma degli angoli alternati deve essere 180°.

Quadrato e rettangoli

Pensiamo a quante cose si possono fare con un qualunque foglio di carta. Spesso lo usiamo per scrivere, ci è utile per incartare un regalo o lo stropicciamo e gettiamo via… Ma alcune cose si possono fare solo a partire da un foglio quadrato. Il *quadrato* ha delle proprietà geometriche che possono essere sfruttate nella piegatura, tanto da renderlo il formato di carta prediletto in origami. La sua forma è semplice e ha una grande simmetria. Il cerchio ha la massima simmetria, ma in origami, è meno utilizzabile di quella del quadrato poiché la natura delle pieghe sulla carta è rettilinea. Inoltre il quadrato ha sempre le stesse proporzioni. L'osservazione non è affatto banale se si pensa che i passaggi che conducono a piegare un modello rimangono gli stessi per qualunque dimensione del foglio quadrato di partenza e in ogni dove nel mondo. I fogli che si usano quotidianamente sono rettangolari, ma con i lati in proporzioni diverse nelle varie nazioni [S8].

Figura 4. Rosa di Kawasaki, foglio quadrato

Molte figure in origami vengono piegate a partire da *rettangoli*. Questi possono essere piegati longitudinalmente e lateralmente a formare un'utile griglia.

Figura 5. Cobra di David Derudas, foglio rettangolare

Due rettangoli famosi nella storia della matematica vengono sempre più esplorati dagli origamisti: il rettangolo aureo e il rettangolo d'argento.

Il *rettangolo aureo* ha i lati in proporzione $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Per ottenere un rettangolo aureo da un quadrato sono sufficienti i quattro passaggi seguenti

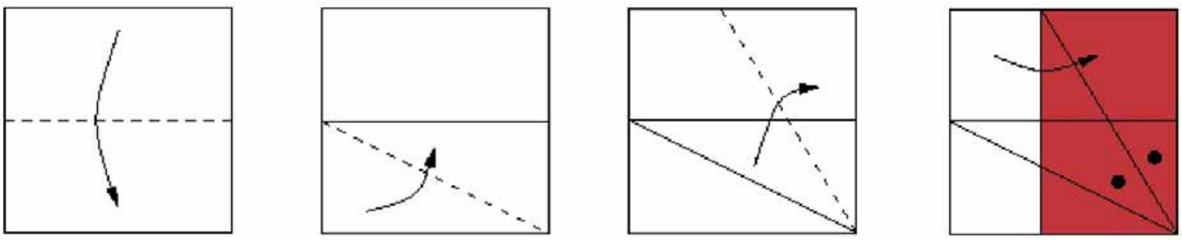


Figura 6. Il rettangolo aureo a partire da un quadrato

Tra le proprietà di questo rettangolo, si osserva che ricavando un quadrato da un rettangolo aureo si ottiene un nuovo rettangolo aureo.

Il *rettangolo d'argento* ha i lati in proporzione $1:\sqrt{2}$. Si ottiene un rettangolo d'argento da un quadrato come mostrato nella figura seguente

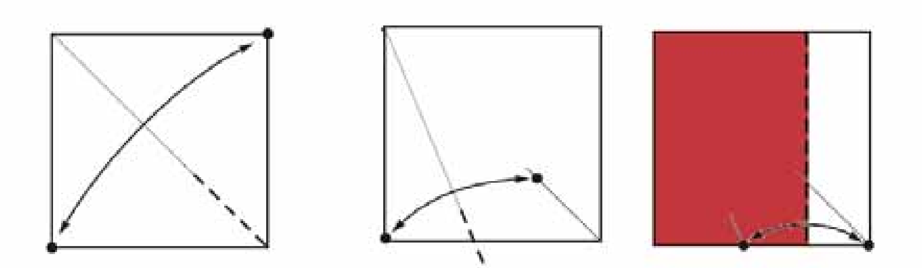


Figura 7. Un rettangolo d'argento a partire da un quadrato

Dividendo a metà un rettangolo d'argento si ottengono altri due rettangoli d'argento. Questa è tra le proprietà che hanno fatto scegliere questo rettangolo come standard (noto come formato **A**) nella maggior parte delle nazioni.

Ora, prendiamo una striscia di carta rettangolare, con un lato molto più lungo di un altro, e facciamo un nodo, vedremo un pentagono e una stella pentagonale in trasparenza. Si può dimostrare con poca geometria che il pentagono è regolare! Non è altrettanto facile piegare strisce di carta per ottenere altri poligoni. Per esempio, è impossibile ottenere un esagono. Si annoda una striscia in un ettagono, ma con una certa dose di pazienza. La dimostrazione di quali poligoni con più di cinque lati si possono ottenere mediante nodi di strisce di carta richiede delle conoscenze algebriche sui gruppi ciclici Z_n [B3].

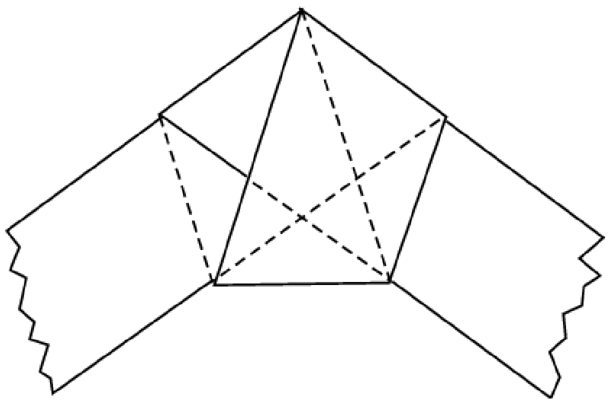


Figura 8. Un nodo fatto con una striscia rettangolare forma un pentagono regolare e una stella pentagonale.

Dopo aver piegato un nodo pentagonale da una striscia di carta su cui si è scritto un messaggio augurale, si può piegare una deliziosa stellina tradizionale cinese conosciuta come stellina portafortuna

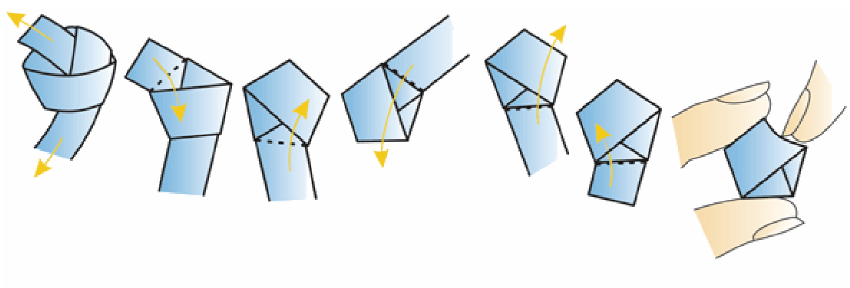


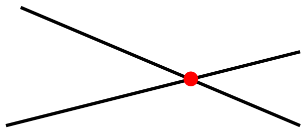
Figura 9. Stellina portafortuna

Costruzioni con riga e compasso e costruzioni origami

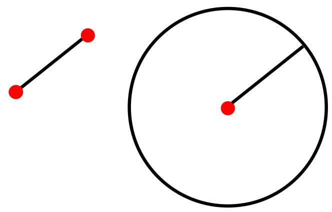
Senza entrare troppo in dettaglio, consideriamo le classiche costruzioni con riga e compasso nella geometria piana euclidea e le costruzioni origami note come “Assiomi di Huzita”.
Nel piano euclideo R^2, a partire da un insieme di punti e utilizzando il compasso e la riga (non graduata) si possono ottenere rette e punti applicando ripetutamente le cinque procedure seguenti

1. Si disegna la retta passante per due punti distinti

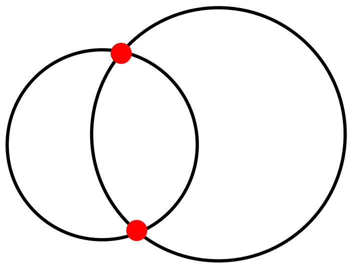
2. Si determina il punto di intersezione di due rette non parallele



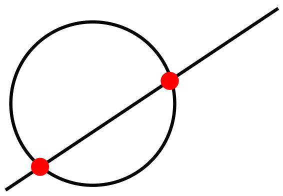
3. Si disegna una circonferenza di centro un punto e raggio pari a un segmento di vertici due punti costruibili con riga e compasso



4. Si determinano i punti di intersezione di due circonferenze secanti



5. Si determinano i punti di intersezione di una retta e una circonferenza che si intersecano



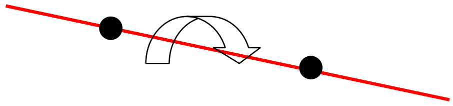
Queste costruzioni non permettono di disegnare ogni tipo di figura. Per la geometria con riga e compasso ci sono delle costruzioni *impossibili*. Tra queste rientrano i tre problemi classici

- trisezione dell’angolo
- duplicazione del cubo
- quadratura del cerchio

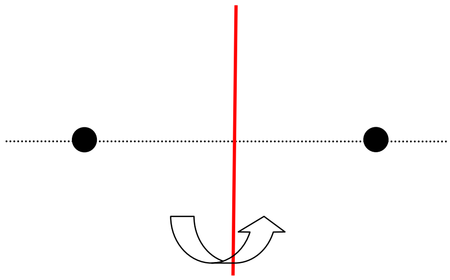
Inoltre è impossibile la costruzione di alcuni poligoni regolari tra i quali l’ettagono e l’ennagono.

Nella geometria origami, l'analogo del piano R^2 è il foglio di carta (che si suppone semitrasparente e infinito) e l'unico strumento che si può utilizzare è la piega. Così un punto si ottiene dall'intersezione di due pieghe e una retta coincide con una piega. Le pieghe seguenti sono chiamate *assiomi dell'origami*

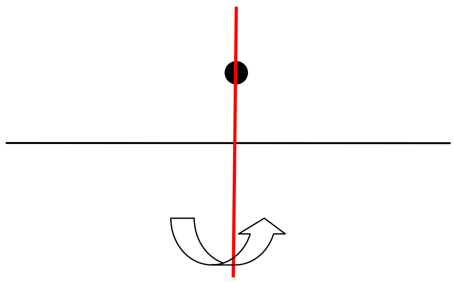
01 Si piega la retta passante per due punti assegnati



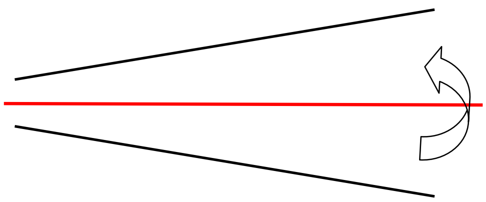
02 Dati due punti è possibile piegare uno sull'altro (ottenendo l'asse del segmento di cui i due punti sono estremi)



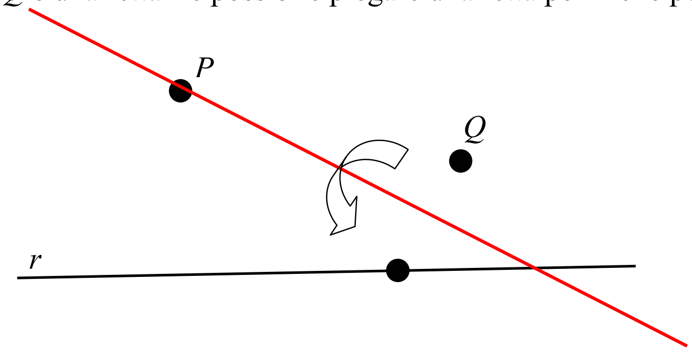
03 Dati un punto e una retta, si piega la perpendicolare alla retta passante per il punto



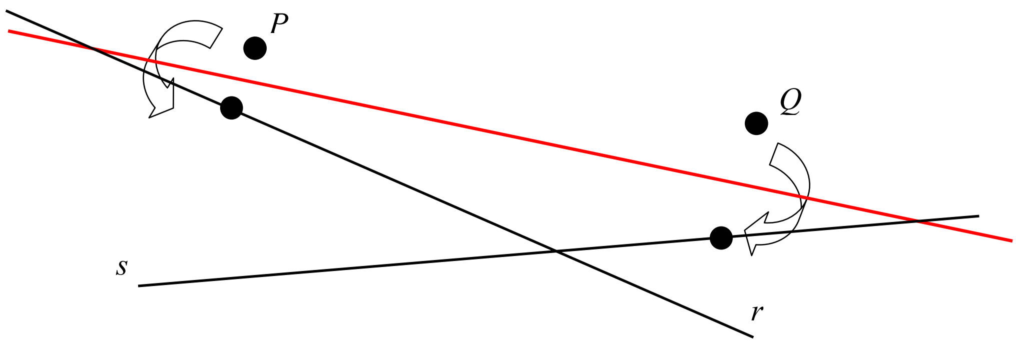
04 Date due rette si può piegare una sull'altra (ottenendo la bisettrice dell'angolo tra le due rette)



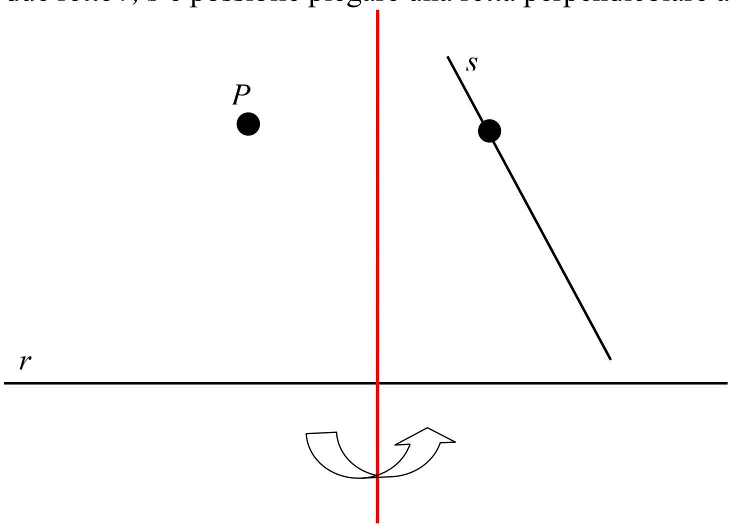
05 Dati due punti P e Q e una retta r è possibile piegare una retta per P che porti Q su r



06 Dati due punti P, Q e due rette r, s è possibile piegare una retta che porti contemporaneamente P su r e Q su s



07 Dati un punto P e due rette r, s è possibile piegare una retta perpendicolare a r che porti P su s



Queste costruzioni, note come "Assiomi di Huzita-Justin-Hatori", non sono indipendenti tra loro, ma rappresentano tutte e sole le operazioni che definiscono una singola piega in origami, come ha dimostrato Lang nel 2005 [S1].

Osserviamo ora la quinta di queste pieghe particolari. Se chiamiamo F un punto e d la retta; le pieghe che si ottengono portando ripetutamente F su d (facendo variare il secondo punto della costruzione) sono le tangenti alla parabola di fuoco F e direttrice d. Più in generale, con l'origami si risolvono le equazioni di secondo grado.

Analogamente, è possibile mostrare che le pieghe che si ottengono grazie al sesto assioma origami sono le tangenti comuni alle parabole individuate da *(P,r)* e *(Q,s)*. Si dimostra che con l'origami si risolvono le equazioni di terzo grado.

Inoltre si ha che l'insieme di tutte le costruzioni con riga e compasso coincide con l'insieme delle costruzioni origami che si ottengono usando solamente 01, 02, 03, 04, 05. L'assioma 06 permette di costruire una geometria più forte. Pertanto, delle costruzioni impossibili con riga e compasso sono invece possibili in questa nuova geometria. Con l'origami si trisecano gli angoli e si duplica il cubo. I poligoni regolari costruibili con riga e compasso devono necessariamente avere un numero di lati uguale a $n = 2^a p_1 p_2 ... p_k$, dove $p_1, p_{2,} ..., p_k$ sono numeri primi distinti di Fermat, cioè della forma $2^r + 1$. Gli unici numeri primi di Fermat conosciuti sono 3, 5, 17, 65537. Una delle sfide matematiche ancora aperte è stabilire se c'è un numero finito di primi di Fermat o no. Ripetendo analoghi ragionamenti, si prova che i poligoni regolari costruibili con le pieghe descritte dagli assiomi origami devono necessariamente avere un numero di lati pari a $n = 2^a 3^b p_1 p_2 ... p_k$, dove $p_1, p_{2,} ..., p_k$ sono numeri primi della forma $2^r 3^s + 1$. I numeri primi di questa forma sono molti di più dei primi di Fermat, ma neppure di questi si sa se siano infiniti: 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97, …

Sitografia

[S1] Robert J. Lang, http://www.langorigami.com/
[S2] Centro Diffusione Origami, http://www.origami-cdo.it
[S3] "Origami & Math" Eric M. Andersen, http://www.paperfolding.com/math/
[S4] Tom Hull, http://www.merrimack.edu/~thull/
[S5] David Lister, http://www.britishorigami.info/academic/lister/index.htm
[S6] Thoki Yenn, http://www.britishorigami.info/academic/thok/thok.htm
[S7] Alcuni diagrammi di modelli origami http://www.giladorigami.com/swami/action.html
[S8] “International standard paper sizes”, http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html.

Bibliografia

[B1] Robert J. Lang, *Origami Design Secrets. Mathematical Methods for an Ancient Art*, A K Peters, 2003
[B2] AA.VV., *Origami^3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, Thomas Hull Editor, A K Peters, 2002
[B3] Thomas Hull, *Project Origami. Activities for Exploring Mathematics*, A K Peters, 2006

66.Teoria fisica dei campi vettoriali ed equazioni differenziali

di Paolo Bonicatto [sbonica@tin.it]

[...] perché imparare è la cosa più dolce
non solo per i saggi
ma anche per tutti gli altri ugualmente.

Aristotele

Sunto: *Lo scopo di queste pagine è quello di illustrare, in maniera sintetica e per quanto possibile esaustiva, lo stretto legame che intercorre tra campi vettoriali ed equazioni differenziali. Dopo una breve introduzione che mette in luce l'importanza che la teoria dei campi riveste nello studio della Fisica Classica, è presente un paragrafo dedicato alla definizione matematica di campo vettoriale. Infine, le ultime pagine sono dedicate all'utilizzo dei campi nella costruzione e soprattutto nella risoluzione di modelli differenziali.*

L'evoluzione del concetto fisico di campo

Fin dall'antichità si pensava che le forze si originassero in seguito ad un *contatto*. Anche ai tempi di Newton, il concetto di forza era istintivamente associato ad una spinta o, al massimo, ad un urto. Tuttavia, si rivelò necessario modificare questa impostazione di pensiero quando si intrapresero i primi studi sulla gravitazione universale: due corpi interagivano senza che vi fosse necessariamente un contatto tra di loro. E' grazie a fisici del calibro di Faraday e Maxwell che, agli inizi del 1800, nacque il concetto di *campo*. In Fisica, esso si potrebbe definire come una "perturbazione dello spazio, descritta da grandezze fisiche misurabili" [1]. E infatti, generalmente, un corpo posizionato in un punto nello spazio risente del campo presente in quel punto, in quel dato istante.

Il campo gravitazionale

Nello studio della Fisica Classica, si incontra il concetto di *campo* diverse volte. Qui e nel seguito ci limiteremo a considerare il campo *gravitazionale* e quello *elettrico*. Prima di darne una rigorosa definizione in termini fisici, cerchiamo di illustrare il concetto mediante un esempio. Consideriamo la Terra come una massa isolata. Se un corpo è portato vicino ad essa, risente di una forza **F** che ha direzione, verso e modulo definiti in ogni punto dello spazio. Più precisamente, l'intensità è **m·g** mentre la direzione è quella del raggio (e quindi sarà detta *radiale*) rivolta verso il centro della Terra. In ogni punto dello spazio, possiamo dunque definire un vettore **g** che corrisponde all'accelerazione a cui il corpo verrebbe sottoposto se venisse lasciato libero. Dalla seconda legge della dinamica si può ricavare l'intensità di **g**, che è data da

$$\mathbf{g} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}.$$

Abbiamo già detto che un campo gravitazionale è una *perturbazione* dello spazio. Precisiamo ora che è una grandezza vettoriale, la cui intensità è data da

$$\Gamma = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}$$

(è cioè la forza per unità di massa) ed è sempre rivolto radialmente verso il centro della massa che l'ha prodotto. Si noti che il campo gravitazionale ha le dimensioni di un'accelerazione: la sua equazione dimensionale è$[l][t]^{-2}$ e la sua unità di misura m/s^2 – come si poteva dedurre dall'esempio precedente. Un campo gravitazionale può essere rappresentato mediante linee di forza (vedi fig. 1).

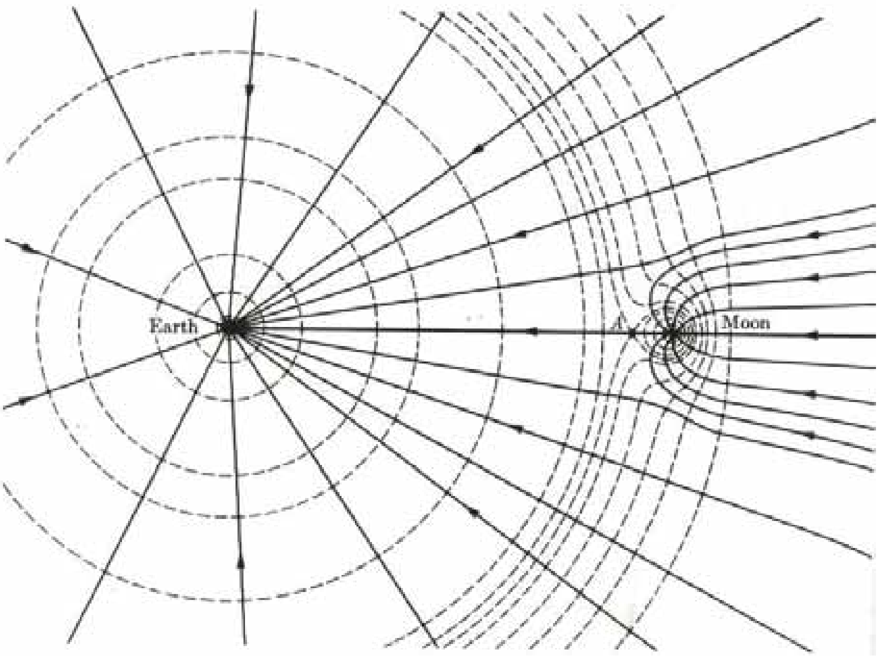


Figura 1. Linee di forza del campo gravitazionale prodotto dalla Terra e dalla Luna.
Fonte: Alonso-Finn, Physics, Pretince Hall, 1992.

Campo elettrico

Si incontra un altro esempio di campo vettoriale nello studio delle interazioni elettriche. E' risaputo che molte sono le somiglianze tra la teoria gravitazionale e quella elettrica (si considerino, ad esempio, la legge newtoniana e quella coulombiana); analogamente a quello gravitazione, il *campo elettrico* è definito dal rapporto:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad (1)$$

dove **F** è la forza □olombiana esercitata sulla carica e q è detta carica di *prova*. Possiamo inoltre affermare che un *campo elettrico* è una qualsiasi regione in cui una carica elettrica esercita una forza; in altre parole, esso è la forza per unità di carica e pertanto ha unità di misura N/C (newton/coulomb).
Si noti che la (1) si può scrivere anche come

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}\,.$$

Va detto che, al contrario della massa, una carica può assumere valore negativo. Restano quindi da distinguere due casi: una carica positiva risente di una forza nella stessa direzione e verso di **E**; una carica negativa risente di una forza con stessa direzione ma verso opposto ad **E**. Anche per quanto riguarda la rappresentazione mediante linee di forza è opportuna qualche precisazione. Esse partono sempre dalle cariche positive (+) o dall'infinito e finiscono nelle cariche negative (–) o all'infinito. Ovviamente la loro densità aumenta con l'intensità di **E**. Un esempio classico di campo elettrico (peraltro uniforme, visto che il campo punta in una sola direzione e la sua intensità è indipendente dalla distanza dello stesso) è un condensatore (cfr. fig. 2)

Figura 2. Condensatore a facce piane e parallele. In questo caso ideale il campo elettrico è uniforme fra le due armature e nullo all'esterno. Fonte: Walker Fisica ed. Zanichelli [2004]

Teoria matematica di un campo vettoriale

Il concetto di campo, come si è appena visto, è ricorrente in Fisica. Nei paragrafi che seguono ci occuperemo invece di analizzare un campo vettoriale da un punto di vista strettamente matematico: riprenderemo alcuni concetti dell'Analisi per studiarne le caratteristiche e, infine, cercheremo di mettere in luce lo stretto rapporto fra campi vettoriali ed equazioni differenziali.

Cominciamo con qualche definizione: in Matematica, per campo vettoriale (su uno spazio euclideo) si intende una particolare costruzione che associa a ogni punto di una regione (dello spazio euclideo) un vettore dello spazio stesso.
Esso viene univocamente identificato attraverso le sue componenti, funzioni a valori scalari che individuano ogni vettore nello spazio. Dal momento che una definizione del genere potrebbe risultare piuttosto oscura, facciamo subito un esempio in grado di "illuminare" il lettore. Supponiamo di avere il campo vettoriale (su $\mathbb{R}^2$) di componenti $\{2x+3y, 1-y+e^{-x}\}$. Questo significa che ad ogni punto $\{x, y\}$ bisogna 'appiccicare' il vettore di componenti $\{2x+3y, 1-y+e^{-x}\}$. Proviamo a disegnarlo con l'aiuto del software Mathematica®. Otteniamo, all'interno del quadrato $\{0,5\}\times\{0,5\}$, qualcosa di simile a questo:

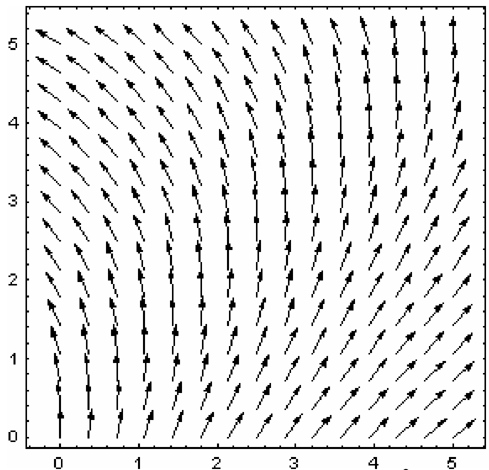


Figura 3. Rappresentazione di un campo vettoriale su R^2 di componenti assegnate.

Ovviamente, appare quasi ovvia l'estensione a R^3. Disegniamo il campo $\left\{\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, 0\right\}$:

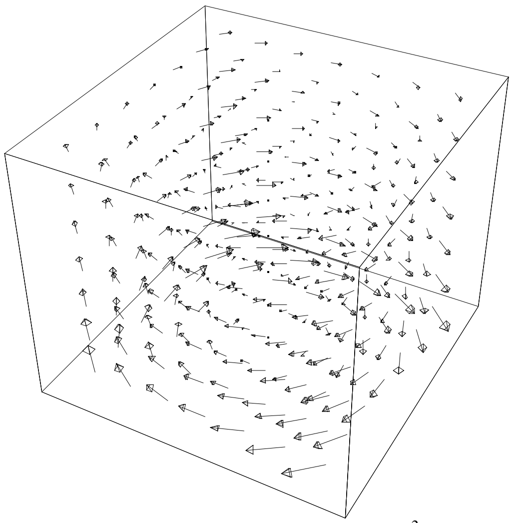


Figura 4. Rappresentazione di un campo vettoriale su R^3 di componenti assegnate.

Cercando di riunire le idee, possiamo dire che un campo vettoriale è definito dalle sue componenti, che, nel caso in cui $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, vengono generalmente indicate come $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ (ovviamente l'estensione a R^3 implica componenti $f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)$).

Per visualizzare un campo, inoltre, si devono identificare dominio e codominio, avendo l'accortezza di pensare il dominio come insieme di punti e il codominio come insieme di vettori.

Chiudiamo il paragrafo, con un'osservazione non banale: nonostante la nomenclatura sia piuttosto simile, campo vettoriale e spazio vettoriale – come il lettore avrà avuto modo di notare – hanno ben poco in comune. Attenzione, dunque, a non confondere i due concetti.

Analisi differenziale di un campo

Cerchiamo ora di mettere in luce il legame con le equazioni differenziali. Riteniamo opportuno ricordare, prima di passare alla trattazione vera e propria, il cosiddetto significato geometrico della derivata. Data una funzione f(x) derivabile (in un intervallo I), la sua derivata f'(x_0) nel punto x_0 (interno ad I) rappresenta il coefficiente angolare (o, secondo una terminologia meno appropriata, la pendenza) della retta tangente alla curva in quel punto.

Non è molto difficile, quindi, individuare quel legame tra campi vettoriali ed equazioni differenziali di cui si parlava: infatti, la ricerca di curve tracciate nel piano che in ogni punto siano tangenti al vettore del campo dato si traduce nella risoluzione di un'equazione differenziale; l'integrale di tale equazione, se c'è, si dice anche curva integrale del campo assegnato. In altre parole, si può associare ad un'equazione differenziale un campo vettoriale: questo permette di visualizzare graficamente l'andamento delle curve integrali dell'equazione. Prendiamo, ad esempio, una equazione nella forma

$$y' = f(x, y).$$

Ora, si consideri un generico integrale y(x) di quest'equazione differenziale. E' possibile associare ad esso una curva parametrica in R^2; poniamo

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y(x(t)) \end{cases}$$

Il vettore tangente – ecco che entrano in gioco i campi – in ogni punto di questa curva è dato dalle due derivate, cioè

$$(x'(t), y'(t)) = (1, f(x, y)).$$

Quindi, data un'equazione differenziale come quella sopra è possibile associarvi un campo vettoriale. Prendiamo, ad esempio, un'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$\frac{dy}{dx} - x + y(x) = 0.$$

Possiamo riscriverla come

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x - y \\ y' &= x - y \end{aligned} \tag{2}$$

La (2) ci dice che in ogni punto (x_0, y_0) la derivata vale

$$y_0' = x_0 - y_0$$

Il coefficiente angolare della curva in ogni punto è pari alla differenza dell'ascissa e dell'ordinata del punto stesso. Secondo quanto abbiamo detto precedentemente, alla generica equazione $y' = f(x, y)$ associamo il campo $(1, f(x, y))$; nel nostro caso, $f(x, y) = x - y$ e quindi possiamo associare all'equazione il campo di componenti $\{1, x - y\}$. Nella figura 5 si può vedere graficamente cosa succede all'interno del quadrato {-5,5} × {-5,5}:

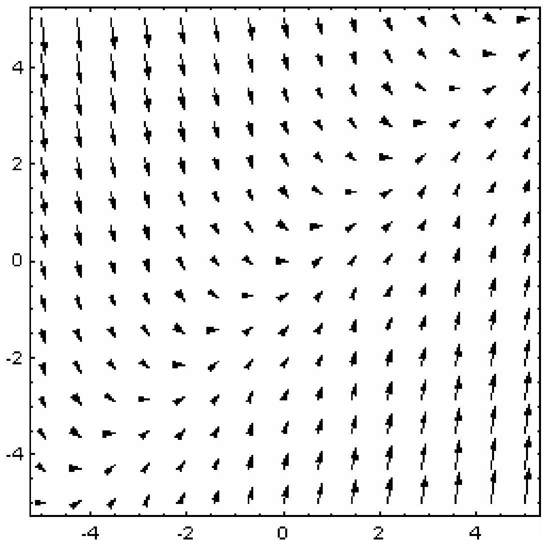


Figura 5. Rappresentazione del campo associato all'equazione differenziale.

E' interessante, a questo punto, integrare l'equazione data per poter 'vedere' di fatto il legame tra campi ed equazioni differenziali. Procediamo come di consueto e usiamo la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{aligned} y' &= x - y \\ y &= e^{-\int dx}\left[\int xe^{\int dx}dx + c\right] \\ y &= e^{-x}\left[\int xe^{x}dx + c\right] \end{aligned}$$

L'integrale non è immediato però si può integrare per parti, e si ottiene

$$y = e^{-x}\left[e^{x}(x+1)+c\right]$$

$$y = e^{-x+x}(x+1)+ce^{-x}$$

$$y = x+1+ce^{-x}$$

Questa è l'espressione dell'integrale generale. Se si prova a tracciare il grafico di alcuni integrali particolari (assegnando diversi valori a c), si vede che essi sono sovrapponibili in tutto e per tutto alle direzioni individuate dai vettori della figura 5; non solo, ma dall'analisi di figura 5 si poteva già indovinare l'integrale particolare $y = x+1$ (ottenuto ponendo c=0) dal momento che le direzioni erano tutte allineate. Emerge così anche l'utilità dei campi in ambito integro-differenziale: essi permettono di apprezzare il comportamento delle soluzioni, anche nel caso in cui l'equazione non ammetta soluzioni esplicitabili elementarmente.

Lo scenario che si spalanca di fronte a noi è ora immenso, forse troppo esteso per essere esaurito in queste poche pagine: la teoria di alcuni importanti operatori del calcolo vettoriale (rotore, divergenza e gradiente), che vengono utilizzati nella creazione di campi vettoriali particolari, è un argomento molto interessante. Invitiamo il lettore curioso che abbia voglia di approfondire di consultare la sezione bibliografica.

Bibliografia

Nella stesura ho tenuto conto delle seguenti opere (in ordine crescente di apprezzamento da parte mia):

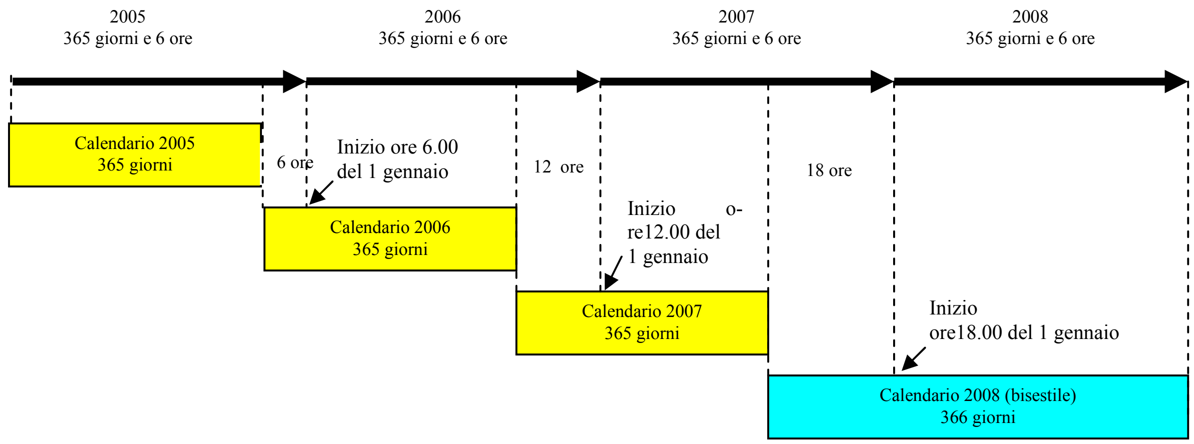
1. A. Caforio – A. Ferilli, *Fisica 1*, Le Monnier, 2004
2. J.S. Walzer, *Fisica*, Zanichelli, 2001
3. D. Halliday – R. Resnick, *Fisica, Volume primo,* Casa ed. Ambrosiana, 1966
4. M. Alonso – E. J. Finn, *Fundamental University Physics: Fields and Waves*, Inter European Editions Amsterdam, 1974 (edizione bilingue); ora *Physics,* ed. Prentice Hall, 1992
5. Elsgolts, Lev Ernestovic, *Equazioni differenziali e calcolo delle variazioni : corso di matematica superiore e di fisica matematica*, Roma: Editori riuniti; Mosca: Mir, 1981. Trad. di Boris Dmitriev

Per quanto riguarda la sezione di Matematica, invito il lettore interessato ad eventuali approfondimenti a consultare l'indispensabile Wikipedia (www.en.wikipedia.org). *Infine, porgo i miei più sentiti ringraziamenti al dott. L. A. Lussardi e all'utente "Eredir" del forum di matematicamente.it: il loro aiuto è stato per me determinante nella comprensione di questo argomento.*

67. L'inizio dell'anno nuovo …ha le ore contate

di Marco Piumetti

Abbiamo festeggiato da poco l'inizio del nuovo anno, brindando nella notte del 31 dicembre con l'auspicio di un anno il più possibile sereno. Tuttavia, nonostante il nostro calendario (cioè quello Gregoriano) corrisponda straordinariamente bene alla ripetitività delle stagioni, risulta essere troppo veloce rispetto al moto della Terra intorno al Sole. Infatti, il numero di giorni necessari alla Terra per fare un giro intorno al Sole è superiore a 365 giorni, e corrisponde a circa 365,25 giorni, cioè poco più di 365 giorni e 6 ore. I frammenti d'ora dell'anno solare sono responsabili di ulteriori correzioni che bisogna aggiungere ad intervalli più lunghi come i secoli.
Di questi effetti se ne accorsero già gli antichi romani, infatti, l'astronomo alessandrino Sosigene nel primo secolo a.C. suggerì a Giulio Cesare di aggiungere, per ragioni pratiche, un giorno ogni 4 anni (il che equivale ad aggiungere 6 ore per ogni anno); nascono così gli anni bisestili. Negli anni bisestili, quali ad es. 2000, 2004, 2008, …, si compensa l'anticipo accumulato negli anni successivi all'ultimo anno bisestile, aggiungendo un giorno in più al calendario. Così facendo però l'inizio del secondo anno successivo a quello bisestile (es. il 2006 è il secondo anno successivo al bisestile 2004) avverrebbe, secondo il "nostro" calendario, alle ore 6.00 del 1 gennaio 2006, mentre il terzo anno successivo (es. il 2007) dovrebbe iniziare alle ore 12.00 del 1 gennaio 2007. Ciò significa che, probabilmente, sarebbe stato più corretto brindare l'inizio di questo nuovo anno 2008 bisestile alle ore 18 del 1 gennaio 2008! Comunque sia auguri di un anno lunghissimo…



68. Metodi infinitesimali nell'antichità

Seconda parte: da Cavalieri alla prima derivata

di Luca Lussardi

Sunto: *Seconda parte della storia dell'analisi infinitesimale dedicata alla 'geometria degli indivisibili' di Bonaventura Cavalieri e alle 'finte uguaglianze' di Fermat.*

1. Kepler

Con la ripresa lenta e faticosa della matematica nel tardo medioevo assistiamo ad una debole riapertura verso il metodo di esaustione, rudimentale ma rigoroso metodo di integrazione. Tra i seguaci di questo metodo ricordiamo l'italiano Luca Valerio (1552-1618) [1]. Il primo abbandono vero e proprio del metodo greco, considerato, non a torto, troppo difficile da applicare, va fatto risalire a Kepler (1571-1630), grande astronomo e matematico tedesco.

Riportiamo, a proposito, un breve cenno al primo esempio di metodo di integrazione che non fa uso del metodo di esaustione: il calcolo dell'area del cerchio da parte di Kepler. Per calcolare quest'area Kepler ha proceduto dividendo il cerchio in tanti spicchi di piccola apertura. Il punto della questione è però che Kepler non considera un numero finito di questi pseudo-triangoli, come avrebbero fatto i greci, bensì considera la totalità infinita degli spicchi isosceli di lato pari al raggio del cerchio e base un archetto infinitesimo. C'è quindi un ritorno all'infinito attuale, bandito dai greci, poiché inesorabile fonte di guai o contraddizioni.

2. Cavalieri

Non entriamo nel dettaglio del calcolo di Kepler e di altri esempi tratti dalle sue opere, ma la strada intrapresa appare chiara: abbandonare il metodo dimostrativo di esaustione troppo difficile da applicare, in favore di un metodo di calcolo. La direzione di ricerca intrapresa sfocerà nell'ultimo fallace: la teoria degli indivisibili geometrici. Il fondatore di questo metodo è Bonaventura Cavalieri (1598-1647) [2], allievo di Galileo. La sua opera principale è la *Geometria degli indivisibili*, di cui discuteremo le linee essenziali giusto per capirne il filo conduttore. L'idea fondamentale che governa il metodo degli indivisibili (limitato al calcolo di aree, la stessa cosa si potrebbe ripetere per il calcolo dei volumi) è la seguente: considerare una superficie piana come composta dalla totalità delle corde intercettate dalla superficie su un fascio di rette parallele.

Bologna, via Mascarella, 46
www.chieracostui.com/costui/docs/search/schedaoltre.asp?ID=6564

Il considerare questa totalità di segmenti (detti indivisibili) pone subito in rilievo il ritorno all'infinito attuale. L'idea di fondo del metodo è solamente la chiave concettuale per comprendere il Principio di Cavalieri che può essere enunciato come segue:

Principio di Cavalieri. *Se due superfici piane disgiunte intercettate dallo stesso fascio di rette parallele formano corde tra loro uguali a due a due, allora le due superfici hanno la stessa area; analogamente se due solidi disgiunti intercettati dallo stesso fascio di piani paralleli formano superfici tra loro uguali a due a due, allora i due solidi hanno lo stesso volume.*

E' da osservare, alla luce di quello che sappiamo oggi, che il Principio di Cavalieri è comunque un principio corretto, e stando alle attuali conoscenze matematiche sarebbe una conseguenza immediata del Teorema di riduzione per integrali multipli. Ma a quel tempo il Principio rimase fondato su qualcosa di instabile ed incerto, il concetto poco chiaro di indivisibile. Il Principio di Cavalieri si contrappone al metodo di esaustione: è teoricamente più debole, ma è più versatile, perlomeno si tratta quasi di uno strumento di calcolo.

Consideriamo, come unico esempio, il problema della determinazione del volume di una semisfera di raggio R. Allo scopo, osserviamo la costruzione della figura 1:

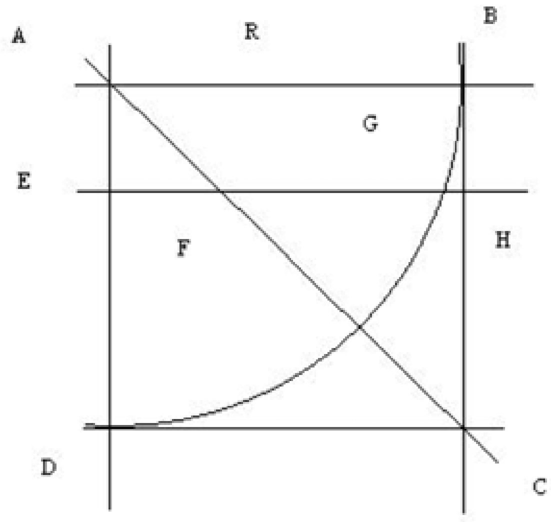


Figura 1. Calcolo del volume della semisfera con il metodo degli indivisibili.

dove l'arco di curva rappresenta un quarto di circonferenza. Una rotazione completa attorno al segmento AD dell'arco BD genera quindi una superficie semisferica. Immaginiamo ora di prendere un piano ortogonale al segmento AD che scorra da A verso D. Esso interseca la semisfera generata dalla rotazione del settore ABD lungo EG, interseca il cilindro generato dalla rotazione del quadrato ABCD lungo EH ed interseca il cono generato dalla rotazione di ACD lungo il segmento EF. Applicando il Teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{EH}^2 = \overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{EG}^2$$

Quindi il fascio di piani paralleli interseca i tre solidi ottenuti (cilindro C, semisfera S e cono Q) lungo tre superfici le cui aree stanno in una certa relazione. Un'applicazione spregiudicata del Principio di Cavalieri spaziale dice allora che deve essere

$$Vol(C)=Vol(S)+Vol(Q)$$

da cui

$$Vol(S)=\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$$

Ne segue che il volume della sfera vale

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. Fermat

Nello stesso periodo, con la nuova Geometria analitica di Renè Descartes (1596-1650) si aprono non solo nuovi orizzonti di ricerca molto fecondi, ma si apre anche la problematica decisiva che porterà, in breve, alla nascita del Calcolo infinitesimale. Infatti l'introduzione delle coordinate nello studio della geometria è stata sì una rivoluzione del pensiero, ma che ha creato molti nuovi problemi; uno dei problemi più difficili che si aprono, che affianca l'ormai antichissimo problema del calcolo di aree e volumi, è il problema della determinazione delle tangenti ad una curva piana, o ancora il problema della determinazione di massimi e minimi per una funzione, anche se il concetto moderno di funzione non è ancora presente.

Proprio quest'ultimo problema, la determinazione dei massimi o dei minimi di una funzione, segna, per molti autori, la nascita ufficiale del Calcolo infinitesimale. Infatti cercando di risolvere questo problema, un matematico dilettante francese, si avvicinerà molto al nostro calcolo delle derivate. Fermat non è certo passato alla storia per essere stato il primo ad avvicinare il concetto di rapporto incrementale, ma nella storia dell'Analisi si tratta di un passaggio fondamentale, poiché costituisce il primo tentativo di effettuare un passaggio al limite. L'idea di fondo su cui si basa Fermat è il fatto noto che se una funzione ha un massimo (o minimo) in un certo punto, allora essa è stazionaria nelle vicinanze di quel punto, ovvero varia poco se ci si sposta poco dal punto di massimo. Dunque, ad esempio, se f ha massimo in x, Fermat scrive

$$f(x+E)\approx f(x)$$

per E quantità abbastanza piccola. Ecco la famosa *adeguaglianza* (=finta uguaglianza), che sarà oggetto di critiche newtoniane. Fermat opera caso per caso scrivendo l'adeguaglianza, dividendo poi per E, e ponendo alla fine E = 0 l'adeguaglianza diventa uguaglianza, da cui la soluzione. In simboli le operazioni fatte sono:

$$f(x+E)-f(x)\approx 0$$

$$R(x,E)=\frac{f(x+E)-f(x)}{E}\approx 0$$

$$R(x,0)=0.$$

Non essendo, ovviamente, pienamente consapevole di ciò, Fermat sfiora il concetto di rapporto incrementale, intendendo anche che l'ultimo passaggio sottintende un passaggio al limite per E $\to$ 0.

Vediamo soltanto un'applicazione: la determinazione dei punti di massimo della funzione $f(x)=x^2(3-x)$. Si ha $f(x+E)-f(x)=(x+E)^2(3-x-E)-x^2(3-x)$ che porta $-E^3-3E^2x-3Ex^2+3E^2+6xE\approx 0$. Dividendo per E si trova $-E^2-3Ex-3x^2+3E+6x\approx 0$ che diventa uguaglianza ponendo $E=0$. Quindi si ha $-3x^2+6x=0$ da cui due soluzioni possibili $x=0$ e $x=2$. Fermat ora osserva che $f(2+E)=4-3E^2-E^3$ mentre $f(2-E)=4-3E^2+E^3$. Essendo E^3 trascurabile rispetto ad E^2 (c'è già una primordiale idea di confronto di infinitesimi), ed essendo $f(2)=4$ si ha che per E molto piccolo $f(2+E)<f(2)=4$, $f(2-E)<f(2)=4$, per cui $x=2$ è il massimo cercato, ed il valore massimo vale 4.

Infine vediamo come Fermat risolve il problema della determinazione delle rette tangenti riconducendosi ad una strada analoga a quella seguita per la ricerca di punti di massimo. Quello che fa Fermat è molto simile al nostro modo di introdurre il concetto di tangente. Infatti egli considera la secante che parte dal punto del grafico di f, diciamo di ascissa x, e arriva al punto del grafico di f di ascissa $x+E$. Fermat capisce che più E diventa piccolo, più la secante si avvicina ad essere la tangente, ma, con la sua solita astuzia, non pone subito $E=0$. Per intraprendere la strada delineata, Fermat considera il punto di intersezione tra la secante data e l'asse delle x, che ha coordinata ascissa

$$\frac{f(x)E}{f(x+E)}-f(x).$$

Semplificando e ponendo $E=0$, ma solo alla fine, si trova il punto di intersezione tra la tangente desiderata e l'asse delle x.

Con Fermat, Descartes e altri minori si conclude la parte "antica" della storia del Calcolo infinitesimale, che ha visto l'introduzione di vari metodi, dai più rigorosi ai meno rigorosi; quello che tuttavia manca ancora è un procedimento di calcolo vero e proprio che consenta di risolvere in modo diretto un problema di tangente, di massimo o di area. La strada però è ormai spianata e le idee della Geometria analitica verranno riprese non molto più tardi dai due colossi che segnano la nascita del Calcolo vero e proprio, Newton e Leibniz.

Bibliografia

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Luca_Valerio
[2] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Cavalieri.html
Pascal Dupont, *Appunti di Storia dell'Analisi Infintesimale*, Vol. I e II, Libreria scientifica CORTINA, Torino, 1980.

69. Le comete Kreutz

di Michele T. Mazzucato

Sunto. *Le comete sono ritenute dei residui fossili della condensazione della nebulosa originaria da cui il Sistema Solare si formò e il loro studio è di particolare importanza, in quanto la loro composizione iniziale è rimasta inalterata. Nell'articolo si parla della famiglia delle comete radenti, delle quali solo in tempi recenti, grazie all'ausilio dei satelliti e della moderna tecnologia, si è potuto ipotizzarne l'origine comune da una grande cometa progenitrice.*

1. Introduzione

La famiglia di comete Kreutz prende il nome dall'astronomo tedesco Heinrich Carl Friedrich Kreutz (Siegen, 1854 – Kiel, 1907) che nel periodo 1880-1891 esaminò tutte le comete, sino ad allora note, aventi caratteristica di transitare nell'estreme vicinanze del Sole durante il loro passaggio perielico. Gli studi portarono a pensare che queste comete fossero frammenti originatesi da un'unica grande cometa dato che seguivano le medesime orbite. Il lavoro venne pubblicato con il titolo *Untersuchungen über das System der Cometen* 1843 I, 1880 I and 1882 II negli anni 1888 (I parte), 1891 (II parte) e 1901 (III parte) sulle riviste "Sternwarte Kiel" e "Astronomische Abhandlungen als Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten". Oggi questa famiglia di comete è sinonimo di comete SOHO (SOlar and Heliospheric Observatory) dal nome del satellite lanciato nel 1995, che risulta oggi il maggiore scopritore (figura 1).

Figura 1. Il satellite SOHO (SOlar and Heliospheric Observatory), in orbita solare nel punto lagrangiano L1 (approssimativamente a 1.5 milioni di chilometri dalla Terra), risulta il maggiore scopritore di comete di tutti i tempi.

Come noto le comete sono dei piccoli oggetti celesti che orbitano intorno al Sole. Secondo il modello conosciuto come *dirty snowball* (palla di neve sporca), proposto negli anni Cinquanta del secolo scorso da Fred Lawrence Whipple (Red Oah, Iowa 1906 – Cambridge, Massachusetts 2004), le comete sono morfologicamente caratterizzare da un nucleo, composto da gas e polveri, che interagendo con il vento solare e dal progressivo riscaldamento durante l'avvicinamento al Sole, produce una chioma e una o più code (figura 2). La coda si trova sempre in direzione opposta al Sole, come evidenziarono Girolamo Fracastoro (Verona, 1478 – Incaffi VR, 1553) e il tedesco Peter Bienewitz (Leisnig, 1495 – Ingolstadt, 1552) nel XVI secolo, e può raggiungere decine di milioni di chilometri di lunghezza.

Figura 2. Una bella immagine scattata nel marzo 1997 della cometa Hale-Bopp (C/1995 O1). Sono evidenti la coda biancastra di polveri (in basso) e la coda azzurrognola di gas (in alto). [Image courtesy by Massimo Russo]

In riferimento al percorso orbitale, le comete vengono convenzionalmente suddivise a corto (come la 2P/ Encke) e a lungo (come la C/1995 O1 Hale-Bopp) periodo di rivoluzione siderale se questo è, rispettivamente, minore di 20 o maggiore di 200 anni. Quelle a corto periodo si originerebbero da una fascia sul piano equatoriale del Sistema Solare, situata a una distanza fra le 30 e le 50 UA (una Unità Astronomica equivale a circa 150 milioni chilometri, corrispondenti alla distanza Terra-Sole). Questo probabile serbatoio prende il nome di fascia di Leonard-Edgeworth-Kuiper dal nome dell'astronomo statunitense Frederick Charles Leonard (Madison Park, Illinois 1896 – Los Angeles, California 1960) e dall'irlandese Kenneth Essex Edgeworth (Daramona House, Streete, County Westmeath, 1880 – Dublin, 1972) che, rispettivamente, nel 1930 e 1943 ne suggerirono l'esistenza e da Gerard Peter Kuiper (Harenkarspel, 1905 – Città del Messico, 1973) che, nel 1951, ne riprese l'idea. Mentre, una vasta nuvola a simmetria sferica, residuo della nebulosa originaria del Sistema Solare a cui è debolmente legata, situata a una distanza fra le 20000 e le 100000 UA sarebbe il probabile serbatoio da cui si originano le comete a lungo periodo. Questa nuvola prende il nome di nube di Oort dal nome dell'astronomo olandese Jan Hendrik Oort (Franeker, 1900 – Leiden, 1992) che, nel 1950, ne ipotizzò l'esistenza.

Dal 1995, come stabilito dall'International Astronomical Union IAU, la designazione di una cometa si compone dell'anno, una lettera che identifica la quindicina del mese e un numero d'ordine di scoperta. L'anno di scoperta viene preceduto da una lettera dai seguenti significati: C/ cometa a periodo molto grande o non periodica, P/ cometa periodica, D/ cometa perduta o distrutta, A/ cometa divenuta asteroide e X/ cometa di cui non si può calcolare l'orbita o appena scoperta. Da cui, per esempio, la sigla C/1995 O1 (la Hale-Bopp, dal nome degli scopritori statunitensi Alan Hale e Thomas Bopp o Grande Cometa del 1997) identifica la prima cometa scoperta nella seconda metà di luglio del 1995 avente un grande periodo orbitale.

prima quindicina			seconda quindicina		
A	gen	1-15	B	gen	16-31
C	feb	1-15	D	feb	16-29
E	mar	1-15	F	mar	16-31
G	apr	1-15	H	apr	16-30
J	mag	1-15	K	mag	16-31
L	giu	1-15	M	giu	16-30
N	lug	1-15	O	lug	16-31
P	ago	1-15	Q	ago	16-31
R	set	1-15	S	set	16-30
T	ott	1-15	U	ott	16-31
V	nov	1-15	W	nov	16-30
X	dic	1-15	Y	dic	16-31

Tabella 1. Lettere identificative delle quindicine mensili di scoperta.

2. La famiglia delle comete radenti

Le comete radenti il Sole (comete Kreutz o SOHO) hanno una distanza perielica media di 0.005 UA (circa 750000 chilometri) dalla "superficie" del Sole, non sono visibili da Terra (dato che la loro dimensione è paragonabile a una piccola casa in confronto a quella di una montagna di un tipico nucleo cometario) e non vi è nessuna relazione fra l'attività solare (come i brillamenti o l'espulsione di massa coronale) e il loro "impatto" con la superficie solare.

Sino al 1979 erano note solamente nove comete radenti. Con l'avvento dei satelliti artificiali tale numero si è notevolmente incrementato permettendo una migliore conoscenza di questa particolare famiglia di comete.

satellite	date	launcher	site	mass
Solwind (Solar Wind P78-1) experimental US Air Force/USA	24 feb 1979 13 set 1985	Atlas-F OIS General Dynamics	VA SLC-3W	850 kg
SMM (Solar Maximum Mission) (Solarmax) NASA/USA	14 feb 1980 02 dic 1989	Delta 3910 McDonnell Douglas	CC LC-17A	2268 kg
SOHO (SOlar and Heliospheric Observatory) NASA/USA & ESA/Europe	02 dic 1995 still active	Atlas-2AS Lockheed Martin	CC LC-36B	1850 kg
STEREO A e B (Solar TErrestrial RElations Observatory) NASA/USA	25 ott 2006 still active	Delta 7925-10L Boeing	CC SLC-17B	620 kg

VA: Vandenberg Air Force Base (California, USA) CC: Cape Canaveral Air Force Station (Florida, USA)
SLC: Space Launch Complex

Tabella 2. Caratteristiche dei quattro satelliti artificiali (al 2007) che, indirettamente dal loro compito principale rivolto allo studio del Sole, hanno permesso di individuare nuove comete radenti.

Recenti studi ritengono che la luminosa cometa osservata da Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) ed Éforo (Ephorus) nel 371 a.C. sia a sua volta un frammento di quella grande cometa originaria delle comete radenti e la cui dimensione viene stimata sui 100 chilometri. I due frammenti riferiti dallo storico Éforo di Cuma (circa 400-330 a.C.) avrebbero, rispettivamente, un periodo orbitale di circa 350 e 800 anni. Il primo frammento sarebbe già transitato nel I, IV, VIII e XI secolo quando, ulteriormente frantumatosi, ha formato il gruppo Kreutz I, di cui farebbero parte la C/1843 D1 Grande Cometa di Marzo, la C/1963 R1 Pereyra nonché le comete scoperte dai satelliti SOLWIND, SMM e la maggior parte di quelle scoperte da SOHO. Il secondo frammento, invece, sarebbe già transitato nel IV secolo e nel 1106 quando anch'esso si frantumò dando origine al gruppo Kreutz II di cui farebbero parte la C/1882 R1 Grande Cometa di Settembre e la cometa C/1965 S1 Ikeya-Seki. Oggi, oltre ai gruppi principali di

Kreutz (I e II), sono stati identificati ulteriori gruppi di Kracht (I e II), Marsden e Meyer (quest'ultimi due gruppi appaiono in relazione con la cometa 96P/Machholz 1) dal nome dei loro scopritori.

Scoperte a occhio nudo		
371 a.C. Aristotele-Eforo	??	??
1106	1106.02.??	??
1668	1668.03.01	??
1689	1689.09.??	??
1695	1695.10.23	??
1702	1702.02.15	??
C/1843 D1 Grande Cometa di Marzo	1843.02.27	0.0055
C/1880 C1 Grande Cometa del Sud	1880.01.28	0.0055
X/1882 K1 Cometa dell'Eclisse	1882.05.17	??
C/1882 R1 Grande Cometa di Settembre	1882.09.17	0.0077
C/1887 B1 Grande Cometa del Sud	1887.01.11	0.0048
C/1945 X1 du Toit	1945.12.28	0.0075
C/1963 R1 Pereyra	1963.08.24	0.0051
C/1965 S1 Ikeya-Seki	1965.10.21	0.0078
C/1970 K1 White-Ortiz-Bolelli	1970.05.14	0.0089
Scoperte dalla sonda SOLWIND (n. 6 nel periodo 1979-1985)		
C/1979 Q1 (SOLWIND 1)	1979.08.30	0.0048
C/1981 B1 (SOLWIND 2)	1981.01.10	0.0079
C/1981 O1 (SOLWIND 3)	1981.07.20	0.0061
C/1981 V1 (SOLWIND 4)	1981.11.04	0.0045
C/1984 O2 (SOLWIND 5)	1984.07.28	0.0154
C/1983 S2 (SOLWIND 6)	1983.09.23	0.0075
Scoperte dalla sonda SMM (n. 10 nel periodo 1980-1989)		
C/1987 T2 (SMM 1)	1987.10.06	0.0054
C/1987 U4 (SMM 2)	1987.10.18	0.0063
C/1988 M1 (SMM 3)	1988.06.27	0.0052
C/1988 Q1 (SMM 4)	1988.08.21	0.0059
C/1988 T1 (SMM 5)	1988.10.12	0.0051
C/1988 W1 (SMM 6)	1988.11.18	0.0059
C/1988 U1 (SMM 7)	1988.10.24	0.0058
C/1989 L1 (SMM 8)	1989.06.02	0.0056
C/1989 N3 (SMM 9)	1989.07.08	0.0046
C/1989 S1 (SMM 10)	1989.09.28	0.0048

Tabella 3. Comete radenti osservate a occhio nudo e quelle scoperte mediante i satelliti artificiali. Nella prima colonna il nome della cometa, nella seconda la data del perielio e nella terza la distanza perielica in UA.

3. La ricerca delle radenti

Le immagini provenienti dal Large Angle and Spectrometric Coronagraph (LASCO) a bordo del satellite SOHO, opportunamente elaborate al Naval Research Laboratory, vengono prelevate e analizzate, sia in tempo reale sia d'archivio, dai ricercatori di tutto il mondo alla ricerca di queste particolari comete. Attualmente (2007) solo quattro ricercatori italiani risultano scopritori di almeno una cometa SOHO.

Le due tipiche immagini sono la LASCO C2 (con filtro rosso) e la LASCO C3 (con filtro blu) aventi un campo inquadrato da 1.5 a 6 Rsun per la C2 e da 3.5 a 30 Rsun per la C3 (Rsun ≈ 700000 km ≈ 0.00465 UA = raggio del Sole) e un intervallo di ripresa, normalmente, di 16-20-24 minuti per le C2 e di 24-36-60 minuti per le C3 (figura 3). Nell'analizzare le immagini CCD i ricercatori devono distinguere, fra il rumore di fondo e falsi oggetti come pixel "caldi" e "freddi", l'elusive comete SOHO da stelle, pianeti, altri oggetti celesti conosciuti, raggi cosmici e detriti spaziali.

Le scoperte di nuovi oggetti SOHO si susseguono regolarmente durante tutto l'anno con una media di un ogni 2-3 giorni. L'osservabilità cometaria SOHO, tuttavia, presenta oscillazioni con picchi in frequenza in determinati mesi corrispondenti, anche, a vere e proprie tempeste cometarie (*comets storm*).

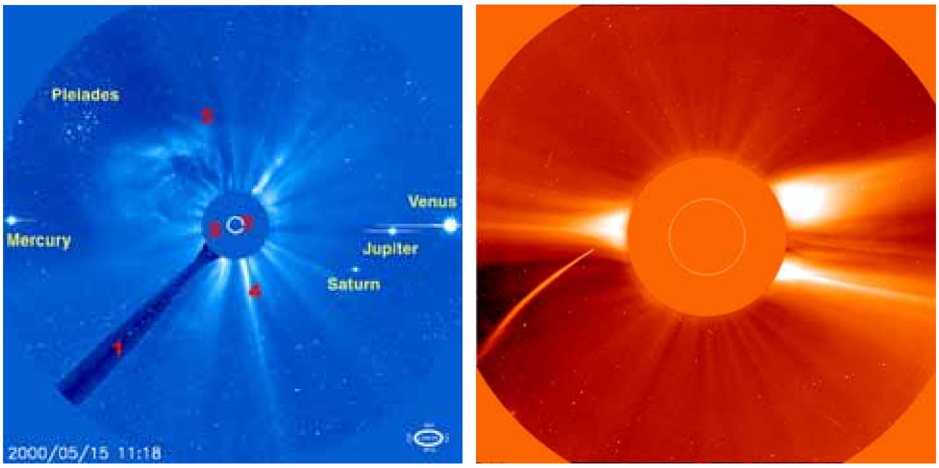


Figura 3. Immagini LASCO C3 (blu) e LASCO C2 (rosso). Nel campo di vista FOV dell'immagine blu è visibile una congiunzione di pianeti e l'ammasso stellare M45 (Pleiadi). Sono visibili, inoltre, 1 il braccio del disco occultatore, 2 il disco occultatore che simula una falsa eclisse, 3 la circonferenza bianca che simula il disco solare occultato, 4 degli streamers coronali e 5 l'alone di un'espulsione di massa coronale. Nell'immagine rossa, del 23 dicembre 1996, la cometa SOHO-6 (C/1996 Y1). [Images courtesy of the SOHO/LASCO consortium. SOHO is a project of international cooperation between ESA and NASA]

Recente è l'annuncio della prima cometa SOHO periodica: la P/2007 R5 individuata nel settembre del 2007. Il ricercatore tedesco Sebastian F. Hönig, che ha relazionato il suo lavoro nell'articolo *Identification of a new short-period comet near the sun* (2006) apparso sulla rivista "Astronomy and Astrophysics", è stato il primo a proporre che le comete SOHO C/1999 R1 e C/2003 R5 fossero lo stesso oggetto mentre Terry Lovejoy (Australia, 1999), Kazimieras Cernis (Lituania, 2003) e Bo Zhou (Cina, 2007) hanno individuato l'oggetto nelle immagini SOHO. Alla luce di questo risultato il tedesco Rainer Kracht, il maggiore scopritore di comete SOHO e colui che dà il nome a un gruppo di comete (Kracht I e II appunto), avrebbe individuato e previsto un successivo ritorno di comete SOHO appartenenti al gruppo omonimo.

Bibliografia

Della Seta E., *Messaggeri celesti. Le comete: storia, scienza, superstizione*, Editori Riuniti, Roma, 1994
Elidoro C., *I magazzini delle comete*, "Nuovo Orione", 125, 44-49 (2002)
Mazzucato M.T., *Sungrazing comets: le comete che sfiorano il Sole*, "Giornale di Astronomia", 33, 2, 17-22 (2007)
Milani G. (a cura), *Osservare le comete*, "I quaderni di l'Astronomia", Milano, 1999
Rigutti M., *Comete, meteoriti e stelle cadenti*, Giunti, Firenze, 1997
Scarmato T., *Le comete suicide*, "Astronomia UAI", 5, 40-43 (2003)
Tempesti P., *I segreti delle comete*, Curcio, Roma, 1984

Sitografia

Elidoro C., http://www.geocities.com/elidoro/corpiminori/cm_comete.html
Menna D., http://digilander.libero.it/comete/
Pizzolato F., http://www.astrogeo.va.it/astronom/comete/storia1.htm
SOHO comets, http://ares.nrl.navy.mil/sungrazer/
SOHO website, http://sohowww.nascom.nasa.gov/

70. Metallica
4. In delegazione dal preside
di Anna Cerasoli

Mancavano pochi minuti alla fine dell'ora perciò abbiamo deciso di tornare in classe. Fuori dall'aula c'era uno strano silenzio, già raro con i nostri prof, figuriamoci con una supplente. Ci siamo guardati, dubbiosi sul da farsi. Abbiamo orecchiato un po' ma alla fine ho bussato 'con garbo', come pretende quello di latino. Ho aperto un tantino la porta e infilato dentro la testa per chiedere permesso: "Possiamo entrare?"
Nessuna risposta dalla sfinge che, seduta dietro la cattedra, fulminava con lo sguardo i nostri venti compagni in un unico grand'angolo d'odio. I nostri venti non erano da meno, elevando la scena alle alte vette espressive di un Mezzogiorno di Fuoco: silenzio di ghiaccio e sguardi armati.
Lo dico sempre: 'la scuola è come la trincea, non si può stare mai tranquilli!'
E' suonata la campanella. Senza distogliere lo sguardo dal nemico, la supplente s'è infilata la giacca, ha raccolto le sue cose e si è diretta verso la porta. A quel punto ci ha visti: "Cosa ci fate voi qui? Dove siete stati finora? Entrate subito e sedetevi ai vostri posti!"

Accaduto:
Lei dice 'studiate quello che volete'.
Loro capiscono 'fate quello che volete'.
Lei apre un libro e si mette a leggere.
Loro tirano fuori carte da gioco, cellulari, iPod, trousse da trucco.
Lei dice 'fate silenzio'.
Loro chiacchierano, giocano e si truccano.
Lei ripete 'fate silenzio'.
Loro nemmeno per sogno.
Lei 'se non la smettete vi metto una nota'.
Loro orecchie da mercanti.
Lei scrive la nota.
Uno se ne accorge e grida 'ragà, ci ha messo la nota, il preside non ci manda più in gita! E' la terza in un mese!"
Di scatto tutti intorno alla cattedra! 'Ce la tolga, ce la tolga!'
Lei caccia un urlo feroce 'ai vooostri poostiiiii!'
Loro arretrano e si risistemano nei banchi temendo l'irreparabile: arrivo del preside al richiamo dell'urlo e divieto di gita, scritto e firmato sul registro, direttamente e senza appello, dal capo d'istituto.
Silenzio generale.
E' a quel punto che siamo arrivati noi.
Quando lei è scomparsa dietro la porta, i nostri venti si sono alzati per andare a controllare *de visu* la nota sul registro.

In quel mentre è entrato anche il prof di matematica: "Beh?.. Avete approfittato della supplenza per ripassare il calcolo combinatorio?" Sale sulle ferite! E poi, il temuto: "Sentiamo qualcuno!".
Tutti gli sguardi si sono accentrati su noi due, compreso quello del prof che ha subito deciso: "Va bene, venite voi alla lavagna". Sospiro generale! Ma in quel momento lui vede la nota e comincia la paternale. Una paternale nel suo stile: pacata, logica e con morale in chiusura.
"Va bene prof, però ora ci aiuta a farci togliere la nota?" ha piatito Carmen, la più interessata alla gita, visto che tra i partecipanti ci sarebbe anche il suo nuovo ragazzo. "Che ne dice, prof, se qualcuno di noi va a parlare al preside?"
"Al preside e alla professoressa che ha fatto supplenza." ha precisato "Perché dovete anche scusarvi con lei… Bene, bene, vediamo un po' in quanti modi potete formare la delegazione. Così facciamo anche esercizio di calcolo combinatorio!" Noi in silenzio, vicino alla lavagna.
"Ditemi un po': se volete scegliere due tra tutti voi, il primo dei quali parla con il preside e il secondo con la prof, tra quante possibili coppie potete scegliere?"
Metallica ci ha pensato una frazione di secondo e poi ha scritto

$$22 \times 21$$

"Ho immaginato un diagramma ad albero e ho ragionato così" ha spiegato. "Siamo in 22, perciò ho 22 rami per scegliere la prima persona che va dal preside; poi da ciascuno di questi rami partono altri 21 rami per scegliere la seconda persona che va dalla prof. Perciò le possibili coppie sono … sono 462." ha concluso calcolando a mente, com'è suo stile.
E allora il prof, rivolto a me: " Sai inquadrare il problema in generale?"
Ho preso qualche istante di tempo: questo modello non l'abbiamo ancora ripassato. Ma mi sono fatto coraggio e ho cominciato: "La situazione dovrebbe essere così: si ha un insieme di elementi; da questo se ne prendono alcuni, diciamo n, e si allineano in ordine. Quante sono le possibili ennuple di elementi? La risposta è: se gli elementi dell'insieme di partenza sono m, allora bisogna moltiplicare n fattori, a partire da m, e scalando sempre di una unità." Ho concluso sollevato. Metallica mi ha sorriso come per dire 'Niente male!'
"Bene. Bravo." ha commentato il prof "E, in simboli, questo prodotto si scrive così

$$(m)_n$$

e si legge 'm con n' . Insomma, per dirla in parole povere, è come fare il fattoriale di m, interrompendolo dopo n termini. A scriverlo sembra complicato, ma se ci riflettete un po', lo potete capite facilmente:

$$(m)_n = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Un esempio che, a mio avviso, vi può aiutare a ricordare lo schema del problema è questo. Si hanno 5 quadri. Di questi se ne vogliono appendere solo *3*, allineati su una parete. Si comincia con lo scegliere il primo e lo si può fare in 5 modi, poi il secondo in 4 modi e il terzo in 3. Quindi si hanno 5 x 4 x 3 modi di scegliere la terna. Se si appendessero tutti i quadri, i diversi modi di farlo sarebbero 5!; invece, appendendone solo 3, non si deve calcolare tutto il fattoriale di 5, ma fermarsi dopo i primi 3 termini. Che ne dite? Ora vediamo chi, dal banco, sa fare qualche esempio di problema di questo tipo".
I nostri venti, che nel frattempo si erano rincuorati per lo scampato pericolo, si sono di nuovo messi in agitazione, poi qualcuno s'è deciso a pensare, finché Carlo ha alzato la mano: "Un problema simile è quello della gara di corsa. Ci sono 10 concorrenti e 3 diversi premi, per il primo, il secondo e il terzo classificato. Quante sono le possibili terne di vincitori sul podio?"
"Bene." ha commentato il prof "Vieni a scrivere la soluzione alla lavagna".

Mentre Carlo scriveva, Metallica l'osservava con interesse:
" Dieci con tre:

$$(10)_3$$

cioè

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Sì, sono settecentoventi i possibili esiti della corsa. Taaanti prof…" Ha concluso Carlo soddisfatto.
Alla fine dell'ora ho chiesto alla mia amica se volevamo incontrarci nel pomeriggio, per continuare a ripassare. Ci speravo, poi avremmo potuto andare al cinema. E invece, niente! Aveva prima il dentista e più tardi il solito appuntamento delle sei.
Ho deciso: devo proprio chiederglielo se ha già un ragazzo. Così mi metto il cuore in pace!

1. Cerca esempi di problemi sul modello illustrato nel racconto.
2. Perché il problema n. 1 del racconto Metallica 1 non appartiene a questo modello?
3. Avendo a disposizione anche il blu e il giallo, in quanti diversi modi si potrebbe cambiare la colorazione della bandiera italiana, lasciando il verde al suo posto?
4. Sai spiegare perché $(m)_n$ è il numero di funzioni iniettive da un insieme di n *elementi a un insieme di* m *elementi?*

Risposte alle domande del numero precedente:

- *Il n. 5 del primo capitolo si risolve con un fattoriale (5!).*
- *Cinque persone si possono sedere in 4! modi intorno ad un tavolo tondo. (Si fissa la posizione di una persona e si permutano le altre).*
- *Si comincia col considerare come una unica persona le 2 che vogliono stare vicine. Poi si permutano anche loro (4!2!).*

71. Il teorema dei numeri primi

di Flavio Cimolin

Da millenni i numeri primi e le loro bizzarre proprietà stuzzicano la curiosità di matematici e appassionati. I problemi in cui essi vengono tirati in ballo appaiono infatti talmente semplici nel modo in cui possono essere espressi da risultare un continuo sberleffo nei confronti degli eminenti matematici di tutto il mondo che tentano invano di risolverli. Basti pensare alle famosissime congetture tuttora irrisolte di Goldbach (ogni numero pari maggiore di due si può esprimere come somma di due primi) e dei primi gemelli (esistono infinite coppie di primi a distanza due). Solo recentemente e con grande clamore è stata annunciata la dimostrazione del cosiddetto Ultimo Teorema di Fermat (non esistono “terne pitagoriche” con esponenti maggiori di due), la quale tuttavia si basa su artifici matematici talmente complessi da richiedere mesi e mesi di studio ai più esperti matematici solo per intuire il percorso della dimostrazione!

I numeri primi non sono altro che una base moltiplicativa dell’insieme dei numeri naturali, alternativa alla base additiva sulla quale esso è definito. In altre parole, l'insieme dei numeri naturali è sostanzialmente definito sull'addizione tra un qualsiasi numero e il numero 1, più precisamente è costruito sul principio di induzione: ad ogni numero ne segue un altro dato dalla somma del precedente più uno. Nonostante i numeri primi compaiano in maniera assolutamente chiara non appena si introduce l’operazione di moltiplicazione, per qualche oscura ragione essi sono come avvolti da un alone di mistero che ci impedisce di comprendere a fondo i loro speciali intrecci.

Fra i numerosissimi problemi che si possono formulare riguardo ai numeri primi, ci occupiamo qui di presentarne uno che ha a che fare con il loro “conteggio”: quanti sono i numeri primi? E, se sono infiniti, con quale tipo di legge crescono? La risposta a questa domanda è stata trovata, e va sotto il nome di Teorema dei Numeri Primi.

L’avventura che ha condotto eminenti matematici dei tre secoli scorsi, come Gauss, Riemann, Hadamard e De la Vallèe Poussin, verso la dimostrazione del suddetto teorema è stata talmente trasversale da chiamare in causa addirittura i numeri complessi e le più avanzate tecniche analitiche che operano su di essi. Questo percorso ha addirittura generato un altro celebre problema, passato alla storia col nome di Ipotesi di Riemann.

Anzitutto è ragionevole domandarsi quanti siano i numeri primi. Su questo punto già Euclide nel IV secolo a.C. sollevò il primo velo: esistono infiniti numeri primi. La sua dimostrazione, ormai classica (a cui ne sono seguite decine di altre nel corso dei secoli), è talmente semplice da poter essere data in pochi passaggi.

Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi. Allora li possiamo elencare tutti dal più piccolo al più grande: chiamiamoli p_1, p_2, p_3, …, p_n. Adesso andiamo a calcolare il numero

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

N è divisibile per p_1? No, perché la parte ove c'è il prodotto lo è, ma ad essa è aggiunto un *1*, quindi la divisione di N per p_1 dà resto *1*. E' divisibile per p_2? No, per lo stesso motivo di prima, in quanto il resto della divisione di N per p_2 è *1*. Questo vale evidentemente per tutti i numeri p_i, quindi N non può essere divisibile per nessuno dei numeri primi che abbiamo elencato. Allora deve essere un numero primo esso stesso (oppure il prodotto di altri numeri primi diversi da quelli elencati), ma ciò va contro la nostra ipotesi iniziale di aver potuto elencare tutti i numeri primi. Conclusione: esistono infiniti numeri primi!
Vale la pena osservare che la tecnica di Euclide serve a dimostrare che, dato un insieme di numeri primi, esiste sempre un numero più grande che sia coprimo con essi (ovvero che non abbia fattori comuni con alcuno di essi). Questo non significa che il numero N così costruito sia esso stesso primo, come mostra chiaramente il seguente controesempio:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

Bene, ora che abbiamo dimostrato che i numeri primi sono infiniti, ha senso chiederci quanti siano rispetto ai numeri naturali, nel senso che andremo subito a precisare. Ci sono vari modi di confrontare tra loro insiemi infiniti, ad esempio seguendo la teoria di Cantor si potrebbe dimostrare che i numeri primi hanno la stessa cardinalità dei numeri naturali; questo tuttavia ci sarebbe di poco aiuto, in quanto per conoscere effettivamente qualcosa in più sulla distribuzione dei primi abbiamo bisogno di un risultato quantitativo. Occorre cioè trovare un modo formale per indicare che, ad esempio, i numeri pari sono "la metà" dei naturali, i multipli di tre sono "un terzo", e così via, in modo da poter dire anche "quanti sono" i quadrati perfetti, i cubi o i numeri primi appunto.

Il modo corretto di affrontare la questione dal punto di vista matematico è quello di definire un "contatore" della tipologia di numeri che si vuole considerare, ovvero una funzione che indichi quante occorrenze di numeri di quella specie ci sono fino ad un valore dato. Chiamiamo ad esempio $S_{pari}(n)$ la funzione che indica quanti sono i numeri pari da *1* fino ad n. Se n è pari, $S_{pari}(n) = n/2$, se n è dispari $S_{pari}(n) = (n-1)/2$. Supponendo ora che n diventi sempre più grande si può approssimare considerando solo l'ordine di grandezza principale e dire che $S_{pari}(n) \approx n/2$. Una procedura di questo genere è detta in gergo una "stima asintotica", in quanto non fornisce il valore esatto, ma fornisce un valore che è tanto più prossimo a quello giusto quanto più i numeri coinvolti crescono. Questo modo di procedere costituisce esattamente la formalizzazione matematica di quello che abbiamo in mente quando pensiamo che "i numeri pari sono la metà dei naturali". E' semplice osservare che per i numeri dispari varrà analogamente $S_{dispari}(n) \approx n/2$, per i multipli di tre varrà $S_{tre}(n) \approx n/3$, e così via. Seguendo le regole delle stime asintotiche, non è difficile mostrare che per i quadrati perfetti vale $S_{quadrati}(n) \approx sqrt(n)$ e per le potenze di due $S_{potenze2}(n) \approx log_2(n)$.

Un modo perfettamente speculare di vedere la stessa cosa è quello di chiedersi quanto valga l'n-esimo numero di un certo tipo. Chiamiamo $N_{pari}(n)$ l'n-esimo numero pari. Invertendo la relazione per $S_{pari}(n)$ avremo che $N_{pari}(n) \approx 2n$. Volutamente non abbiamo inserito il simbolo di uguaglianza, ma quello di approssimazione, in quanto, nell'ottica di sostituire i pari con i numeri primi, non pretendiamo di conoscere esattamente il valore dell'n-esimo numero, ma ci accontentiamo di averne una sua stima. Ecco perché, facendo lo stesso con i dispari, avremmo $N_{dispari}(n) \approx 2n$; e poi $N_{tre}(n) \approx 3n$, $N_{quadrati}(n) \approx n^2$, $N_{potenze2}(n) \approx 2^n$. Le funzioni N_{xxx} sono esattamente le inverse delle funzioni S_{xxx}, capito come funziona il gioco?

Allora è finalmente venuto il momento di chiederci: "Quanto valgono $S_{primi}(n)$ e $N_{primi}(n)$"? La tutt'altro che banale risposta a questa domanda va sotto il nome di Teorema dei Numeri Primi, che afferma che

$$S_{primi}(n) \approx \frac{n}{\log(n)} \qquad N_{primi}(n) \approx n \cdot \log(n)$$

dove *log(n)* indica il logaritmo naturale di *n*.

Questo significa che il numero di primi che ci aspettiamo di trovare da 1 fino al numero *n* è circa *n/log(n)*, o viceversa che l'*n*-esimo numero primo è approssimativamente $n \cdot \log(n)$. Scegliete voi quale delle due formule (equivalenti) vi piace di più per indicare "quanti sono i numeri primi" rispetto ai naturali. Anche se le due formule appaiono in perfetta simmetria, l'una con una divisione per il logaritmo, l'altra con una moltiplicazione per lo stesso, non è del tutto ovvio il fatto che siano l'una l'inversa asintotica dell'altra, cosa che invece era direttamente verificabile negli esempi precedenti.

Per convincersi di cosa significhi esattamente una stima asintotica per dei numeri, come i primi, che notoriamente sono problematici da inquadrare in regole precise, proviamo a confrontare l'andamento della funzione *x/log(x)* (in verde) con i valori effettivi di $S_{primi}(n)$ (in blu) per i primi *1000* valori di *n* (figura 1).

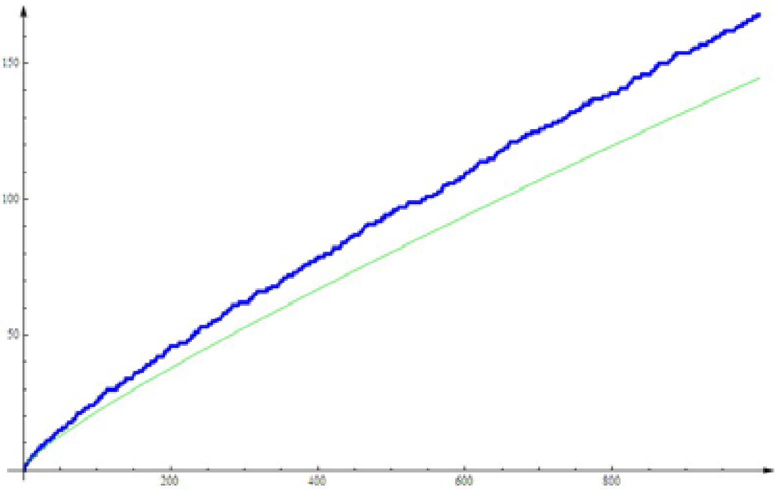


Figura 1. Confronto tra la funzione x/log(x) in verde e i valori effettivi si $S_{primi}(n)$ in blu.

Come si vede la corrispondenza è buona, in quanto la crescita della funzione approssimante segue bene l'andamento della funzione che conta i primi, ma ben lungi dall'essere perfetta: come abbiamo già detto, i numeri primi non ne vogliono sapere di sottostare a regole troppo precise! Andando a guardare valori sempre più grandi di *n* si scopre come le due curve si avvicinino (relativamente al valore di *n*) sempre di più. Vedremo più avanti che in realtà esistono diverse altre formulazioni più potenti del Teorema dei Numeri Primi, grazie alle quali si raggiungono livelli di precisione incredibilmente accurati, talmente in accordo che risulterebbe difficile visualizzare in un grafico come il precedente la differenza fra la curva esatta e quella approssimata, per numeri grandi.

La storia del Teorema dei Numeri Primi è molto curiosa e affascinante, e comincia inesorabilmente con i fallimenti dei più grandi matematici di tutti i tempi che gettarono le basi della teoria dei numeri: Eulero e Gauss. Nel 1751 il matematico svizzero Leonhard Euler affermò che:

Scoprire qualche ordine nella progressione dei numeri primi è un mistero che lo spirito umano non sarà mai in grado di penetrare

A posteriori possiamo dire che qualcosa siamo stati effettivamente in grado di scoprirlo, ma tutti i matematici concordano sul fatto che Eulero avesse pienamente ragione riguardo all'impossibilità di svelare completamente il mistero dei numeri primi. Chi per primo riuscì ad intuire l'andamento del tipo *x/log(x)* fu il grande matematico e fisico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), che in realtà non fece altro che calcolare un bel po' di valori della funzione $S_{primi}(n)$ e poi, usando la sua brillante mente matematica, individuare quale tipo di curva si avvicinasse di più ad essa. Senza dubbio il fatto che un genio come Gauss non sia riuscito a dimostrare il Teorema dei Numeri Primi la dice lunga su quanto la cosa sia più complicata!

Effettivamente si è dovuto aspettare la fine del XIX secolo per vedere finalmente risolta la questione, per giunta in un modo assolutamente inatteso che passa addirittura attraverso l'analisi complessa. Il passo decisivo grazie al quale è stato possibile "attaccare" il problema è stato compiuto dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866), allievo di Gauss, morto ahimè prematuramente per via della tubercolosi, ma dallo spirito talmente geniale da risultare il vero e proprio iniziatore non solo della rivoluzione che andremo a descrivere riguardo al legame fra i numeri primi e l'analisi complessa, ma anche di tutti quegli strumenti di geometria differenziale senza i quali Albert Einstein mezzo secolo dopo non sarebbe mai riuscito a dare una formulazione matematica alla sua teoria della relatività generale.

La stragrande maggioranza dei contribuiti di Riemann alla matematica si colloca nei campi della geometria differenziale e nel modo di approcciarsi ad essa, così come nell'analisi matematica (basti pensare alla formalizzazione legata all'integrale di Riemann). Egli dedicò alla teoria dei numeri solo un unico saggio di una decina di pagine, pubblicato nel 1859 sulle note dell'Accademia di Berlino, nel quale espresse in tutta la sua eleganza il rapporto fra la teoria dei numeri e l'analisi complessa, e nel quale formulò uno dei problemi irrisolti più famosi di tutti i tempi, che va sotto il nome di *ipotesi di Riemann*.

Il legame fra l'analisi complessa e la teoria dei numeri non è affatto ovvio e il modo di arrivare alla dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi è lungo e complicato. Proviamo comunque a darne un'idea, partendo da quella che Eulero aveva chiamato funzione Zeta:

$$\zeta(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5^x}+...$$

Si tratta di una funzione (di un numero reale x) data della somma infinita dei reciproci di tutti i numeri naturali elevati alla potenza x. La funzione è ben definita solo per gli $x > 1$, infatti è ben noto che la somma dei reciproci dei numeri naturali cresce indefinitamente, seppure in maniera estremamente lenta. Per qualsiasi potenza anche solo leggermente maggiore di 1 invece si ha convergenza della serie numerica. In alcuni casi speciali è addirittura possibile calcolare il valore esatto della somma infinita, come ad esempio accade per la bellissima formula che lega la somma dei reciproci dei quadrati al numero pi greco:

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$$

Vediamo ora quale sia il legame fra la funzione Zeta e i numeri primi. Lo possiamo vedere subito trasformando la somma dei reciproci in un prodotto che coinvolga somme relative ai soli numeri primi. Per semplicità mostriamo la relazione per il valore $x = 1$ dell'esponente, anche se in corrispondenza di tale valore la serie non converge: è banale verificare che la relazione vale in realtà per qualsiasi esponente (ovvero elevando i denominatori di tutte le frazioni all'esponente x).

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)\cdot\ldots$$

La somma dei reciproci dei naturali può cioè essere scomposta come il prodotto delle somme dei reciproci delle potenze dei numeri primi! Se vi sembra solo un modo insulso di complicare le cose, provate a svolgere alcuni prodotti e capirete immediatamente come funziona il meccanismo, che è direttamente legato al teorema di fattorizzazione unica dei numeri naturali: per ogni frazione *1/n* sulla sinistra, c'è una e una sola combinazione di frazioni sulla destra che la generano, le quali si deducono dalla scomposizione in fattori primi di *n*. Sfruttando la formula che consente di trovare la somma di serie geometriche, la relazione precedente si può scrivere in un modo ancora più esplicativo, che indica precisamente come la somma dei reciproci dei naturali si possa esprimere come un prodotto che coinvolge solo i numeri primi:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdot\ldots=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

Quanto abbiamo visto non è nulla di più che un'intuizione puramente qualitativa del possibile legame fra la funzione Zeta e i numeri primi. Di qui alla dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi; la strada è però ancora molto molto lunga. Il grande passo avanti fu compiuto nel momento in cui Riemann mostrò che in realtà l'esponente che compare come argomento della funzione Zeta di Eulero può essere anche inteso come un numero complesso, ovvero caratterizzato da una parte reale e una parte immaginaria!

L'analisi complessa è una delle discipline più affascinanti della matematica moderna, e si occupa precisamente di studiare le funzioni, con le usuali regole di derivazione e integrazione, nel campo dei numeri complessi anziché nel campo dei numeri reali. Il bello è che le funzioni di variabile complessa possiedono proprietà molto più curiose e interessanti di quelle di variabile reale, ad esempio in alcuni casi è possibile conoscere tutti i valori di una funzione in un'intera zona conoscendo solamente i valori della funzione stessa su di un cerchio!

La scoperta fondamentale che compì Riemann nello studio della funzione Zeta (che da allora in poi assunse il nome di funzione Zeta di Riemann), fu che essa poteva essere estesa ad un dominio più grande di quello che appariva originariamente nello studio di Eulero. Se ricordate abbiamo detto che l'esponente doveva essere un numero maggiore di *1*; ebbene Riemann mostrò invece come queseto esponente poteva essere un qualsiasi numero complesso diverso da *1*! Questa scoperta ha dell'incredibile, infatti non è apparentemente razionale pensare che abbia senso parlare di numeri finiti del tipo:

$$\zeta(-1)=\frac{1}{1^{-1}}+\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{3^{-1}}+\ldots=1+2+3+\ldots \qquad \zeta(-2)=\frac{1}{1^{-2}}+\frac{1}{2^{-2}}+\frac{1}{3^{-2}}+\ldots=1^2+2^2+3^2+\ldots$$

Il modo corretto di approcciare questa estensione è differente: Riemann dimostrò che la funzione Zeta di Eulero è esattamente coincidente con un'altra funzione (detta Zeta di Riemann appunto) che risulta ben definita per qualsiasi numero complesso diverso da *1*. Dato che esiste un teorema di analisi complessa che afferma che due funzioni complesse che coincidono su di un pezzo di dominio in realtà devono coincidere su tutto il dominio, allora ecco che possiamo pensare alla scrittura come sommatoria (Zeta di Eulero classica) come ad un possibile modo di scrivere a quella funzione solo quando l'esponente è maggiore di 1.

Purtroppo è impossibile fornire una descrizione vera e propria dei passaggi che, dalla cosiddetta estensione analitica della Zeta di Riemann che abbiamo appena descritto, conducono alla dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi, perché questo richiederebbe, oltre ad una perfetta dimestichezza con le tecniche dell'analisi complessa, anche un discreto numero di pagine, dato che la dimostrazione si sviluppa su tanti punti diversi. E' però interessante raccontare ancora qualche risvolto "coreografico" della faccenda, che infatti è tutt'altro che chiusa.

Va detto infatti che Riemann nel suo articoletto usò un'ipotesi (che in seguitò passò alla storia con il nome Ipotesi di Riemann) che, per quanto potesse sembrare ragionevole, non fu in grado di dimostrare. La "scontatezza" della verità di questa ipotesi ingannò la comunità scientifica per oltre mezzo secolo, dato che tutti i più eminenti teorici dei numeri erano assolutamente convinti che si trattasse di poca cosa e che la dimostrazione del teorema fosse effettivamente stata ottenuta. In realtà l'ipotesi di Riemann regge ancora oggi ed è uno dei più grandi problemi insoluti della matematica moderna. Centinaia di articoli di ricercatori attivi nel campo della teoria dei numeri da un secolo a questa parte iniziano con la dicitura "Se l'ipotesi di Riemann fosse vera, allora…".

L'ipotesi di Riemann afferma che gli zeri non banali della funzione Zeta di Riemann (che come abbiamo detto è definita sui numeri complessi) hanno tutti parte reale esattamente uguale a 1/2. Tutti gli zeri della funzione Zeta aventi parte reale negativa sono semplici da calcolare e sono per questo detti "banali", ma finora nessuno è stato in grado di valutare esattamente quelli che si collocano nella sottile striscia compresa fra parte reale 0 e parte reale 1. Se si va a guardare come la Zeta interviene nella dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi si scopre che è esattamente questa la parte fondamentale che consente di ottenere il risultato, che risulta tanto migliore quanto più gli zeri sono vicini all'asse 1/2. E' curioso notare che il motivo principale per cui Riemann formulò la sua famosa "ipotesi" era essenzialmente di tipo estetico: tutta la teoria risulterebbe particolarmente elegante se gli zeri della funzione Zeta avessero tutti parte reale 1/2 e si otterrebbe immediatamente il migliore risultato possibile; quindi per Riemann l'ipotesi non poteva che essere vera!

E' possibile calcolare numericamente i punti in cui la Zeta si annulla, cosa che è stata effettivamente fatta per migliaia di valori. Ma come ben sanno i matematici, una congettura non è dimostrata fino a quando non si dimostra che essa è valida per *tutti* i valori! E' curioso "guardare" la funzione Zeta disegnata nel piano complesso, rappresentata nella figura a lato. Ovviamente per darne un grafico occorrerebbe usare uno spazio a 4 dimensioni, che non possediamo (le funzioni a variabile complessa sono caratterizzate da due numeri, la parte reale e la parte immaginaria, e il dominio di definizione è composto esso stesso da altri due numeri). Con alcuni trucchi si può però dare ugualmente una rappresentazione, ad esempio mostrando solo la parte reale o solo quella immaginaria. Nella figura qui a fianco invece si usa una rappresentazione per mezzo di colori dell'argomento del numero complesso: i punti in cui convergono tutti i colori sono zeri oppure poli (si distinguono a seconda del verso di rotazione dei colori). E si vede chiaramente che, salvo il polo e gli zeri sull'asse reale, gli unici altri zeri appaiano ben allineati sulla retta $Re=1/2$!

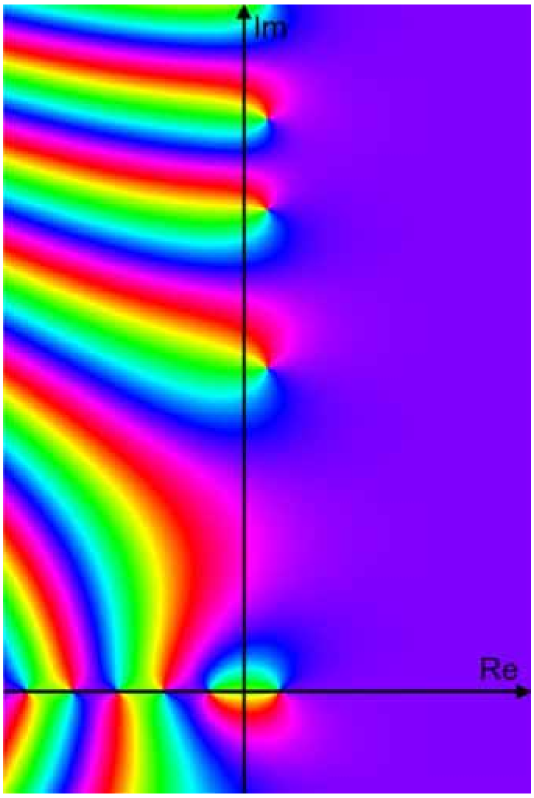


Figura 2. La funzione Zeta nel piano complesso

Ma torniamo al Teorema dei Numeri Primi vero e proprio. Nonostante nessuno sia riuscito a dimostrare l'ipotesi di Riemann, nel frattempo i teorici dei numeri si sono dati un gran da fare per trovare strade alternative che consentissero di dimostrare il teorema *senza* quella ipotesi. Nel 1896, finalmente, il matematico francese Jacques Hadamard contemporaneamente al belga Charles Jean de la Vallée Poussin, indipendentemente, riuscirono a completare la dimostrazione, sempre utilizzando metodi di analisi complessa simili a quelli introdotti da Riemann. La portata della dimostrazione, che come abbiamo detto si basa su strumenti estremamente evoluti di analisi complessa per stabilire una relazione riferita ai soli numeri naturali, è brillantemente esplicitata nello storico aforisma di Hadamard:

La via più breve fra due verità sulla retta dei numeri reali passa attraverso il piano complesso

Con il passare degli anni i matematici sono riusciti a semplificare le dimostrazioni proposte alla fine del XVIII secolo, ma solo verso la metà del XX secolo con i matematici Paul Erdos e Atle Selberg si è riusciti finalmente ad uscire dal campo dei numeri complessi, fornendo una dimostrazione elementare del Teorema dei Numeri Primi. Nel contesto della teoria dei numeri l'aggettivo "elementare" non è sinonimo di "semplice", bensì indica che la dimostrazione non necessita di concetti di analisi complessa. E infatti tali dimostrazioni sono terribilmente lunghe e complicate, tanto da non fornire alcun aiuto ulteriore alla comprensione del problema (come spesso accade purtroppo quando si attacca in modo "elementare" un problema che può essere risolto più agevolmente in campo complesso).

In precedenza avevamo accennato al fatto che il Teorema dei Numeri Primi si può esprimere in una forma ancora più precisa rispetto all'andamento di tipo $x/log(x)$ per la funzione $S_{primi}(n)$. Molti matematici del secolo scorso hanno speso buona parte del loro tempo per trovare piccoli miglioramenti della formula asintotica e del suo "resto", ovvero della stima dell'errore che si commette con tale approssimazione. Sappiamo certamente che tale resto non è nullo, ma è molto interessante capire quanto sia "buona" la stima che forniamo rispetto alla curva esatta. La migliore stima possibile per la funzione $S_{primi}(n)$ è definita tramite quello che viene detto Logaritmo Integrale e indicato con la funzione $li(n)$:

$$S_{primi}(n) \approx li(n) = \int_2^n \frac{1}{\log(x)} dx$$

Si può dimostrare che il logaritmo integrale è effettivamente un "miglioramento" della formula $x/log(x)$, infatti quest'ultima compare come termine principale del suo sviluppo in serie asintotico. Lo sviluppo più interessante di questa nuova formula consiste però nell'interpretazione di tipo statistico che essa consente di dare al problema del conteggio dei numeri primi.

La cosiddetta "Interpretazione Statistica" del Teorema dei Numeri Primi parte dall'assunzione (totalmente falsa!) che un numero sia primo oppure no con una certa probabilità. Sulla base di ricerche prevalentemente empiriche, già Gauss aveva notato che era ragionevole supporre che, dato un numero X, la probabilità che X fosse primo si aggira intorno al valore $1/log(X)$. Dando per valida questa ipotesi, che difficilmente si potrebbe giustificare in maniera formale (per questo si parla di "interpretazione", e non di "teorema"), ecco che il Teorema dei Numeri Primi nella sua formulazione con il Logaritmo Integrale diventa di immediata comprensione. Per "contare" i numeri primi minori o uguali a un certo numero x non dobbiamo fare altro che sommare tutte le probabilità associate ai numeri da 1 a x. La somma su un numero grande si può per definizione approssimare con un integrale, e quindi ecco che il Teorema dei Numeri Primi si può leggere come una "media statistica" dei numeri primi minori di un certo numero.

$$S_{primi}(n) \approx \sum_{i=2}^{n} p(i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\log(x)} \approx \int_{2}^{n} \frac{1}{\log(x)}dx$$

E’ decisamente inusuale in una disciplina matematica così rigorosa come la teoria dei numeri utilizzare ragionamenti poco formali come questo, tuttavia mai come in questo caso l’interpretazione statistica riesce a rendere assolutamente intuitiva una formula che altrimenti non lo sarebbe stata. Notiamo che l’interpretazione statistica non ha nulla a che vedere con i test di primalità di tipo statistico, che si basano su teoremi di natura tutt’altro che asintotica. Questi ultimi consentono di valutare, con un grado di certezza che può essere reso piccolo a piacere, se un numero è primo oppure per mezzo di algoritmi molto veloci. Più i numeri in gioco diventano grandi e più diventa infatti difficile stabilire con certezza se un numero è effettivamente primo oppure no. Nell’interpretazione della nostra formula, invece, la “probabilità di essere primo” è un concetto vago che si applica, per intenderci, anche ai numeri pari, che primi non lo sono di sicuro.

Si potrebbe ancora continuare oltre con altri risultati di tipo statistico, che diventano sempre più interessanti man mano che l’intervallo di numeri che si prende in considerazione diventa più piccolo. Non si può però non citare un’altra splendida “perla”, secondo cui il numero di fattori primi di *n* è “in media” *log(log(n))*. Più precisamente, i matematici Hardy e Ramanujan hanno dimostrato che il numero di fattori primi di un numero *n* “scelto a caso” è distributo secondo una variabile aleatoria gaussiana avente media *log(log(n))* e varianza ancora *log(log(n))*!

Per concludere, è interessante provare a vedere cosa succede se anziché studiare i numeri primi, analizziamo i loro reciproci. Si può dimostrare che, così come la somma dei reciproci dei numeri naturali (detta serie armonica), anche la somma dei reciproci dei numeri primi diverge:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots=+\infty \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots=+\infty$$

Questa è se vogliamo un’altra dimostrazione del fatto che i numeri primi sono infiniti; essa afferma, in un senso diverso da tutti gli altri visti finora, che i numeri primi sono ancora “tanti” rispetto ai numeri naturali. Se la somma dei loro reciproci fosse stata un numero, allora avremmo avuto un’indicazione ben diversa. Per esempio la somma dei reciproci dei quadrati dei naturali (lo abbiamo già visto quando abbiamo scritto *ζ(2)*), o delle potenze di 2, sono dei numeri finiti. Per avere una misura della differenza fra il comportamento delle somme dei reciproci dei naturali e dei numeri primi, bisogna ancora una volta ricorrere ad un’analisi asintotica, in base alla quale si ottiene l’inaspettata coppia di formule:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\log(n)\right)=\gamma=0.577216\ldots$$
$$\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}-\log(\log(n))\right)=M=0.261497\ldots$$

dove γ e M prendono rispettivamente il nome di costante di Eulero-Mascheroni e di Meissel-Mertens. Le formule affermano quindi che i reciproci dei naturali crescono con un andamento di tipo *log(x)*, mentre le somme dei reciproci dei primi crescono con un andamento di tipo *log(log(n))*. Certo la velocità con cui cresce la funzione *log(log(n))* è davvero lenta, tanto che il teorico dei numeri americano John Selfridge soleva scherzare affermando:

Si sa che log(log(n)) cresce all’infinito, ma nessuno l’ha mai visto arrivarci.

Letture consigliate

Marcus du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi. L'ipotesi di Riemann, l'ultimo grande mistero della matematica*, Rizzoli, 2004.

John Derbyshire, *L'ossessione dei numeri primi. Bernhard Riemann e il principale problema irrisolto della matematica*, Bollati Boringhieri, 2006.

Enrico Bombieri, *The Riemann Hypothesis*,
http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/riemann.pdf

Clay Mathematics Institute
http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

72. Intervista a Beppe Scienza

di Manu Monteux

Beppe Scienza
www.beppescienza.it

Manu Monteux ha posto per la nostra rivista alcune domande al noto matematico e giornalista Beppe Scienza sui temi del risparmio gestito. Beppe Scienza, autore di diversi libri di successo e di numerosissimi articoli apparsi sulla stampa italiana, è noto da anni come voce indipendente nel mondo della finanza. Le sue battaglie contro le malefatte compiute dal mondo delle banche, dai consulenti finanziari ai giornalisti economici, sono senza esclusione di colpi. Tuttavia molte delle cose che dice dovrebbero essere ovvie per chi conosce un minimo di matematica.

Matematicamente.it: Professor Beppe Scienza, lei è noto da anni come voce indipendente nel mondo della finanza e per le sue battaglie contro le malefatte compiute da molti intermediari finanziari: tuttavia molte delle cose che lei dice, per chi ha un minimo di nozioni di matematica, dovrebbero essere ovvie. Per quale motivo invece non è così? Non pensa che ci sia un problema educativo, o quanto meno di scarsità di cultura finanziaria, nel nostro paese?

Beppe Scienza: Non resisto alla tentazione di riportare quanto scritto nel primo capitolo de "Il risparmio tradito", precisamente a pag. 8: "Per investire è utile fare qualche conto, ma ancora più importante è imparare a filtrare le notizie". Prendiamo ad esempio i titoli emessi dalle banche (certificati di deposito, obbligazioni ecc.). Da decenni hanno tassi inferiori a quelli dei titoli di Stato (Bot, Btp ecc.). Nei casi più semplici bastano davvero due conti in croce per accorgersi che rendono meno. Perché allora tantissimi risparmiatori li hanno sottoscritti ugualmente? Sicuramente per esempio perché gli impiegati delle banche gli hanno regolarmente raccontato la frottola che sono più sicuri dei titoli del Tesoro; e giornalisti economici gli hanno tenuto bordone, guardandosi bene dal denunciare pubblicamente le falsità raccontategli.

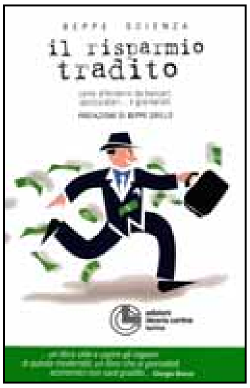
Matematicamente.it: I titoli dei suoi libri di denuncia sono eloquenti: "La pensione tradita", "Il risparmio tradito". Ci ricorderebbe cosa è opportuno fare col nostro trattamento di fine rapporto (TFR), visto che l'informazione istituzionale è stata molto lacunosa e, come lei ci ricorda, sono molti gli "avvoltoi"?

Beppe Scienza: In questo caso conviene fare come la larghissima maggioranza dei lavoratori interessati alla riforma del TFR, che ha mangiato la foglia e capito che gli conveniva non credere alle frottole raccontategli dai giornali, dalle radio e dalle televisioni. Si sono infatti tenuti ben stretto il TFR, guardandosi bene dal darlo in pasto all'industria della previdenza integrativa.

Matematicamente.it: E come dovremmo comportarci nei riguardi delle banche? Spesso nelle banche si lavora a budget, per cui al cliente vengono proposti prodotti da un consulente-venditore - più venditore che consulente - che sono remunerativi principalmente per la banca. Ultimamente, per esempio, vanno molto di moda i prodotti appunto della previdenza complementare (polizze vita, fondi pensione ecc.). È ancora valido il suo consiglio di declinare ogni offerta e tenersi i titoli di stato?

Beppe Scienza: Certo, tanto che consiglio di adottare una regola un po' rozza, ma molto utile: a ogni proposta della banca rispondere di no. La sua osservazione sui budget di vendita è molto giusta e purtroppo la maggior parte dei risparmiatori non si rende ben conto che l'addetto allo sportello è un addetto alle vendite, che tanto più s'ingrazia i suoi superiori quanto più cattivi sono gli investimenti che rifila ai clienti. Di nuovo non è una regola assoluta, ma fondamentalmente è vero che il prodotto peggiore per il cliente è quello migliore per la banca o il promotore finanziario. E vale anche il viceversa: i titoli di Stato, in particolare i Buoni del tesoro indicizzati all'inflazione, vanno bene per i risparmiatori, ma vanno malissimo per la banca o il promotore che ci guadagna pochissimo.

Matematicamente.it: La rata del mutuo è oggi una nota dolente per molti italiani: concorda col consiglio di alcuni consulenti "indipendenti" di scegliere sempre il tasso fisso? Questo consiglio è valido anche in Italia, dove il costo del tasso fisso è molto superiore alla media europea?



Beppe Scienza: Sul basso livello dei cosiddetti consulenti indipendenti potremmo parlare a lungo. Entrando in merito nel problema, di per sé non si può dire se a conti fatti risulterà essere stato più conveniente un mutuo a tasso fisso o variabile. Per anni è stato meno costoso il secondo. È piuttosto un altro l'aspetto da tenere presente per un finanziamento a tasso variabile con piano di rimborso fissato all'inizio, come è di regola. È che la rata di un mutuo a tasso variabile è soggetta al rischio di forti fluttuazioni proprio nei primi anni di vita del mutuo. La cosa è nota a chiunque conosca la materia, ma mi risulta che quasi mai sia stata evidenziata dalle banche e ovviamente neppure dai giornalisti economici, che di regola sono ignoranti come scarpe.

Matematicamente.it: Leggendo i suoi articoli o sfogliando i rapporti di Mediobanca, ci si rende conto che, per quanto riguarda l'investimento azionario, è meglio il "fai da te". Infatti la quota di fondi di investimento che fa meglio del mercato è statisticamente poco significativa, mentre i fondi che fanno peggio sono la maggioranza. Il classico della letteratura finanziaria *A Random Walk Down Wall Street*, di Burton Malkiel del 1973, è tuttora attuale? Lo consiglierebbe ancora ai risparmiatori, oltre che, malignamente, ai gestori?

Beppe Scienza: In realtà il risparmio gestito fa quasi sempre peggio di chi investe da solo anche nel reddito fisso, non solo nelle azioni. E se è vero, come è vero, che fa peggio delle medie di mercato, allora ne discende che fa mediamente peggio anche di uno che sparpagli il suo investimento su un ampio numero di titoli scelti a caso (questa è la tesi, dimostrata, di Malkiel). Questo però i gestori lo sanno benissimo. Se razzolano male spesso non è per incompetenza, ma perché i loro obiettivi divergono da quelli dei loro clienti. Non puntano a farli guadagnare, ma a produrre utili per la società che li stipendia; o per il gruppo a cui essa appartiene.

Matematicamente.it: Ci può indicare qualche regola che a suo giudizio deve adottare chi vuole a tutti i costi investire nel mercato azionario?

Beppe Scienza: Quella più semplice è servirsi degli ETF (Exchange Traded Fund) che sono titoli che replicano fedelmente e con costi bassi determinati mercati azionari.

Matematicamente.it: Per finire, è d'accordo con la citazione in capo alla voce "finanza" su Wikipedia: « Finanza: l'arte o scienza di gestire redditi e risorse per il massimo beneficio del gestore » (Ambrose Bierce, "Il dizionario del diavolo")?

Beppe Scienza: Carina, non la conoscevo. La riporterò in un mio prossimo libro.

73. I risultati di PISA 2006, aspettative e miti

di Antonio Bernardo e Andrea Vitiello

Sunto: *Agli inizi dello scorso dicembre hanno suscitato grande clamore i dati relativi al rapporto O-CSE, in merito al progetto PISA 2006. Nel corso della presentazione dei risultati di questa ricerca, sono emerse notizie poco confortanti per l'Italia; in particolare è stato accertato che il livello medio di istruzione dei nostri quindicenni è più basso rispetto a quello dei loro coetanei di gran parte dei paesi che hanno aderito all'indagine. Si riportano alcuni dei risultati dei e qualche commento.*

1. Le indagini OCSE-PISA

PISA, acronimo di *Programme for International Student Assessment*, è un grande progetto internazionale promosso e coordinato dall'OCSE (*Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico*). Lo scopo dell'iniziativa è quello di accertare e confrontare tra loro competenze e capacità dei ragazzi di 15 anni che frequentano la scuola dell'obbligo nei paesi membri. L'indagine è suddivisa in cicli, in ciascuno dei quali si approfondisce maggiormente una delle seguenti aree: lettura, matematica, scienze. Nel primo ciclo, PISA 2000, sono state accertate principalmente le conoscenze nell'ambito della lettura; nella seconda fase, PISA 2003, è stata la matematica ad essere in primo piano; infine, con PISA 2006, è stata la volta delle scienze. Con PISA 2009 si ricomincerà il giro e toccherà nuovamente alla lettura. Comunque sia, in ciascun ciclo vengono sempre prese in considerazione tutte e tre le suddette aree, anche se ogni volta l'attenzione si focalizza maggiormente su una sola di esse.

Tra gli obiettivi del progetto c'è quello di garantire un monitoraggio costante e accurato, in modo da permettere ai paesi che vi aderiscono di avere sotto controllo i dati circa il livello di preparazione dei propri giovani e di poterli confrontare con le altre realtà di tutto il mondo. L'indagine viene condotta in modo capillare e non si limita a fornire informazioni riguardo la sola media nazionale di ogni paese, ma mette a disposizione i risultati suddividendoli anche per regioni e per tipi di scuole.

La rilevazione dei dati per PISA 2006 è avvenuta sottoponendo un campione di circa 400.000 ragazzi provenienti da 57 paesi (figura 1) ad una prova scritta, comprensiva di quesiti a risposta aperta e a risposta chiusa. Erano inoltre previsti tre questionari, rivolti rispettivamente agli alunni, ai dirigenti delle scuole e ai genitori, ai fini della raccolta di informazioni riguardanti il contesto sociale in cui vivono gli esaminati, il tipo di insegnamento scolastico, l'organizzazione dell'insegnamento nelle varie scuole, i contributi delle famiglie alla formazione dei giovani.

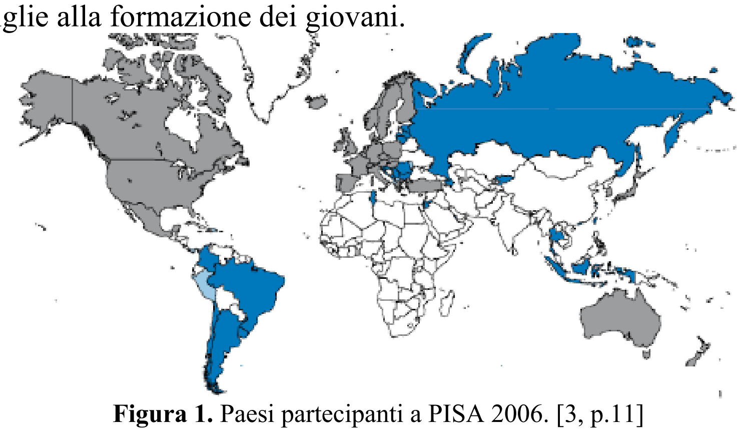


Figura 1. Paesi partecipanti a PISA 2006. [3, p.11]

2. Le competenze secondo OCSE-PISA

La prova di accertamento delle competenze non era mirata a valutare la quantità di conoscenze possedute da ciascun allievo, ma era finalizzata ad accertare le capacità dei ragazzi di risolvere dei quesiti utilizzando e combinando tra loro le nozioni acquisite in ambito scolastico. Il termine tecnico utilizzato nell'ambito del progetto PISA per indicare l'insieme di abilità e conoscenze valutate è *literacy* (competenza), si parla così di *literacy in lettura*, *literacy matematica*, *literacy scientifica*.

La competenza matematica è descritta come "la capacità di una persona di individuare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quella persona in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo" [1]. La competenza matematica ha quindi a che fare con un uso ampio e funzionale della matematica.

Per ciò che attiene più strettamente i contenuti, la suddivisione è la seguente: quantità (e quindi l'aritmetica), spazio e forma (cioè la geometria), cambiamento e relazioni (l'algebra), incertezza (statistica e probabilità). Circa le problematiche proposte, gli ambiti sono stati i seguenti: situazioni personali, situazioni in ambito scolastico-occupazionale, situazioni pubbliche, tematiche scientifiche.
Le competenze sono suddivise in tre raggruppamenti:

1. raggruppamento della riproduzione (semplici operazioni matematiche);
2. raggruppamento delle connessioni (collegamenti fra idee diverse per risolvere problemi);
3. raggruppamento della riflessione (pensiero matematico in senso più ampio).

Ai fini di una valutazione più schematica, sono stati definiti 6 livelli di rendimento, ciascuno di essi associato ad una determinata fascia di punteggio. Si va dal livello 1, il più basso, indice di conoscenze molto limitate, fino al livello 6, che pochi ragazzi raggiungono e che denota padronanza degli argomenti e capacità di ragionamento elevate. Il livello 2 è quello ritenuto minimo affinché un ragazzo sia in grado di utilizzare la matematica.

Livello 1. Risposte a domande formulate in un contesto familiare, contenenti tutte le informazioni pertinenti e definite chiaramente. Svolgimento di procedimenti di routine secondo istruzioni dirette.
Livello 2. Estrazione di informazioni pertinenti da un'unica fonte e comprensione di un'unica forma di rappresentazione. Applicazione di algoritmi, formule, procedure o convenzioni fondamentali.
Livello 3. Svolgimento di procedure descritte chiaramente. Utilizzazione e interpretazione di rappresentazioni basate su varie fonti di informazioni e capacità di trarne delle conclusioni dirette.
Livello 4. Uso corretto di modelli espliciti per situazioni complesse. Scelta e integrazione di varie fonti, di rappresentazione e loro collegamento con aspetti di situazioni reali, argomentazione flessibile.
Livello 5. Sviluppo e utilizzazione di modelli per situazioni complesse. Scelta, confronto e valutazione di strategie opportune per affrontare problemi complessi. Utilizzazione strategica di forme di rappresentazione adatte e applicazione di conoscenze riferite alle situazioni.
Livello 6. Concettualizzazione, generalizzazione e uso di informazioni basate su situazione e problemi complessi. Collegamento fra diverse fonti di informazione e forme di rappresentazioni differenti, in seguito a combinazione di diversi elementi. Sviluppo di nuove soluzioni e strategie di gestione di situazioni non familiari.

In base alle risposte fornite, ad ogni studente è stato attribuito un punteggio; raccogliendo ed analizzando i punteggi di ogni ragazzo, sono state stilate delle tabelle con i punteggi medi ottenuti da ogni paese, l'indice di dispersione e tutti gli altri dati statistici (sui metodi statistici di valutazione consulta [8]).

L'indagine italiana è stata affidata all'INVALSI [2] (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e di Formazione), che l'ha condotta per conto del Ministero della Pubblica Istruzione. Per il nostro paese, hanno partecipato 21.773 studenti in 806 scuole (in 7 scuole campionate però non sono stati raggiunti i livelli minimi di partecipazione stabiliti). Sono stati scelti istituti con differenti indirizzi di studio: licei, istituti tecnici, istituti professionali, scuole medie, formazione professionale. Il campione tuttavia è rappresentativo della popolazione degli studenti quindicenni e non degli indirizzi di studio. Il campione italiano è, inoltre, rappresentativo di 11 regioni: Basilicata, Campania, Emilia Romagna, Friuli Venezia Giulia, Liguria, Lombardia, Piemonte, Puglia, Sardegna, Sicilia, Veneto) e delle due province autonome di Bolzano e di Trento. In Italia il campionamento è stato curato da Giuseppe Bove dell'Università di Roma 3. Del gruppo di esperti ha fatto parte, come esperta in scienze, Michelina Mayer, del CEDE (Centro Europeo Dell'Educazione) di Roma.

3. Alcuni risultati in matematica

Nel seguito sono riportate alcune tabelle riassuntive dei risultati forniti da PISA 2006 in merito alla *literacy matematica*.

Le differenti aree geografiche sono così composte:

- Nord Ovest: Valle d'Aosta, Piemonte, Lombardia, Liguria
- Nord Est: Trentino Alto Adige, Friuli Venezia Giulia, Veneto, Emilia Romagna
- Centro: Toscana, Umbria, Marche, Lazio
- Sud: Abruzzo, Molise, Campania, Puglia
- Sud Isole: Basilicata, Calabria, Sicilia, Sardegna

Ai fini del risultato nazionale, i vari tipi di scuole hanno concorso nella seguente misura: Licei 42,23%, Istituti tecnici 31,12%, Istituti professionali 22,72%, Scuola media 1,72%, Formazione professionale 2,21%

Per una lettura corretta dei dati riportati, è bene ricordare che essi sono rappresentativi, per ciascun tipo di scuola, esclusivamente dei ragazzi quindicenni e non del totale dei ragazzi iscritti.

Le medie internazionali calcolate sono di due tipi: *Media OCSE*, calcolata considerando tutti i paesi OCSE, indipendentemente dalla dimensione assoluta della popolazione degli studenti quindicenni di ciascun paese; *Totale OCSE*, calcolata considerando tutti i paesi OCSE, in proporzione al numero di studenti quindicenni scolarizzati di ciascun paese.

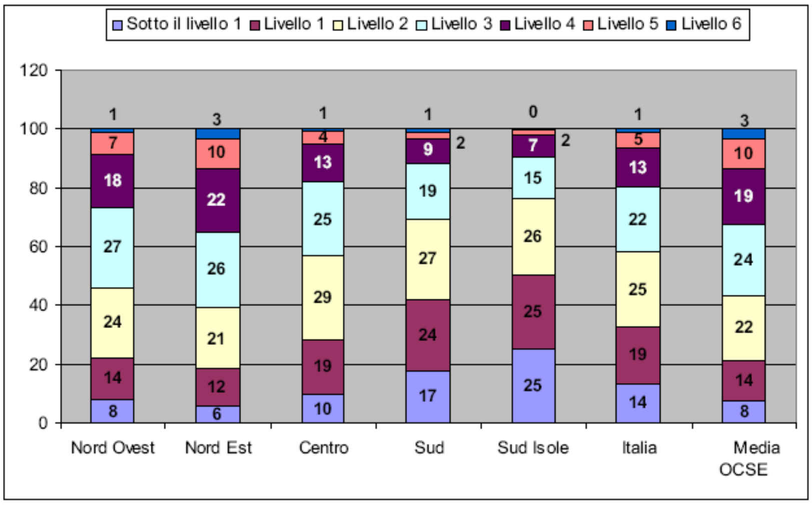


Tabella 1. Percentuale di studenti per ciascuno dei sei livelli di competenza matematica, suddivisi per area geografica [2, p. 15]

Nell'area Sud Isole (Basilicata, Calabria, Sicilia, Sardegna) il 25% del campione non raggiunge il livello 1 e il 50% non raggiunge il livello 2 (procedimenti di routine secondo istruzioni dirette) quello ritenuto minimo affinché i ragazzi siano in grado di usare attivamente la matematica [3, p. 51]. Circa le competenze minime Nord Ovest e Nord Est rientrano nella Media OCSE. Nei paesi dell'OCSE almeno il 70% dei ragazzi è al livello2, ad eccezione di Messico, Turchia, Grecia, Portogallo e Italia.

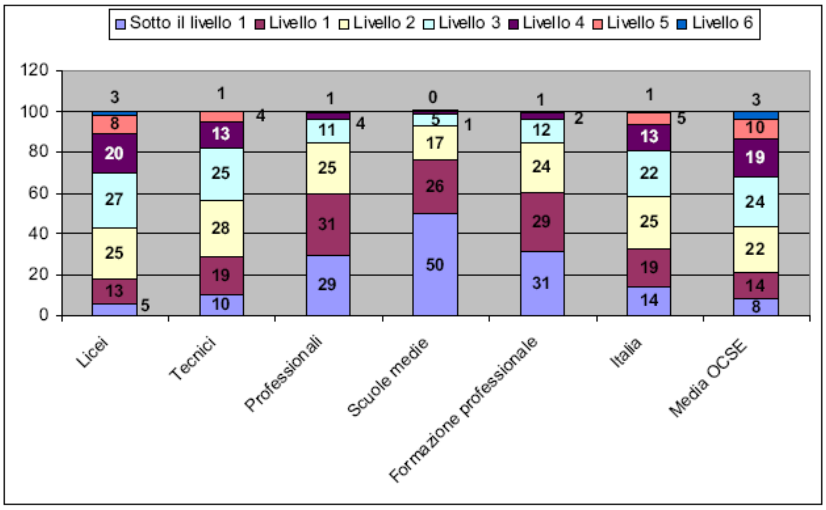


Tabella 2. Percentuale di studenti per ciascuno dei sei livelli di competenza matematica suddivisi per tipo di scuola. [2, p. 15]

Il 50% degli studenti quindicenni che frequentano ancora la scuola media (secondaria di primo grado) è al disotto del livello 1. Si tratta evidentemente di studenti in ritardo formativo, poiché solitamente i quindicenni sono in prima o seconda classe della secondaria di secondo grado. Il 60% degli alunni della formazione professionale e degli istituti professionali non supera il livello 1 (svolgimento di procedimenti di routine secondo istruzioni dirette).

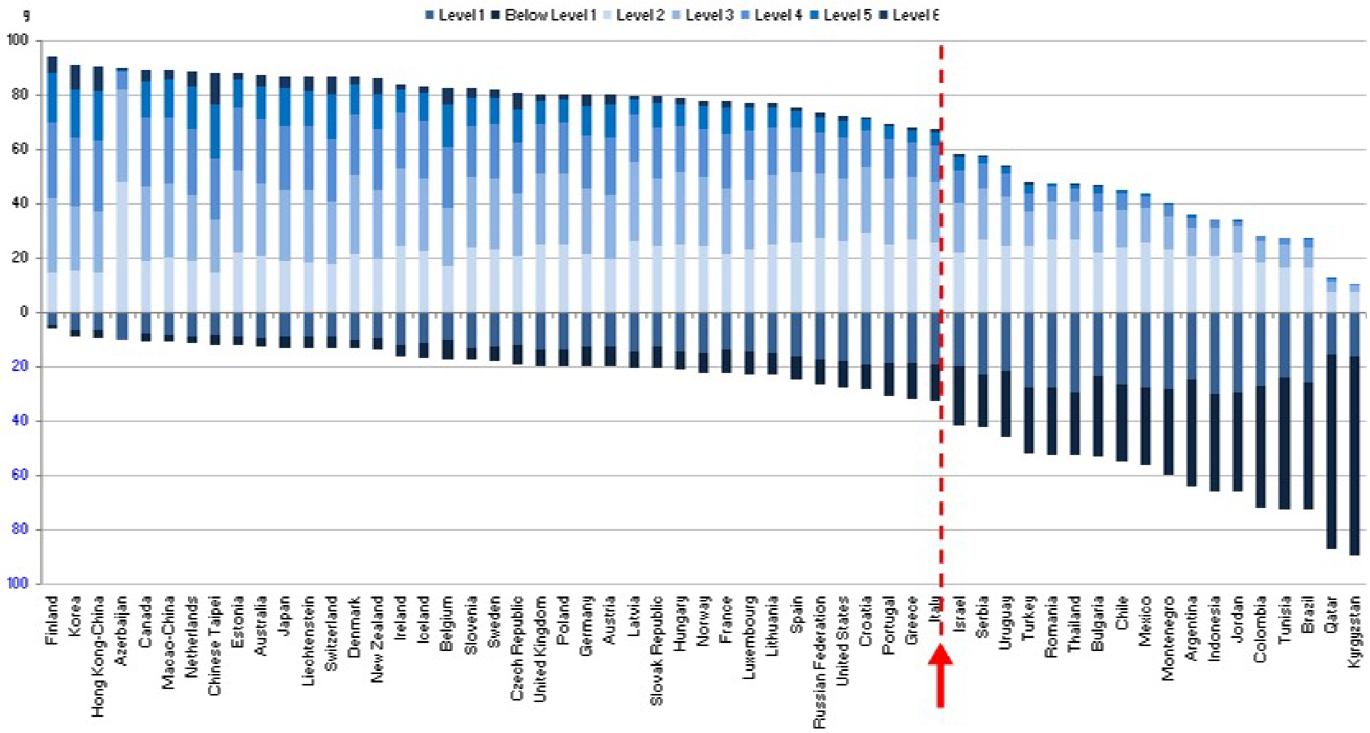


Tabella 3. Posizione dell'Italia all'interno dei 57 paesi che hanno aderito all'indagine, relativamente alle competenze in matematica.

4. Esempi di prove PISA

Le prove dell'indagine PISA solitamente non vengono rese pubbliche. In particolare quest'anno sono state rese pubbliche solo alcune prove di scienze. I quesiti riportati di seguito sono alcuni di quelli rilasciati nel 2003.

Quesito M402: **Chiacchierata su Internet**
Mark (da Sydney, Australia) e Hans (da Berlino, Germania) comunicano spesso tra loro usando le "chat" su Internet. Per poter chattare devono collegarsi ad Internet nello stesso momento.
Per trovare un orario adeguato per chattare Mark ha dato uno sguardo a un grafico dei fusi orari e ha trovato quanto segue:

Domanda 1: Quando sono le 19.00 a Sydney, che ora è a Berlino?

Livello di competenze testato: livello 3
Punteggio pieno: Se la risposta è 10 o 10.00
Punteggio nullo: altre risposte o risposta mancante.

Domanda 2: Mark e Hans non possono chattare nelle ore comprese tra le 9:00 e le 16:30 della loro rispettiva ora locale, perché devono andare a scuola. Inoltre, dalle 23:00 alle 7:00 ora locale non possono chattare perché stanno dormendo.
Qual è un'ora giusta per Mark e Hans per chattare? Scrivi le rispettive ore nella tabella.

Luogo	Ora
Sydney	
Berlino	

Livello di competenze testato: livello 5
Punteggio pieno: per ogni orario o intervallo di tempo che soddisfa la differenza di 9 ore e preso da uno dei seguenti intervalli:

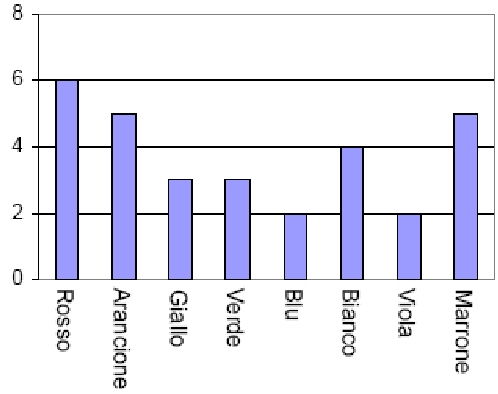
Sydney 4.30-18.00; Berlino 10.00-23.00
o Sydney 7.00-8.00; Berlino 22.00-23.00
Sydney 17.00; Berlino 8.00

Punteggio nullo: tutte le altre risposte, anche quelle che contengono un orario corretto ma l'orario corrispondente errato.

Sydney 8.00, Berlino 20.00

Quesito M467: **Caramelle colorate**

La mamma permette a Roberto di prendere una caramella da un sacchetto. Roberto non può vedere le caramelle. Il seguente grafico mostra il numero di caramelle di ciascun colore che ci sono nel sacchetto.



Domanda 1: Qual è la probabilità che Roberto prenda una caramella di colore rosso?

A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

Livello di competenze testato: livello 4
Punteggio pieno: se la risposta è 20%
Punteggio nullo: altre risposte o risposta mancante

Quesito M413: **Tasso di cambio**

Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singapore (SGD) in rand sudafricani (ZAR).

Domanda 1: Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling ha cambiato 3.000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio.
Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling?

Livello testato: livello 1

Domanda 2: Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3'900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è:

1 SGD = 4,0 ZAR

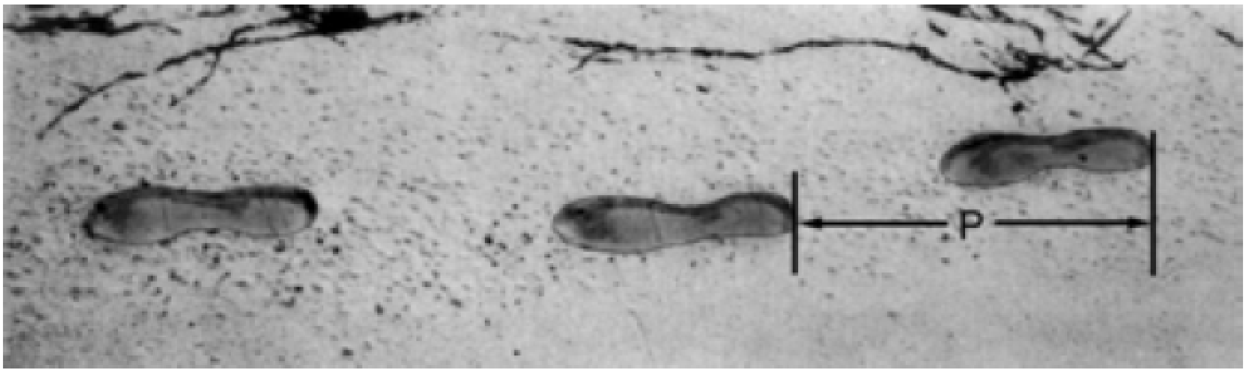
Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling?

Livello testato: livello 2

Domanda 3: Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD.
Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.

Livello testato: livello 4

Quesito M124: **Andatura**



La figura mostra le orme di un uomo che cammina. La lunghezza P del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive.

Per gli uomini, la formula $\frac{n}{p} = 140$ fornisce una relazione approssimativa tra n e P, dove:

n = numero di passi al minuto, e
P = lunghezza del passo in metri.

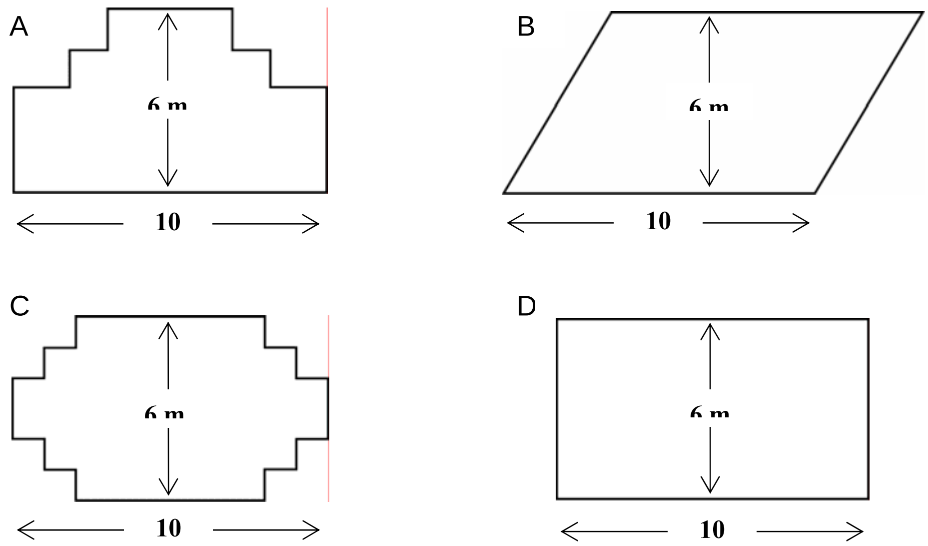
Domanda 1: Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Livello testato: livello 5
Punteggio pieno: risposte 0,5m o 50cm o 1/2
Punteggio parziale: sostituzione corretta dei numeri nella formala ma risposta errata o nessuna risposta; manipolazione corretta della formula P=n/140 ma il resto del lavoro è errato.
Punteggio nullo: altre risposte, tipicamente 70cm. Nessuna risposta.

Domanda 3: Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è di 0,80 metri. La formula viene applicata all'andatura di Bernardo.
Calcola la velocità a cui cammina Bernardo esprimendola in metri al minuto e in chilometri all'ora. Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Livelli testati: da Livello 4 a Livello 6
Punteggio pieno: risposta corretta sia in m/s sia in km/h: n=140x0,80=112. Al minuto la velocità è 112x0,80m=89,6m. La velocità è 5,38 o 5,4 km/h. Sono accettati errori di approssimazione.
Punteggio parziale: se ha dimenticato di moltiplicare per 0,80 per convertire da passi al minuto a metri al minuto. Velocità in metri al minuto corretta ma la conversione in chilometri è errata o manca. Metodo corretto ma presenta errori di calcolo. E' data la risposta in km/h ma non in metri al minuto.
Punteggio parziale inferiore: n=140x0.80 senza ulteriori calcoli o altri calcoli errati
Punteggio nullo: altre risposte o nessuna risposta.

Quesito M266: **Carpentiere**
Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vorrebbe realizzare un bordino attorno ad un'aiuola. Per il bordino prende in considerazione i seguenti progetti.



Domanda 1: Indica per ciascun progetto se è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole.
Fai un cerchio intorno a «Sì» o «No».

Progetto per il bordino	Utilizzando questo progetto, si può realizzare il bordino con 32 metri di tavole?
Progetto A	Sì / No
Progetto B	Sì / No Sì / No
Progetto C	Sì / No
Progetto D	Sì / No

Livello testato: Livello 6
Punteggio pieno: quattro risposte corrette A sì, B no, C sì, D sì.
Punteggio parziale: tre risposte corrette
Punteggio nullo: due o meno risposte corrette

5. Osservazioni conclusive

L'appuntamento con i risultati delle indagini PISA diventa di volta in volta sempre più atteso, almeno dai media. C'è l'interesse o la curiosità di vedere in quale posizione in classifica arriva la nostra 'squadra' di studenti. Questa attesa di risposte precise, di classifiche, di giudizi sui sistemi educativi nazionali ha generato il 'mito' dell'indagine PISA. In realtà, come ogni indagine, va presa per quella che è: i dati statistici sono certi in quanto vengono da operazioni aritmetiche condivise dalla comunità degli statistici ma le interpretazioni dei risultati sono piuttosto deboli.

I test PISA non sono in grado di misurare cosa e quanto si insegna a scuola: data l'internazionalità della ricerca, i quesiti non possono riguardare strettamente ciò che si insegna nelle singole scuole nazionali. Un esiguo gruppo di esperti internazionali (quest'anno nel gruppo è presente un solo italiano: Michelina Mayer indicata come esperta per le scienze [1, p. 201]; nel gruppo di esperti del 2003, che riguardava più nel dettaglio la matematica, non è indicato nessun italiano) ha fissato alcune competenze da indagare. I quesiti sono tarati per misurare esclusivamente tali competenze.

In Italia il dibattito su cosa e quale matematica si debba insegnare nella scuola è animato da diverse correnti di pensiero, forse troppe visto che talvolta si inaridisce e rimane polemica inconcludente. Da alcuni anni l'Unione Matematica Italiana ha fissato in importanti convegni nazionali le competenze matematiche per il cittadino [6]. Ma non è la sola associazione che si occupa di didattica della matematica, citiamo per esempio la Mathesis [7] e poi ci sono altre associazioni di insegnanti. L'indagine PISA, è bene precisarlo, non misura le competenze fissate dai matematici italiani per gli studenti italiani. Il forte impatto presso i media dei risultati delle prove OCSE-PISA può determinare perciò, anche nel breve termine, una accettazione acritica delle competenze da esse richieste.

I test PISA non sono in grado di misurare gli effetti delle riforme scolastiche. Il confronto tra i dati di due indagini successive sono difficilmente confrontabili. A livello mondiale, sono pochi i cambiamenti rilevati da un'indagine all'altra e questi cambiamenti sono difficilmente correlabili con le modifiche nelle politiche scolastiche. Significativi miglioramenti nelle performance in matematica, rispetto all'edizione del 2003, si sono avuti in Messico (+20 punti), Grecia (+14 punti), Indonesia (+31 punti), Brasile (+13 punti). Significativi peggioramenti si sono misurati in Francia (-15 punti), Giappone (-11 punti), Islanda (-10 punti), Belgio (-9 punti). L'Italia ha raggiunto 459 punti nel 2000, 467 nel 2003 e 463 nel 2006: sostanzialmente una situazione statica, nonostante nel frattempo si sia innalzato l'obbligo scolastico, si sia lavorato in tutte le scuole per ridurre l'abbandono e la dispersione scolastica.

La misurazione delle competenze in matematica, soprattutto se vengono testate con problemi lunghi e articolati da leggere, sono strettamente dipendenti dalle competenze di lettura: se gli studenti non sono in grado di comprendere correttamente il testo non possono risolverlo. Con le tipologie di test proposti, quindi, le competenze in matematica sono un sottoinsieme delle competenze di lettura. Questa difficoltà la conoscono bene gli insegnanti di matematica.

Indipendentemente dai risultati dell'indagine PISA, la situazione della scuola italiana e delle conoscenze-competenze degli studenti sono abbastanza note e commentate da tutti, così come sono note le differenze economico-sociali tra nord e sud, ed è noto anche che la scuola non è in grado di pareggiare queste differenze. Perciò ci esimiamo dal parlarne anche noi: la soluzione non sta evidentemente nel parlarne quanto nel vincere l'immobilismo.

Bibliografia - sitografia

[1] AA. VV. Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica, quadro di riferimento di PISA 2006, Armando Editore 2007
http://www.invalsi.it/ric-int/Pisa2006/sito/docs/Quadro_riferimento_PISA2006.pdf
[2] AA.VV, Risultati di PISA 2006, un primo sguardo d'insieme, a cura di INVALSI, dicembre 2007.
http://www.invalsi.it/download/pdf/pisa06_Primirisultati_PISA2006.pdf
[3] Complete executive summary
http://www.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf
[4] Il sito dell'INVALSI relativo a PISA 2006
http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2006.php?page=pisa2006_it_00
[5] Il sito dell'OCSE relativo a PISA 2006
http://www.oecd.org/pages/0,3417,en_32252351_32236191_1_1_1_1_1,00.html
[6] Didattica della matematica secondo l'UMI
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/didattica.html
[7] Mathesis, Società italiana di scienze matematiche e fisiche
http://www.mathesisnazionale.it/PagineHTML/index.htm
[8] M. G. Ottavini, S. Magnani, R. Ricci, *Metodi statistici per la valutazione di abilità e competenze*
http://www.matematica.it/paola/Siena_UMI05.pdf

74. Geogebra, per operare dinamicamente con la matematica

di Sergio Balsimelli [s.balsimelli@tiscalinet.it, http://utenti.lycos.it/sergiobalsi/]

Sunto. *Geogebra è un software libero e multi-piattaforma, che permette di operare in modo attivo con la matematica (geometria, algebra ed analisi). Con esso è possibile disegnare punti, segmenti, rette, coniche, funzioni e soprattutto è possibile modificarle dinamicamente. Contemporaneamente in una apposita finestra di algebra vengono visualizzate le coordinate dei punti e le misure di segmenti, angoli, perimetri, aree. La finestra dei numeri e quella delle figure interagiscono dinamicamente tra di loro. Di seguito si presentano alcune attività didattiche che si possono svolgere con studenti della scuola secondaria di primo grado.*

1. Presentazione del software

Geogebra è un software didattico per l'insegnamento della geometria, ma non solo, che fa parte del gruppo di software detti di "geometria dinamica". E' abbastanza simile al più noto Cabri gèomètre. A differenza di quest'ultimo è un software open-source rilasciato sotto licenza GNU GPL (*General Public Licence*); ossia il software può essere usato, copiato e distribuito liberamente, purché non a scopo di lucro. Si può scaricare dal sito del progetto [1]. Ideatore e principale sviluppatore è Markus Hohenwarter [2] della Florida Atlantic University (USA). Esiste un forum, in più lingue (italiano compreso), dove è possibile scambiare consigli e informazioni [3]. Esistono poi aree Wiki in diverse lingue dove è possibili pubblicare i propri materiali oppure scaricare quelli degli altri. Infine segnalo alcuni usi artistici di Geogebra: il GeoGebra Art Project [4] e le cartoline realizzate dall'I.I.S.S. Vivante di Bari [5].
La differenza sostanziale tra Geogebra e Cabri è che il primo dà una duplice vista degli oggetti: ad ogni espressione nella "finestra algebra" corrisponde un oggetto nella "finestra geometria" e viceversa. Geogebra presenta infatti una barra di input che permette di inserire numeri, angoli, vettori, punti, rette e coniche attraverso le coordinate o le loro equazioni.

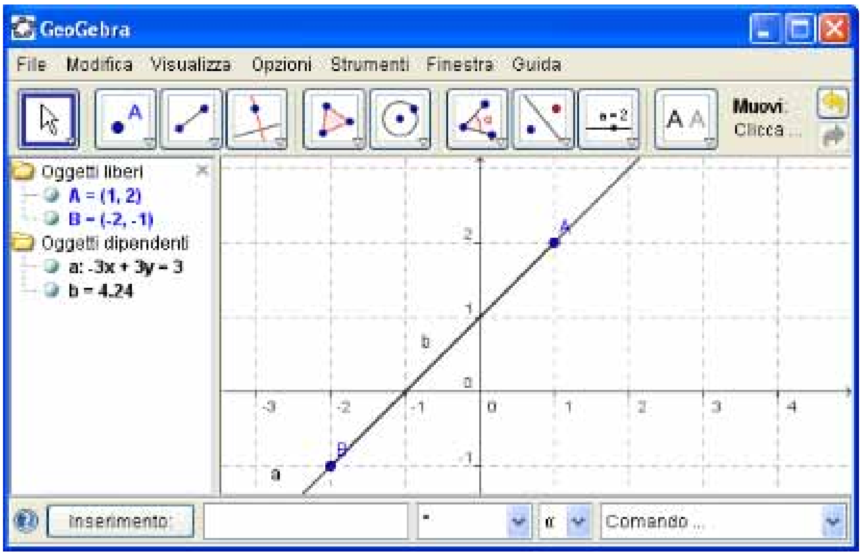
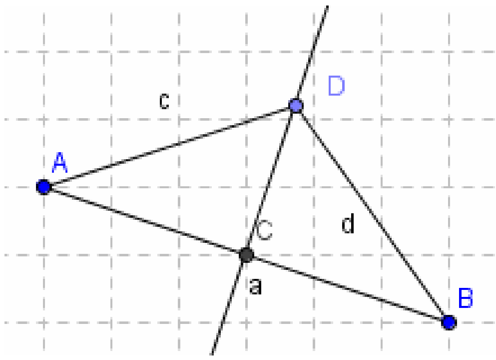


Figura 1. La finestra di Geogebra: a sinistra la finestra Algebra, al centro il foglio da disegno, in basso il campo di inserimento, in alto la Barra dei menu e quella dei comandi(cliccando sulla freccetta in basso a destra di ogni icona si apre un menu a tendina)

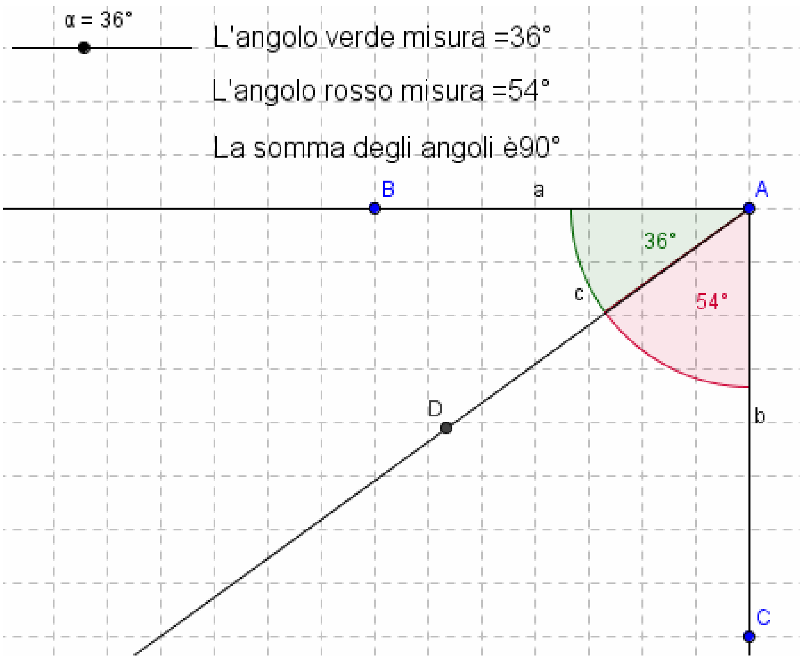
2. Attività per la prima classe della secondaria di primo grado

2.1 Asse di un segmento



Dopo aver riportato sugli assi i punti A(-5;6) e B(7;3) scegliere *Ic3 Segmento tra due punti* e tracciare il segmento AB. Trovare quindi il suo punto medio C scegliendo *Ic2 Punto medio o centro* e cliccando sul segmento AB; tracciare la perpendicolare al segmento AB passante per C, scegliendo *Ic4 Retta perpendicolare* e cliccando sul segmento AB e poi sul punto C, individuando l'asse di AB. Prendere quindi un punto D sull'asse (quando il punto è sulla retta, la retta diventa più scura) e tracciare i segmenti AD e DB. Nella finestra Algebra osservare che i due segmenti hanno la stessa misura e ciò avviene anche spostando D sull'asse. Con lo strumento *Testo* (*Ic8*) digitare "Segmento c=" +c e "Segmento d=" +d, e osservare che i valori dei segmenti *c* e *d* rimangono uguali anche spostando D. Cliccare sul punto D e premere il tasto "+" o "–" della tastiera numerica per farlo scorrere sull'asse e osservare l'uguaglianza dei due segmenti nella finestra algebra. Con lo strumento *Testo*, digitare "L'asse di un segmento è la perpendicolare passante per il punto medio del segmento, ma è anche il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento".

2.2 Angoli complementari

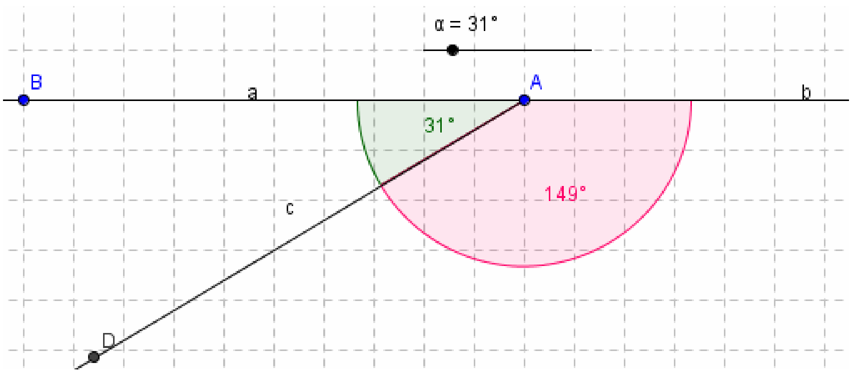


Disegnare la semiretta AB di origine A esattamente orizzontale e la semiretta AC esattamente verticale. Nella riga di Input digitare α = 30° poi con *Ic6 Angolo di data misura* cliccare in B, A e digitare α. Disegnare la semiretta AD poi cliccare sull'angolo β col tasto destro e scegliere Proprietà→ Dimensione 100, Mostra etichetta→ Valore e cliccare infine su Applica. Con lo strumento Ic6 Angolo, cliccare in DAC poi cliccare col tasto destro sull'angolo γ e scegliere Proprietà→ Dimensione 100, Mostra etichetta→ Valore, Colore → rosso e cliccare infine su Applica. Nella Finestra Algebra cliccare su α = 30° col tasto destro e scegliere Mostra oggetto; nello slider che si forma cliccarci col tasto destro e scegliere Proprietà→ Intervallo max 90° poi cliccare su Applica. Con lo strumento testo digitare:

"L'angolo rosso misura =" + γ "L'angolo verde misura =" + β "la somma degli angoli γ + β è = " + (γ + β). Provare a spostare il punto sullo *slider*.

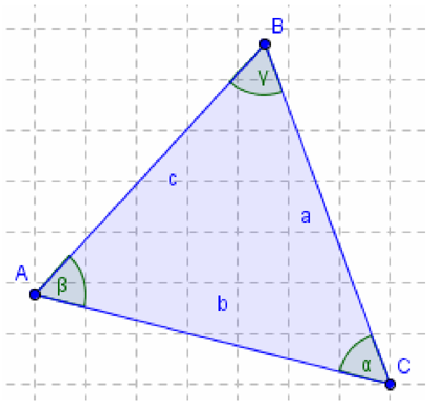
2.3 Angoli supplementari

Disegnare le semirette AB di origine A esattamente orizzontale ed AC dalla parte opposta. Nella riga di Input digitare α = 30° poi con *Ic6 Angolo di data misura* cliccare in B, A e digitare α. Disegnare la semiretta AD poi cliccare sull'angolo β col tasto destro e scegliere Proprietà→ Dimensione 100, Mostra etichetta→ Valore e cliccare infine su Applica. Con lo strumento Ic6 Angolo, cliccare in DAC poi cliccare col tasto destro sull'angolo γ e scegliere Proprietà→ Dimensione 100, Mostra etichetta→ Valore, Colore → rosso e cliccare infine su Applica. Nella Finestra Algebra cliccare su α = 30° col tasto destro e scegliere Mostra oggetto; nello slider che si forma ciccarci col tasto destro e scegliere Proprietà→ Intervallo max 180° poi cliccare su Applica. Con lo strumento testo digitare: "L'angolo rosso misura =" + γ "L'angolo verde misura =" + β "la somma degli angoli γ + β è = " + (γ + β). Provare a spostare il punto sullo slider.

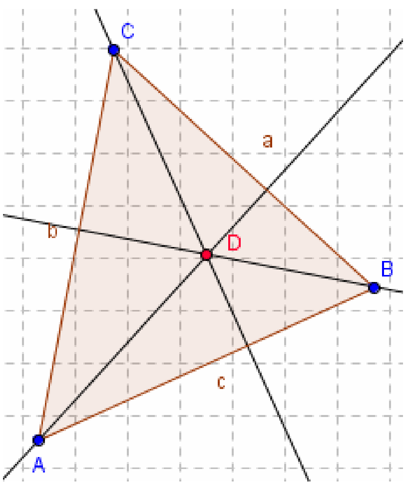


2.4 Somma degli angoli interni di un triangolo

Disegnare con lo strumento *Poligono* un triangolo a piacere e misurare tutti i suoi angoli ricordando di cliccare sulle coppie di lati seguendo un percorso in senso orario. Con lo strumento *Testo* digitare quindi: "l'angolo α misura " +α , "l'angolo β misura " +β poi "L'angolo ν misura " + ν ed infine "La somma degli angoli interni del triangolo è" +(α+β+ν). Provare a spostare i vertici del triangolo ed osservare cosa accade alla misura di ciascun angolo ed alla loro somma. Digitare infine: La somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°. Formattare il testo colorandolo di rosso a 14 punti.



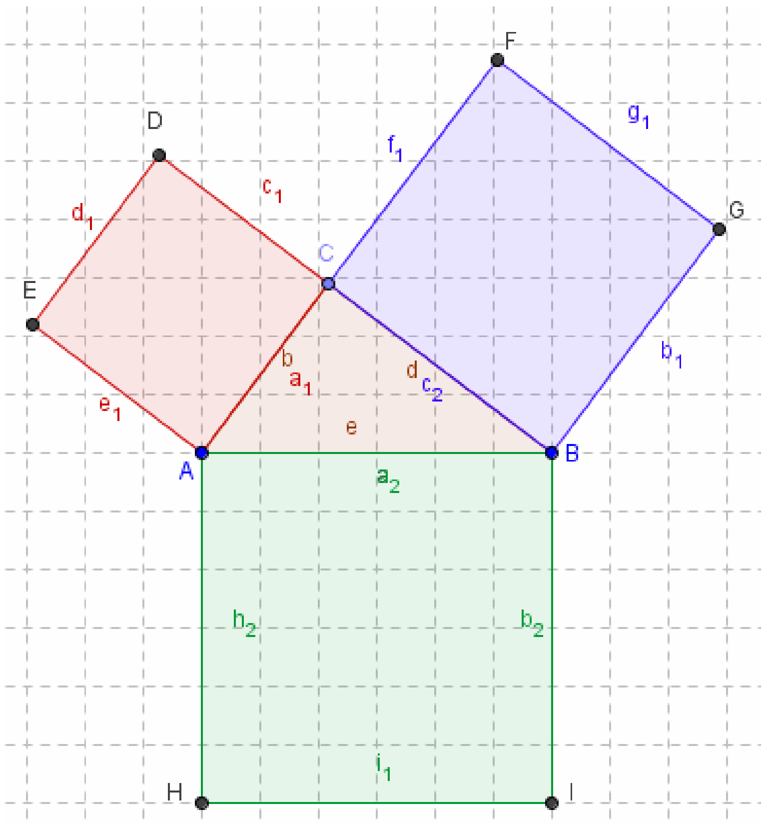
2.5 Altezze ed ortocentro



Disegnare un triangolo ABC e tracciare le altezze relative a ciascun lato (perpendicolare ad AB passante per C…..) determinando la loro intersezione D e colorando questo punto di rosso. Cosa accade spostando i vertici del triangolo? In quale caso l'altezza rimane all'interno, su un vertice o all'esterno del triangolo stesso?

3. Attività per la seconda classe

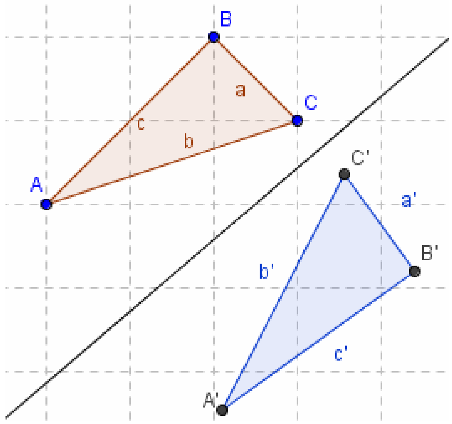
3.1 Teorema di Pitagora



Prendere i punti A(7,11) e B(14,11) e disegnare con lo *strumento Ic5 Semicirconferenza per due punti* la semicirconferenza di diametro AB. Unire A con B con un segmento e disegnare il triangolo ABC con C preso a piacere sulla semicirconferenza. Che tipo di triangolo è ABC ? Nella Finestra Algebra cliccare col tasto destro su a_1 e su c_1 scegliere Rinomina e rinominare a_1 con d e c_1 con e. Dai punti A e C tracciare le perpendicolari al segmento b poi disegnare con *Ic5 Circonferenza di dato centro,* le circonferenze di centro A e passante per C e di centro C e passante per A. Trovare le intersezioni D ed E tra rette e circonferenze, disegnare il quadrato ACDE colorandolo di rosso. Nascondere rette, circonferenze e semicirconferenza. Disegnare il quadrato di lato BC colorandolo di blu (perpendicolari al lato d condotte da B e da C, circonferenze di centro B e passante per C e di centro C e passante per B… trovare le intersezioni F e G e disegnare il quadrato CBGF) e nascondere rette e circonferenze. Ripetere costruendo il quadrato ABIH sul lato e colorandolo di verde. Nascondere rette e circonferenze.
Con lo strumento *Testo* digitare “Area del quadrato ACDE=” +Q “Area del quadrato BGFC=” +R “Area del quadrato ABIH” +S “ Somma aree quadrati ACDE e BGFC=” +(Q +R).
Spostare quindi il punto C, cosa si può osservare?
Aprire il file Pitagora-vettori e ricostruire il quadrato più grande.Aprire i file Dimostrazione Pitagora 1 e Dimostrazione Pitagora 2 e agire sugli slider per dimostrare il teorema.

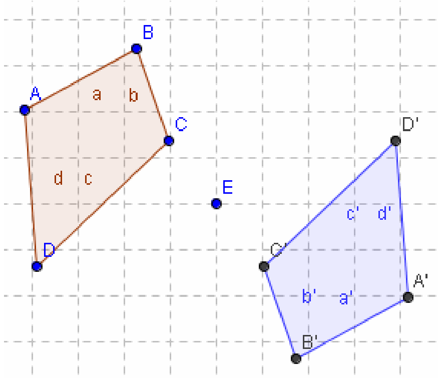
3.2 Simmetria assiale

Tracciare una retta per due punti inclinata a piacere e nella parte superiore disegnare un
triangolo ABC. Prendere *Ic7 Simmetrico rispetto ad una retta*, cliccare dentro al triangolo (viene evidenziato ogni suo lato) e poi sulla retta. Cliccare col tasto destro dentro alla simmetrica ottenuta, scegliere Proprietà→colore e cambiare il colore. Provare a spostare i vertici del triangolo ed osservare cosa accade.

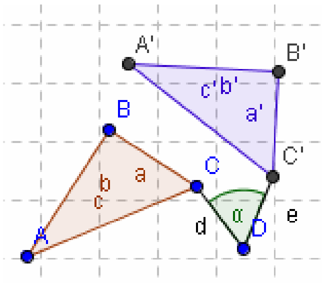


3.3 Simmetria centrale

Dopo aver disegnato un quadrilatero, prendere al suo esterno un punto E, scegliere *Ic7 Simmetrico rispetto ad un punto*, cliccare sul quadrilatero e poi sul punto E. Colorare la figura simmetrica con un colore diverso e provare a spostare i vertici del quadrilatero di partenza. Ripetere l'esercizio disegnando un pentagono e poi un esagono.



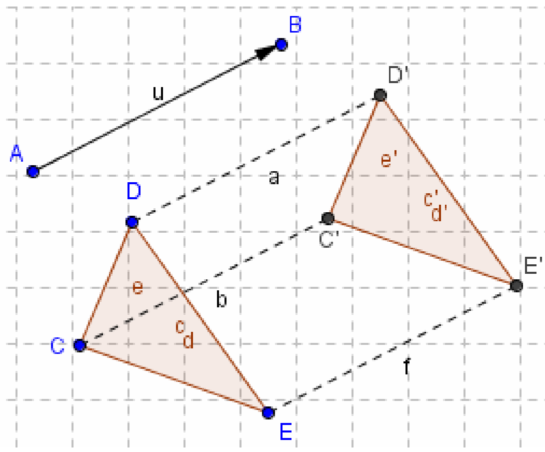
3.4 Rotazione



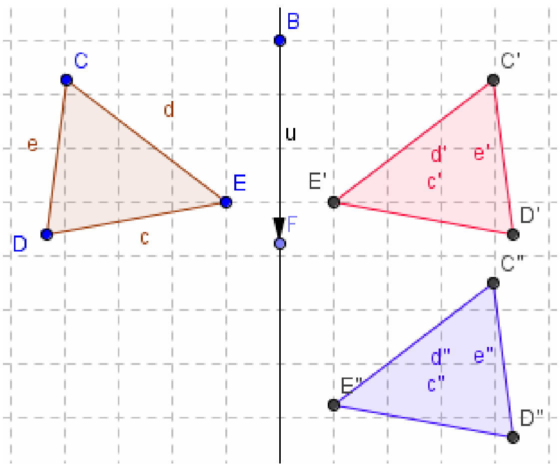
Disegnare un triangolo ABC e prendere un punto D fuori dello stesso, scegliere *Ic7 Ruota intorno ad un punto di un angolo*, cliccare sul triangolo e poi sul punto E e nella finestra che si apre digitare il valore dell'angolo di rotazione, scegliendo anche il verso della rotazione (Orario o Antiorario). Colorare il triangolo ottenuto con un colore diverso da quello iniziale. Ripetere disegnando e ruotando di un certo numero di gradi a piacere, in senso orario o antiorario, un quadrilatero, un pentagono ed un esagono.

3.5 Traslazione

Prendere due punti A e B ed unirli con *Ic3 Vettore tra due punti*, cliccando in A e poi in B. Disegnare quindi un triangolo e scegliere *Ic7 Trasla di un vettore*, cliccare dentro al triangolo e poi sul vettore. Colorare il triangolo ottenuto di un colore diverso, unire i vertici corrispondenti con un segmento, cliccare su ciascuno di essi col tasto destro e scegliere Proprietà→ Stile tratto→ Tratteggiato osservare poi il loro parallelismo. Provare a spostare il vertice B del vettore, poi ripetere l'esercizio disegnando un quadrilatero, un pentagono ed un esagono.



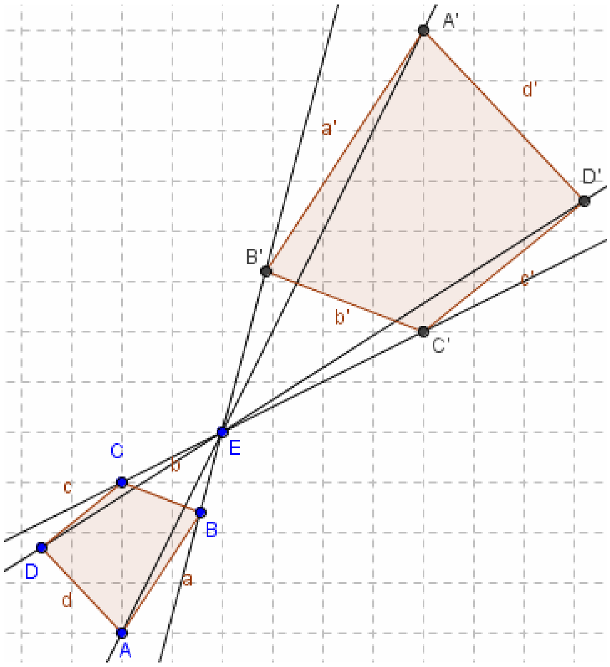
3.6 Antitraslazione



Disegnare una retta parallela all'asse y e disegnare un triangolo DEC a piacere. Sulla retta prendere un punto F e tracciare il vettore BF. Disegnare quindi il simmetrico del triangolo rispetto alla retta colorandolo di colore rosso. Traslare quindi il triangolo ottenuto del vettore disegnato, colorando di blu. Provare quindi a spostare i vertici del triangolo e poi il vettore (anche sopra al punto B).

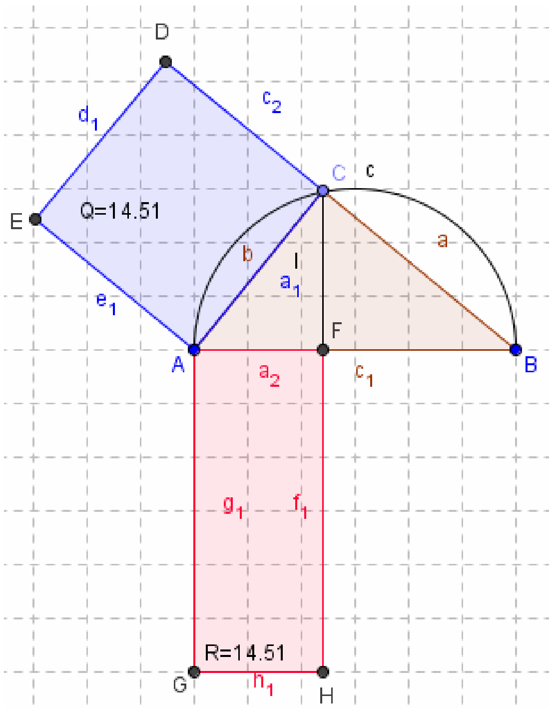
3.7 Omotetia

Disegnare un triangolo a piacere con lo strumento *Poligono* e prendere un punto D esterno ad esso. *Ic7 Dilata oggetto da un punto di un fattore*, cliccare sul triangolo, sul punto D e nella finestra che si apre digitare 2. Tracciare le rette che passano il punto D e per ciascun vertice del triangolo, poi provare a spostare il punto D. Ripetere disegnando un quadrilatero e poi un pentagono a piacere. Disegnare un triangolo ed un punto D esterno ad esso. Procedere come in precedenza, ma stavolta nella finestra che si apre digitiamo il valore -2 (si ottiene l'omotetia inversa). Provare con un quadrilatero ed un pentagono.



4. Attività per la classe terza

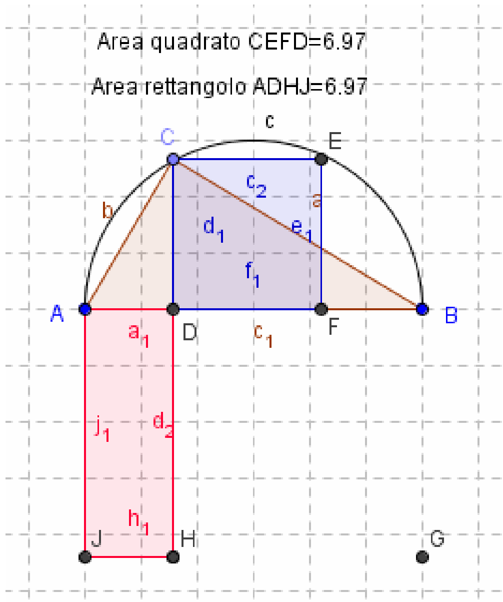
4.1 Primo teorema di Euclide



Con lo strumento *Ic5 semicirconferenza per due punti*, disegnare una semicirconferenza ed unire i punti A e B con un segmento. Individuare sulla semicirconferenza un punto C e tracciare il triangolo ABC (rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza). Tracciare le perpendicolari al segmento AC per A e per C poi prendere Circonferenza di dato centro e disegnare le circonferenze di centro A e raggio AC e centro C e raggio CA, individuando le intersezioni D ed E con le rette precedenti. Tracciare il quadrato ACDE e colorarlo con colore diverso dal triangolo. Nascondere le due circonferenze. Tracciare la perpendicolare al segmento AB condotta da C individuando l'intersezione F e la perpendicolare ad AB condotta da A. Disegnare la circonferenza di centro A e raggio e AB individuando l'intersezione G tra circonferenza e perpendicolare ad AB per A. Da G tracciare la perpendicolare alla retta passante per G e individuare il punto H intersezione della retta passante per G e per CF. Disegnare il rettangolo AFHG e colorarlo diversamente dagli altri. Tracciare il segmento CF e nascondere rette e circonferenze. Digitare con lo strumento *Testo* "Q =" +Q + "cm^2" e "R =" +R + "cm^2" riportando i valori ottenuti dentro alle rispettive figure, poi cliccando su questi valori col tasto destro scegliere proprietà→ Punto iniziale→ legarlo ad una delle lettere di un vertice. Nascondere tutte le rette e le circonferenze e provare quindi a spostare il punto C.

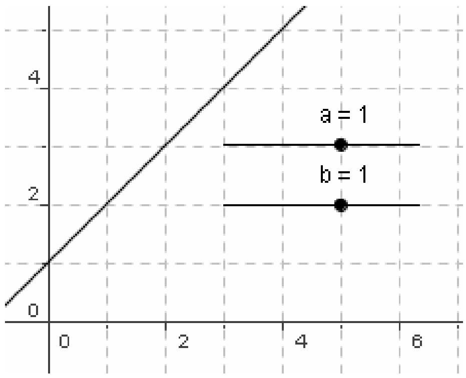
4.2 Secondo teorema di Euclide

Con lo strumento *Ic5 semicirconferenza per due punti*, disegnare una semicirconferenza passante per A e per B. Individuare sulla semicirconferenza un punto C e tracciare il triangolo ABC. Disegnare la perpendicolare al segmento AB passante per C individuando il punto d'incontro D. Tracciare la perpendicolare per C al segmento CD e la parallela a quest'ultima per B. Disegnare la circonferenza di centro C e raggio D e la circonferenza di centro D e raggio C individuando le intersezioni F ed E con le due rette disegnate. Disegnare il quadrato CEFD colorandolo di blu (poligono Q) e nascondere le circonferenze. Tracciare la perpendicolare da B ad AB e disegnare le circonferenze di centro B e raggio BD e di centro D e raggio DB individuando le intersezioni G ed H. Dal punto A tracciare la perpendicolare ad AB, e la retta GH e individuare l'intersezione J con la retta precedente (perpendicolare per A ad AB). Tracciare il rettangolo ADHJ e colorarlo in modo diverso. Nascondere circonferenze e rette, quindi digitare con lo strumento *Testo* "Area quadrato Q =" +Q + "cm^2" e "Area rettangolo S =" +S + "cm^2". Come sono le due aree? Cosa accade spostando il punto C?



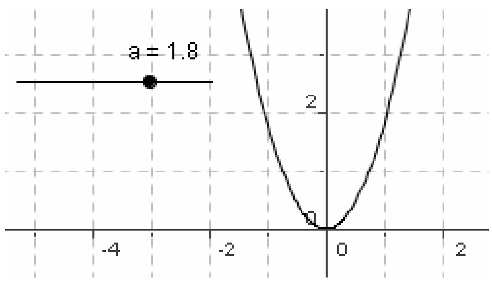
4.3 La retta

Inserire nella riga di input:
a=1 e dare Invio
b=1 e dare Invio
a*x+b e dare Invio
Si ottiene la funzione che ha per rappresentazione grafica la retta y=x+1. Tale retta taglia l'asse delle y nel punto +1 (ordinata all'origine).
Proviamo a cambiare tale valore realizzando uno slider:
cliccare in b=1, nella Finestra Algebra, col tasto destro e scegliere Mostra oggetto. Cliccare col tasto destro sullo slider e scegliere Proprietà inserendo i valori -10 e 10 in Intervallo e 1 in Incremento. Possiamo osservare che quando b aumenta, la retta taglia l'asse y nel punto corrispondente al valore sullo slider, nel semiasse positivo delle y. Quando invece b diminuisce e arriva a 0, la retta passa per l'origine degli assi, mentre quando i valori diventano negativi, viene tagliato l'asse y nel suo semiasse negativo (fino a -10).



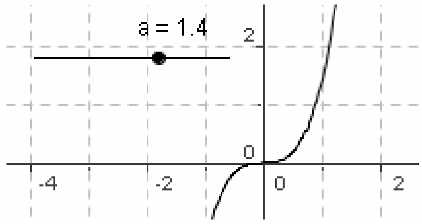
4.4 La parabola

Inserire nella riga di input:
a=1 e dare Invio
y=a*x^2 e dare Invio
Realizzare con il valore a uno slider (Intervallo da -10 a 10 Incremento 1). Aumentando il valore di a la parabola si avvicina all'asse delle y, quando a=0 si ottiene la retta y=0 (asse delle x) mentre con a < 0 la parabola cambia concavità (guarda verso il basso) e si sposta nel 3° e 4° quadrante.

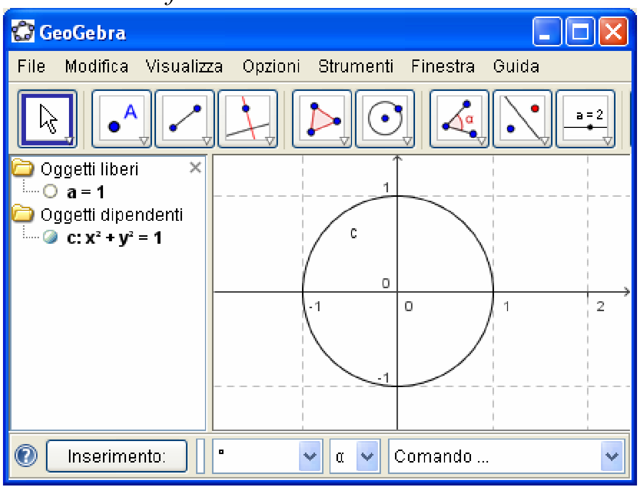


4.5 Una cubica

Inserire nella riga di input:
a=1 e dare Invio
f(x)=a*x^3
Realizzare uno slider (Intervallo da -10 a 10 Incremento 1); dando alla a valori positivi crescenti la parabola si avvicina all'asse delle y, quando a = 0 si ottiene la retta x= 0, quando la a assume valori negativi il disegno della si sposta nel 2° e 4° quadrante.



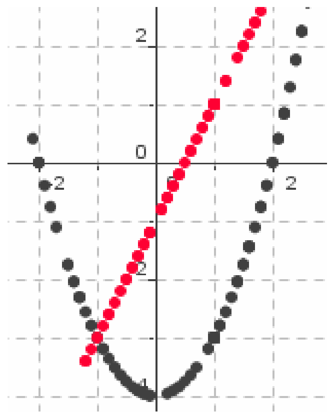
4.6 La circonferenza



Inserire nella riga di input:
a=1
x^2+ y^2 = a^2
Realizzare uno slider (Intervallo da 1 a 10 Incremento 1). Aumentando il valore della a le circonferenze, con centro nell'origine, aumentano di raggio.

4.7 Uso di due funzioni e due slider

Le funzioni da utilizzare sono $y=x^2-4$ e y= x-1. Digitare nella riga di input t=1 e dare Invio. Digitare quindi C= (t, t^2-4). Creare con t=1 uno slider regolando l'intervallo tra -10 e 10 e l'incremento di 0,1. Cliccare col tasto destro sul punto C e selezionare Traccia on. Digitare nella riga di input s=1 e poi D=(s, s-1) e creare con s uno slider con le caratteristiche precedenti. Cliccare col tasto destro sul punto D e selezionare Traccia on, cambiando inoltre il colore della retta. Muovere l'uno e l'altro slider e osservare cosa si ottiene (intersezioni tra retta e parabola).



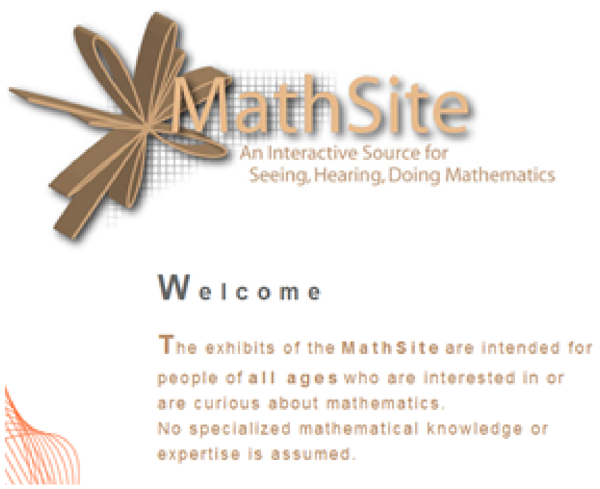
Sitografia

[1] www.geogebra.org/cms/
[2] http://www.math.fau.edu/~mhohen/
[3] http://www.geogebra.org/forum/
[4] http://home.windstream.net/joelkahn/
[5] http://www.vivante.it/PinP/Italian_postcards.html

75. Recen… siti

a cura di Flavio Cimolin

MathSite: An Interactive Source for Seeing, Hearing, Doing Mathematics (David Gale)
http://mathsite.math.berkeley.edu/intro.html



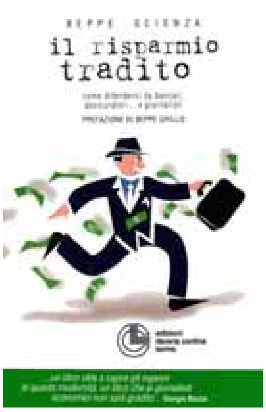
Davvero un bel mix di matematica pura e interattività in questo sito premiato dall'edizione 2006 del Premio Pirelli. Tre sezioni tutte da scoprire (oltre che vedere e ascoltare) introducono al visitatore, sempre con spirito divulgativo, avventurosi dissezionamenti di triangoli e quadrati, per poi passare alla visualizzazione grafica degli algoritmi di ordinamento e infine alla "matematica sperimentale" della teoria delle orbite geometriche. Uno strumento multimediale in lingua inglese di rara efficacia da assaporare in un momento di tranquillità! Per una corretta visualizzazione è richiesta l'installazione dei plug-in Flash e Java.

Immagini per la matematica
http://www.matematita.it/materiale/index.php

Un altro sito vincitore del Premio Pirelli, per l'edizione 2005, a cura del Centro Interuniversitario di Ricerca per la Comunicazione e l'Apprendimento Informale della Matematica. Vista l'importanza sempre crescente delle immagini nella società odierna, ecco l'interessante idea di creare un archivio di immagini per la matematica. Le immagini sono liberamente fruibili al pubblico nella loro totalità sotto la voce "Consulta il catalogo", oppure disponibili in percorsi guidati che spaziano dalla geometria 3D e 4D alla topologia, dalle simmetrie astratte a quelle concrete raffigurate nell'arte e nella scultura.

76. Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo

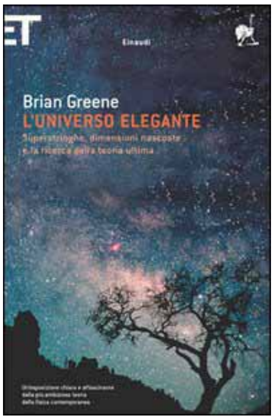


Beppe Scienza, *Il risparmio tradito, come difendersi da bancari, assicuratori... e giornalisti*, prefazione di Beppe Grillo, Edizioni Libreria Cortina Torino, ristampa corretta 2005.

Mettere da parte un gruzzoletto di soldi non è cosa facile, oggi ancora meno di qualche anno fa. Su quei bigliettini di carta, spesso semplicemente bit di computer presso le banche, ognuno ci fa i suoi sogni, la sua tranquillità: la macchina, la vacanza, l'università per i figli, la sicurezza "perché non si può mai sapere!". Mettere da parte i soldi è un'impresa difficile, ma cercare di non farseli 'fregare' è ancora più difficile. I sogni che noi facciamo sui nostri soldi, purtroppo, li fanno anche gli altri, sempre sui nostri soldi. I ladri? gli scippatori? i truffatori? le associazioni criminali? l'inflazione? Non solo. Beppe Scienza svela, per chi non se ne fosse ancora accorto, un mondo di veri e propri truffatori mascherati da consulenti finanziari e, purtroppo, accreditati giornalisti economici di ancor più accreditate testate giornalistiche. L'autore denuncia, citando meticolosamente giornali, giornalisti e articoli specifici, questo complotto ai danni del risparmiatore. Sostanzialmente la truffa consiste nel convincere il risparmiatore che le banche, con i loro prodotti di anno in anno sempre più ricchi e complessi (fondi comuni, gestioni patrimoniali, polizze vita), sono in grado di fare di gran lunga di meglio del risparmiatore 'fai da te'. Ma chi misura quanto i gestori di professione sanno fare di meglio rispetto a chi acquista direttamente semplici BTP, CCT; BOT? I primi fondi comuni in Italia nascono nel 1984. Nello stesso periodo le compagnie di assicurazione riprendono a collocare le polizze vita. Era in grado la stampa italiana di informare correttamente i lettori di ciò che stava succedendo? E' questa la domanda chiave intorno alla quale ruota il libro del prof. Scienza. La risposta è no e l'autore la motiva nelle sue 190 pagine ben argomentate. Cosa avrebbero dovuto fare i giornali italiani? Testate come il settimanale tedesco Der Spiegel assunsero economisti, matematici e attuari in grado di seguire i nuovi prodotti finanziari e assicurativi per esprimere pareri e confronti autonomi. La stampa italiana, invece, fin da subito, pubblicò inserti e speciali sui fondi di investimento che avevano, e hanno tutt'ora, una pecca ontologica di base: essi erano curati non da giornalisti indipendenti ma dagli stessi gestori di fondi comuni, per esempio Banca Fideuram. La strada più comoda per il giornalismo economico italiano è stata sempre quella di andare a prendere grafici, tabelle e analisi da chi li aveva già realizzati, cioè dagli opuscoli degli stessi venditori. Per anni, giornali come Il Sole 24 Ore, il Mondo, Milano Finanza e altre si sono avvalsi del supporto del gruppo Fideuram. "E' come se Quattroruote - osserva il prof. Scienza - invece di procedere a prove e misurazioni autonome, ricorresse ai dati forniti neppure dalla FIAT, ma addirittura dai suoi concessionari." Non avrebbero dovuto i giornalisti economici rifare i conti autonomamente per calcolare rendite, capitali, rischio, sulla base delle clausole contrattuali? Purtroppo, spiega l'autore, i direttori di giornali, tranne rarissime eccezioni, usano ogni precauzione per non creare dispiaceri a chi compra spazi pubblicitari sulle loro testate, che purtroppo sono sempre le stesse banche e assicurazioni. In altre parole è un circolo vizioso: banche e assicurazioni pagano e sostengono i giornali attraverso la pubblicità dei loro prodotti, quegli stessi giornali che dovrebbero andare a spulciare i contratti, le rendite reali e informare correttamente i lettori.

Eppure, anche i lettori finanziano i giornali comprandoli nelle edicole, ma in Italia c'è l'idea che gli ultimi della catena siano polli da spennare. Milano Finanza rende pubblica una vicenda emblematica: nel 1997 l'Istituto San Paolo di Torino revocò la pubblicità a Milano Finanza e Italia Oggi, perché era stato pubblicato un articolo in cui erano state riportate le "critiche mosse dal vicepresidente Ottolenghi al prescindete Mandano durante l'ultimo consiglio d'amministrazione". Chi vuole informarsi su grafici, tabelle, analisi, rendimenti e confronti onesti di fondi comuni, polizze vita, gestioni patrimoniali contro BTP, CCT, BOT, realizzati da un giornalista indipendente, matematico presso l'Università di Torino, può leggersi "Il risparmio tradito".

Antonio Bernardo



Brian Greene, *L'universo elegante – Superstringhe, dimensioni nascoste e la ricerca della teoria ultima,* Einaudi, 2000

Com'è fatto l'universo in cui viviamo? Da secoli scienziati e filosofi cercano di rispondere a questa domanda, fornendo risposte sempre nuove e inaspettate. Le più recenti teorie fisiche arrivano addirittura a ipotizzare che il nostro universo abbia ben undici dimensioni (più quella temporale) e che i costituenti ultimi della materia che ci circonda siano delle minuscole stringhe chiuse che vibrano ad una velocità inimmaginabile. Questo è lo sconvolgente scenario ipotizzato dalla teoria delle stringhe, che costituisce oggi una delle aree di ricerca più gettonate della fisica teorica, essendo praticamente l'unica candidata a poter un giorno divenire una "teoria del tutto". Il dilemma che affligge i fisici da oltre un secolo consiste infatti nel tentativo, finora vano, di coniugare la teoria della relatività generale di Einstein, che funziona brillantemente alle grandi scale interplanetarie, con la meccanica quantistica, che, nonostante le sue a dir poco bizzarre proprietà, è in grado di fornire predizioni incredibilmente precise per i fenomeni tipici delle piccole scale particellari. Nel momento in cui si cerca di far convergere le due teorie, cosa che diventa fondamentale se si vuole studiare l'istante di inizio dell'universo (il cosiddetto Big-Bang), le due teorie non ne vogliono proprio sapere di accordarsi, fornendo risultati assurdi, come valori di probabilità di certi eventi maggiori di uno (ovvero più probabili della certezza). E' evidente che c'è ancora molta strada da fare prima di riuscire a spiegare davvero tutto (ammesso che lo si possa fare) sul nostro universo. La teoria delle stringhe, che nella sua versione più raffinata viene anche chiamata delle superstringhe, potrebbe forse un giorno arrivare a risolvere il problema, unificando definitivamente il nostro modo di concepire l'universo, la materia e le forze che agiscono su di essa. In questo splendido libro Greene riesce a illustrare i segreti di questo ipotetico e quanto mai misterioso universo di stringhe trascinando il lettore in un'avventura che potrebbe a pieno titolo rivaleggiare con i più classici best seller d'azione. Dapprima vengono presentate in un excursus storico le due principali teorie delineate nel corso del XX secolo, cioè la teoria della relatività e la meccanica quantistica. Quindi il lettore viene mano a mano condotto verso l'universo delle stringhe, in cui particelle e forze appaiono in un modo completamente nuovo. Nonostante la matematica della teoria delle stringhe sia terribilmente complessa, lo spirito divulgativo di Greene non fa mai calare l'attenzione, che invece viene carpita dall'aggiunta in ogni capitolo di nuovi concetti sempre più sconvolgenti. L'unica pecca del libro, se proprio vogliamo trovarne una, sta nel finale, che purtroppo per noi non è ancora stato scritto, ma di cui certo non possiamo incolpare l'autore…

Flavio Cimolin

AA. VV., *La matematica nel mondo della natura*, a cura di L. Capocaccia Orsini e L. Pusillo, Erga edizioni, 2004

Il libro raccoglie i testi di un ciclo di conferenze organizzato dagli Amici dell'Acquario, in collaborazione con l'Acquario stesso e con il "Colloquium Mathematicum" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. Il tema comune delle conferenze, tenute non solo da matematici ma anche da fisici e biologi, è stato quello di mostrare "come le leggi matematiche trovino espressione anche nella bellezza del mondo che ci circonda". Si tratta di conferenze distinte, nelle quali ciascun relatore ha cercato di esporre una sfaccettatura e un proprio punto di vista su un tema che riguarda non solo la filosofia della scienza ma anche le applicazione della matematica. Claudio Bartocci (fisico matematico) cerca di rispondere alla domanda: il mondo è matematico? La matematica - concludere il relatore - ci dice qualcosa sui fenomeni naturali ma i modelli della matematica funzionano solo sulla base di analogie che non ambiscono a cogliere l'essenza ultima dei fenomeni. La descrizione di un fenomeno attraverso un modello matematico non è unica, in linea di principio sono sempre possibili altre descrizioni non meno efficaci. Lilia Capoccia Orsini e Fioravante Patrone, una naturalista e un matematico esperto di Teoria dei Giochi, discutono sul gioco della vita: la lotta tra preda e predatore. Patrone indica quali sono i comportamenti e i delicati equilibri tra preda e predatore che possono essere oggetto di studio della Teoria dei Giochi, una disciplina matematica giovane che si occupa di quelle situazioni in cui intervengono decisori razionali ed intelligenti, le cui azioni determinano l'esito della interazione. Le strategie dei predatori e, per simmetria, quelle delle prede rientrano a pieno titolo in questa disciplina matematica. Così come rientrano i processi di apprendimento: chi caccia, ma anche chi è cacciato, deve 'apprendere' dai tentativi precedenti, sia da quelli che hanno avuto successo sia da quelli che hanno avuto esito negativo. Allo stesso modo la TdG può fornire modelli matematici su comportamenti come i bluff e le minacce. Ettore Carletti (geometra) e Roberta Parodi (biologa) discutono dei modelli matematici che derivano dalla teoria dei frattali. Giulio Manuzio (fisico) interviene sui vincoli fisici degli essere viventi: "la struttura ossea di tutti gli animali superiori - sostiene Manuzio - è all'incirca la stessa e dunque la regola può essere espressa matematicamente affermando che deve esistere un rapporto costante tra il peso di un animale di forma data e la sezione delle sue zampe." Tomaso Poggio (fisico) presenta alcuni modelli matematici sulla teoria dell'apprendimento. Gian Italo Bischi (matematico) discute il paradosso del pescatore e più in generale del problema dello sfruttamento delle risorse rinnovabili.

a.b.

AA. VV., *Tutti i numeri sono uguali a cinque*, a cura di S. Sandrelli, D. Gouthier, R. Ghattas, Springer, 2007

L'intersezione tra matematici e letterati si sa è pressoché nulla. In questa raccolta antologica sono presenti 21 racconti di altrettanti autori: matematici, fisici, filosofi, storici, medici. In tutti i racconti è presente la matematica: come metodo, come strumento, come stile narrativo, come ritmo del racconto, in generale come modo di relazionarsi con le cose e le persone. I curatori di questo libro decisamente 'sperimentale' hanno cercato di realizzare e mostrare un tentativo di "osservare e restituire l'immagine del mondo attraverso gli occhi della scienza". Qualcuno di questi racconti è una biografia romanzata di noti scienziati, raccontata magari con il ritmo del giallo. Qualcun altro è un racconto fantastico su spazi a più dimensioni nei quali oggetti e persone possono andare a nascondersi o sparire. C'è un racconto fantascientifico su una top model che invecchiata riesce a ritornare giovane. La storia di una ragazza che al vernissage di una mostra incontra una vecchia amica ricercatrice dell'Archivio della città, due mesi dopo riceve un grosso plico con tanti documenti del nonno su una macchina in grado di realizzare il *perpetuum mobile*. E tante altre storie. In ordine rigorosamente alfabetico, gli autori sono: Marco Abate, Angelo Adamo, Piero Bianucci, Luciano Celi, Giangiacomo Gandolfi, Robert Ghattas, Daniele Gouthier, Elena Ioli, Giuseppe O. Longo, Paolo Magionami, Francesca E. Magni, Vittorio Marchis, Jennifer Palumbo, Guido Pegna, Tullio Regge, Giovanni Sabato, Stefano Sandrelli, Francesco Maria Scarpa, Luca Sciortino, Andrea Sgarro, Renzo Tomatis. L'esperienza di "Tutti i numeri sono uguali a cinque" continua in un blog TINSUAC http://tinsuac.wordpress.com/.

a.b.

Enrico Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Istituti Editoriali e Poligrafici, 2007

Enrico Giusti è un noto studioso di Analisi matematica, ha ottenuto nel 1968 il premio Pomini e nel 1978 il premio Caccioppoli. Nel 1999 ha ricevuto la medaglia dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL per i suoi studi in Matematica e in Storia della Matematica. I suoi interessi scientifici hanno riguardato prima le equazioni alle derivate parziali e il calcolo delle variazioni, poi la storia della matematica e più di recente la divulgazione della matematica. Ricordiamo il libro del 2004 "La matematica in cucina", edito da Bollati Boringheri. Nel 1999 ha fondato "Il Giardino di Archimede" (http://web.math.unifi.it/archimede/archimede), il primo museo dedicato completamente alla matematica. La "Piccola storia del calcolo infinitesimale" è un volumetto di 100 pagine nel quale il prof. Giusti traccia la storia della nascita e dello sviluppo del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento. L'Analisi matematica si è sviluppata nel corso dei secoli attorno a due grandi filoni: da una parte il problema delle aree delle figure piane e dei volumi dei solidi, dall'altra il problema delle tangenti a una curva. Il primo nasce con Archimede, viene ripreso a distanza di un millennio da Bonaventura Cavalieri ed Evangelista Torricelli per concludersi con la teoria della misura. Il problema delle tangenti nasce con Apollonio nello studio delle sezioni coniche, viene ripreso da Descartes e Fermat, confluisce nel "Calcolo" di Newton e Leibniz, alla fine del Seicento, e si unifica con il problema delle aree in un unico filone di ricerca: il calcolo infinitesimale. Uno studio storico rigoroso e ben documentato frutto dei tantissimi studi del prof. Giusti.

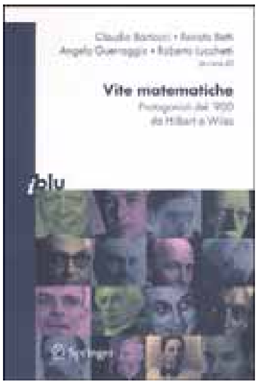
a. b.

Tamás Varga, *Fondamenti di logica per insegnanti*, Bollati Boringhieri, 2005

A distanza di trent'anni Bollati Boringhieri ripubblica un libro fondamentale per la didattica della logica e della matematica in generale. Come osserva Corrado Mangione (professore di Storia della logica presso l'Università di Milano) nella prefazione a questa nuova edizione, quando il libro venne pubblicato per la prima volta in Italia nel 1973 l'insegnamento della logica era del tutto assente nella scuola primaria e secondaria italiana. Cominciava ad 'attecchire' nelle università e ciò creava una frattura tra l'insegnamento nella scuola superiore e quello nell'università. Dal 1979 nella scuola media e dal 1985 nella scuola elementare è stato ufficialmente riconosciuto il valore formativo dello studio della logica matematica, in quanto nel corso degli anni è stato messo in evidenza il ruolo che la logica matematica gioca nel rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico della

matematica. Nel 1995 - ricorda lo stesso Mangione - l'Association of Symbolic Logic nelle sue Linee guida per la didattica della logica afferma che "chiunque dev'essere in grado di individuare, a un certo livello intuitivo, la differenza tra un'argomentazione valida e una non valida, di costruire argomentazioni semplici e di localizzare eventuali errori logici." La logica matematica, quindi, va studiata non solo come fatto storico della cultura filosofica e matematica, come avviene per la logica Aristotelica, ma per la sua funzione formativa. Nella scuola italiana, lo studio della logica è andato a sovrapporsi e talvolta ad essere assorbito dalla studio della teoria degli insiemi. Questo connubio ha fatto seguire alla logica matematica le fortune alterne della cosiddetta insiemistica. La ristampa di questo libro può far luce su questo rapporto e riportare l'attenzione di insegnanti e formatori SISS sul ruolo della logica matematica nella didattica. A titolo di esempio della metodologia di Varga, impostata più sull'aspetto di pratica didattica che di discussione teorica, riporto le prime frasi del libro: " -Se io corressi i cento metri in meno di 10,0 secondi - diceva Giovanni - sarei scelto per le Olimpiadi. Ma io purtroppo non corro i cento metri in meno di 10,0 secondi; di conseguenza non sarò scelto per le Olimpiadi. - Il suo ragionamento è giusto o sbagliato?" La lettura attenta del libro di Varga è consigliata a docenti e specializzandi SISS ma anche a studenti che hanno voglia di apprendere qualcosa di più. E' possibile leggere il Capitolo primo di questo libro sul sito del progetto Polimath:
http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/info/CapitoloPrimo/VargaFondamentiLogica/VargaFondamentiLogica.htm

a.b.



AA. VV., *Vite matematiche. Protagonisti del '900 da Hilbert a Wiles*, a cura di C. Bartocci, R. Betti, A. Guerraggio, R. Lucchetti, Springer, 2007, pp. 335

Si può raccontare la storia della matematica, come si può raccontare la storia dei matematici. Alcuni preferiscono la prima, ed ecco che la matematica si presenta come un *continuum* che si evolve nel tempo, una progressiva acquisizione di conoscenza. Altri preferiscono la seconda, ed emergono gli uomini con le loro storie, le loro idee, i loro punti di vista sulla matematica. Il quadro che se ne ricava è di un percorso tormentato, segmentato, di una matematica che si mostra a fatica e che si lascia guardare da diverse posizioni, diversi punti di vista. Se a questo si aggiunge che ogni personaggio è raccontato da autori diversi, il quadro che ne emerge è ancora più variegato e poliedrico perché, si sa, chi racconta una storia lascia una sua impronta sul racconto. Il Novecento comincia per i matematici con i famosi problemi che Hilbert presentava al Congresso Internazionale di Parigi e così infatti comincia il libro. Come ogni selezione di candidati, questa raccolta di vite matematiche ha messo in evidenza alcuni autori e ne ha tralasciati altri. Sono stati preferiti quei matematici che hanno sviluppato interessi culturali ampi, che hanno difeso con passione l'importanza delle loro ricerche, sensibili alla bellezza, attenti ai problemi sociali e politici del loro tempo, che hanno lasciato una traccia nella vita culturale e sociale del '900 e che pertanto sono divenuti punti di riferimento non solo per la comunità dei matematici. In questa raccolta di biografie, infatti, i curatori hanno cercato di documentare la centralità della matematica nella cultura, non solo quella scientifica, del nostro tempo. I matematici presentati: Hilbert, Volterra, Enriques, Severi, Levi-Civita, Russell, Hardy, E. Noether, Dirac, von Neumann, Goedel, Turing, Caccioppoli, de Finetti, Kolmogorov, Bourbaki, Nash, De Giorgi, Schwartz, Thom, Grothendieck, Rota, Smale, Atiyah, Arnold, Bombieri, Gardner, Lawvere, Wiles. Qua e là nel libro scandiscono il ritmo della lettura alcune brevi intrusioni di letterati e artisti sulla matematica: Verlaine, Sinisgalli, Enzensberger, Queneau, Borges, Le Corbusier. Il libro riprende, con modifiche, ampliamenti e significative aggiunte, il numero 50-51 di Lettera Matematica Pristem.

a. b.

77. Giochi matematici

La ricetta dello chef

di Luca Barletta

Uno chef sta preparando un dolce: deve versare nell'impasto 1/4 della quantità di latte contenuta in una ciotola che può essere descritta dal volume

$$\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 25 \\ -4 < z < -2 \end{cases}$$

La ciotola è inizialmente riempita fino all'orlo. Con quale angolo egli dovrà inclinare la ciotola per versare la giusta quantità di latte nell'impasto?

Inviare la soluzione a luca.barletta@teledue.it; come oggetto della mail scrivere "GIOCHI MATEMATICI" *le risposte ritenute più interessanti saranno pubblicate sul prossimo numero della rivista.*

. . . .

Soluzione del gioco del numero precedente: "Copia e incolla"

Con l'operazione A si può raddoppiare il numero di righe finora scritte, impiegando due secondi. Con l'operazione B si può ripetere ancora una volta il guadagno precedente. Il modo migliore di combinarle è di alternare una volta l'operazione A e una volta l'operazione B, con il risultato di riuscire a "triplicare in tre secondi"!

Supponiamo ad esempio di avere 30 secondi a disposizione:

operaz.		*parole*	*sec.*
00	.	1	0
01	A	2	2
02	B	3	3
03	A	6	5
04	B	9	6
05	A	18	8
06	B	27	9
07	A	54	11
08	B	81	12
09	A	162	14
10	B	243	15
11	A	486	17
12	B	729	18
13	A	1458	20
14	B	2187	21
15	A	4374	23
16	B	6561	24
17	A	13122	26
18	B	19683	27
19	A	39366	29
20	B	59049	30

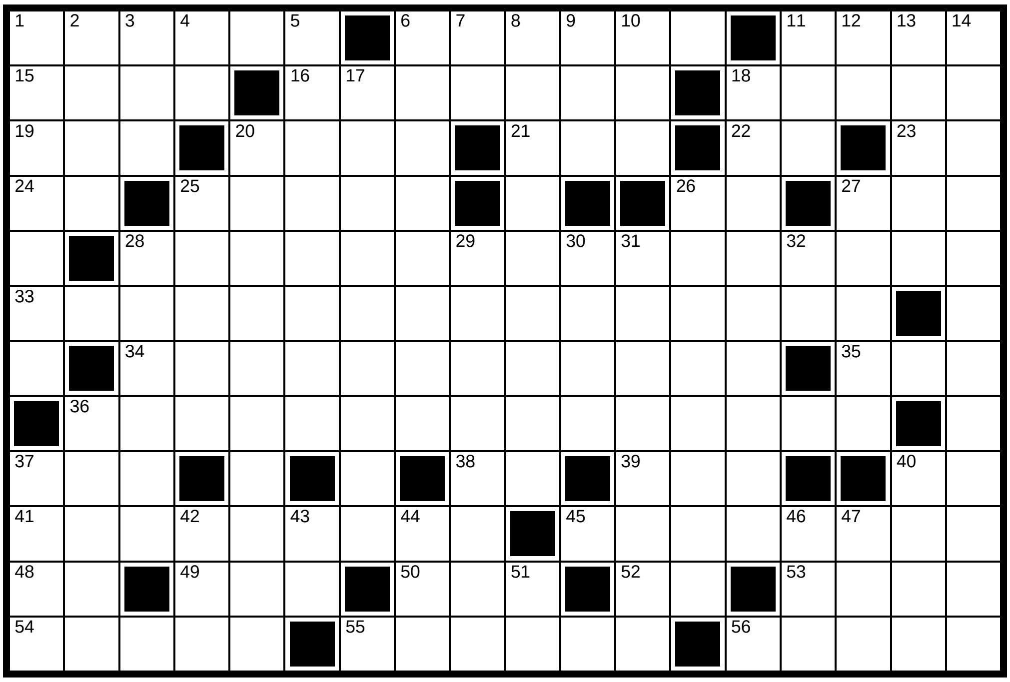
Quindi 310 parole dopo 10 triplicazioni

Se invece avessimo usato solo l'operazione A avremmo ottenuto 215=32768 parole.

F.Cimolin

Cruciverba matematico

di Nicola Vitale



ORIZZONTALI

1. Possono essere sistematici o casuali. - **6.** Un sale di sodio o potassio - **11.** Mettono in moto la calcolatrice. - **15.** Il matematico che scrisse "The Logic of Change". **16.** Disincantate, disilluse. **18.** Il Kurt dei due teoremi di incompletezza. - **19.** L'onda negli stadi - **20.** Rete a Wimbledon. - **21.** Il nome del violinista Ughi. - **22.** Youichi, famoso pilota giapponese. - **23.** Simbolo del nichel. - **24.** Numero di Lewis. - **25.** Billy, il batterista dei Television. - **26.** Saga senza vocali. - **27.** Una famiglia di microcontrollori. - **28.** Importante proposizione sugli zeri di una funzione. - **33.** La regola per il calcolo del suo volume fu enunciata per primo da Leonardo Pisano. - **34.** Piano perpendicolare a una superficie. - **35.** Lo pseudonimo di Sergio Tofano. - **36.** Una nota teoria di dinamica terrestre. - **37.** Il cantante Filippo Neviani. - **38.** Circuito basato su una resitenza e un condensatore. - **39.** 998 nell'antica Roma. - **40.** Una proposizione articolata. - **41.** Così sono detti i numeri $2n^2 - n$. - **45.** Si occupa di zootecnica. - **48.** Reti senza pari. - **49.** L'unità aritmetico-logica nei computer. - **50.** Soffoca in estate. - **52.** Il dominio internet degli Emirati Arabi. - **53.** Il paradiso perduto. - **54.** Insieme ordinato per il quale tra due elementi distinti qualsiasi sono compresi infiniti altri elementi. - **55.** Norbert, padre della cibernetica. - **56.** La città di Platone.

VERTICALI

1. Il luogo geometrico dei centri di curvatura di una curva piana. - **2.** Un tipo di interruttore elettrico. - **3.** L'acido ribonucleico. - **4.** Contrario di off. - **5.** Che è di tempo uguale. - **6.** Piccoli insaccati. - **7.** Simbolo dell'argento. - **8.** Uno dei fondatori della fisica quantistica. - **9.** Ottobre in breve. - **10.** Piccolo punto nero sulla pelle. - **11.** Non ora. - **12.** Famoso sviluppatore di videogiochi. - **13.** Nicolaj, rivoluzionario russo. - **14.** E' il prodotto commutabile di una rotazione per una traslazione parallela all'asse di rotazione. - **17.** Una regione balcanica. - **18.** Il nome di Marconi. - **20.** Diverte un bambino. - **25.** Piccolo porto irlandese. - **26.** Comune francese nel Maine-et-Loire. - **27.** Tutto il mondo lo è... - **28.** La capitale del Kansas. - **29.** Scritture non canoniche. - **30.** Nome di donna. - **31.** Un famoso film di Bollywood. - **32.** Targa automobilistica di Zara. - **36.** Possono essere pensanti. - **37.** Un secchione inglese. - **40.** Così sia. - **42.** Un aeriforme non condensabile a temperatura ambiente. - **43.** La vecchia sigla di Nuoro. - **44.** Poesie medioevali. - **46.** La rete nel tennis. - **47.** Ordinary differential equation. - **51.** Una divinità della mitologia sumera.

Rivista di matematica per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito *www.matematicamente.it*

Anno 2 Numero 5 - Gennaio 2008
Registrazione n. 953 Tribunale di Lecce
Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it