

• Numero 14 – Gennaio 2011 •



The 3 Amigos
by jerry

<http://www.flickr.com/photos/way2go/5156231198>

POSTULATI DI EUCLIDE – MASSA DI GIOVE – PUZZLE – PROFILO OTTIMALE
– OTTICA CON GEOGEBRA – PROJECT MANAGEMENT- LIBRI DA LEGGERE

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

Hanno collaborato a questo numero

Stefano Borgogni, Roberto Chiappi, Cosimo De Mitri, Domenico Lenzi, Pietro Romano, Marco Ruffinoni, Carlo Sintini, Gabriele Taddei, Riccardo Travaglini.

Sommario

144. Sull'uguaglianza degli angoli retti, un postulato euclideo molto discusso	5
Cosimo De Mitri e Domenico Lenzi	
145. La massa di Giove ottenuta da otto foto relative alla posizione dei satelliti medicei	11
Carlo Sintini	
146. I "Puzzle" polimini ante litteram	24
Stefano Borgogni	
147. Il problema del profilo ottimale	28
Gabriele Taddei	
148. Ottica geometrica e fenomeni ondulatori con Geogebra	35
Pietro Romano	
149. Tecniche di project management, problem solving e decision making: problemi e soluzioni	49
Roberto Chiappi	
150. Lo scaffale dei libri:	55
<i>La singolarità è vicina</i> di Ray Kurzweil	
<i>Nuova fisica per tutti</i> di Carlos Fiolhais	

Editoriale

In questo numero, Cosimo De Mitri e Domenico Lenzi tornano a discutere dei postulati euclidei, in particolare del postulato sull'uguaglianza degli angoli retti. Carlo Sintini ci propone una coinvolgente esperienza didattica: come calcolare la massa di Giove a partire da una serie di otto foto di Giove e dei suoi quattro satelliti medicei. Stefano Borgogni presenta i "Puzzle", ideati dal padre dell'autore molto prima che Martin Gardner pubblicasse i suoi articoli sui polimini. Gabriele Taddei affronta un problema classico sul profilo che deve avere un corpo per rendere minima la resistenza quando si muove in un fluido. Il lavoro di Pietro Romano consiste in una serie di attività didattiche da fare con il software di geometria dinamica Geogebra, software gratuito che si presta non solo per l'insegnamento della geometria ma anche della fisica e in particolare dell'ottica. In questo lavoro si fa largo uso degli *slider* che solitamente sono poco utilizzati e poco conosciuti. Roberto Chiappi presenta una sintesi dei suoi lunghi studi sul *problem solving*, finalizzati al miglioramento dei processi di *project management* e *decision making*. Per la sezione Lo scaffale dei libri Riccardo Travaglini ci presenta il libro "La Singolarità e vicina" di Ray Kurzweil e Marco Ruffinoni il libro "Nuova fisica per tutti" di Carlos Fiolhais.

Antonio Bernardo

144. Sull'uguaglianza degli angoli retti un postulato euclideo molto discusso

Cosimo De Mitri, Domenico Lenzi

cosimo.demitri@unisalento.it, domenico.lenzi@unisalento.it

[Dip. Mat. Uni. Salento, Lecce]

Abstract

Over the centuries, many discussions have been raised on important aspects of the Euclidean thought. Proclus himself, one of the most important early commentators of Euclid's *Elements*, did not fail to raise criticism, sometimes superfluous, but sometimes perhaps justified, as in the case with which we want to deal.

Among the issues that have raised the greatest attention by the commentators of the Euclidean work with reference to the postulates, perhaps, after the one on parallels (the fifth), one of the most discussed is the postulate of the equality of the right angles, considered superfluous by many scholars. In this paper we will try to shed light on this point.

Sunto

Nel corso dei secoli, molteplici sono state le discussioni sollevate su aspetti importanti del pensiero euclideo. Lo stesso Proclo, che degli *Elementi* di Euclide è stato uno dei più importanti diffusori, non ha mancato di rivolgere al grande Maestro diverse critiche, a volte superflue, ma a volte comprensibili, come nel caso di cui ci vogliamo occupare. Tra gli enunciati che hanno sollevato le maggiori attenzioni da parte degli esegeti dell'opera euclidea, forse, a livello di postulati, dopo quello sulle parallele (il quinto), uno dei più discussi è il postulato sull'eguaglianza degli angoli retti, considerato superfluo da parte di molti studiosi. Noi qui cercheremo di far chiarezza sull'argomento.

1. Premessa

Oggidi si potrebbe considerare il fatto che un angolo retto, come conseguenza della definizione che ne dà Euclide (si veda [E], Definizione X, p. 67), è la metà di un angolo piatto. Perciò – considerati ovviamente uguali gli angoli piatti, come normalmente si fa – per la Nozione Comune VI (si veda [E], p. 75) gli angoli retti sarebbero *uguali tra loro*; come richiede Euclide, appunto, nel suo Postulato IV (si veda [E], p. 71)¹.

È pur vero che la Nozione Comune VI dice che le due *metà di una stessa cosa sono uguali fra loro*. Inoltre non tutti sono concordi nell'attribuire esplicitamente ad Euclide questa Nozione, come anche la IV e la V, anche se egli negli *Elementi* le adopera. Tuttavia,

¹A proposito della derivazione dalle Nozioni Comuni dell'eguaglianza tra angoli retti, si rimanda – come ribadiremo successivamente – anche al *Commento* di Proclo del I libro degli *Elementi* euclidei.

leggendo tra le righe degli Elementi, si può dire che Euclide consideri uguali le metà di cose uguali, anche quando non si tratta della *stessa cosa*.

Ma intanto tutti questi ragionamenti non si adattano al solco tracciato da Euclide, il quale, nella sua Definizione VIII, per motivi che non ci è dato di sapere, esclude espressamente angoli determinati da segmenti che *giacciono in linea retta*.

Che il maestro alessandrino abbia volutamente omesso di considerare gli angoli piatti – che corrisponderebbero a un’inclinazione “sui generis” tra segmenti – proprio perché voleva costringerci ad accettare il postulato dell’angolo retto?

Richard Trudeau, a pag. 55 di [I], a proposito della definizione euclidea di angolo retto scrive: [...] *Sebbene la definizione X affermi che gli angoli retti si presentano a coppie [di angoli adiacenti; n.d.r.], ciò non ci costringe a credere che due angoli retti situati in una parte del piano siano uguali ad altri due posti altrove [...].*

Certo, Trudeau è portato a pensare che Euclide non escludesse situazioni in cui, in alcune zone, il piano considerato da lui potesse essere deformato. Tuttavia, forse il discorso di Euclide era meno sottile. Probabilmente, egli voleva escludere ogni dubbio di tipo numerico, dovuto al fatto che a volte a una stessa grandezza si attribuisce un valore numerico diverso in conseguenza dell’unità di misura adoperata. In definitiva, forse Euclide voleva dire che un angolo retto “costruito” ad Alessandria doveva avere lo stesso valore di un angolo retto “costruito” ad Atene; così come una pecora di 50 chili ad Alessandria doveva avere lo stesso valore commerciale di una pecora dello stesso peso ad Atene. Che Euclide abbia voluto mettere le basi per un sistema metrico universale per gli angoli? Insomma, come misurare gli angoli?

Egli potrebbe aver voluto dire: “intanto diamo la stessa misura a tutti gli angoli retti”. Infatti, sono diversi i casi in cui Euclide usa l’angolo retto come unità di misura. Per esempio, nel Libro I degli *Elementi* l’angolo retto come unità di misura compare già nel Postulato V (si veda [E], p. 71): *E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti [...].* E più in là, sempre nel Libro I degli *Elementi*, si possono vedere le Proposizioni 13 (p. 96), 14 (p. 97), 17 (p. 102), 28 (p. 121), 29 (p. 122), ecc.

Ricordiamo anche che Proclo nel suo Commento al I Libro degli *Elementi* afferma: *L’uguaglianza degli angoli retti si presenta sotto l’aspetto delle nozioni comuni [...]* (cf. [P], pp. 161-162). Anche se il noto commentatore di Euclide non precisa in che modo intenda ricondurre tale uguaglianza alle Nozioni Comuni. Ma poco dopo egli prosegue dicendo: [...] *E se si deve anche aggiungerne una dimostrazione lineare, siano gli angoli retti ABC, DEF: dico che sono eguali. Che se non fossero, uno dei due sarebbe maggiore.* Quindi, proseguendo, Proclo giunge a una dimostrazione per assurdo dell’uguaglianza dei due angoli retti esaminati. E aggiunge: *Questo del resto è stato dimostrato anche da altri commentatori, e non richiedeva molta applicazione [...].*

In verità Proclo svolge la sua dimostrazione ricorrendo a un tipo di *trasporto* che sembra derivare da considerazioni di carattere fisico. Infatti, egli sovrappone il segmento *DE* (lato di uno degli angoli retti presi in considerazione) a un altro segmento *AB* (lato dell’altro angolo retto considerato). Cosa questa che Euclide, però, evita di fare, forse giudicandola un intervento indebito; a ragione, a nostro avviso, dato che quel trasporto introduce un aspetto materiale non del tutto giustificato.

A dire il vero, Euclide già nella dimostrazione della Proposizione 4 degli *Elementi* (si veda [E], p. 81; si tratta di quella che dà il cosiddetto primo criterio di uguaglianza fra triangoli; in simboli, **Cr1**) usa lo *strumento* della sovrapposizione. Tuttavia, in seguito eviterà di fare lo stesso *peccato*.

Comunque, come vedremo nel paragrafo seguente, Euclide avrebbe potuto superare la sua pecca assumendo **Cr1** come postulato al posto di quello sugli angoli retti.

D'altro canto, Hilbert nei suoi *Grundlagen* parla del seguente semplice teorema (si tratta del Teorema 21 sull'uguaglianza degli angoli retti, cf. [H], p. 24; n. d. r.), che Euclide – a mio giudizio a torto (dice Hilbert) – ha messo fra gli assiomi.

Tuttavia va detto che il grande studioso tedesco si dota di un sistema di assiomi che consentono procedimenti – i trasporti di segmenti e di angoli – che richiamano i trasporti di tipo materiale; però senza che gli aspetti concreti vadano a inquinare la sua teoria. Quindi la critica di Hilbert nei riguardi dello studioso alessandrino sarebbe dovuta essere supportata da una dimostrazione dell'uguaglianza degli angoli retti all'interno dell'assiomatica euclidea privata del IV postulato. Cosa che Hilbert omette di fare, forse perché ciò avrebbe richiesto degli aggiustamenti non indifferenti. Noi – grazie ad alcune precisazioni che faremo alla fine del paragrafo, pur senza entrare in particolari abbastanza ovvi e quindi superflui – cercheremo di porre rimedio a ciò nel paragrafo 3.

Intanto, come si è visto, già nel Postulato V degli *Elementi* si intravede il fondamentale concetto di semipiano: [...] *gli angoli interni e dalla stessa parte* [...] (cf. [DML]). Inoltre, la nozione di *lunghezza* per i segmenti dota gli stessi di una relazione di equivalenza, che Euclide chiama *uguaglianza*. E si ha un'equivalenza/uguaglianza anche per gli angoli, basata su una non meglio precisata *inclinazione*, comprensibilissima da un punto di vista intuitivo; onde, per considerare uguali due angoli, l'inclinazione tra i due lati dell'uno dovrà coincidere con l'inclinazione tra i due lati dell'altro.

Ora tutti avvertiamo gli aspetti traballanti dell'impostazione euclidea in fatto di uguaglianza tra lati da una parte e tra angoli dall'altra. Ma forse a quei tempi sarebbe stato difficile avere qualcosa di più rigoroso; anche se dopo più di due millenni i *Grundlagen* di Hilbert ci avrebbero fatto capire che ciò non era impossibile. Pur tuttavia – nonostante il mondo ellenistico avesse imboccato con la logica Aristotelica una strada significativa verso le semplificazioni e le comprensioni che l'*astratto* e il *formale* erano in grado di aprire alla mente umana – per la Geometria, che pure era stata oggetto di speculazione da parte di filosofi insigni (per esempio, Platone), i tempi non erano ancora maturi per consentire a questa disciplina di compiere quel salto di qualità che forse fu possibile solo grazie alla scoperta e all'assimilazione delle *geometrie non euclidee*.

2. Verso una dimostrazione coerente con l'impostazione euclidea

Va osservato che la dimostrazione che Euclide fa di **Cr1** ci dà come immediata conseguenza – il che, però, egli manca di rilevare – il fatto che due angoli adiacenti ad angoli uguali sono uguali tra loro (si tratta del Teorema 14 dei *Grundlagen* di Hilbert; si veda [H], p. 17). Ciò sulla base del seguente principio, che Euclide adopera nella dimostrazione di **Cr1**. Vale a dire: sono da considerare uguali due angoli che vadano a sovrapporsi in conseguenza del trasporto simile a quello che Euclide fa per dimostrare **Cr1**. In vero nella dimostrazione della Proposizione 4, a p. 84 di [E], leggiamo (si veda Fig.1) ²: [...] *se il triangolo ABC è sovrapposto al triangolo DEF ed il punto A viene a coincidere col punto D e la retta (cioè, il segmento; n.d.r.) AB con la retta DE, anche il punto B verrà a coincidere col punto E essendo AB uguale a DE; coincidendo dunque AB con DE, anche la retta AC coinciderà con la retta DF essendo l'angolo BAC uguale all'angolo EDF* [...].

² Fig. 1 riproduce – con qualche particolare in più – la figura che a p. 85 di [E] illustra la dimostrazione del I criterio di uguaglianza per i triangoli.

Il che consente di concludere – come si diceva – che un qualsiasi prolungamento del lato CA dalla parte di A va automaticamente a sovrapporsi a un opportuno prolungamento del segmento FD dalla parte di D ; perciò l'angolo β (adiacente all'angolo BAC) si sovrappone all'angolo γ (adiacente all'angolo EDF). Onde tale sovrapposizione assicura l'uguaglianza di β con γ .

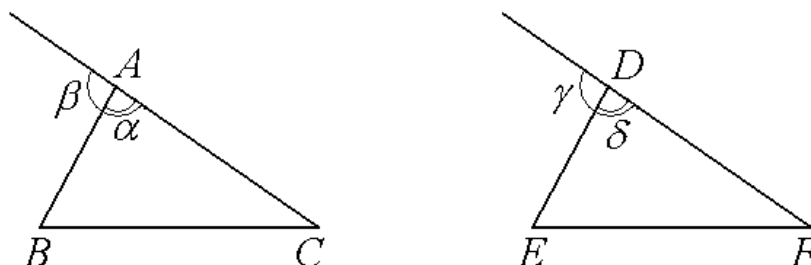


fig. 1

Comunque va rilevato che – come diversi studiosi hanno riconosciuto – assumendo **Cr1** come ulteriore postulato, gli *Elementi* avrebbero assunto un assetto più rigoroso. Ma in tal caso avrebbe perso la sua giustificazione anche la considerazione da noi svolta precedentemente sugli angoli adiacenti, fondata non sull'enunciato bensì su alcuni passi della dimostrazione. Però, in alternativa – come vedremo nel paragrafo 3 – è possibile dimostrare il teorema sugli angoli adiacenti, utilizzando in ambito euclideo parte della dimostrazione che di esso fa Hilbert.

Inoltre, anche il grande matematico alessandrino avrebbe potuto – come fece Hilbert (cf. [H], III 5, p.15) – assumere più debolmente che:

Cr1'. *Due triangoli che abbiano uguali due lati e l'angolo compreso, hanno rispettivamente uguali anche gli angoli che nel primo e nel secondo triangolo si oppongono a lati uguali.*

La proprietà **Cr1'** permise a Hilbert di provare agevolmente **Cr1**. Però la stessa cosa sarebbe stata possibile anche per Euclide. Infatti (si veda fig.1) se per assurdo, tanto per fissare le idee, il lato BC fosse stato più lungo del lato EF , allora esso sarebbe stato uguale a un opportuno prolungamento $E'F$ di EF dalla parte di E . Di conseguenza, applicando **Cr1'** ai due triangoli ACB e DFE' (in riferimento ai due angoli uguali in C e in F , nonché ai lati che li delimitano) si sarebbe avuta l'uguaglianza dell'angolo $E'DF$ con l'angolo α , che a sua volta è uguale all'angolo δ ; onde l'angolo $E'DF$ sarebbe stato uguale a δ . Il che è assurdo, dato che ³ il punto E è interno al segmento $E'F$, e quindi δ sarebbe stato minore dell'angolo $E'DF$.

3. Una dimostrazione dell'uguaglianza degli angoli retti coerente con l'impostazione euclidea

Ora siamo in grado di dimostrare il teorema sugli angoli adiacenti in chiave euclidea, utilizzando la dimostrazione di Hilbert (cf. [H], p. 17).

Teorema 1 (sugli angoli adiacenti). *Se gli angoli ABC e $A'B'C$ sono uguali, anche i rispettivi angoli adiacenti CBD e $C'B'D'$ sono uguali.*

³ Ci esprimiamo secondo una falsariga euclidea.

Dimostrazione. Supponiamo che i punti menzionati siano stati scelti in modo che risulti (si veda fig. 2):

$$AB = A'B', BC = B'C, BD = B'D';$$

perciò $AD = A'D'$ ⁴.

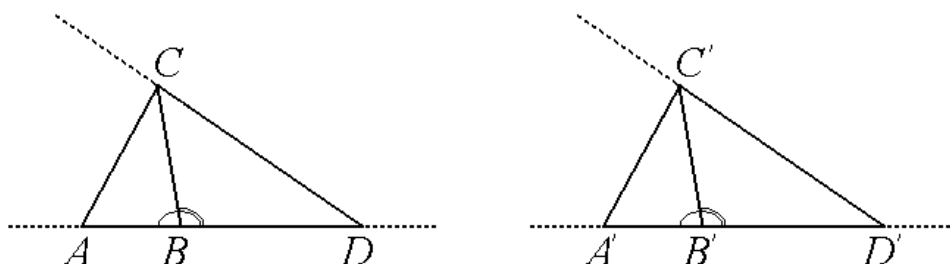


fig. 2

Allora, applicando **Cr1** ai triangoli ABC e $A'B'C'$, si ha che $AC = A'C'$ e l'angolo in A è uguale all'angolo in A' . Di conseguenza, applicando ancora **Cr1** ai triangoli CAD e $C'A'D'$, si ha che $CD = C'D'$ e l'angolo in D è uguale all'angolo in D' . In fine, applicando **Cr1** ai triangoli CDB e $C'D'B'$, si ha che l'angolo CBD è uguale all'angolo $C'B'D'$. ■

Nota Bene. Il teorema precedente ha come corollario immediato la proprietà che angoli opposti al vertice – essendo adiacenti a un medesimo angolo – sono uguali tra loro. Questa proprietà è il contenuto della Proposizione 15 di [E], che Euclide dimostra come conseguenza del fatto che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due angoli retti (si veda [E], Proposizione 13, p. 96). Per quanto è stato già detto, il teorema sugli angoli adiacenti e il corollario sugli angoli opposti al vertice si potrebbero collocare negli *Elementi* subito dopo la Proposizione 4 (cioè, **Cr1**). ■

Ed ecco il Lemma 2 che dimostreremo usando argomentazioni simili ad alcune usate da Euclide. Ad esempio, si veda la dimostrazione della Proposizione 13 degli *Elementi*, di cui noi useremo anche la figura illustrativa riportata a pag. 97 di [E] – si veda qui sotto la parte sinistra di fig. 3 – per un più agevole confronto tra i due tipi di argomentazioni. Facciamo presente che il Lemma 2 sarebbe banale se si usasse il Postulato 4 degli *Elementi*, da cui noi intendiamo prescindere.

Lemma 2. *Se un segmento BE innalzato dal punto B su un altro segmento CD forma angoli retti (si veda fig. 3), allora ogni segmento BA innalzato da B [sullo stesso piano in cui giacciono i precedenti segmenti e dalla stessa parte di BE] che incontri BE nel solo punto B , forma due angoli CBA e DBA che non possono essere retti.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che CBA e DBA siano retti, onde risulta:

$$CBA = DBA = DBE + EBA = CBE + ABE = CBA + ABE + ABE.$$

⁴ Quest'uguaglianza, che per Hilbert è un assioma (si veda III 3 di [H], p. 13), negli *Elementi* la troviamo come Nozione Comune (si veda [E], p. 73).

Dal confronto tra il primo e l'ultimo membro delle precedenti uguaglianze, tenendo conto della Nozione Comune IV, si ricava che $\angle ABE + \angle ABE$ coincide con l'angolo nullo. Perciò, grazie alla Nozione Comune VI, si ricava che $\angle ABE$ coincide con l'angolo nullo. Il che è assurdo per costruzione di AB . ■

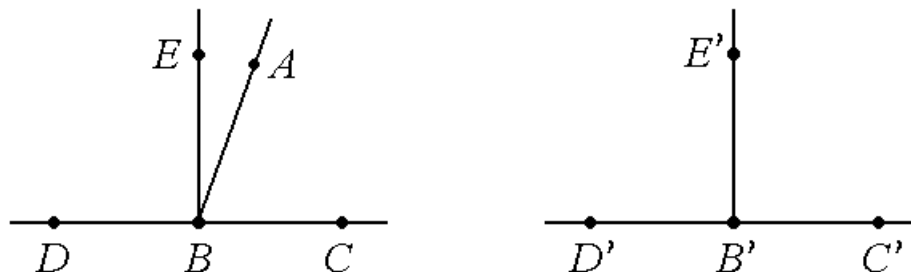


fig. 3

Concludiamo col teorema sull'uguaglianza degli angoli retti.

Teorema 3. *Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.*

Dimostrazione. I segmenti BE e $B'E'$ (si veda fig. 3) siano innalzati rispettivamente sui segmenti DC e $D'C'$ in modo tale che gli angoli $\angle DBE$ e $\angle D'B'E'$ siano retti. Quindi – tenuto conto dalla Proposizione 23 e della costruzione relativa alla Proposizione 22 degli *Elementi* – si consideri l'angolo $\angle DBA$ uguale a $\angle D'B'E'$; dove A è un punto situato dalla stessa parte di E rispetto a DC . Perciò, per il teorema sugli angoli adiacenti, si ha:

$$\angle CBA = \angle CB'E' = \angle D'B'E' = \angle DBA.$$

Onde l'angolo $\angle DBA$ è retto. Perciò, tenendo conto del Lemma 2, $\angle DBA$ deve essere uguale a $\angle DBE$. Il che assicura la tesi. ■

Bibliografia

[E] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccione, UTET, Torino (1970).

[DML] De Mitri C., Lenzi D., *Le Proposizioni 24 e 21 degli Elementi di Euclide e alcuni assiomi mancanti*, Matematicamente.it, N.13 (2010).

[H] Hilbert D., *Fondamenti della Geometria*, con introduzione di Carlo Felice Manara; Feltrinelli, Milano (1970). Traduzione di [H₁].

[H₁] Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Stuttgart (1968).

[Pr] Proclo, *Commento al primo libro di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini ed., Pisa (1978).

[T] Trudeau R., *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino (2004).

145. La massa di Giove ottenuta da otto foto relative alla posizione dei satelliti medicei

di Carlo Sintini

A Samuele

"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intender se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, né quali è scritto."

Galileo Galilei

1. Calcoli sul satellite io

Nella figura 1 vengono mostrate una serie di otto fotografie, una sotto l'altra, di Giove e dei suoi quattro satelliti medicei. Ciascuna immagine è stata scattata nel giorno e nell'ora indicati sopra ogni foto. La posizione del satellite IO è indicata con una freccetta.

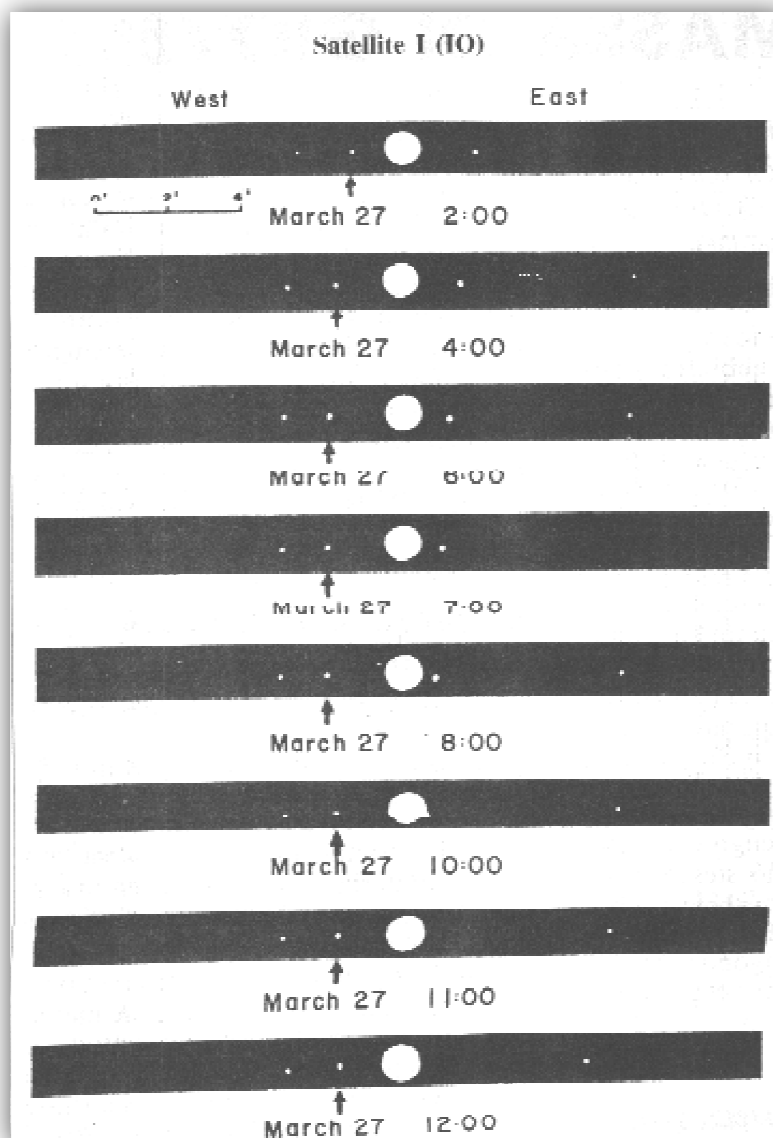


Figura 1. Foto relative al satellite Io

In alto sulla foto è indicato anche un segmento la cui lunghezza corrisponde ad un angolo di visuale pari a 4 primi. Come notizia accessoria sappiamo anche che nel periodo in cui sono state scattate le foto, la distanza della Terra da Giove era di 4,46 unità astronomiche, cioè di 4,46 volte la distanza media Terra-Sole.

Queste sono le sole notizie di partenza, e sembrano un po' poche per ricavare la massa di Giove! Eppure partendo da queste semplici otto foto riusciremo a raggiungere lo scopo!

Come prima fase del nostro procedimento, cercheremo di ricavare le distanze del satellite Io dalla terra, ad ogni ora indicata nelle foto precedenti.

2. Il moto armonico relativo al satellite Io

La prima operazione è stata quella di scannerizzare e stampare in formato A4 l'immagine delle otto foto, in modo da poter effettuare letture abbastanza accurate delle distanze.

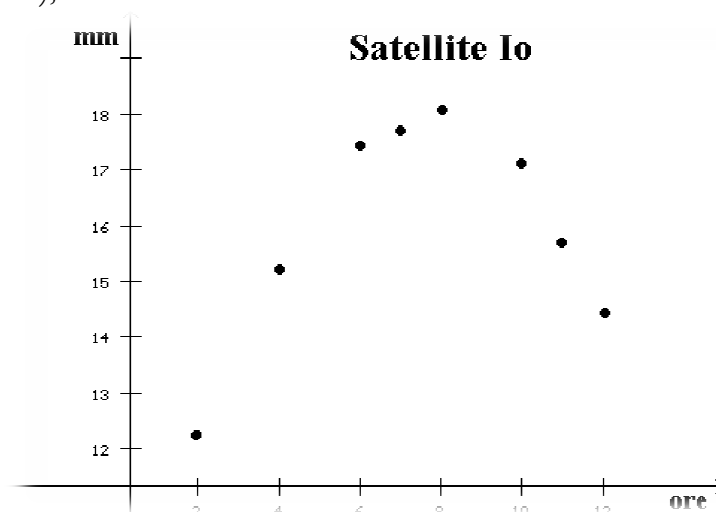
Poi con un semplice righello misuro per cinque volte la distanza del satellite Io dal baricentro del pianeta Giove. Quindi calcolo la media delle letture (sommando le cinque letture e dividendo per cinque), in quanto il valore medio è sicuramente più attendibile di una singola lettura. Ho anche misurato il segmento di riferimento corrispondente a 4 primi, ed esso è risultato di 34 millimetri.

I valori ottenuti nelle letture sono riportati nella tabella seguente.

IO	1°lett.	2°lett.	3°lett.	4°lett.	5°lett.	Media
27/3 ore 2:00	12 mm	12 mm	12 mm	12 mm	12,5 mm	12,1 mm
27/3 ore 4:00	15 mm	15 mm	15 mm	15 mm	16 mm	15,2 mm
27/3 ore 6:00	17 mm	17,5 mm	17,5 mm	17,5 mm	17,5 mm	17,4 mm
27/3 ore 7:00	18 mm	17,5 mm	17,5 mm	18 mm	17,5 mm	17,7 mm
27/3 ore 8:00	18,5 mm	18 mm	18 mm	18 mm	18 mm	18,1 mm
27/3 ore 10:00	18,5 mm	17 mm	17 mm	16,5 mm	16,5 mm	17,1 mm
27/3 ore 11:00	16 mm	16 mm	16 mm	15,5 mm	15 mm	15,7 mm
27/3 ore 12:00	14,5 mm	14 mm	14,5 mm	14,5 mm	14,5 mm	14,4 mm

Figura 2. Letture eseguite sulle otto foto

Riportando i valori della tabella su un grafico (mettendo in ascissa i tempi in ore e in ordinata le distanze in millimetri), si ha



Si riconosce nel grafico (entro i limiti degli errori sperimentali), un arco di sinusoidale: infatti il moto del satellite (quasi esattamente circolare) viene visto dalla Terra come un moto armonico.

Infatti la proiezione di un moto circolare uniforme su un piano è sempre un moto armonico (ovviamente l'ipotesi che il moto del satellite sia circolare uniforme non è un presupposto certo,

ma possiamo ipotizzarlo tale sapendo che tutti i pianeti e satelliti di nostra conoscenza seguono moti quasi perfettamente circolari).

Il problema che ora dobbiamo affrontare e superare consiste nel determinare i parametri di tale moto armonico, ed in particolare la sua **elongazione massima** e il suo **periodo**.

La forma generica di un moto armonico è

$$(1) \quad y = r \operatorname{sen}(\omega t + \Phi)$$

In cui r è la elongazione massima, $\omega t = \alpha$ è l'angolo descritto dal moto circolare uniforme (ed ω la pulsazione), e Φ è lo sfasamento.

Poichè la funzione ha tre parametri (r , ω e Φ), possiamo tentare di determinarli imponendo alla relazione (1) il passaggio per tre punti generici

$$\begin{cases} P_1 \equiv (t_1; y_1) \\ P_2 \equiv (t_2; y_2) \\ P_3 \equiv (t_3; y_3) \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} y_1 = r \operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi) \\ y_2 = r \operatorname{sen}(\omega t_2 + \Phi) \\ y_3 = r \operatorname{sen}(\omega t_3 + \Phi) \end{cases}$$

ricavando r dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due, si ha

$$\begin{cases} r = \frac{y_1}{\operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi)} \\ y_2 = \frac{y_1 \operatorname{sen}(\omega t_2 + \Phi)}{\operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi)} \\ y_3 = \frac{y_1 \operatorname{sen}(\omega t_3 + \Phi)}{\operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi)} \end{cases}$$

Accantoniamo la prima equazione segnandola con il numero (2)

$$(2) \quad r = \frac{y_1}{\operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi)}$$

Proseguiamo esplicitando nelle altre due il fattore

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi) = \frac{y_1}{y_2} \operatorname{sen}(\omega t_2 + \Phi) \\ \operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi) = \frac{y_1}{y_3} \operatorname{sen}(\omega t_3 + \Phi) \end{cases}$$

Confrontando i due secondi membri e sviluppando, si ottiene

$$\frac{y_1}{y_2} \operatorname{sen}(\omega t_2 + \Phi) = \frac{y_1}{y_3} \operatorname{sen}(\omega t_3 + \Phi)$$

$$y_3 \operatorname{sen}(\omega t_2 + \Phi) = y_2 \operatorname{sen}(\omega t_3 + \Phi)$$

$$y_3 \operatorname{sen}(\omega t_2) \cos \Phi + y_3 \cos(\omega t_2) \operatorname{sen} \Phi = y_2 \operatorname{sen}(\omega t_3) \cos \Phi + y_2 \cos(\omega t_3) \operatorname{sen} \Phi$$

Dividiamo ora per $\cos \Phi$

$$y_3 \operatorname{sen}(\omega t_2) + y_3 \cos(\omega t_2) \tan \Phi = y_2 \operatorname{sen}(\omega t_3) + y_2 \cos(\omega t_3) \tan \Phi$$

$$\tan \Phi (y_3 \cos \omega t_2 - y_2 \cos \omega t_3) = y_2 \operatorname{sen} \omega t_3 - y_3 \operatorname{sen} \omega t_2$$

e otteniamo

$$(4) \quad \tan \Phi = \frac{y_2 \operatorname{sen} \omega t_3 - y_3 \operatorname{sen} \omega t_2}{y_3 \cos \omega t_2 - y_2 \cos \omega t_3}$$

Ora sviluppiamo la prima delle (3)

$$y_2 \operatorname{sen}(\omega t_1 + \Phi) = y_1 \operatorname{sen}(\omega t_2 + \Phi)$$

$$y_2 \operatorname{sen} \omega t_1 \cos \Phi + y_2 \cos \omega t_1 \operatorname{sen} \Phi = y_1 \operatorname{sen} \omega t_2 \cos \Phi + y_1 \cos \omega t_2 \operatorname{sen} \Phi$$

Dividiamo ancora per $\cos \Phi$

$$y_2 \operatorname{sen} \omega t_1 + y_2 \cos \omega t_1 \tan \Phi = y_1 \operatorname{sen} \omega t_2 + y_1 \cos \omega t_2 \tan \Phi$$

$$\tan \Phi (y_2 \cos \omega t_1 - y_1 \cos \omega t_2) = y_1 \operatorname{sen} \omega t_2 - y_2 \operatorname{sen} \omega t_1$$

$$(5) \quad \tan \Phi = \frac{y_1 \operatorname{sen} \omega t_2 - y_2 \operatorname{sen} \omega t_1}{y_2 \cos \omega t_1 - y_1 \cos \omega t_2}$$

Confrontando fra loro le (4) e (5) si ha infine

$$\frac{y_2 \operatorname{sen} \omega t_3 - y_3 \operatorname{sen} \omega t_2}{y_3 \cos \omega t_2 - y_2 \cos \omega t_3} = \frac{y_1 \operatorname{sen} \omega t_2 - y_2 \operatorname{sen} \omega t_1}{y_2 \cos \omega t_1 - y_1 \cos \omega t_2}$$

$$(y_2 \operatorname{sen} \omega t_3 - y_3 \operatorname{sen} \omega t_2)(y_2 \cos \omega t_1 - y_1 \cos \omega t_2) =$$

$$= (y_3 \cos \omega t_2 - y_2 \cos \omega t_3)(y_1 \operatorname{sen} \omega t_2 - y_2 \operatorname{sen} \omega t_1)$$

$$y_2^2 \operatorname{sen} \omega t_3 \cos \omega t_1 - y_1 y_2 \operatorname{sen} \omega t_3 \cos \omega t_2 - y_2 y_3 \operatorname{sen} \omega t_2 \cos \omega t_1 + y_1 y_3 \operatorname{sen} \omega t_2 \cos \omega t_2 =$$

$$= y_1 y_3 \operatorname{sen} \omega t_2 \cos \omega t_2 - y_2 y_3 \operatorname{sen} \omega t_1 \cos \omega t_2 - y_1 y_2 \operatorname{sen} \omega t_2 \cos \omega t_3 + y_2^2 \operatorname{sen} \omega t_1 \cos \omega t_3$$

$$y_2^2 \operatorname{sen}(\omega t_3 - \omega t_1) = y_1 y_2 \operatorname{sen}(\omega t_3 - \omega t_2) + y_2 y_3 \operatorname{sen}(\omega t_2 - \omega t_1)$$

da cui dividendo per y_2 si ha

$$(6) \quad y_2 \operatorname{sen} \omega (t_3 - t_1) = y_1 \operatorname{sen} \omega (t_3 - t_2) + y_3 \operatorname{sen} \omega (t_2 - t_1)$$

La (6) è una equazione con una sola incognita, la ω , ma purtroppo non è di facile soluzione.

Dopo molti tentativi inutili di risolvere la (6), ho ripiegato su una felice circostanza favorevole relativa ai tempi di osservazione: è infatti possibile prendere come punti di riferimento, non tre punti generici, ma i seguenti tre punti:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \text{ ore} \\ y_1 = 15,2 \text{ mm} \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = 8 \text{ ore} \\ y_2 = 18,1 \text{ mm} \end{cases} \quad \begin{cases} t_3 = 12 \text{ ore} \\ y_3 = 14,4 \text{ mm} \end{cases}$$

che hanno ascisse sufficientemente distanziate, e nello stesso tempo equidistanti.

La (6) diviene ora

$$18,1 \cdot \operatorname{sen} 8\omega = 15,2 \cdot \operatorname{sen} 4\omega + 14,4 \cdot \operatorname{sen} 4\omega$$

che si può risolvere agevolmente:

$$36,2 \cdot \operatorname{sen} 4\omega \cdot \cos 4\omega = 29,6 \cdot \operatorname{sen} 4\omega$$

$$\cos 4\omega = \frac{29,6}{36,2} = 0,82$$

$$(7) \quad \omega = 0,153 \frac{\text{rad}}{\text{h}}$$

Sostituendo la (7) nella (4)

$$\tan \Phi = \frac{18,1 \cdot \operatorname{sen}(1,8396) - 14,4 \cdot \operatorname{sen}(1,2264)}{14,4 \cdot \cos(1,2264) - 18,1 \cdot \cos(1,8396)} = \frac{18,1 \cdot 0,964 - 14,4 \cdot 0,941}{14,4 \cdot 0,3376 + 18,1 \cdot 0,2656} = 0,403$$

si ha

$$(8) \quad \Phi = \arctan 0,403 = 0,383 \text{ rad}$$

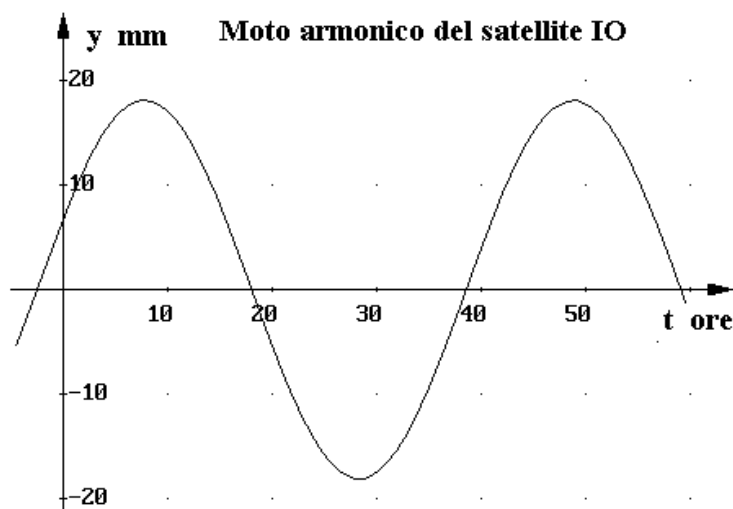
Infine, sostituendo la (7) e la (8) nella (2) si ottiene

$$(9) \quad r = \frac{15,2}{\operatorname{sen}(4 \cdot 0,153 + 0,383)} = \frac{15,2}{\operatorname{sen} 0,995} = 18,1 \text{ mm}$$

Finalmente possiamo scrivere la (1) nella sua forma finale

$$(10) \quad \boxed{y = 18,1 \cdot \operatorname{sen}(0,153 \cdot t + 0,383)}$$

Che rappresenta quindi l'equazione del moto armonico del pianeta IO. Inserendo questa funzione in un programma di tracciamento grafici, si ottiene:



Calcoliamo ora il periodo T del moto armonico. Da una nota formula, conoscendo ω , si ottiene

$$(11) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{0,153} = 41,07 \text{ ore} = 1,48 \cdot 10^5 \text{ sec}$$

3. La massa di giovè

Nel primo paragrafo, a pagina 6, avevamo appurato che il segmento di riferimento che appare sulla foto e che corrisponde ad un angolo di $4'$, ha una lunghezza di 34 mm.

Ma una lunghezza di un millimetro, a quale angolo di visuale corrisponde? Basta stabilire una proporzione per ricavare quale sia l'ampiezza (in primi) di un angolo α_0 corrispondente ad un millimetro. Basta risolvere la proporzione

$$4' : 34\text{mm} = \alpha_0 : 1\text{mm}$$

$$\alpha_0 = \frac{4}{34} = 0,11765 \frac{\text{primi}}{\text{mm}}$$

1 millimetro corrisponde quindi ad un angolo $\alpha_0 = 0,11765$ primi.

Trasformiamo quest'angolo α_0 in radianti con un'altra proporzione

$$0,11765 : (180 \cdot 60) = \alpha_0 : \pi$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi \cdot 0,11765}{10800} = 3,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

1 millimetro corrisponde dunque ad un angolo $\alpha_0 = 3,4 \cdot 10^{-5}$ radianti.

Moltiplicando l'elongazione massima r , espressa in millimetri dalla (9), per questo fattore di conversione, si ottiene l'ampiezza dell'angolo α (espressa in radianti) sotto cui viene osservata l'elongazione:

$$\alpha = r \cdot \alpha_0 = 18,1 \cdot 3,4 \cdot 10^{-5} = 6,154 \cdot 10^{-4} \text{ radianti}$$

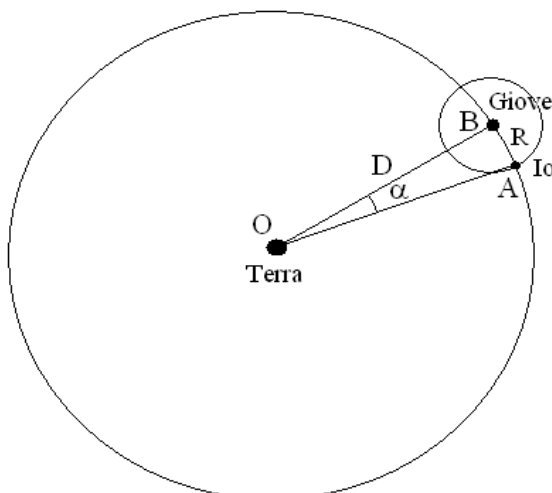
Come abbiamo già detto all'inizio, la distanza media fra Giove e la Terra (quando furono scattate le foto) era di 4,46 u.a. cioè

$$D = 4,46 \text{ u.a.} = 4,46 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 6,69 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Osservando la figura della pagina seguente, in O c'è la Terra ed OB corrisponde alla distanza D fra Terra e Giove.

Dalla definizione di radiante, indicando con R la lunghezza dell'arco AB (corrispondente al raggio dell'orbita di IO, cioè all'elongazione massima), sappiamo che

$$\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{R}{D} \text{ e quindi } R = D \alpha$$



Quindi il raggio R dell'orbita circolare descritta dal satellite IO intorno a Giove è:

$$(12) \quad R = D \cdot \alpha = 6,69 \cdot 10^{11} \cdot 6,154 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 41,17 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Ovviamente nella figura precedente non sono rispettate le proporzioni, essa serve solo per capire il ragionamento matematico.

Per il calcolo della massa di Giove utilizzeremo i dati ottenuti con le formule (11) e (12).

Prima però osserviamo quanto segue: il satellite IO è sottoposto a due forze che si equilibrano fra loro: la forza attrattiva gravitazionale F_1 e la forza centrifuga F_2 .

$$\begin{cases} F_1 = G \frac{Mm}{R^2} \\ F_2 = m \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \end{cases}$$

dove M è la massa di Giove e m quella del satellite IO. confrontando fra loro i due secondi membri e semplificando, si ottiene

$$(13) \quad \begin{aligned} G \frac{Mm}{R^2} &= \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \\ M &= \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \end{aligned}$$

Ebbene, finalmente la (13) ci permette di ricavare la massa di Giove conoscendo la (11) e la (12).

Si noti come la (13) non contiene m , quindi il risultato non dipende dalla massa del satellite IO.

Inoltre la (13) rappresenta in pratica **la terza legge di Keplero**.

Passando ai calcoli numerici si ha

$$(14) \quad M = \frac{4\pi^2 (41,17 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (1,48 \cdot 10^5)^2} = \frac{39,48 \cdot 6,98 \cdot 10^{25}}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,19 \cdot 10^{10}} = 1,8865 \cdot 10^{27} \text{ Kg}$$

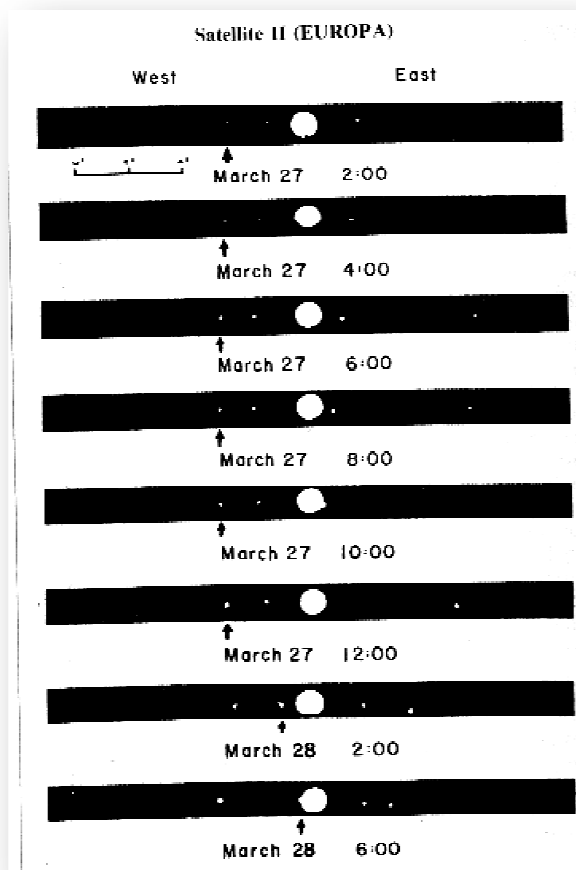
Nei testi (vedi bibliografia), per la massa di Giove viene fornito il valore

$$M = 318 \text{ masse terrestri} = 318 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg} = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ Kg}$$

Quasi coincidente con quello calcolato da noi.

4 - GLI ALTRI TRE SATELLITI MEDICEI

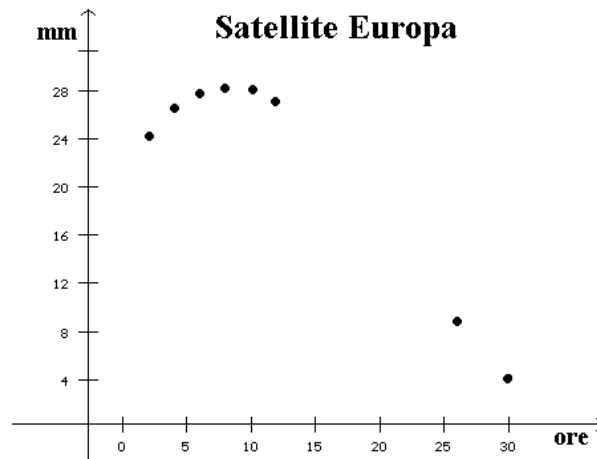
Avevo a disposizione anche altre tre serie di otto foto, analoghe a quelle mostrate a pagina 5, per ciascuno degli altri tre satelliti medicei: **Europa**, **Ganimede** e **Callisto**. Esegui per ciascuno di questi satelliti, i calcoli fatti per il satellite Io, e cominciamo con Europa.



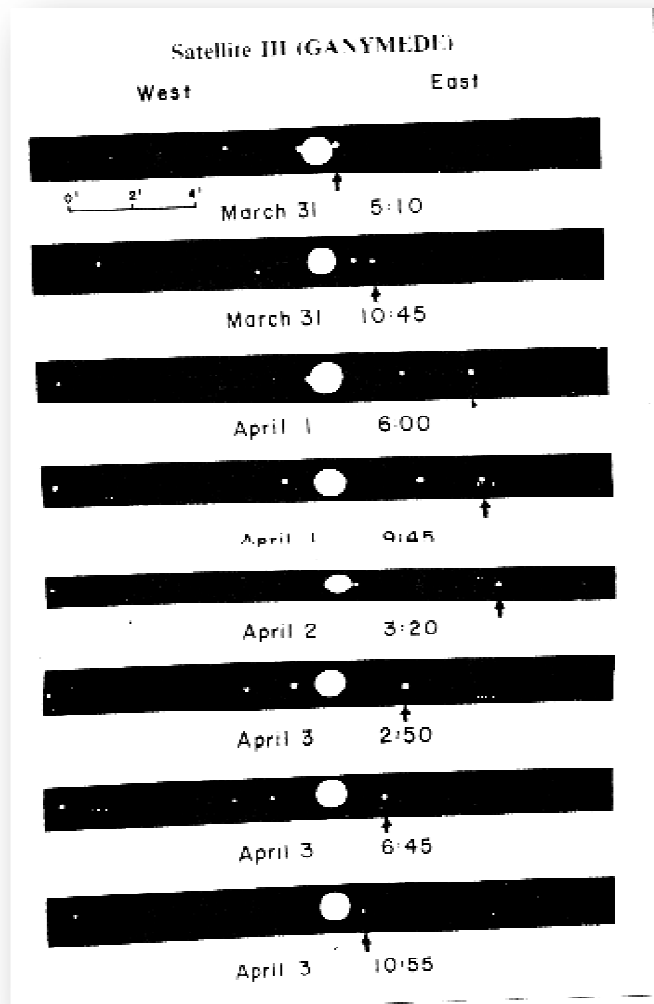
Anche qui la posizione di Europa è indicata dalla freccetta. Dalle misure si ottiene

EUROPA	1°lett.	2°lett.	3°lett.	4°lett.	5°lett.	Media
27/3 ore 2:00	25 mm	24 mm	24,5 mm	24 mm	24 mm	24,3 mm
27/3 ore 4:00	26,3 mm	26 mm	27 mm	26,5 mm	26,7 mm	26,5 mm
27/3 ore 6:00	28 mm	27,5 mm	27 mm	28 mm	28 mm	27,7 mm
27/3 ore 8:00	28,5 mm	28 mm	28,5 mm	28 mm	28,5 mm	28,3 mm
27/3 ore 10:00	28,2 mm	28 mm	28 mm	28,5 mm	28 mm	28,1 mm
27/3 ore 12:00	27 mm	27 mm	27 mm	27 mm	27,5 mm	27,1 mm
28/3 ore 2:00	9 mm	8,5 mm	9 mm	8,5 mm	9 mm	8,8 mm
28/3 ore 6:00	4,5 mm	4 mm	4,5 mm	4,5 mm	4 mm	4,3 mm

Ed il grafico del relativo moto armonico è



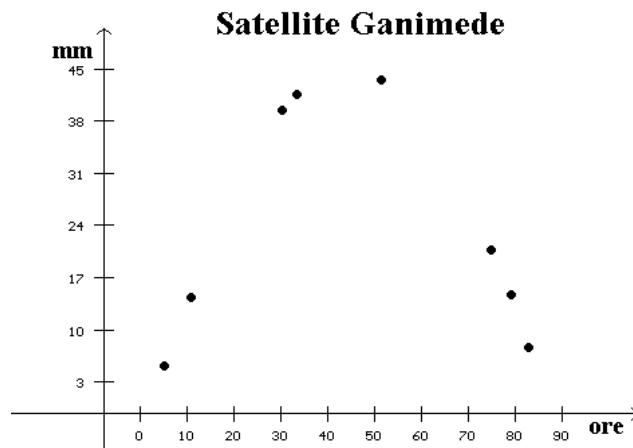
Con il satellite Ganimede si ha invece



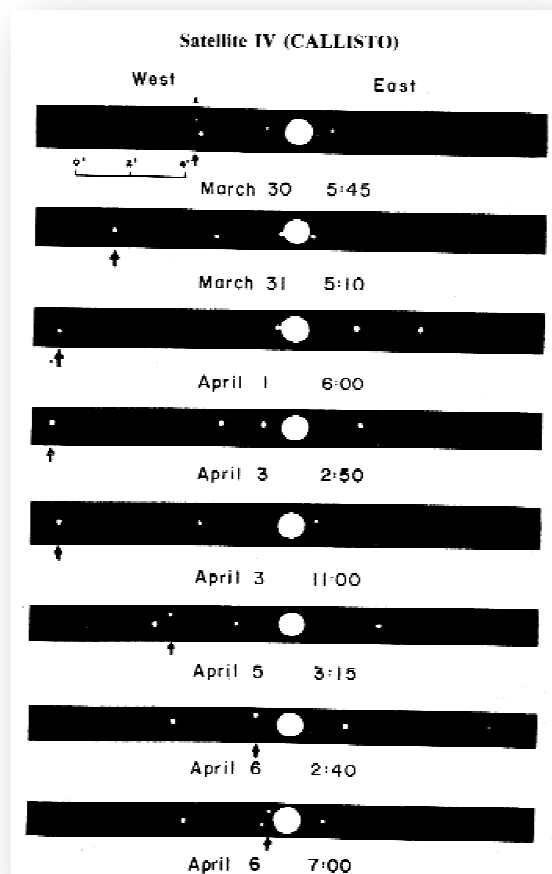
Al solito la freccetta indica la posizione di Ganimede. La tabella delle misure è

GANIMEDE	1° lett.	2° lett.	3° lett.	4° lett.	5° lett.	Media
31/3 ore 5:10	6 mm	5 mm	5 mm	5 mm	5 mm	5,2 mm
31/3 ore 10:45	14 mm	14 mm	14 mm	14 mm	15 mm	14,2 mm
1/4 ore 6:00	40 mm	39,5 mm	39,5 mm	38,5 mm	39 mm	39,3 mm
1/4 ore 9:45	41 mm	41,5 mm	41,5 mm	41,5 mm	41 mm	41,3 mm
2/4 ore 3:20	43,5 mm	43,5 mm	43,5 mm	43,5 mm	43,5 mm	43,5 mm
3/4 ore 2:50	21 mm	21 mm	20,5 mm	21 mm	20,5 mm	20,8 mm
3/4 ore 6:45	14,5 mm	14 mm	15 mm	15 mm	15 mm	14,7 mm
3/4 ore 10:45	7,5 mm	8 mm	8,5 mm	7,5 mm	8 mm	7,9 mm

Ed il grafico del relativo moto armonico è



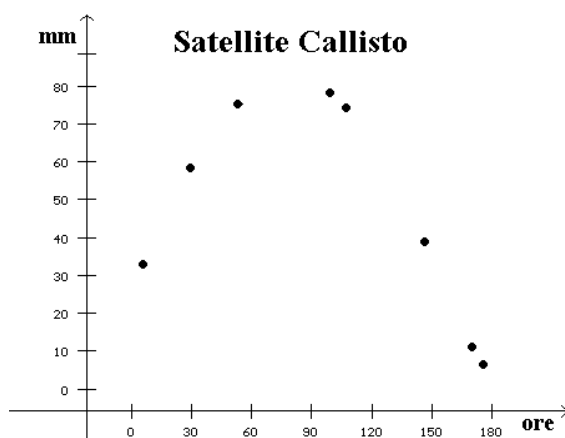
Infine con il satellite Callisto si ha



La tabella delle misure è

CALLISTO	1°lett.	2° lett.	3°lett.	4° lett.	5°lett.	Media
30/3 ore 5:45	33 mm	33 mm	33,5 mm	33 mm	32 mm	32,9 mm
31/3 ore 5:10	58 mm	58 mm	58 mm	58,3 mm	58 mm	58,06 mm
1/4 ore 6:00	75 mm	75 mm	75,5 mm	75 mm	75 mm	75,1 mm
3/4 ore 2:50	78 mm	77,5 mm	78 mm	78 mm	78 mm	77,9 mm
3/4 ore 11:00	74 mm	74 mm	74,5 mm	74,5 mm	74,5 mm	74,3 mm
5/4 ore 3:15	38,5 mm	39 mm	38,2 mm	38,5 mm	38,5 mm	38,54 mm
6/4 ore 2:40	11,5 mm	11 mm	10,5 mm	10,5 mm	11,1 mm	10,92 mm
6/4 ore 7:00	7 mm	6 mm	6 mm	6 mm	6 mm	6,2 mm

Ed il grafico del moto armonico è



A questo punto, nell'affrontare i calcoli mi sono reso conto che solo per il satellite Europa sarebbe stato possibile riferirsi a tre tempi t_1 , t_2 e t_3 equidistanti fra loro, in modo da poter risolvere l'equazione trascendente trigonometrica (6).

Non essendo riuscito a risolvere tale equazione in alcun modo, ho allora ripiegato su un metodo diverso, consistente nei seguenti punti:

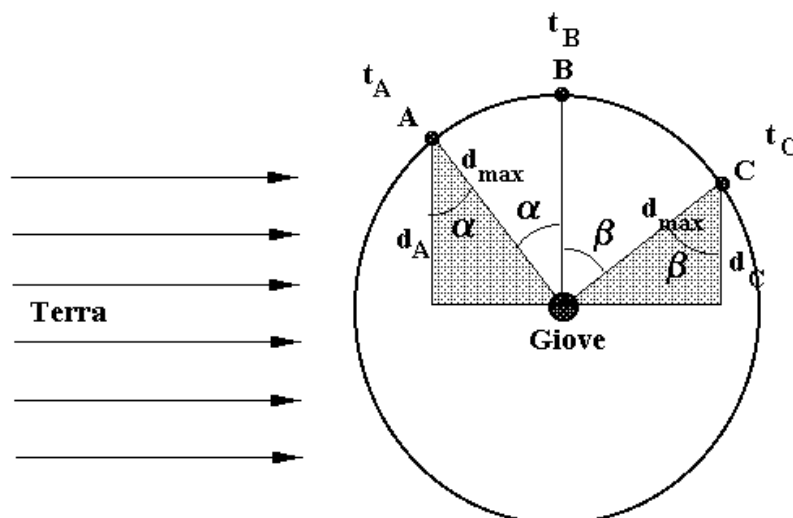
- Ho ricavato in ciascun grafico del moto armonico, ad occhio, l'ordinata massima della sinusoide. Ho così ottenuto rispettivamente le misure seguenti

$$\begin{aligned} r &= 28,6 \text{ mm} && \text{per Europa} \\ r &= 46 \text{ mm} && \text{per Ganimede} \\ r &= 81 \text{ mm} && \text{per Callisto} \end{aligned}$$

- Moltiplicando questi valori per α_0 e per D (vedi formula 12) si hanno rispettivamente le distanze R dei satelliti da Giove

$$\begin{aligned} R &= 6,5 \cdot 10^8 \text{ m} = 650 \text{ mila Km (per EUROPA)} \\ (15) \quad R &= 10,46 \cdot 10^8 \text{ m} = 1 \text{ milione di Km (per GANIMEDE)} \\ R &= 18,42 \cdot 10^8 \text{ m} = 1,8 \text{ milioni di Km (per CALLISTO)} \end{aligned}$$

- Per la determinazione del periodo T ho invece ragionato nel modo seguente: Ciascuno dei tre grafici del moto armonico rappresenta un arco di sinusoide corrispondente alla proiezione di un moto circolare uniforme.



Siano A e C due punti estremi di uno di tali grafici, $(t_A ; d_A)$ e $(t_C ; d_C)$ le corrispondenti coordinate di tali punti, e d_{max} la corrispondente elongazione massima (cioè il raggio r valutato nel punto precedente). E' possibile ricavare gli angoli α e β dai triangoli colorati

$$\begin{cases} \alpha = \arccos \frac{d_A}{r} \\ \beta = \arccos \frac{d_C}{r} \end{cases}$$

e da questi l'angolo $\theta = \alpha + \beta$. Conoscendo l'angolo θ e l'intervallo di tempo $\Delta t = t_C - t_A$ necessario al satellite per andare da A a B, si può ricavare il periodo T con una semplice proporzione:

$$\theta : \Delta t = 2\pi : T$$

$$T = \frac{2\pi \cdot \Delta t}{\theta}$$

Passando ai calcoli si ha

$r = 28,6mm$	
$A \equiv (t_A = 2 \text{ ore} = 7200 \text{ sec}; d_A = 24,3 \text{ mm})$	
$C \equiv (t_C = 26 \text{ ore} = 93600 \text{ sec}; d_C = 8,8 \text{ mm})$	
$\cos \alpha = \frac{24,3}{28,6}$	$\rightarrow \alpha = 0,5555 \text{ rad}$
$\cos \beta = \frac{8,8}{28,6}$	$\rightarrow \beta = 1,258 \text{ rad}$
$\theta = \alpha + \beta = 1,813 \text{ rad}$	$\Delta t = 86400 \text{ sec}$
$T = \frac{2\pi \cdot \Delta t}{\theta} = 2,99 \cdot 10^5 \text{ sec} \cong 3,5 \text{ giorni}$	

CALCOLI PER EUROPA

$$\begin{aligned}
 r &= 46\text{mm} \\
 A &\equiv (t_A = 5,17 \text{ ore} = 18612 \text{ sec}; d_A = 5,2 \text{ mm}) \\
 C &\equiv (t_C = 82,75 \text{ ore} = 297900 \text{ sec}; d_C = 7,9 \text{ mm}) \\
 \cos \alpha &= \frac{5,2}{46} \quad \rightarrow \quad \alpha = 1,46 \text{ rad} \\
 \cos \beta &= \frac{7,9}{46} \quad \rightarrow \quad \beta = 1,398 \text{ rad} \\
 \theta &= \alpha + \beta = 2,86 \text{ rad} \quad \Delta t = 2,8 \cdot 10^5 \text{ sec} \\
 T &= \frac{2\pi \cdot \Delta t}{\theta} = 6,15 \cdot 10^5 \text{ sec} \cong 7,1 \text{ giorni}
 \end{aligned}$$

CALCOLI PER GANIMEDE

$$\begin{aligned}
 r &= 81\text{mm} \\
 A &\equiv (t_A = 5,75 \text{ ore} = 20700 \text{ sec}; d_A = 32,9 \text{ mm}) \\
 C &\equiv (t_C = 170,67 \text{ ore} = 614412 \text{ sec}; d_C = 10,92 \text{ mm}) \\
 \cos \alpha &= \frac{32,9}{81} \quad \rightarrow \quad \alpha = 1,15 \text{ rad} \\
 \cos \beta &= \frac{10,92}{81} \quad \rightarrow \quad \beta = 1,436 \text{ rad} \\
 \theta &= \alpha + \beta = 2,586 \text{ rad} \quad \Delta t = 5,9 \cdot 10^5 \text{ sec} \\
 T &= \frac{2\pi \cdot \Delta t}{\theta} = 14,3 \cdot 10^5 \text{ sec} \cong 16,9 \text{ giorni}
 \end{aligned}$$

CALCOLI PER CALLISTO

5 - VERIFICA DELLA TERZA LEGGE DI KEPLERO

Per completare i calcoli (sfruttando ulteriormente i pochi dati iniziali a disposizione), e per verificare l'attendibilità dei risultati finora ottenuti, possiamo metterli in relazione anche con i calcoli eseguiti sul satellite Io, controllando che tutti e quattro i satelliti rispettino la terza legge di Keplero.

Dalla (13) possiamo infatti ricavare la nota formula

$$(16) \quad \boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{MG}{4\pi^2}}$$

In cui il secondo membro è costante per tutti i pianeti di uno stesso sistema.

Si noti che normalmente tale legge è riferita al sistema solare e quindi M rappresenta la massa del Sole. Nel nostro caso invece sistema è costituito da Giove e dai suoi satelliti (e quindi la costante è diversa da quella relativa al sistema solare ed ai suoi pianeti), e allora la massa M rappresenta la massa di Giove e non quella del Sole.

Si noti anche che non ha molta importanza mettere R al numeratore e T al denominatore, o viceversa: la legge di Keplero infatti afferma soltanto che il rapporto è costante, ed anche scambiando numeratore con denominatore, il risultato rimane costante.

Eseguendo i calcoli si ha:

IO	$\frac{R^3}{T^2} = 3,19 \cdot 10^{15}$
EUROPA	$\frac{R^3}{T^2} = 3,1 \cdot 10^{15}$
GANIMEDE	$\frac{R^3}{T^2} = 3,03 \cdot 10^{15}$
CALLISTO	$\frac{R^3}{T^2} = 3,06 \cdot 10^{15}$

I quattro risultati sono quasi uguali, e quindi la terza legge di Keplero, considerando i non trascurabili errori sperimentali, resta nel complesso molto ben confermata.

Bibliografia

Rivista: "Nuova Secondaria" - n.3 del novembre 1993 - Determinazione della massa di Giove. (Articolo di Alfio Pelli - Liceo sc. "Vallisneri" - Lucca)

Rivista: "COELUM", Periodico bimestrale per la divulgazione dell'astronomia, edito dall'osservatorio astronomico di Bologna (Raccolta delle annate dal 1932 ad oggi).

Rivista: "Le scienze" - Ed. italiana di Scientific american, numero 139 del marzo 1980 (I satelliti di Giove, L.A. Soderblom).

Testi scolastici: "Fondamenti di fisica", di D. Halliday e R. Resnick, editore Zanichelli, e "Physica" di Caforio-Ferilli, Editore Le Monnier.

146. I “PUZZLE”, polimini ante litteram

Stefano Borgogni
stfbrg@rocketmail.com

1. Introduzione

Tra gli appassionati di matematica ricreativa sono ben noti il nome di Martin Gardner e i suoi articoli sulla rivista “Scientific American”, successivamente raccolti in diversi libri, alcuni dei quali disponibili anche in italiano.

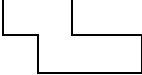

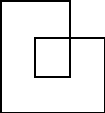
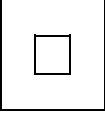
Tra le creazioni rese celebri da Gardner nei suoi articoli vi sono i cosiddetti “polimini”, figure inventate dal matematico inglese Solomon Golomb che si costruiscono unendo dei quadrati lungo uno dei lati. Su queste figure (“trimini”, “tetramini”, “pentamini” e così via, a seconda del numero di quadrati utilizzati) esiste ormai una vasta letteratura, disponibile anche su Internet.

In questo articolo, intendo trattare una serie di figure costruite in maniera simile ai polimini, ma che seguono altre regole e danno origine a configurazioni molto diverse.

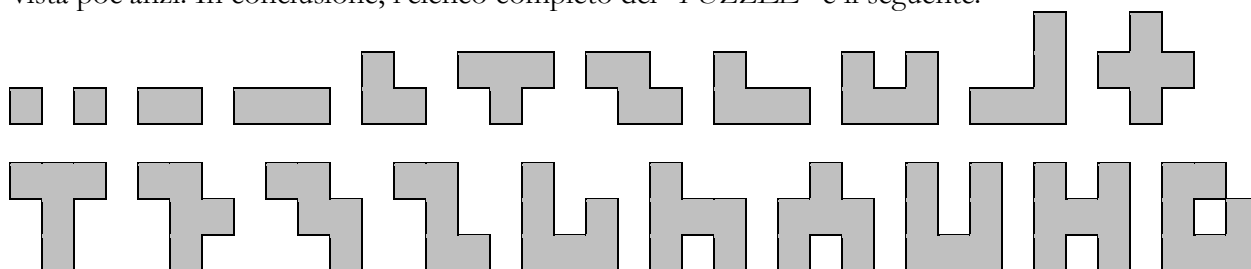
L’ideatore di queste figure è mio padre, scomparso da due anni, che le aveva chiamate “PUZZLE” e ne aveva costruite molte, usando diversi materiali. Va aggiunto che i “PUZZLE” sono una creazione del tutto indipendente dai già citati polimini, in quanto mio padre aveva cominciato a studiarli e costruirli - prendendo spunto da un rompicapo trovato in un mercatino - molto prima che uscissero gli articoli di Gardner.

2. Costruzione dei “puzzle”

I “PUZZLE” si ottengono unendo dei quadrati lungo uno dei lati e osservando le seguenti regole:

- i pezzi devono stare all’interno di un quadrato massimo di 3x3 unità; non va bene, ad esempio, la figura a lato, “lunga” 4 unità. 
- i pezzi devono essere di tipo “lineare”, cioè non possono comprendere al loro interno quadrati di 2x2 unità. E’ escluso, dunque, il pentamino 
- Tutti i pezzi hanno un perimetro la cui misura (in unità lineari) è 2 volte la misura dell’area (in unità quadrate) +2. In sintesi, la formula comune a tutti i pezzi si può esprimere come $2p=2A+2$.
- In base a tale formula sono trattate due figure-limite comprese entro il quadrato massimo 3x3: fa parte dell’insieme dei “PUZZLE” la figura a fianco 
- mentre è esclusa la figura a fianco (per la quale non vale la relazione $2p = 2A + 2$). 

In base alle regole suddette, si ottengono complessivamente 20 pezzi diversi, ma il quadratino 1x1 va replicato due volte, in quanto uno è necessario per occupare lo spazio all’interno della figura chiusa vista poc’anzi. In conclusione, l’elenco completo dei “PUZZLE” è il seguente:



In base alla loro area, i pezzi si possono così suddividere:

<u>Area</u>	<u>N. pezzi</u>	<u>Area totale</u>
1 unità quadrata	2	$2 \times 1 = 2$
2 unità quadrate	1	$1 \times 2 = 2$
3 unità quadrate	2	$2 \times 3 = 6$
4 unità quadrate	3	$3 \times 4 = 12$
5 unità quadrate	7	$7 \times 5 = 35$
6 unità quadrate	3	$3 \times 6 = 18$
7 unità quadrate	3	$3 \times 7 = 21$
<i>TOTALE</i>	<i>21</i>	<i>96</i>

3. Composizioni con i “puzzle”

Mettendo insieme i 21 pezzi si possono formare figure di vario genere.

Rettangoli

Come detto, l’area totale dei “PUZZLE” è di 96 unità quadrate, e 96 è un numero con molti divisori, il che consente di costruire ben 4 diversi rettangoli: 3×32 ; 4×24 ; 6×16 ; 8×12 .

Si può usare uno qualsiasi di questi rettangoli, ma quello che offre più possibilità è il rettangolo 8×12 (che è anche quello con le proporzioni tra i lati più vicine al ben noto “rapporto aureo”).

Figure “irregolari”

Oltre ai rettangoli, si possono formare figure delle forme più svariate (alberi, animali, oggetti vari...), sullo stile del “Tangram”.

Ovviamente, nel nostro caso non esistono linee oblique, che però possono essere simulate con linee “a scaletta”. Grazie a questo accorgimento, è possibile, ad esempio, formare le lettere dell’alfabeto (anche se non è affatto semplice).

Parallelepipedi

Una interessante estensione del gioco dei “PUZZLE” riguarda lo spazio tridimensionale. Infatti, se si costruiscono i pezzi in modo che l’altezza degli stessi sia unitaria (in tal modo il quadratino base 1×1 diventa un cubo $1 \times 1 \times 1$), le 96 unità cubiche ottenute permettono di costruire 2 diversi parallelepipedi: $3 \times 4 \times 8$ e $4 \times 4 \times 6$.

Come si è visto, le composizioni possibili sono numerosissime; per brevità nel presente articolo esaminiamo solo il gioco dei “PUZZLE” nella sua versione standard: riempire un rettangolo 8×12 utilizzando tutti e 21 i pezzi, senza lasciare buchi.

All’inizio può sembrare difficile, ma con un po’ di applicazione chiunque può imparare la tecnica per farlo agevolmente. In ogni caso, si possono creare versioni facilitate del gioco (per principianti o per bambini piccoli), utilizzando un sottoinsieme di pezzi con l’esclusione di quelli più ingombranti. Ad esempio, eliminando le tre figure di area 7 e una di quelle di area 6 si riduce l’area totale a 63 unità quadrate, il che permette di formare un rettangolo 7×9 o un parallelepipedo $3 \times 3 \times 7$.

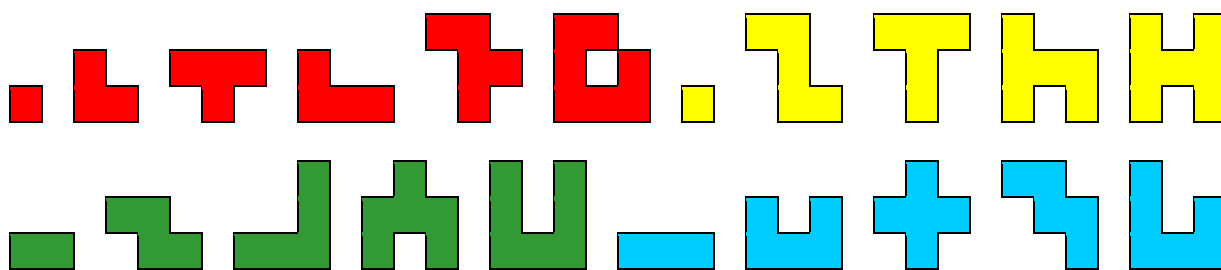
4. Colori

Il gioco si può semplificare, ma si può anche rendere più complesso colorando i 21 “PUZZLE” e introducendo qualche vincolo sulla base di tale colorazione.

Ancora una volta, ci viene in aiuto il numero 96, che consente una suddivisione dei pezzi tale che, scegliendo 2, 3, 4 o 6 colori diversi, ciascuno copre una identica superficie complessiva.

In base all’esperienza, si suggerisce l’utilizzo di 4 colori, a ognuno dei quali saranno “assegnati” 5 o 6 pezzi per un’area totale di 24 unità quadrate. Inoltre, conviene ripartire i “PUZZLE” in modo che ogni colore abbia un numero suppergiù uguale di pezzi grossi (più difficili da sistemare) e piccoli.

La colorazione utilizzata da mio padre era la seguente.



Ed ecco alcune regole, tra le molte possibili, per la composizione del rettangolo “canonico”:

- pezzi di uguale colore non possono toccarsi;
- i quattro colori devono formare un’area continua all’interno del rettangolo (situazione opposta a quella precedente);
- le aree colorate devono essere accoppiate due a due; ad esempio, giallo e rosso insieme; verde e blu insieme;
- si deve costruire almeno un “isolamento”, cioè un pezzo deve essere circondato da un “mare” di un altro colore.

E così via, dando libero sfogo alla propria creatività.

5. Altri giochi con i “puzzle”

Il gioco appena descritto, nelle sue diverse varianti, è evidentemente un solitario (per quanto ci si possa sfidare in due o tre misurando il tempo impiegato per formare una certa configurazione), ma è anche possibile usare i “PUZZLE” per giocare contemporaneamente in più persone.

Un gioco che segue la falsariga di quello proposto dal già citato Gardner per i pentamini è il seguente.

Si prende una scacchiera con i quadretti di dimensioni uguali - o leggermente superiori - a quelle del quadratino base - il “PUZZLE” 1x1 - e si ripartiscono i pezzi tra i giocatori, facendone scegliere uno per volta a ciascuno. Ogni giocatore, a turno, dispone un pezzo sulla scacchiera seguendo le linee orizzontali e verticali; il gioco prosegue così finché uno dei giocatori non è più in grado di posare nessuno dei suoi pezzi e viene eliminato.

6. Istruzioni pratiche

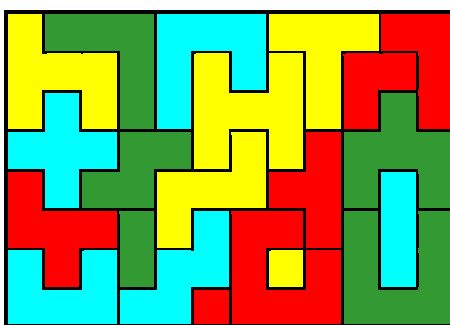
Il gioco dei “PUZZLE” è molto facile da autocostruire.

Se ci si limita al gioco sul piano, basta ritagliare i pezzi su cartoncino o compensato.

Se, invece, si vuole avere la possibilità di giocare nelle tre dimensioni (opzione senz’altro consigliata), bisogna procurarsi un numero sufficiente di cubetti di legno da incollare tra loro; si può anche partire da un listello lungo a sezione quadrata e poi segare i pezzi necessari.

Una volta che si hanno a disposizione i 21 pezzi, conviene colorarli secondo le regole sopra descritte e si può cominciare a giocare.

Il gioco dei “PUZZLE” è divertente e istruttivo, aguzza l’ingegno e stimola fantasia e creatività. Provare per credere!



Il “PUZZLE dei 70”, ideato per i 70 anni di mio padre

Bibliografia

GARDNER. M., *Enigmi e giochi matematici*, SuperBUR, 2000

GOLOMB Solomon W., *Polyominoes: puzzles patterns, problems and packings*, Princeton University Press, 1994

PELLEGRINO C., *Aspetti matematici del tangram*, in Atti Convegno Scienza e Gioco, Sansoni, 1986

147. Il Problema del Profilo Ottimale

Gabriele Taddei

Sommario

Nel 1685, Isaac Newton, spinto da motivazioni metafisiche (vedi, ad esempio, [Mai00]), intraprese lo studio del moto di un corpo attraverso un mezzo non viscoso e incompressibile. Scrive nei *Principia mathematica philosophiae naturalis*: «se in un mezzo rarefatto, composto di particelle uguali disposte liberamente ad uguale distanza l'una dall'altra, si muovono una palla e un cilindro con uguale diametro e con uguale velocità nella direzione nell'asse del cilindro, allora la resistenza della palla sarà la metà di quella del cilindro».

Le pagine seguenti inquadrano il problema del profilo aerodinamico, giungendo alla costruzione del modello proposto da Newton ([Gol80], [BK99]), e ne vengono descritte alcune proprietà elementari, lasciando la trattazione tecnica a testi specializzati (ad esempio, [BB05], [BG97], [BK95], [BK99], [CLR00]).

1 Il problema del profilo aerodinamico: le ipotesi

Consideriamo un corpo in moto con velocità costante attraverso un fluido¹. La questione che vogliamo affrontare è:

quale profilo deve avere il corpo per rendere minima la resistenza col fluido?

La domanda, di per sé molto semplice, si rivela cruciale nella progettazione ingegneristica di numerosi strumenti e mezzi di trasporto quali, ad esempio, l'aereo o il sommergibile. Tuttavia la questione, che può essere considerata uno dei primi problemi nella storia del Calcolo delle Variazioni, si rivela complessa da un punto di vista matematico e non ancora completamente risolta. Qui ci limitiamo ad introdurre un modello (risalente a Newton) e a svolgere qualche commento.

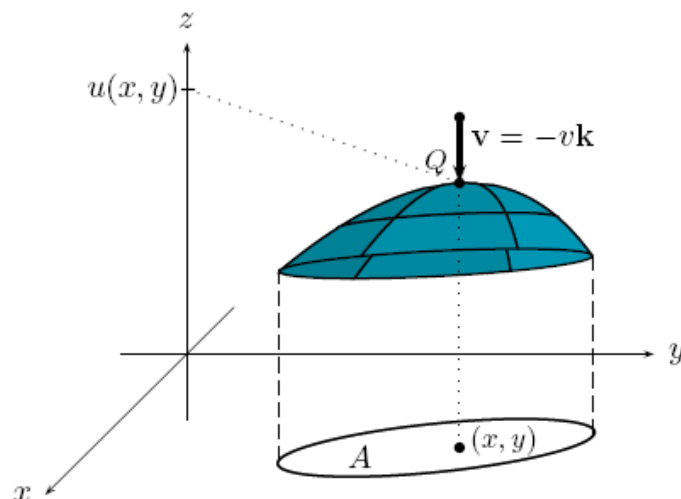


Figura 1: Profilo di un solido investito da un fluido con velocità $\mathbf{v} = -v\mathbf{k}$.

¹ Con “fluido” intendiamo un qualunque mezzo ospite formato da particelle uguali, non interagenti fra loro. Si può pensare all'aria, come all'acqua, alla sabbia, alla polvere, ecc.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale tridimensionale $Oxy\zeta$ comobile con il corpo, ovvero in cui il corpo sia fermo, e supponiamo che il fluido si muova con una velocità costante \mathbf{v} di intensità v e direzione opposta rispetto a quella dell'asse ζ , ovvero sia $\mathbf{v} = -v \mathbf{k}$, essendo \mathbf{k} il versore relativo all'asse ζ (vedi Figura 1). Supponiamo che la massima sezione del corpo ortogonale alla velocità \mathbf{v} sia un insieme regolare A del piano xy : in poche parole, immaginiamo che il corpo sia appoggiato sul piano xy e che la sua base A sia la massima sezione orizzontale.

Considereremo, in prima approssimazione, le seguenti ipotesi modellistiche:

1. Il fluido sia composto da particelle uguali con la medesima velocità \mathbf{v} , non interagenti fra loro. Si trascurino eventuali effetti dovuti alla viscosità o alla turbolenza.
2. Le particelle del fluido colpiscono verticalmente e in modo elastico il fronte del corpo una sola volta.
3. La resistenza sia proporzionale all'intensità della quantità di moto. Si trascurino gli attriti tangenziali e solo le componenti verticali della quantità di moto concorrano alla resistenza totale.
4. Il profilo del corpo a contatto col fluido sia il grafico di una funzione $u : A \rightarrow [0, +\infty)$ nelle due variabili x, y , essendo queste le coordinate nel piano di base xy di un punto di A .

2 La resistenza “puntuale”

Dobbiamo valutare la resistenza totale opposta dal corpo al moto del fluido². Concentriamoci, per ora, in un punto Q sul fronte dell'oggetto. Una particella del fluido incidente in Q possiede una quantità di moto pari a $\mathbf{P} = m \mathbf{v} = -mv \mathbf{k}$, essendo m la massa della particella. Per comodità, supponiamo le particelle di massa e velocità unitarie, cosicché possiamo scrivere più semplicemente $\mathbf{P} = -\mathbf{k}$. L'ipotesi 3 afferma che la parte tangenziale della quantità di moto \mathbf{P} va trascurata. Pertanto, se \mathbf{n} è la normale al fronte del corpo in Q e ϑ è l'angolo formato dalla verticale e dal piano tangente (vedi Figura 2), la componente non tangenziale di \mathbf{P} vale $\mathbf{P} \sin \vartheta$. Di questa, però, sempre per l'ipotesi 3, solo la parte verticale concorre alla resistenza totale; tale componente è $\mathbf{P} \sin^2 \vartheta$. Siccome \mathbf{P} ha intensità pari a 1, concludiamo che la resistenza in Q è³ $\sin^2 \vartheta$. Osserviamo esplicitamente che il valore dell'angolo ϑ dipende dal punto Q considerato sul profilo, ovvero, per l'ipotesi 4, sul grafico della funzione u .

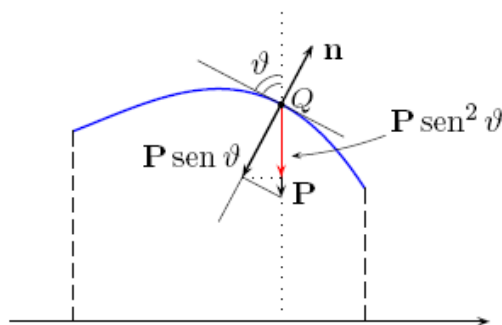


Figura 2: Sezione del solido.

In analogia con quanto noto per le funzioni in una variabile, il punto Q (che ora avrà 3 coordinate) sarà descritto dalla terna di valori $(x, y, u(x, y))$, ove (x, y) è un opportuno punto del dominio A di u (vedi Figura 1). Pertanto, avremo che ϑ dipende dal punto (x, y) di A e scriveremo $\vartheta(x, y)$ per evidenziare esplicitamente la dipendenza dell'angolo dalle coordinate del punto esaminato.

² Va osservato che abbiamo ribaltato il problema: inizialmente parlavamo di un corpo in moto in un fluido, ora di un fluido in moto che colpisce un corpo fermo. Le due situazioni sono equivalenti, a meno di cambiare sistema di riferimento. Per motivi tecnici (quali, ad esempio, avere un'unica funzione u che descrive il profilo dell'oggetto), è più comodo supporre il corpo fermo e il fluido in moto.

³ Se le particelle non hanno velocità e massa unitarie, la resistenza in Q è $mv \sin^2 \vartheta$, ovvero proporzionale a quella che abbiamo ricavato. Per quello che segue, la costante mv non altera la sostanza.

Abbiamo quindi costruito una funzione di due variabili, che potremmo chiamare *resistenza puntuale*, che ad ogni punto di coordinate $(x, y) \in A$ associa il valore $\text{sen}^2 \vartheta(x, y)$ della resistenza al fluido nel punto $Q = (x, y, u(x, y))$ del profilo. La resistenza totale è data dalla somma di tutti i contributi delle resistenze puntuali, ovvero, per quanto detto, dei valori di $\text{sen}^2 \vartheta(x, y)$ al variare dei possibili punti $(x, y) \in A$. Ma come descrivere questa somma? I punti da considerare sono infiniti e non numerabili. L'idea può essere lavorare per approssimazione, come ora dettagliamo.

3 La resistenza totale: un integrale doppio

Anziché considerare la resistenza in ogni singolo punto, possiamo suddividere A in un numero *finito* k di quadretti A_n (con bordo eventualmente curvo vicino al bordo di A) e scegliere un punto (x_n, y_n) in ogni quadretto (vedi Figura 3). In tal modo, associamo a tutto il quadretto considerato la resistenza nel punto (x_n, y_n) , ovvero supponiamo che la resistenza in tutti i punti di A_n sia quella calcolata nel punto (x_n, y_n) , cioè $\text{sen}^2 \vartheta(x_n, y_n)$. È chiaro che più piccolo è il quadratino, più questa approssimazione è migliore⁴. La resistenza associata a tutto il quadretto A_n sarà allora

$$\text{sen}^2 \vartheta(x_n, y_n) \cdot \text{area}(A_n);$$

il prodotto con l'area permette di pesare tutti i punti del quadretto col medesimo valore della resistenza. In questa approssimazione, la resistenza totale sarà la somma delle resistenze approssimate su tutti i quadratini, cioè

$$\sum_{n=1}^k \text{sen}^2 \vartheta(x_n, y_n) \cdot \text{area}(A_n) \tag{1}$$

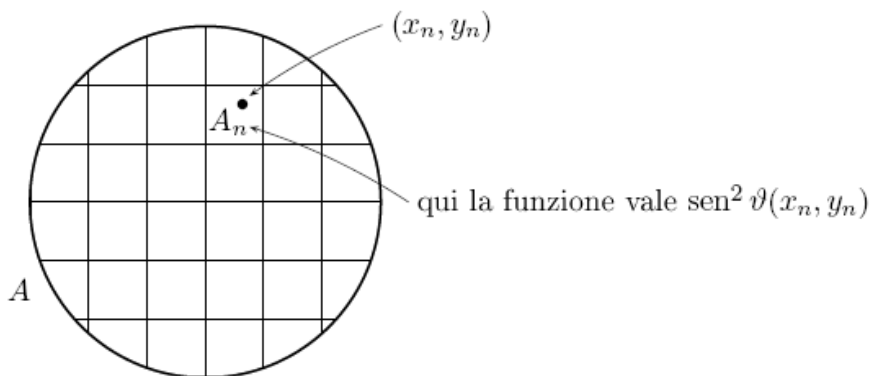


Figura 3: Suddivisione del dominio A (in questo caso, un cerchio) di u in quadretti A_n , in ognuno dei quali si sceglie un punto (x_n, y_n) .

Se vogliamo ora migliorare la nostra approssimazione, dobbiamo rimpicciolire i quadratini, i quali, di conseguenza, aumenteranno in numero. Osserviamo che la somma introdotta dalla (1) è detta *somma di Cauchy* per la funzione di due variabili $\text{sen}^2 \vartheta(x, y)$. Supponendo la funzione $\text{sen}^2 \vartheta(x, y)$ continua e A chiuso e limitato, un risultato generale nella Teoria dell'integrazione afferma che, rimpicciolendo sempre più tutti i quadratini, la somma (1) converge all'integrale della funzione data nelle due variabili x e y . Possiamo allora concludere che la resistenza totale è data da

$$\int_A \text{sen}^2 \vartheta(x, y) dx dy \tag{2}$$

ove notiamo l'analogia con la (1): la somma su tutti i quadratini in A è divenuta l'integrale sull'*insieme* A , la funzione è sempre $\text{sen}^2 \vartheta(x, y)$ e l'area di A_n è divenuta l'area di un quadratino di lati infinitesimi dx e dy , ovvero $dx dy$.

⁴ Pur di supporre la funzione $\vartheta(x, y)$ continua...

4 La resistenza totale in termini di u

Ritorniamo ora alla nostra questione. Ci chiedevamo quale dovesse essere il profilo del corpo che minimizzasse la resistenza, quindi, per quanto detto, che minimizza la (2). Ora, il profilo del corpo, per l'ipotesi 4, è dettato dalla funzione u ; quindi è opportuno modificare la struttura della (2) facendo comparire esplicitamente la u . Notiamo che si ha

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta = \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \vartheta}$$

avendo usato la relazione fondamentale della goniometria e diviso⁵ numeratore e denominatore per $\operatorname{sen}^2 \vartheta$. Vogliamo legare il termine $\operatorname{ctg}^2 \vartheta$ alla funzione u .

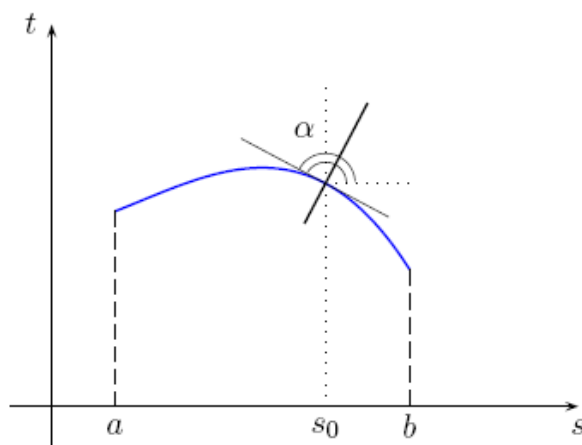


Figura 4: Grafico di f .

Consideriamo la sezione del corpo col piano che contiene \mathbf{n} e \mathbf{P} ; in tale piano scegliamo un sistema di assi ortogonali ausiliario (s, t) , l'asse t diretto come la verticale \mathbf{k} nel piano (vedi Figura 4). Il profilo del corpo è ora il grafico di una funzione f nella sola variabile s che supponiamo variare in un intervallo (a, b) ⁶; la retta tangente a tale grafico in un punto di ascissa $s_0 \in (a, b)$ ha pendenza $f'(s_0)$ e, come è noto, tale valore è anche la tangente dell'angolo α che la retta forma col semiasse positivo delle s . Poiché $\alpha = \pi/2 + \vartheta$, si ha che $f'(s_0) = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \vartheta$, da cui $\operatorname{ctg}^2 \vartheta = |f'(s_0)|^2$. Ora, la retta tangente è individuata nello spazio tridimensionale da un vettore che risulta essere tangente al profilo del corpo e che quindi dipende dalla funzione u . Tale vettore è legato al *gradiente* Du della funzione u , il quale è a sua volta un vettore che generalizza in un certo senso il concetto di derivata nel caso di funzioni in più variabili. In particolare, si ha $|f'(s_0)|^2 = |Du(x_0, y_0)|^2$ se il punto s_0 nel piano sezione corrisponde al punto $(x_0, y_0) \in A$. Con la scrittura $|Du(x_0, y_0)|$ indichiamo il *modulo* del vettore $Du(x_0, y_0)$. Possiamo allora concludere che la resistenza totale è data da

$$R(u) = \int_A \frac{1}{1 + |Du(x, y)|^2} dx dy \quad (3)$$

La questione iniziale si traduce allora nel seguente problema:

fra le possibili funzioni continue $u : A \rightarrow [0, +\infty)$ trovare quella che rende minimo il funzionale

$$R(u) = \int_A \frac{1}{1 + |Du(x, y)|^2} dx dy$$

⁵ Osserviamo che si può supporre $\operatorname{sen}^2 \vartheta \neq 0$, in quanto, in caso contrario, non ci sarebbe contributo alla resistenza.

⁶ Questo è sempre vero se A è, ad esempio, convesso.

5 Alcune considerazioni

Si può subito osservare che il problema, così come formulato, non ammette soluzione. Infatti, esistono delle funzioni continue che rendono il valore di R sempre più piccolo. Basta fornire degli esempi di corpi in cui prevale l'attrito tangenziale, in quanto, per l'ipotesi 3, esso non entra in gioco nel calcolo della resistenza. Ciò equivale a scegliere corpi ad esempio molto lunghi ed appuntiti. Se supponiamo A un cerchio, il profilo di un cono retto di base A ed altezza via via più grande rende il valore di (3) sempre più piccolo. Facciamo un semplice conto in questo caso; supponiamo che A abbia raggio 1 e sezioniamo il cono con un piano verticale passante per il vertice. La sezione ottenuta è un triangolo isoscele (vedi Figura 5, sinistra) i cui lati uguali hanno pendenza $\pm b$, essendo b l'altezza del cono. Allora si ha $|Du(x, y)|^2 = b^2$ e quindi la resistenza puntuale è costante. L'idea alla base delle somme di Cauchy (1) fornisce allora⁷

$$\int_A \frac{1}{1 + |Du(x, y)|^2} dx dy = \int_A \frac{1}{1 + h^2} dx dy = \frac{1}{1 + h^2} \cdot \pi$$

la quale tende a 0 per $b \rightarrow +\infty$, cioè al crescere dell'altezza del cono. Tuttavia, poiché $R(u)$ è positivo per ogni u , un'eventuale funzione u_0 che rendesse minimo R avrebbe comunque una resistenza positiva $R(u_0)$. È però possibile scegliere un cono abbastanza lungo per ottenere un valore di resistenza inferiore a $R(u_0)$, contro la proprietà di u_0 di essere punto di minimo. Quindi non esiste alcuna funzione continua u che rende minimo (3).

Si può allora pensare di considerare funzioni limitate, ovvero impedire che il corpo possa divenire sempre più lungo. Tuttavia, anche in questo caso il minimo non esiste. Basta considerare tanti coni alti uguali le cui basi riempiono A (vedi Figura 5, destra). Aumentando il numero di coni, le basi si rimpiccioliscono ma, essendo l'altezza fissata, le inclinazioni dei lati crescono sempre più, esattamente come nel caso precedente di un cono lungo quanto si vuole.

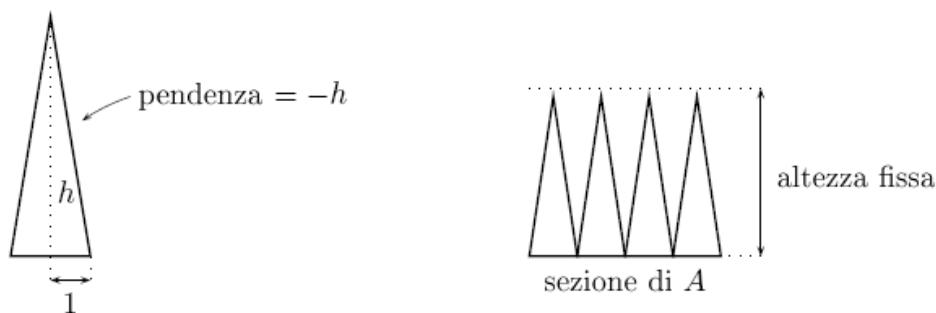


Figura 5: Sezioni di un solido lungo e appuntito e di uno corto ma oscillante. Come si nota, le pendenze possono essere rese sempre più grandi: nel primo caso si aumenta l'altezza, nel secondo si diminuisce la base.

Ma allora il problema non ha soluzione? Così come formulato, sì. Tuttavia, aggiungendo qualche ipotesi in più, si può sperare di dimostrare l'esistenza di una soluzione. Elenchiamo quattro possibili scelte.

1. La funzione u sia concava e limitata ([BB05]). L'ipotesi di concavità impedisce il caso dei tanti piccoli coni aguzzi cui si è accennato e garantisce alcune proprietà tecniche che permettono di dimostrare l'esistenza di una soluzione al problema.
2. La funzione u sia radiale e limitata ([BB05], [BK99]). In tal caso il corpo può essere visto come una superficie di rotazione. Già Newton aveva congetturato una possibile forma della soluzione, la quale assomiglia molto ad un budino (Figura 6)! E questo è ora un teorema.
3. Le particelle colpiscono il corpo una sola volta ([CLR00], [BK95]). Questa ipotesi si traduce in una disuguaglianza che la funzione limitata u deve soddisfare. Tuttavia ciò non è sufficiente per dimostrare l'esistenza di un punto di minimo per R ; e questo è tutt'ora un problema aperto.

⁷ π è l'area di A .

Osserviamo che l'ipotesi di singolo impatto può escludere che il corpo abbia delle concavità tipo quelle presenti nell'esempio di tanti coni appuntiti affiancati; in tal caso, infatti, può succedere che le particelle colpiscano l'oggetto più di una volta, eventualità che non è stata considerata nel calcolo della resistenza totale.

4. Il profilo del corpo possa non essere il grafico di una funzione, ma l'oggetto sia comunque convesso ([BG97]). In questo caso il problema ha soluzione e la dimostrazione dell'esistenza di un profilo ottimale utilizza tecniche di teoria geometrica della misura.

I metodi usati per provare l'esistenza della soluzione (che a volte può non essere unica, come nel caso di una funzione u radiale che verifica anche la disuguaglianza di singolo impatto citata del caso 3) sono moderni concetti di Analisi funzionale, ma si fondano sulla stessa idea che sta alla base del Teorema di Weierstrass sulle funzioni continue.

Per concludere, osserviamo che i valori della resistenza calcolati con la (3) nel caso di un cilindro e di una sfera entrambi di raggio 1 sono π e $\pi/2$ (vedi Esercizio), ovvero, con le parole di Newton, «la resistenza della palla sarà la metà di quella del cilindro».

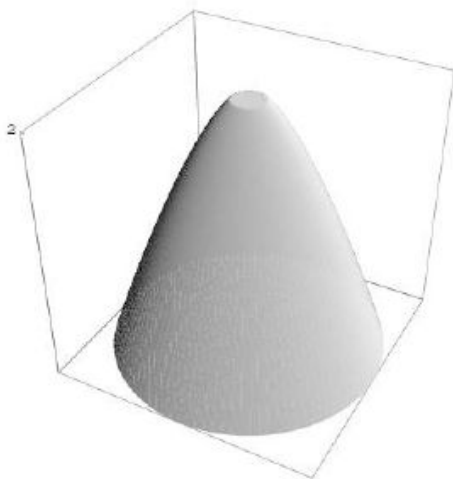


Figura 6: Profilo ottimale nel caso di una superficie generata dalla rotazione del grafico di una funzione limitata e non crescente.

Esercizio. Scriviamo l'integrale doppio della (3) nel caso in cui \mathcal{A} sia un cerchio di raggio 1 ed il profilo del corpo sia una superficie ottenuta dalla rotazione del grafico di una funzione di una variabile $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Osserviamo che ad ogni $x \in (0,1)$ corrisponde un punto del grafico di u che, ruotando attorno all'asse y , genera nello spazio una circonferenza lunga $2\pi x$ (vedi Figura 7); pertanto, la resistenza opposta da ogni punto di tale circonferenza è la medesima ed è pari a quella opposta dal punto di ascissa x che l'ha generata. Di conseguenza, il valore di resistenza puntuale $1/(1 + [u'(x)]^2)$ va “pesato” con la quantità dei punti sulla circonferenza, ovvero la resistenza puntuale va moltiplicata per la lunghezza della circonferenza di raggio x . In questo quadro, la (3) diventa⁸

$$\int_0^1 2\pi x \cdot \frac{1}{1 + [u'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{1 + [u'(x)]^2} dx$$

Usare la precedente espressione per valutare la resistenza nel caso del cilindro e della sfera, i cui profili si ottengono ruotando attorno all'asse y i grafici delle funzioni $u(x) = 1$ e $u(x) = \sqrt{1-x^2}$ rispettivamente, e ritrovare quanto affermato da Newton.

⁸ La stessa espressione si ottiene dalla (3) passando a coordinate polari nel caso di una u radiale.

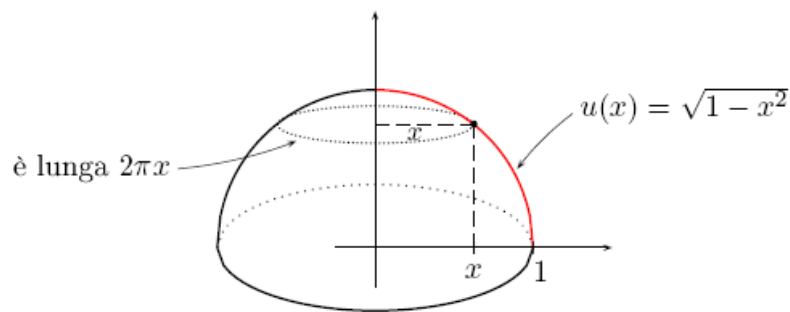


Figura 7: Semisfera ottenuta dalla rotazione attorno all'asse y del grafico della funzione $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ data da $u(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Riferimenti bibliografici

- [BB05] D. Bucur e G. Buttazzo. *Variational Methods in Shape optimization Problems*. Birkhäuser, 2005.
- [BG97] G. Buttazzo e P. Guasone. Shape optimization problems over classes of convex domains. *Journal of Convex Analysis*, 4 (2): 343–351, 1997.
- [BK95] G. Buttazzo e B. Kawohl. Minimum Problems over Sets of Concave Functions and Related Questions. *Math. Nachrichten*, 173: 71–89, 1995.
- [BK99] G. Buttazzo e B. Kawohl. On Newton's Problem of Minimal Resistance. *The Mathematical Intelligencer*, 15 (4), Springer–Verlag, New York, 1993.
- [CLR00] M. Comte e T. Lachand-Robert. Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 12: 173–211, 2000.
- [Gol80] H. H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer–Verlag, Heidelberg, 1980.
- [Mai00] R. Maiocchi. *Storia della scienza in occidente*. La Nuova Italia, 2000.

148. Ottica geometrica e fenomeni ondulatori con Geogebra

Pietro Romano
 pr.romano@tin.it

Sunto

In queste pagine, vengono mostrate alcune applicazioni del software di geometria dinamica Geogebra che permettono simulazioni di ottica geometrica e ondulatoria. Geogebra è un programma freeware, che può essere quindi prelevato senza costo alcuno dal sito www.geogebra.org. Questo software, oltre alle note peculiarità degli ambienti dinamici, nelle ultime versioni si è dotato della funzione di *animazione delle slider* che consente, ad esempio, di simulare l'evoluzione temporale di processi fisici.

I file associati alle costruzioni qui descritte possono essere richiesti direttamente all'autore.

1. Specchi sferici: equazione dei punti coniugati

In fig.1, viene simulata la riflessione di un raggio di luce su uno specchio sferico:

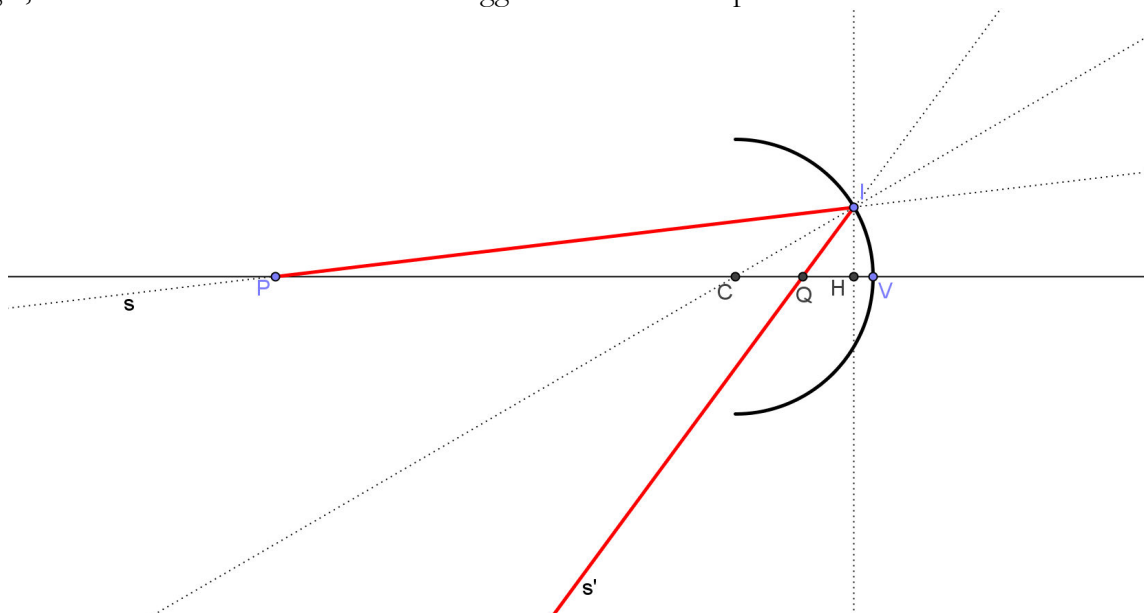


Fig.1: Riflessione su uno specchio sferico

Indicando con $R = \overline{CV}$, $a = \overline{HV}$, $p = \overline{PV}$ e $q = \overline{QV}$ e applicando al triangolo PIQ il teorema della bisettrice, dopo semplici passaggi, si determina l'equazione dei punti coniugati [1]:

$$\frac{R[2pq - R(p + q)]}{2(p - R)(q - R)} = a \quad (1)$$

Questa espressione è valida per raggi comunque inclinati rispetto all'asse ottico. Nel caso di raggi parassiali ($a \rightarrow 0$), si trova da qui la nota espressione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad (2)$$

Possiamo usare la nostra costruzione per sottoporre a verifica la (2). Il punto X è definito da: $X = (p, q)$. Disponendo il punto I in prossimità dell'asse ottico (raggi parassiali), si osserva come, variando P , X si muove sull'iperbole (2):

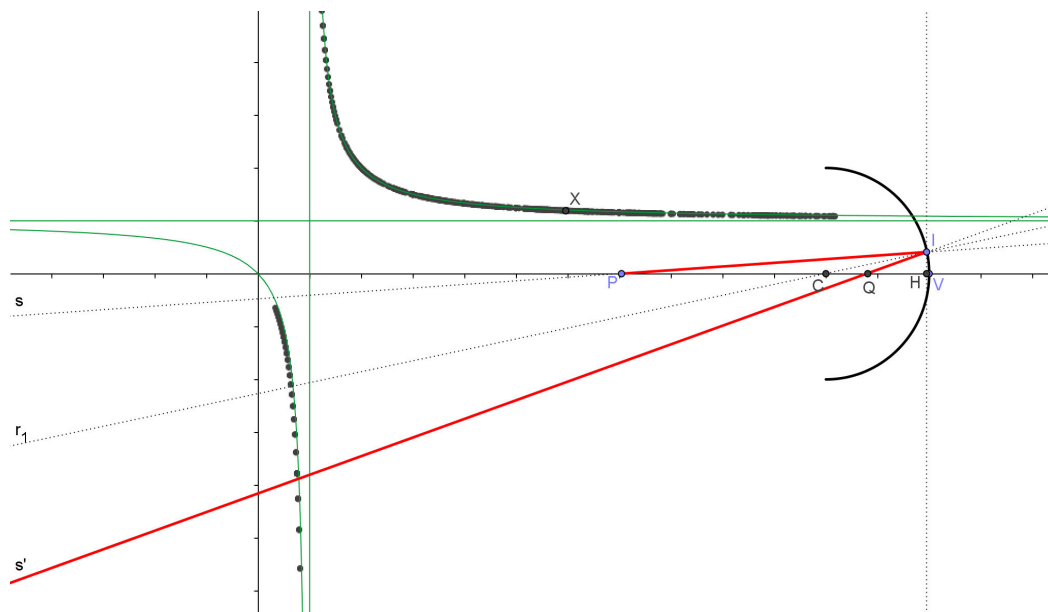


Fig. 2: Verifica dell'equazione dei punti coniugati dello specchio sferico.

Facendo in modo che $p \rightarrow \infty$, si può anche determinare la distanza focale, verificando che il fuoco si trova ad una distanza dal vertice pari a metà del raggio ($q = f \approx R/2$).

2. Riflessione su uno specchio piano

Uno specchio piano può essere visto come uno specchio sferico avente raggio di curvatura infinito. Dalla (2), deduciamo allora che: $q = -p$, cioè l'immagine si forma simmetricamente rispetto allo specchio. La figura(3) mostra la costruzione:

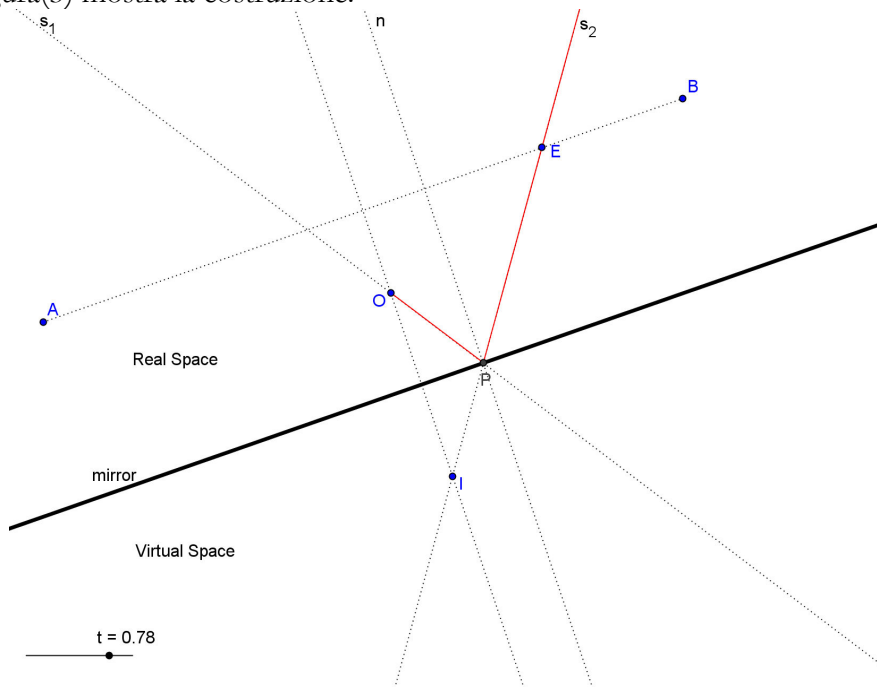


Fig. 3: Riflessione su uno specchio piano

Il generico raggio uscente da O incide sullo specchio in P e si riflette lungo PE . Si verifica facilmente che (1) il triangolo OPI è isoscele e che (2) lo specchio è bisettrice dell'angolo OPI . Queste due caratteristiche si mantengono qualunque sia la posizione di P . Quindi I non muta la sua posizione; in questo punto si concentrano i prolungamenti (in verso opposto a quello di propagazione) dei raggi riflessi.

Nel caso di uno specchio di dimensioni finite, una attività interessante è definire la regione di piano all'interno della quale un osservatore vede un dato oggetto O . Questa risulta delimitata dallo specchio AB e dalle semirette AA' e BB' (v. fig.4):

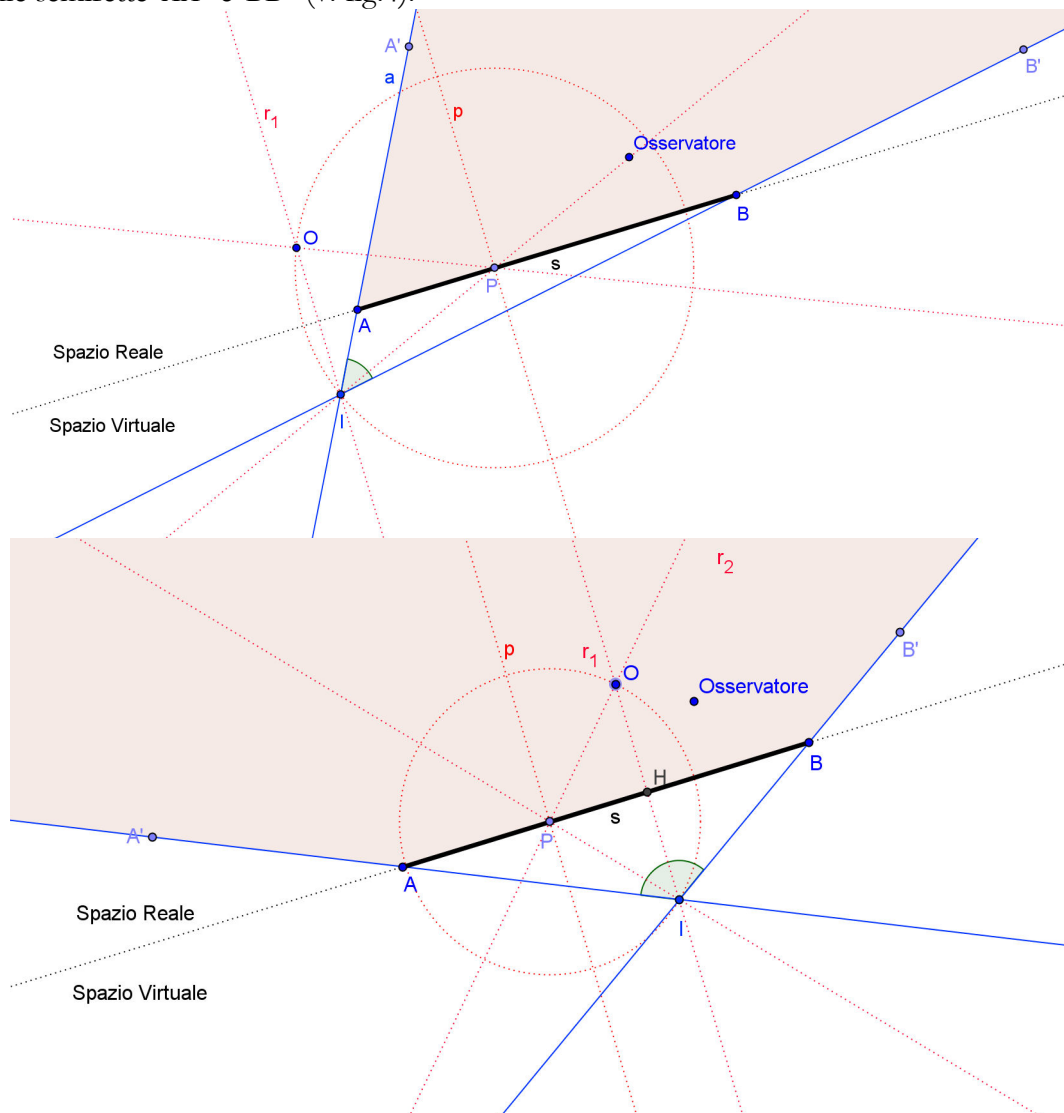


Fig.4: specchio piano finito

3. Specchi parabolici e specchi sferici

Uno specchio sferico ([1], [2]) concentra nel fuoco i raggi paralleli all'asse ottico solo se questi sono parassiali. In difetto di ciò, F varia al variare della distanza dei raggi dall'asse ottico. La figura che segue mostra questo fatto. Variando la posizione di P , il punto $X = (h, x_F)$ descrive il luogo mostrato (ottenuto attivando la traccia). Dalla (1), per $p \rightarrow \infty$, possiamo determinare l'equazione di questo luogo al variare di a :

$$q = f = \frac{(R - 2a)R}{2(R - a)} \quad (3)$$

che quindi è un ramo di iperbole:

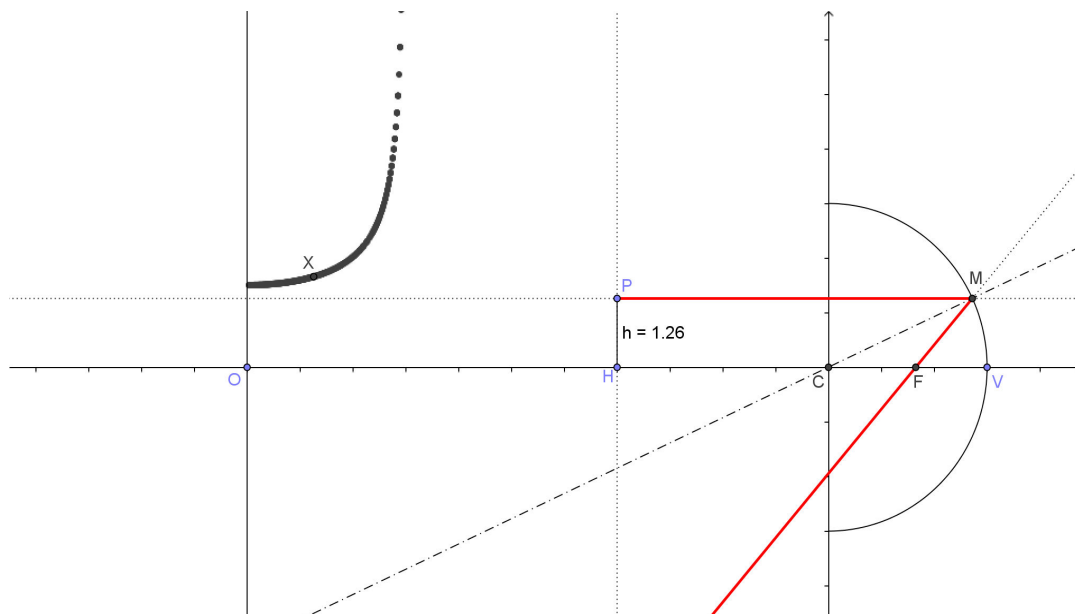


Fig.5: Posizione del fuoco in funzione della distanza dall'asse ottico

Diversa situazione si ha nel caso di uno specchio parabolico, in cui la distanza focale risulta indipendente dalla distanza dall'asse ottico. Per far vedere questo fatto, costruiamo in primo luogo una parabola con un metodo che ci consenta di ottenere anche la retta tangente in ogni suo punto. Fissati un punto F e una retta d (fuoco e direttrice della parabola), indichiamo con A il punto di intersezione della perpendicolare per F a d . Su d , prendiamo un punto X , e costruiamo l'asse del segmento FX (retta t). Tracciata per X la perpendicolare a d (retta r), indichiamo con T l'intersezione di r con t . Il luogo di T al variare di X su d genera la parabola (i punti T sono equidistanti da fuoco e direttrice), di cui t è la tangente (in T).

Come si può vedere in fig. 6, la riflessione in T si ottiene effettuando una simmetria della retta PT rispetto alla retta t . Questa retta simmetrica (retta s) passa per F qualunque sia la posizione di X :

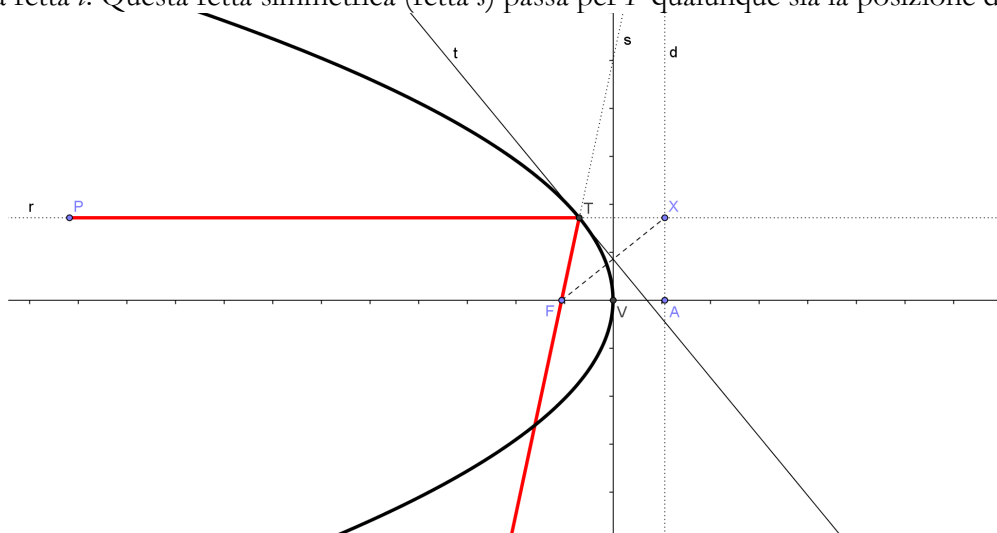


Fig. 6: riflessione su uno specchio parabolico.

Consideriamo ora la situazione seguente:

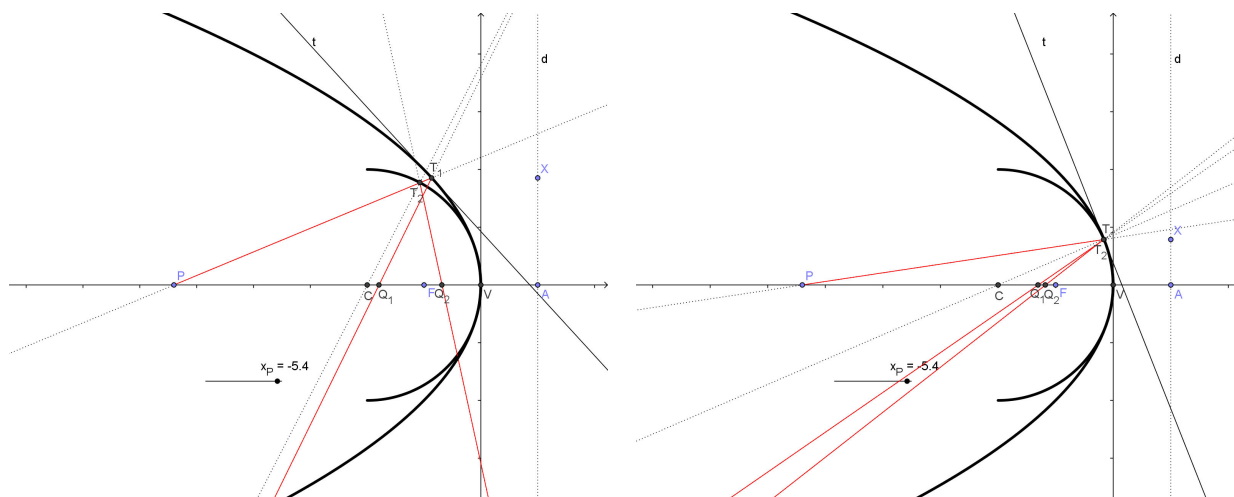


Fig.7: Confronto tra specchio sferico e specchio parabolico

La semicirconferenza in figura simula uno specchio sferico il cui centro è tale che $\overline{CV} = 2\overline{FV}$. Le due curve sono pressoché coincidenti in prossimità del vertice V . I due specchi (parabolico e sferico) formano, di un dato oggetto P posto sull'asse ottico, immagini differenti (Q_1 e Q_2 rispettivamente). Se però facciamo sì che l'incidenza sugli specchi si abbia in prossimità di V , i punti Q_1 e Q_2 tendono a sovrapporsi).

4. Proprietà ottiche di ellisse e iperbole

Nell'ellisse, un raggio uscente da uno dei due fuochi, dopo la riflessione, passa per l'altro fuoco. Nell'iperbole, passa per l'altro fuoco il prolungamento in verso opposto del raggio riflesso. Questo fatto è messo in evidenza nelle due figure che seguono:

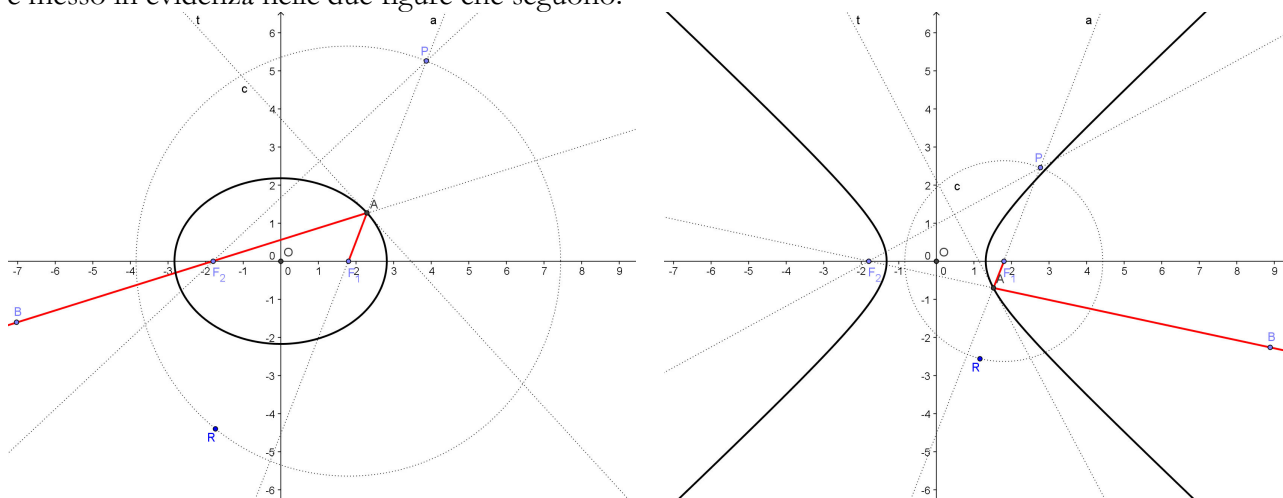


Fig.8: Proprietà ottiche di ellisse e iperbole

La costruzione geometrica è la stessa nei due casi. Nella figura a sinistra si ottiene l'ellisse scegliendo il raggio F_1R della circonferenza t maggiore della distanza F_1F_2 ; viceversa, si ottiene l'iperbole.

5. Riflessioni multiple su due specchi piani formanti un diedro

In figura, due specchi, VA e VB, di un oggetto O , immagini multiple. La tecnica costruttiva consiste nel considerare, alternativamente, le riflessioni sui due specchi, iniziando sia dall'uno che dall'altro. Ulteriori dettagli sulla costruzione sono date in [3].

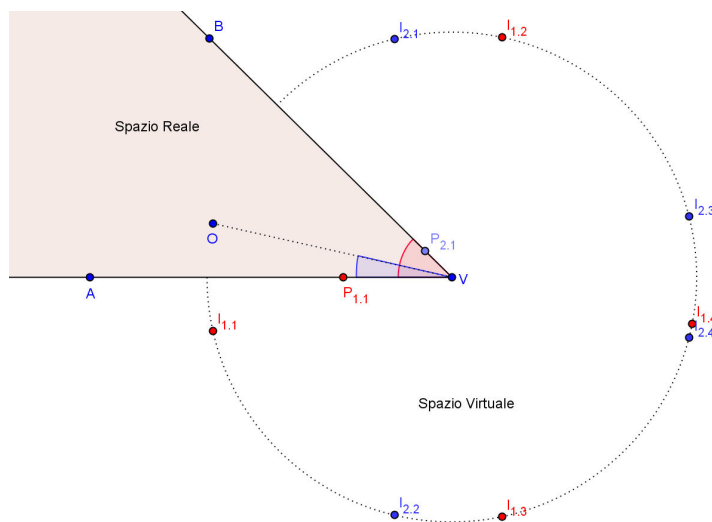


Fig.9: riflessioni multiple su due specchi piani

Il numero delle immagini ha una dipendenza piuttosto complessa sia dall'angolo del diedro ($\alpha = \widehat{AVB}$) che dalla posizione dell'oggetto, individuabile mediante l'angolo $\beta = \widehat{AVO}$ ([3]). Se però il rapporto $\frac{360^\circ}{\alpha}$ è senza resto, e $\beta = \frac{\alpha}{2}$, il numero di immagini è:

$$N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1 \tag{3}$$

fatto che può facilmente sottoposto a verifica.

6. Rifrazione su una superficie piana

Quando un raggio di luce incontra la superficie di separazione di due mezzi, viene in parte riflesso ed in parte trasmesso. Nel passare nel secondo mezzo, il raggio modifica la sua direzione di propagazione (rifrazione). Gli aspetti salienti del fenomeno sono mostrati nella costruzione di fig.10 ([1], [2]):

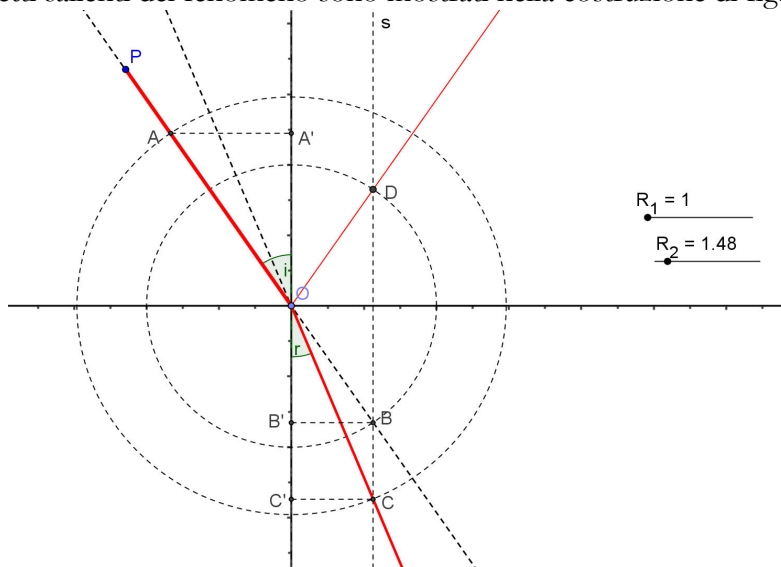


Fig. 10: Rifrazione di un raggio che passa da un mezzo ad un'altro di maggiore densità ottica.

Il raggio PO rappresenta il raggio incidente. Con centro in O , si tracciano due circonferenze, di raggi $OB = r_1$ e $OC = r_2$. Il prolungamento del raggio incidente incontra la circonferenza di raggio OB in B . Da qui, si traccia la perpendicolare alla superficie di separazione dei due mezzi, che incontra la circonferenza di raggio OC nel punto C . Il raggio OC è il raggio rifratto, in quanto, come segue dalla fig. 9:

$$\begin{cases} \text{sen } i = \frac{BB'}{OB} \\ \text{sen } r = \frac{CC'}{OC} \end{cases} \rightarrow \text{essendo } BB' = CC' \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{OC}{OB} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4)$$

Quindi, il rapporto $\text{sen } i / \text{sen } r$ non dipende dalla posizione di P , ma dipende solamente dai raggi delle due circonferenze. Esso si mantiene pertanto costante (al variare della posizione di P e quindi dell'angolo di incidenza), se manteniamo costanti i suddetti raggi, che possono così interpretarsi come indici di rifrazione dei due mezzi (In fig.10, si è scelto $r_1 = OB = 1$ ed $r_2 = OC = 1.48$, che simula il passaggio dal vuoto al plexiglass).

Se invece è $r_1 = OB = 1.48$ e $r_2 = OC = 1$ (fig.11, a sinistra), viene simulato il passaggio inverso:

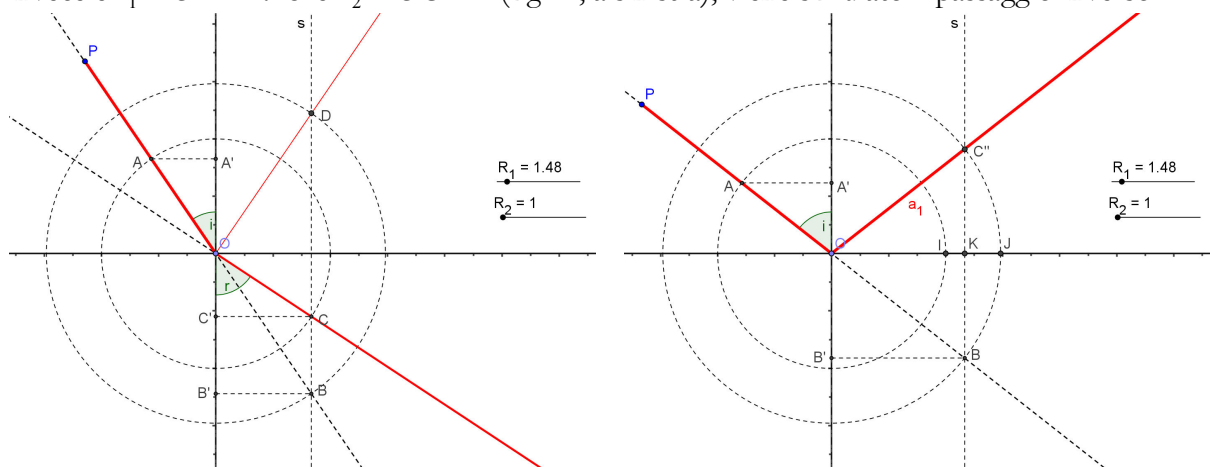


Fig.11: Rifrazione nel passaggio da un mezzo ad uno meno denso e riflessione totale.

In questa nuova situazione (passaggio da un mezzo ad uno meno denso), è possibile che si verifichi la riflessione totale (quando l'angolo di incidenza supera un certo valore limite). Dal punto di vista della costruzione geometrica, ciò si realizza quando la perpendicolare per B alla superficie di separazione non incontra la seconda circonferenza (quella di raggio OB – fig.11, a destra). La costruzione del raggio riflesso si effettua come segue:

1. Si traccia il segmento IJ ;
2. Si determina l'intersezione K tra la retta s per B ed il segmento IJ ;
3. Si costruisce il simmetrico C'' del punto B rispetto al punto K ;
4. Si traccia la semiretta OC'' .

7. Prisma

Applichiamo ora la costruzione descritta per simulare il comportamento di un prisma ottico. In fig.12, viene presentata la costruzione completa. Le due semirette uscenti da A rappresentano il prisma (α è l'angolo di apertura del prisma). Il raggio PO è il raggio incidente. In O_1 ed in O_2 , si hanno i due processi di rifrazione (che sono uno inverso dell'altro):

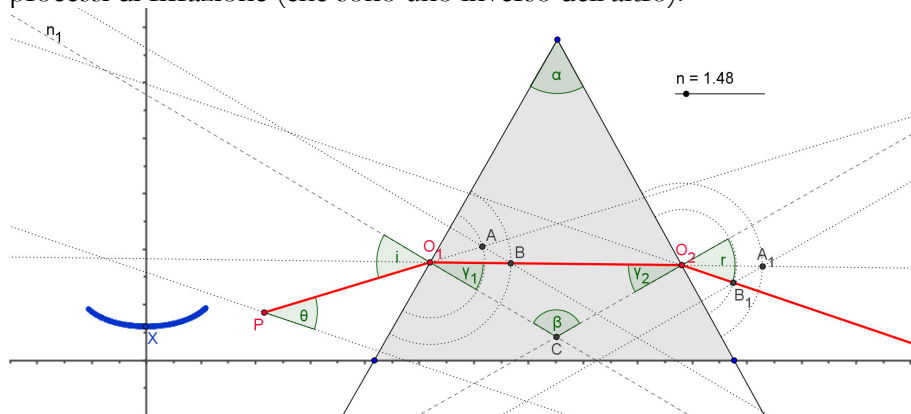


Fig.12: Simulazione del passaggio di un raggio di luce attraverso un prisma.

Gli angoli i ed r rappresentano l'angolo di incidenza (in O_1) e l'angolo di rifrazione (in O_2). L'angolo θ rappresenta l'angolo di deviazione del raggio (cioè l'angolo tra la direzione iniziale e quella di uscita dal prisma). Gli angoli sono collegati dalle relazioni:

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma_1} = n; \quad \frac{\sin \gamma_2}{\sin r} = \frac{1}{n}; \quad \alpha + \beta = \pi; \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha; \quad \theta = (i - \gamma_1) + (\gamma_2 - r) \quad (5)$$

L'angolo θ risulta minimo quando è $i = r$. Per sottoporre a verifica questo fatto, costruiamo un punto $X = (i - r, \theta)$, attiviamo la modalità *traccia attiva* e osserviamo come varia la sua posizione al variare dalla posizione del punto P . Questo punto, come si vede in fig.12, descrive una curva il cui minimo si ha proprio quando $i - r = 0$.

8. Lastra piana

Nella fig.13, viene mostrata la simulazione del processo di attraversamento di una lastra piana da parte di un raggio luminoso (con il mezzo 1 meno denso del mezzo 2):

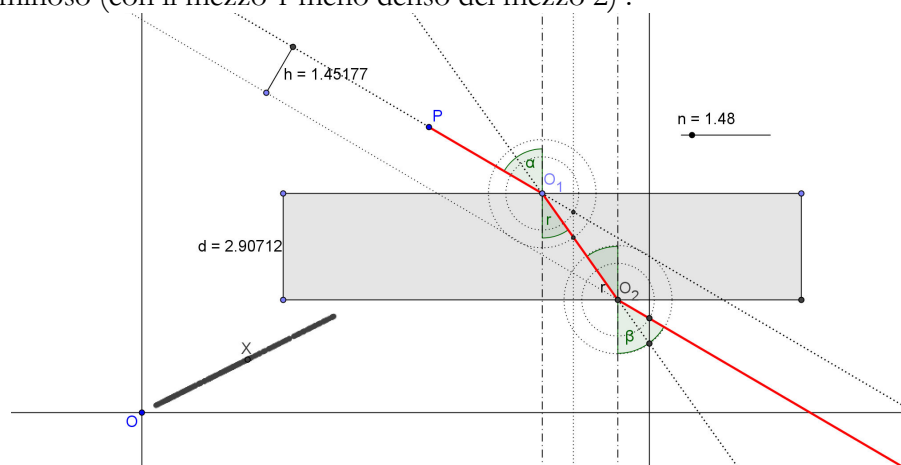


Fig.13: Doppia rifrazione su una lastra a facce piane e parallele.

E' noto che il raggio incidente PO_1 e il raggio che emerge dalla lastra sono paralleli e la distanza che li separa è espressa dalla relazione:

$$h = d \frac{\text{sen}(i - r)}{\text{cos } r} \quad (6)$$

dove d è lo spessore della lastra. Quindi, fissato l'angolo di incidenza i (e, conseguentemente, l'angolo di rifrazione r), la relazione tra d e h è lineare. Questa relazione si dimostra con semplici considerazioni trigonometriche. In fig.13, essa viene sottoposta a verifica, definendo un punto $X = (d, h)$ (rispetto al punto O). Attivando per X la traccia, si osserva appunto la linearità della (6).

9. Rifrazione su un diottro sferico e su un diottro piano

Applicando la stessa costruzione vista in 6. ad un arco di circonferenza, si simula il comportamento di un diottro ([1], [2]).

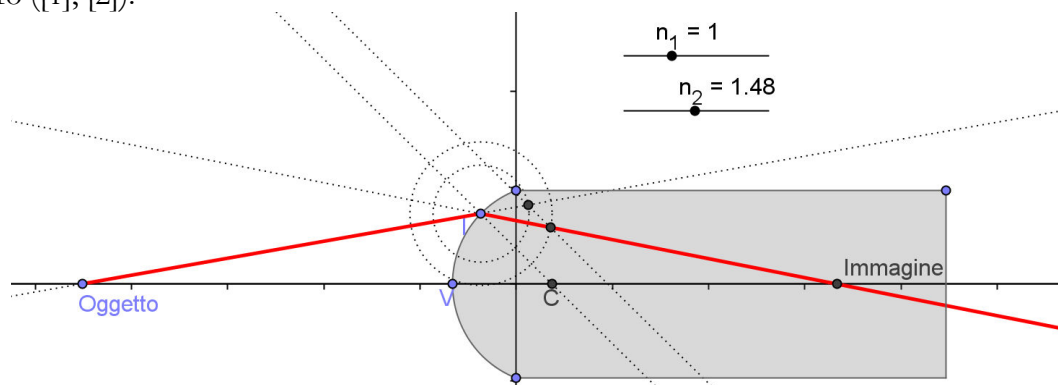


Fig.14: rifrazione su un diottro sferico.

Misurando le distanze p e q dell'oggetto e dell'immagine dal vertice, possiamo sottoporre a verifica l'equazione dei punti coniugati che, in condizioni di raggi parassiali, è ([2], [3]):

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (7)$$

Si può anche osservare come, fissata la posizione dell'oggetto, variando la posizione del punto I sulla superficie del diottro, se i raggi non sono parassiali, il punto in cui si forma l'immagine non è stabile.

Nel caso in cui il raggio di curvatura è infinito, ritorniamo alla situazione vista in 6.. Vogliamo però ora affrontare la questione dal punto di vista della formazione delle immagini. Dalla (7), per $r \rightarrow \infty$, troviamo:

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p \quad (8)$$

Ancora una volta, questa equazione vale per raggi parassiali. Solo in queste condizioni (cioè quando $d = \overline{TV} \rightarrow 0$), la posizione di Q non varia:

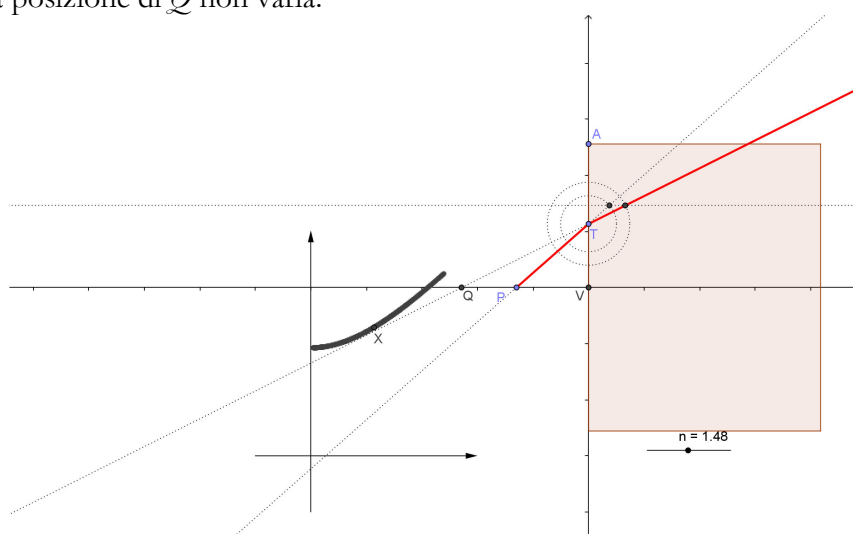


Fig.15: Verifica dell'equazione dei punti coniugati

10. Lente

Una lente è l'insieme di due diottri. I processi di rifrazione sono due, e sono reciproci. Per una analisi dettagliata delle equazioni caratterizzanti questo sistema, si veda [4], [5]. Qui, ci si limita a riportare solamente l'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + n \frac{a}{p'(a-p')} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (9)$$

dove $a = \overline{V_1V_2}$ è la distanza tra i vertici dei due diottri, aventi raggi di curvatura r_1 ed r_2 ; p , la distanza dell'oggetto da V_1 ; q , la distanza dell'immagine da V_2 ; p' , la distanza, misurata da V_2 , dell'immagine formata dal primo diottro (che diventa oggetto per il secondo diottro). Quando $a \rightarrow 0$, la (9) restituisce la ben nota equazione dei punti coniugati delle lenti sottili:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (10)$$

La costruzione è qui di seguito riportata:

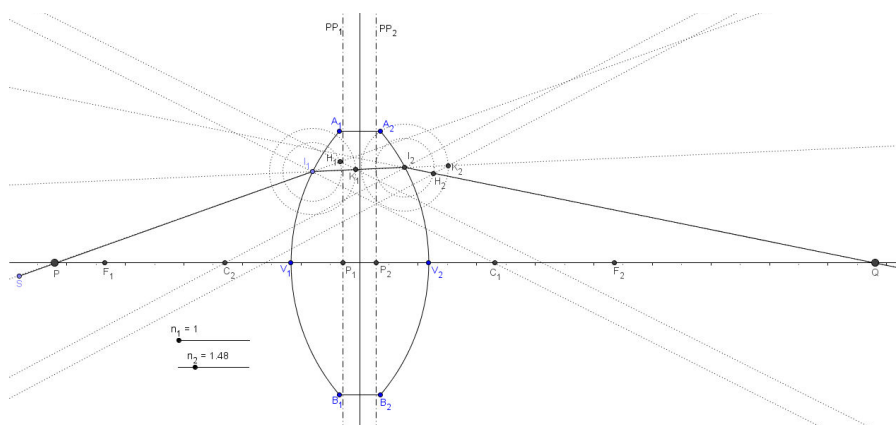


Fig.16: Formazione delle immagini in una lente (convergente)

Variando le posizioni dei vertici e dei punti A_1 e A_2 , è possibile simulare vari tipi di lenti (convergenti, divergenti, spesse, sottili, etc.) e verificare la validità delle equazioni (9)-(10).

11. Interferenza e diffrazione

Il più classico dei fenomeni dell'ottica ondulatoria è l'interferenza da due fenditure. Indicando con I_0 l'intensità dell'onda, si può dimostrare ([4]) che l'intensità risultante dalla sovrapposizione di N onde emesse da sorgenti poste in linea retta e separate da una distanza d è data da:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd \sin \theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)} \tag{11}$$

dove $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} s = ks$. ϕ è la differenza di cammino espressa in radianti mentre s è l'analoga quantità

espressa in metri. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il vettore d'onda ed esprime appunto il fattore di conversione tra ϕ ed s .

In primo luogo, usiamo Geogebra per mettere in evidenza le caratteristiche più salienti della (11). I grafici seguenti, mostrano alcune situazioni tipiche:

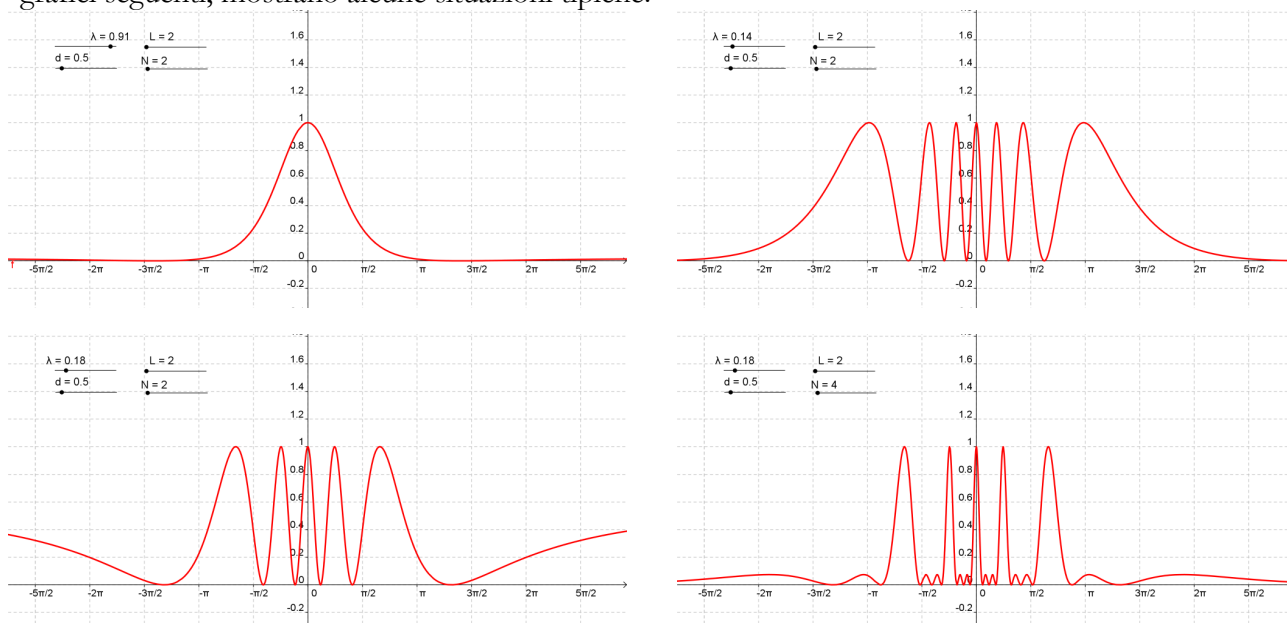


Fig. 17: Diverse rappresentazioni della (11)

L'interferenza si ha quando la lunghezza d'onda è inferiore alla distanza d tra le sorgenti. In alto a sinistra, non c'è figura di interferenza visto che $\lambda > d$. Viceversa, in alto a destra, si osserva invece l'interferenza. In basso, viene mostrato cosa si determina per effetto dell'aumento del numero di sorgenti. La particolarità del mostrare queste variazioni con Geogebra sta nella possibilità di variare i parametri significativi in modo dinamico, attraverso le slider.

Geogebra ci permette comunque di fare qualcosa in più di quanto appena visto: ci permette di effettuare una simulazione del fenomeno. Facciamo riferimento alla fig.18:

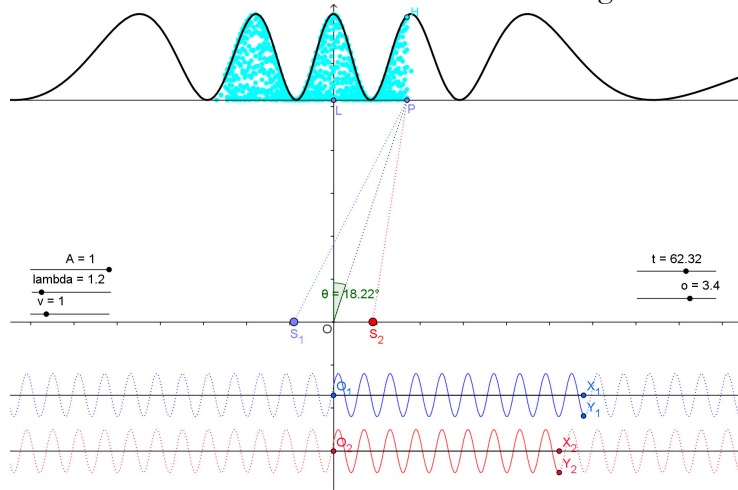


Fig.18: Simulazione dell'interferenza tra due sorgenti.

S_1 ed S_2 rappresentano le due sorgenti. Le onde emesse sono raffigurate in basso nella figura. Il punto P è il generico punto dello schermo dove si vuole osservare l'interferenza ed è individuato dall'angolo $\theta = \widehat{LOP}$. In P , si sommano le onde provenienti da S_1 e da S_2 . Esse hanno percorso cammini differenti ($\overline{S_1P} = \overline{O_1X_1}$ e $\overline{S_2P} = \overline{O_2X_2}$, rispettivamente). Misurando le ampiezze corrispondenti ($a_1 = X_1Y_1$ e $a_2 = X_2Y_2$), effettuandone la somma, si determina l'ampiezza risultante, il cui quadrato dà l'intensità dell'onda totale. È sufficiente ora definire un punto (il punto H), avente la stessa ascissa di P e ordinata pari a: $y_H = (a_1 + a_2)^2$. Nella figura, si osserva come il punto H esegue delle oscillazioni raggiungendo come valore massimo, per una data posizione P , quello definito dalla (11).

È possibile simulare l'interferenza di onde circolari, usando il comando *Successione*. La sintassi è:

Successione[Circonferenza[($d, 0$), i], $i, t, 100, \text{lambda}$]

Successione[Circonferenza[(- $d, 0$), i], $i, t + f, 100, \text{lambda}$]

Questi comandi permettono di generare una successione di circonferenze, le prime emesse dal punto $(d,0)$, l'altro gruppo dal punto $(-d,0)$. Il raggio delle circonferenze aumenta, controllato dal parametro t , che rappresenta il tempo. Posta pari a 1 la velocità dell'onda, l'intervallo di t tra una emissione e la successiva è pari a λ . In fig.19, due esempi:

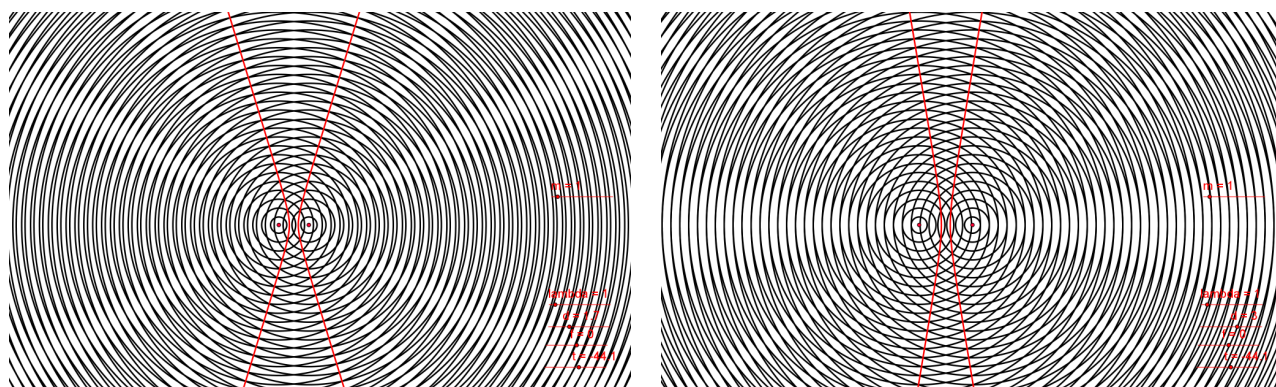


Fig.19: Interferenza di onde circolari

Nella situazione mostrata a destra, la distanza tra le sorgenti è un multiplo di λ ($d = 3\lambda$) e si noti come l'interferenza è costruttiva lungo la retta congiungente. Le linee lungo le quali si ha l'interferenza costruttiva sono rami di iperbole (del resto, lungo queste linee, la differenza di fase si mantiene costante).

In fig.20, viene mostrato un esempio di figura di interferenza generata da 5 sorgenti:

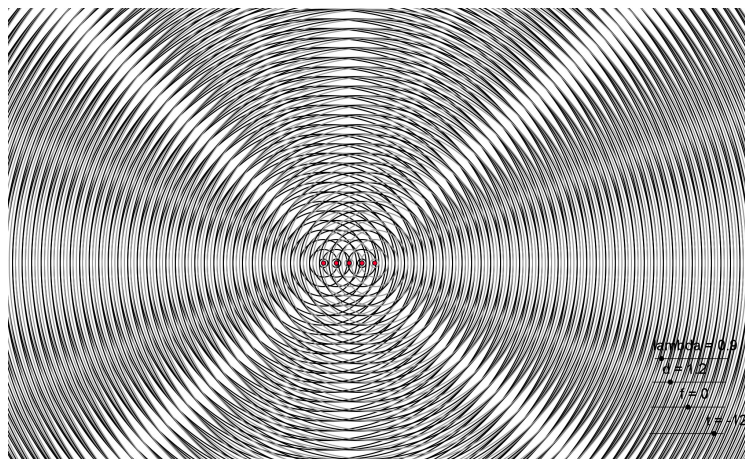


Fig.20: Interferenza da 5 sorgenti e formazione onde piane

Si osservi come, perpendicolarmente alle sorgenti, l'onda risultante è praticamente piana.

Se le sorgenti non sono puntiformi, all'interferenza in genere si sovrappone la diffrazione. L'analisi dettagliata del problema conduce alla relazione:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta\right)^2} \quad (12)$$

D rappresenta la dimensione lineare della sorgente. In fig.21, viene mostrato un confronto tra curva teorica (12) e simulazione (in colore verde):

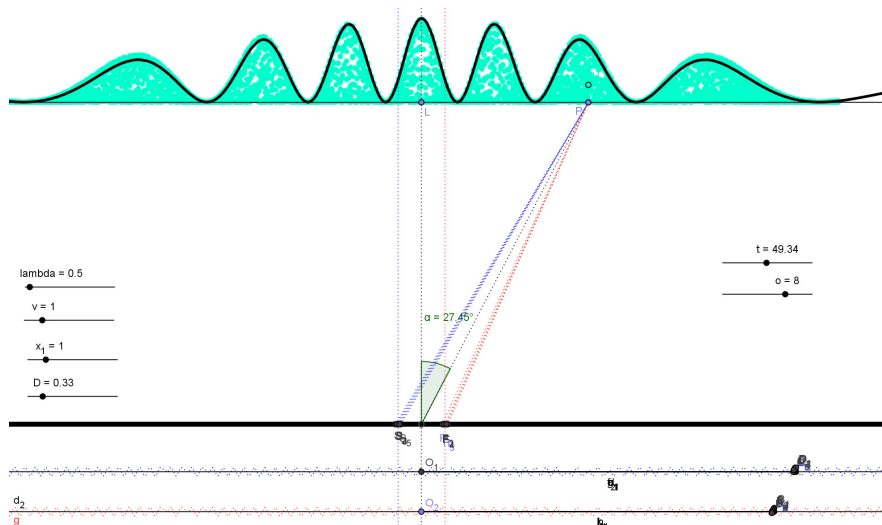


Fig.21: Interferenza-diffrazione da due fenditure.

12. Somma di onde: battimenti

Sfruttando l'animazione delle slider, è possibile costruire la somma di due onde piane e determinare, ad esempio, il periodo dell'onda risultante. Un esempio è presentato in figura (a sinistra):

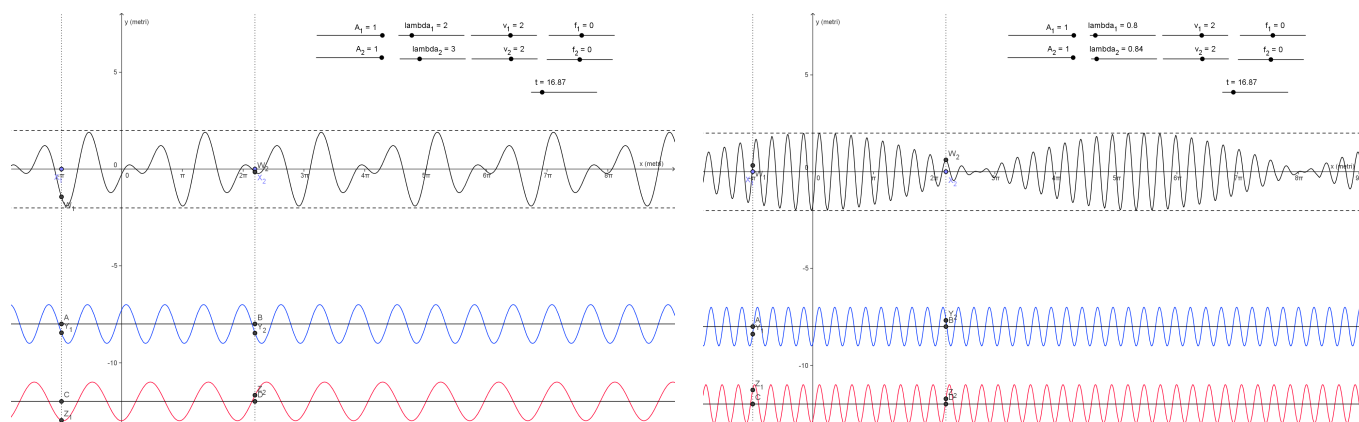


Fig.22: Somma di onde piane

Nella parte destra, la piccola differenza nelle lunghezze d'onda delle due onde determina il fenomeno dei battimenti. Con più onde, si possono costruire dei pacchetti d'onda:

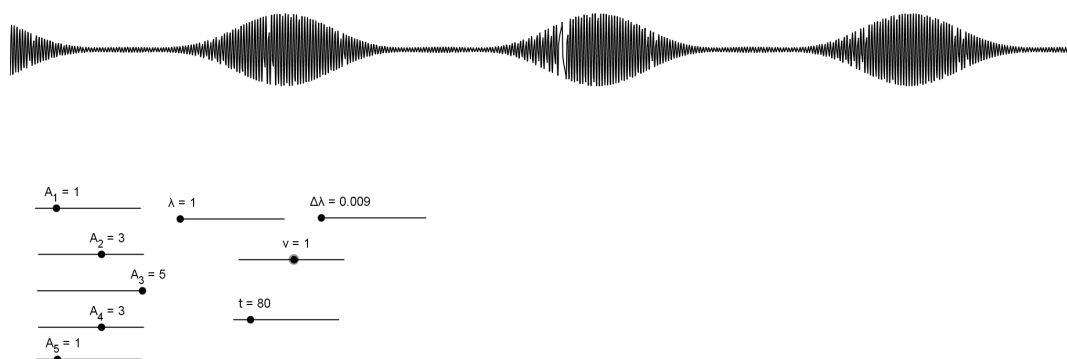


Fig.23: Pacchetto d'onda formato da 5 onde.

È interessante osservare come si modifica la forma del pacchetto d'onda variando i vari parametri (essenzialmente, la lunghezza d'onda di base, l'incremento $\Delta\lambda$ e le ampiezze).

13. Figure di Lissajous

Le figure di Lissajous costituiscono un interessante esempio di sovrapposizione di onde. Si generano considerando due oscillazioni sinusoidali indipendenti, lungo gli assi x e y :

$$\begin{cases} P_x = A_1 \cos(\omega_1 t + f_1) \\ P_y = A_2 \cos(\omega_2 t + f_2) \end{cases} \quad (13)$$

Le figure sono determinate dal punto $P = (P_x, P_y)$ e si ottengono curve di vario genere al variare di ampiezza, frequenza e fase delle due sinusoidi. In fig.24, se ne mostrano alcuni esempi:

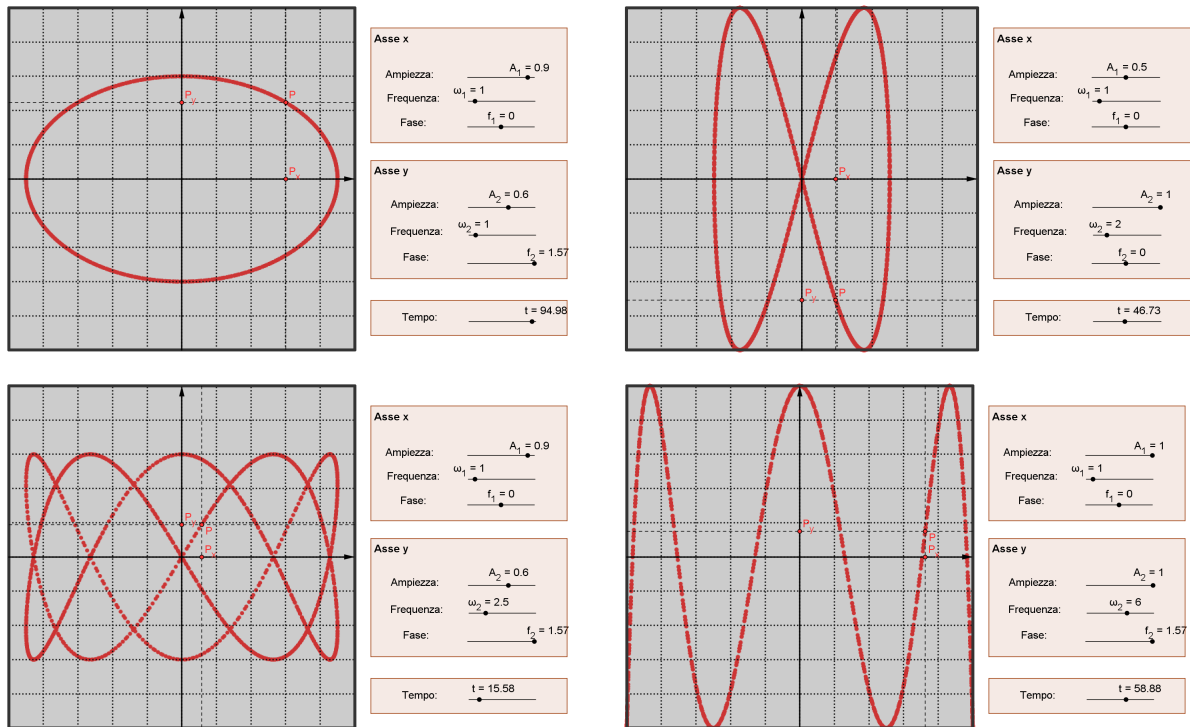


Fig.24: Figure di Lissajous.

Bibliografia

- [1] P. Romano, *Simulazioni di ottica geometrica con la Voyage 200*, Ipotesi (la tecnologia nell'insegnamento scientifico), n.2, 2004.
- [2] P. Romano, *Ottica geometrica con Cabri Géométrè*, CABRIRRSAE n. 34, Gennaio 2003, p. 12-14.
- [3] P. Romano, *La riflessione multipla su due specchi piani formanti un diedro studiata mediante il Cabri*, CABRIRRSAE, n. 39, Aprile 2004, p.8-13.
- [4] R. Blum, D. E. Roller, *FISICA Volume secondo*, Zanichelli, 1982.
- [5] G.P. Raciti, P. Romano, *Equazione dei punti coniugati delle lenti: Teoria, Simulazione, Esperimento*, La Fisica Nella Scuola, n. 4 Ott-Dic 2009.

149. Tecniche di project management, problem solving e decision making: problemi e soluzioni¹

Roberto Chiappi

I mercanti di chincaglierie elettroniche vorrebbero far credere che, con la diffusione dei computer, si apra una nuova era per il pensiero scientifico e per l'umanità. Essi potranno tutt'al più farci capire dov'è il problema essenziale: è nella costruzione dei modelli.

René Thom.

Sommario

L'articolo riassume 10 filoni di ricerca, basati sullo sviluppo di semplici metodi e modelli, ai quali l'autore ha lavorato negli anni, finalizzati al miglioramento dei processi di *project management*, *problem solving* e *decision making*.

Simple tools and techniques, developed by the writer, are described hereafter in order to assist in implementation of project management, problem solving and decision making processes.

Introduzione [1,2,5]

Nel seguito sono riassunti alcuni contributi innovativi, maturati nel corso degli anni, nel campo della logica e della matematica applicate ai problemi delle organizzazioni. Per agevolare la lettura di questa sintesi ogni contributo è presentato attraverso l'elencazione dei problemi e delle soluzioni proposte. Alcuni problemi sono stati posti o suggeriti direttamente dalla *line* aziendale (principalmente *project e proposal manager*), altri sono maturati all'interno degli uffici di *staff* per l'analisi degli investimenti e la pianificazione strategica/operativa. Molte soluzioni nascono dall'esigenza di avere a disposizione metodologie e modelli semplici da usare anche da parte di persone non esperte nell'uso di metodi quantitativi e nell'analisi dei sistemi. Altre soluzioni nascono dalla necessità di svolgere rapidamente, con il solo aiuto di una tabella elettronica, lavori che di solito vengono effettuati da specialisti con *software* dedicati. Quasi tutte le soluzioni riportate consentono di effettuare una *what if analysis* e una *what to do to achieve analysis*.

La forma utilizzata nel seguito per descrivere le ricerche, cioè problema/soluzione, ha anche una valenza didattica. Infatti i 10 argomenti riportati [tra parentesi quadre sono indicati i riferimenti bibliografici] possono essere utilmente impiegati, per corsi di formazione a vari livelli, anche in forme eventualmente semplificate, disaggregate o variamente modificate.

Le metodologie e i modelli proposti sono stati inizialmente presentati in articoli pubblicati su riviste di settore (principalmente "impiantistica italiana", "ingegneria economica" e "ricerca operativa") e, successivamente sono stati raccolti, accompagnati da esempi numerici e rielaborati in forma sistematica nei libri e CD elencati in bibliografia.

¹ In corso di pubblicazione su &CO, la rivista degli alunni della Scuola Mattei, Eni Corporate University.

1. Distribuire un valore nel tempo. Stimare dei pesi [5]

Problema 1.1

Nell'approntare un budget di costo o nel programmare nel tempo il carico delle risorse è necessario, a partire dai valori totali stimati fare delle mensilizzazioni che tengano conto dei transitori iniziali e finali, dei periodi normali, delle percentuali di abbattimento di specifici periodi e della maggior produttività che può essere ottenuta in altri momenti.

Problema 1.2

Dopo aver definito una Work Breakdown Structure di progetto è necessario procedere alla stime dei pesi dei vari elementi della struttura. Di solito si usano pesi proporzionali o alle quantità di lavoro o alle risorse necessarie o ai costi da sostenere. In mancanza di queste informazioni come possono essere stimati i pesi?

Problema 1.3

Nei problemi decisionali a criteri multipli è spesso necessario stabilire i pesi da attribuire a ciascun criterio. Molte metodologie suggeriscono di effettuare confronti a coppie tra i vari criteri. Quale può essere un metodo più semplice e più rapido per stimare, in accordo con le preferenze del decisore, il peso dei vari criteri?

Soluzione

Si consideri come riferimento il Problema 1.1. Si inizia attribuendo peso unitario a tutti gli n periodi (peso relativo: $1/n$). Ai periodi con percentuale di abbattimento del 20%, 40%, ecc. viene attribuito peso assoluto pari a 0.8, 0.6, ecc.. Ai periodi di maggior produttività del 10%, 30%, ecc. viene attribuito peso assoluto pari a 1.1, 1.3, ecc.. Se vi sono periodi con produttività doppia o tripla ad essi viene attribuito peso assoluto 2 o 3. Infine, per ripartire il valore totale, si procede come di consueto: per ciascun periodo il valore totale viene moltiplicato per il peso assoluto del periodo e diviso per la somma totale dei pesi.

2. Massimizzare il valore e minimizzare i rischi nelle decisioni [4,5]

Problema 2.1

Si deve scegliere tra varie alternative valutate su di una molteplicità di criteri che raramente danno un ordinamento concordante. Come procedere per massimizzare il valore medio ed evitare al contempo di accettare alternative che abbiano uno o più criteri fortemente penalizzanti?

Problema 2.2

Si deve scegliere tra alternative diverse che possono dar luogo ad eventi casuali diversi di cui si conoscono le probabilità di accadimento. Il tutto può essere rappresentato con un albero delle decisioni. Come scegliere l'alternativa che massimizzi il risultato atteso e al tempo stesso minimizzi il rischio di risultati negativi?

Soluzione

Il modo più semplice e naturale è calcolare: il valore medio ponderato tra le misure normalizzate su di una soluzione ideale (Problema 2.1) o il valore atteso dell'albero decisionale (Problema 2.2), allo scopo di ottimizzare l'utilità della scelta. Per valutare i rischi si può prendere, per ciascuna alternativa il risultato peggiore. Valore ponderato (atteso) e valore peggiore vengono poi pesati con un parametro alfa compreso tra zero (indifferenza al rischio) e uno (indifferenza al valore medio/atteso). Verrà quindi scelta quell'alternativa che ha sia un buon valore atteso sia un risultato peggiore non eccessivamente sfavorevole (minor rischio).

3. Istogrammi e Curve ad S: una funzione matematica operativa [3,4]

Problema 3.1

Le curve ad "S" programmatiche di un progetto vengono tracciate dopo aver individuato la WBS, elaborato il programma, allocate le risorse ed effettuate le necessarie aggregazioni. In molti casi è utile disporre di curve ad "S" stimate precedentemente alla stesura del programma. Tali curve debbono consentire di spostare, alzare o abbassare il periodo di massimo carico del corrispondente istogramma, in accordo con gli scenari degli esperti e dei decisori.

Problema 3.2

Per i progetti in corso la curva ad “S” programmatica viene affiancata da un ramo di curva effettiva ottenuta dai dati storici osservati. E’ auspicabile disporre di una curva strutturalmente stabile (non polinomiale) che consenta di effettuare proiezioni a finire compatibili con i risultati pregressi.

Soluzione

Si propone una funzione esponenziale in cui non si generano, per qualunque valore dei parametri, valori negativi, massimi, minimi o asintoti incompatibili con la natura intrinseca di curva ad “S” di progetto. I parametri di controllo sono tre. “n”: che individua la posizione del flesso (massimo dell’istogramma di carico), “k”: che individua l’altezza del picco e il carico sulle code dell’istogramma, “a”: che modifica la forma della curva e facilita l’interpolazione dei dati consuntivi.

4. Proiezioni a finire (Revised Earned Value Method). Il cruscotto del project manager [2,4]

Problema 4.1

Il metodo dello Earned Value consente di misurare attraverso due indicatori Cost Performance Index (CPI) e Schedule Performance Index (SPI) la performance nel costo e nei tempi dei progetti in corso. Il metodo è però asimmetrico perché l’indicatore CPI permette di avere proiezioni a finire nei costi mentre l’indicatore SPI non consente alcuna previsione sulle date di completamento dell’intero progetto o dei work pack componenti.

Problema 4.2

Per i Progetti completati l’indicatore CPI è significativo. Se la performance è minore di uno il progetto è costato più del previsto, se la performance è maggiore di uno il progetto è costato meno del previsto. L’indicatore SPI (performance nei tempi), a progetto completato, non è invece significativo in quanto esso è sempre uguale ad uno, anche nei casi in cui il progetto (o il pacchetto di lavoro) è terminato in anticipo o in ritardo.

Soluzione

Invece di ragionare su avanzamento fisico previsto (Budget) ed avanzamento fisico effettivo (Earned) è opportuno considerare la velocità di avanzamento prevista e la velocità di avanzamento effettiva del progetto o del work pack. In questo modo sarà possibile ottenere delle proiezioni a finire nei tempi per i progetti in corso e degli indicatori di Time Performance significativi (maggiori, minori od uguali ad uno) per i progetti/pacchetti di lavoro completati.

5. Linked Plan: legami tra attività con il foglio elettronico [2,3,4]

Problema 5

Per la pianificazione dei progetti è spesso richiesto l’uso di tecniche reticolari (CPM/PERT/PDM/ecc.). L’esigenza di ricorrere a queste tecniche può derivare o dalla complessità del progetto o dalle specifiche richieste del cliente o dal fatto che esse risultano vantaggiose perché consentono di anticipare gli eventi. Molti progetti più semplici possono però essere gestiti in modo proficuo con il solo aiuto di un bar-chart e del foglio elettronico. Per la prima situazione esistono vari package commerciali che soddisfano ogni tipo di esigenza. Per la seconda situazione (progetti semplici gestibili con il foglio elettronico) molti *planner* si sono posti il problema di poter comunque legare in modo semplice, veloce ed intuitivo le varie attività, poiché non è tanto necessario avere l’elenco dettagliato di tutte le date Early, Late e dei Float, ma lo è poter sapere immediatamente che impatto ha sul programma il ritardo di un Milestone o di una singola attività.

Soluzione

Sulle righe del foglio elettronico debbono essere poste le attività del progetto, sulle colonne i campi relativi (descrizione, ritardo, inizio, durata, fine, ecc.). I legami debbono essere inseriti come formule nel campo delle date. Ad esempio se un’attività ha più predecessori, con legame Finish-Start, è facile inserire nel campo data d’inizio la funzione: massimo (delle date di fine dei predecessori). Per modellare altre situazioni si potranno usare la funzione minimo (basta che un predecessore sia terminato) o la funzione media (se non completati i predecessori debbono essere in stato avanzato di completamento).

La data di fine è calcolata come data di inizio più durata. In questo modo le attività dei successori sono spinte (pushed) in avanti dalle date di fine/inizio dei predecessori. Se necessario è possibile considerare anche il caso di attività tirate (pulled) cioè governate da predecessori logici che sono però successori temporali. In questo caso la formula (Max, Min, Avg) è posta sulla data di fine dell'attività e la data d'inizio è calcolata come data di fine meno durata.

6. Gestire il rischio con le matrici impatto-probabilità. Procedura semplificata [4,5]

Problema 6.1

Si vogliono individuare e quantizzare i rischi, le probabilità di accadimento e gli impatti afferenti un progetto o una iniziativa in fase di pianificazione. L'obiettivo è di disporre di una metodologia semplice ed efficace anche per facilitare i confronti tra progetti diversi. Se opportuno deve potersi costruire una Risk Breakdown Structure del progetto che permetta di aggregare rischi elementari in rischi complessi di livello superiore.

Problema 6.2

Un progetto in corso deve poter essere monitorato con l'emissione periodica di una matrice impatto-probabilità che ponga in evidenza i rischi emersi nell'ultimo periodo, quelli scomparsi e l'eventuale spostamento degli altri in termini di impatto e di probabilità di accadimento.

Soluzione

Si propone di procedere all'individuazione degli impatti ($0 < i < 10$), delle probabilità ($0 < p < 10$) e se necessario della Ri.B.S.. Per effettuare il setting del problema si può utilizzare il Brainstorming, il Delphi o, più semplicemente la discussione faccia a faccia tra gli esperti. Il rischio di un singolo evento ($0 < R < 100$) è calcolato con la formula: $R = p * i$.

7. Profili del rischio (costi e tempi). Alternativa alla simulazione [5]

Problema 7.1

La simulazione stocastica, basata sul metodo MonteCarlo, che consiste nel far variare in input casualmente tutti i parametri ritenuti incerti dagli esperti, consente di avere in output il profilo del rischio di superare (o l'opportunità di non superare) il budget dei costi. Esiste un metodo più veloce, ma sempre basato sulle stime di esperti, per ottenere una stima del profilo del rischio e quindi della probabilità di "splafonare" il budget dei costi?

Problema 7.2

In un progetto il rispetto della data di completamento (imposta per contratto se vi è un committente), è importante come e anche più del budget dei costi. Avere un profilo del rischio consente di stimare le probabilità di: rispettare i tempi del contratto, di evitare penali, di accedere a bonus o premi del committente conseguenti a una fine anticipata dei lavori.

Soluzione

Il metodo semplificato proposto consiste nel chiedere agli esperti una stima dei valori ottimistici e pessimistici di costi e/o tempi. Inoltre si chiede di esprimere un giudizio qualitativo (alto, medio, basso) sulla incertezza/rischio del range indicato. In base a queste informazioni (e al teorema del limite centrale) viene costruita la curva normale ed il profilo del rischio in termini di costi e/o tempi.

8. Valutare i progetti d'investimento: un indice multi criteri [5,6]

Problema 8

Confrontare e scegliere progetti d'investimento è piuttosto difficile quando non ci si trovi nel caso di preferenza assoluta (la curva del cash flow cumulato di un progetto è sempre superiore a quella di tutti gli altri). Se si sceglie un solo indice, qualunque esso sia, si possono avere degli ordinamenti tra i progetti contrari al più semplice buon senso. Gli indici più diffusi per valutare un investimento sono:

- Il risultato economico attualizzato (REA o NPV) che misura la capacità di creare valore sulla vita intera del progetto.

- L'equivalente annuo (EA o PMT) che misura la capacità annua di creare valore; è assimilabile allo Economic Value Added (EVA).
- L'indice di profittabilità (IP o PI) che misura il rendimento del progetto per ogni Euro investito.
- Il tasso di rendimento interno (TRI o IRR) che misura il massimo costo del denaro sopportabile dal progetto.
- Il tempo di recupero (TR o PB) che misura la liquidità del progetto ovvero il tempo necessario a far rientrare i capitali investiti.
- Un indicatore di rischio (IR o RI) che può essere definito in vari modi, ad esempio come nel Problema 6.

Soluzione

Se un unico indicatore da solo può non essere sufficiente è pur vero che ciascuno di essi può dare un contributo significativo e diverso al processo di scelta. Da qui l'idea di utilizzare un indice globale multicriteri (G). Si può procedere come nel problema 2.1 normalizzando innanzi tutto i criteri che verranno rapportati ad una inesistente soluzione ideale (ad esempio quella ottenuta prendendo, dalle varie alternative, i valori migliori di ciascun criterio) in maniera da ottenere per ogni indice un valore adimensionale compreso tra zero ed uno. Dopo aver ipotizzato i pesi da attribuire a ciascun criterio si procede al calcolo del valore medio ponderato. Per ogni progetto d'investimento si individua poi il valore del criterio per cui esso è peggiore. Infine si calcola il valore ponderato con un parametro alfa compreso tra 0 ed 1 tra il valore medio e quello peggiore.

9. Una funzione di utilità per i guadagni e le perdite [5,7]

Problema 9

L'economia sperimentale (comportamentale o emotiva) ha appurato che nell'effettuare le scelte la maggioranza degli umani ha un atteggiamento non uniforme rispetto ai guadagni e alle perdite. In pratica una partita a testa o croce, che prevede una perdita di 100, per essere accettata deve offrire un guadagno superiore al doppio (220-250). Cioè il dolore di una perdita vale più del doppio del piacere di un guadagno. Questa situazione può essere rappresentata da una curva del valore che passa per l'origine (dove ha un punto angoloso), è convessa verso l'alto dal lato dei guadagni, è concava verso l'alto dal lato delle perdite. Si può riportare il caso descritto ad una funzione di utilità? Quale può essere una semplice espressione analitica di questa curva che abbia due parametri distinti per i guadagni e le perdite?

Soluzione

Si può risolvere semplicemente il problema ricorrendo ad una generalizzazione della legge di potenza parabolica ben nota nella teoria classica dell'utilità:

$$U(x) = X^{k_2} \quad (\text{per } X > 0) \quad \text{e} \quad U(x) = -[(-X)^{k_1}] \quad (\text{per } X < 0) \quad \text{con } 0 < k_2 < k_1 < 1.$$

I valori di k_1 e k_2 possono essere facilmente calcolati o imponendo il passaggio per due punti noti o mediante regressione non lineare su una nuvola di punti osservati empiricamente. I valori di $X > 0$ si riferiscono al quadrante dei guadagni mentre i valori di $X < 0$ si riferiscono al quadrante delle perdite.

10. Inquadrare un problema: Cross Impact Analysis [5]

Problema 10

Non esiste ovviamente un metodo o una procedura unica e generale per risolvere i problemi. Si possono però avere procedure abbastanza generali per inquadrare situazioni problematiche di natura anche molto diversa. Queste analisi consentono spesso di poter iniziare la ricerca della soluzione del problema con un grado di conoscenza notevolmente ampliato.

Soluzione

Il primo passo consiste nel pensare il problema come un sistema cioè come un insieme di parti (o variabili) che interagiscono tra loro. L'identificazione del sistema può avvenire individualmente o con il lavoro di un gruppo di esperti (Brainstorming, Delphi, incontri liberi). I passi da seguire sono i seguenti: identificazione delle variabili, identificazione dei legami tra le variabili, costruzione del grafo orientato rappresentante il sistema, se del caso inserimento nel computer della matrice equivalente del grafo,

calcolo del punteggio motore, calcolo del punteggio passivo per ogni variabile. A valle di questa analisi si può pensare alla costruzione di un modello di simulazione dinamica.

Innovazione e storia del pensiero [1]

I dieci punti riportati in questo articolo si riferiscono a proposte, temi o soluzioni che contengono qualche aspetto originale o innovativo rispetto a quanto è solitamente riportato nei manuali di *project management, problem solving e decision making*.

L'Ecclesiaste (1,9-10) recita: "Non c'è niente di nuovo sotto il sole. C'è forse qualcosa di cui si possa dire 'Guarda questa è una novità? No, essa è già esistita nei secoli che ci hanno preceduto.'"

Ecco allora il progetto, tradotto in un libro, di cercare di unire innovazione e tradizione. La storia della cultura a partire dai Sumeri e da Mosè è ricca di suggestioni e anche di proposte concrete utili a risolvere in modo imprevedibilmente nuovi problemi anche complessi che riguardano la nostra attualità. Molti sono gli spunti di riflessione, idee o anche indicazioni concrete che nei secoli vengono forniti dalla filosofia, dalla matematica, dalla psicologia, dall'economia, ecc. Qualche esempio? Le regole sociali di Confucio, la maieutica di Socrate, la logica di Aristotele, il rasoio di Occam, la partita doppia di Pacioli, i discorsi sul metodo di Cartesio, i grafi di Eulero, la filosofia liberale di Smith, il metodo di eliminazione di Gauss, la falsificazione di Peirce, il problem solving di Popper, le probabilità soggettive di De Finetti, la programmazione lineare di Dantzig, la razionalità limitata di Simon, l'economia della felicità di Kahneman ecc.

Bibliografia

[1] Roberto Chiappi, *Problem Solving nelle organizzazioni: idee, metodi e strumenti da Mosè a Mintzberg. Piccola antologia filosofica per manager e project manager*, Springer-Verlag, Milano 2006.

[2] Rocco Amato, Roberto Chiappi, *Tecniche di project management. Pianificazione e controllo dei progetti*, Franco Angeli, Milano 2009.

[3] Roberto Chiappi, *La gestione dei progetti. Gestire progetti con l'aiuto del foglio elettronico*, Eni Corporate University, Milano 2005.

[4] Roberto Chiappi, *Modelli e metodi per la pianificazione e il controllo dei progetti: la cassetta degli attrezzi del project manager*, CD cofanetto, Springer-Verlag, Milano 2006.

[5] Roberto Chiappi, *Il foglio elettronico come strumento per il problem solving. Metodi e modelli per le organizzazioni*, allegato CD, Franco Angeli, Milano 2008.

[6] Chiappi, De Simoni, *Indici per la valutazione degli investimenti*, Ricerca Operativa N°3, Milano 1977.

[7] Roberto Chiappi, *Strumenti di Problem solving: tecniche per le decisioni*, Impiantistica Italiana Milano, Sett/Ott 2009.

150. Lo scaffale dei libri

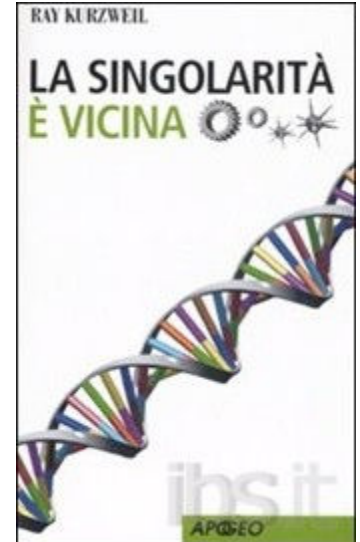
“La Singolarità e vicina” di Ray Kurzweil, 2008

“Ich bin ein Singularitarian” e’ il titolo di un capitolo centrale del libro e allo stesso tempo l’affermazione che meglio riassume il messaggio dell’autore. Ray Kurzweil possiede una visione ottimistica e positivista del futuro, derivante probabilmente dalla sua intensa attività in diversi campi di ricerca tecnologica. È infatti il fondatore di una società per la ricerca e lo sviluppo di software di riconoscimento vocale, oltre che attivo pensatore e scrittore divulgativo.

Ma cos’è la Singolarità? Rissumendo si può pensare come il punto di non ritorno nella storia dell’uomo, oltre il quale il progresso tecnologico avrà raggiunto un livello di sviluppo tale da poter interagire profondamente con il corpo umano fino a diventarne parte integrante. La visione di Kurzweil si completa con l’idea che l’evoluzione tecnologica finirà per sostituire l’evoluzione biologica, costituendo allo stesso tempo la sua logica e inevitabile continuazione. A questo punto sarà la tecnologia a proseguire il processo evolutivo portando profonde modifiche al corpo umano ed ampliando sempre più le sue capacità di elaborazione quindi di pensiero.

In questo libro il tema del rapido avvicinarsi alla Singolarità viene giustificato tramite una lucida analisi del progresso tecnologico attuale, in particolare dall’avvento dei calcolatori elettronici; studiando diversi indici indicatori (capacità di calcolo dei processori, numero di gate per circuito integrato, numero di nodi di Internet, ecc.) l’autore evidenzia la natura esponenziale del processo di sviluppo. Egli, inoltre, fornisce dettagliate previsioni sugli ordini di grandezza raggiungibili in un futuro prossimo e più remoto. Il libro poi prosegue con un’analisi dettagliata dei principali campi trainanti l’innovazione tecnologica: la genetica, la nanotecnologia e la robotica (includendo gli studi verso l’Intelli-genza Artificiale). Il racconto dei principali sviluppi in tali campi la loro proiezione futura, sebbene a volte il lettore possa confondersi e pensare di trovarsi in un racconto di Asimov, mostra in realtà che l’autore possiede un’ampia conoscenza dello stato della ricerca e di diversi aspetti a volte lontani tra loro. È questa forse la parte più interessante del libro, supportata anche da un numero di note esplicative e bibliografiche consistente (alla fine esse costituiscono più di un sesto dell’intero libro). Successivamente Kurzweil analizza quali profonde modifiche ci dovremo attendere sul corpo e sulla mente, quali conseguenze filosofiche e pratiche avranno e come prepararci ora nell’attesa che la tecnologia evolva nella Singolarità. Infine egli risponde a diverse critiche che sono state mosse a lui e al movimento di pensatori che si definiscono “Singularitiani”.

Il libro è decisamente di lettura non immediata. Il linguaggio è sì divulgativo e non necessita di particolari conoscenze matematiche ma lo stile è a volte ripetitivo: le stesse tematiche infatti vengono riprese in



capitoli diversi del testo, anticipandole o rimandando approfondimenti in sezioni successive. In questo modo il lettore viene un po' confuso o annoiato a volte. La sensazione è quella di trovarsi al cospetto di un brillante pensatore che, innamorato della propria idea e preso dalla foga di proporla, perda a volte il rigore narrativo e la chiarezza dell'esposizione. Ma se l'idea è interessante val la pena uno sforzo per ascoltarla (o leggerla!). Si può non condividerla, si può non essere "Singolaritiani", ma il libro di Kurzweil possiede molteplici elementi tali da interessare chi si interroga sul progresso e sul futuro di noi stessi.

Riccardo Travaglini

“Nuova fisica per tutti” di Carlos Fiolhais, Tropea Editore - febbraio 2010

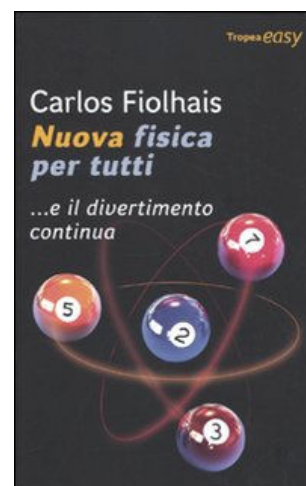
Un fantastico viaggio tra le grandi teorie fisiche del XX secolo: la meccanica quantistica, la relatività ristretta e generale e infine la fisica nucleare. Carlos Fiolhais, già autore del libro "Fisica per tutti: e buon divertimento" riesce ancora una volta a spalancare le porte della scienza moderna a tutti con un libro, mostrandoci un mondo estremamente affascinante in poche pagine.

Dalle concrete applicazioni della fisica quantistica, per esempio i transistor che affollano le nostre vite quotidiane nei computer, nei cellulari e negli elettrodomestici, alle verifiche della più grande teoria olistica dell'umanità, la relatività di Einstein, e infine alla scoperta degli atomi e alle applicazioni della fisica nucleare ai giorni nostri. Una raccolta di tantissime curiosità sui moderni computer, sugli elementi radioattivi e sulle particelle, dai protoni agli elettroni, dai mesoni ai gluoni, dai fotoni ai positroni.

Il libro affronta inoltre alcune delle grandi domande scientifiche dell'uomo: l'universo è infinito? Che cos'è lo spazio-tempo? Perché è curvo? Cosa succederebbe se viaggiassimo a cavallo di un fotone? E' possibile viaggiare alla velocità della luce? Superarla? E come ci apparirebbe il mondo in questa situazione?

Un libro davvero molto semplice, alla portata di chiunque, che non richiede alcuna conoscenza matematica o fisica, che unisce umorismo e battute sagaci a concetti erroneamente ritenuti difficili e solo per "addetti ai lavori", passando attraverso la vita dei grandi del 900: Einstein, Bohr, Planck, i coniugi Curie e molti altri. Adatto a tutti coloro che vogliono viaggiare con la fantasia nel nostro mondo così diverso da come ce lo immaginiamo, un mondo dove, come disse il grande Albert Einstein: "Imagination is more important than knowledge" (L'immaginazione è più importante della conoscenza).

Marco Ruffinoni



MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 5 Numero 14 GENNAIO 2011

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it