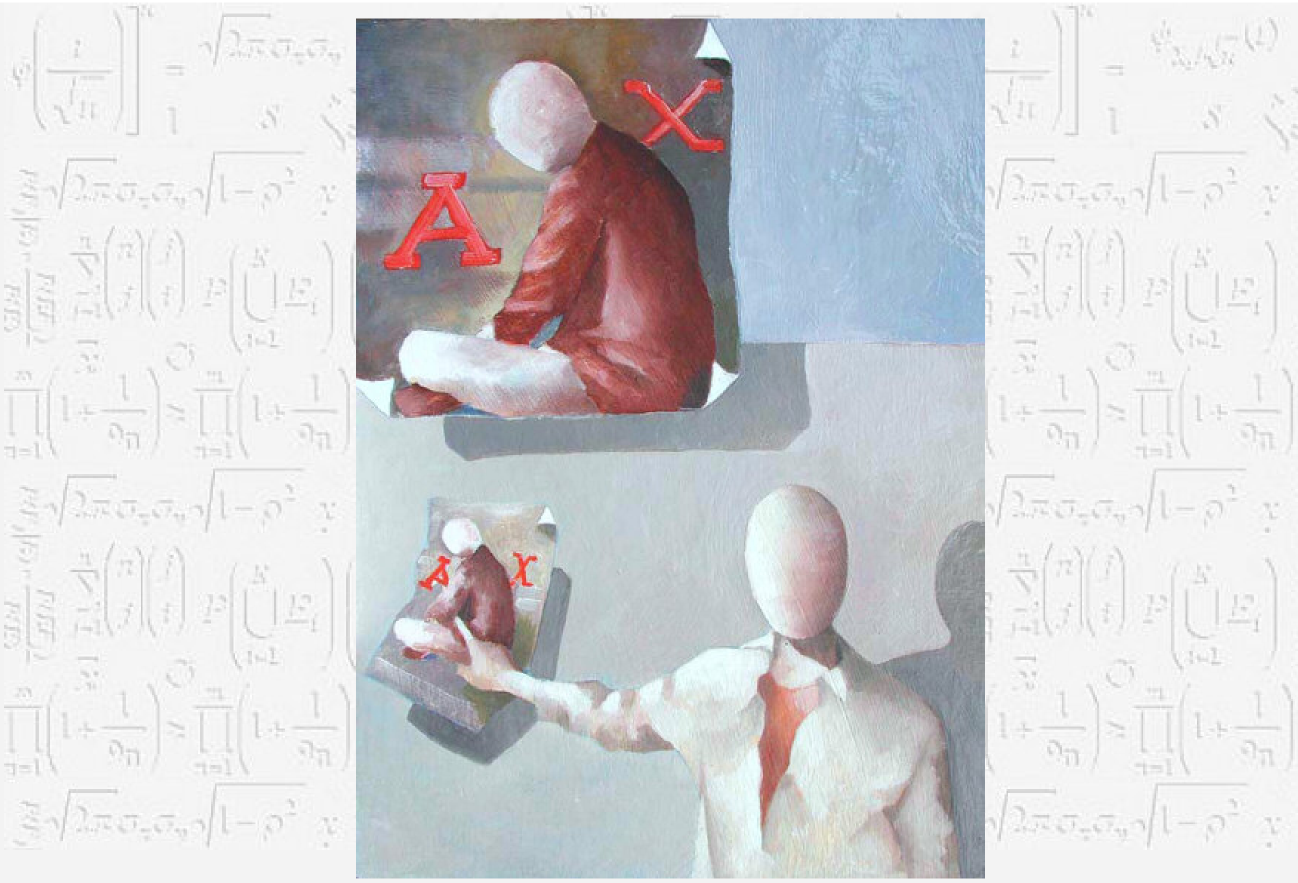
Magazine Matematicamente.it

Rivista di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it
Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Anno 1 – Numero 3 *Luglio 2007*



Graziano Fernando, Il manifesto, 2005

BLOGSFERA - METALLICA - POLIGONI STELLATI - POVERA E NUDA! - WIKIPEDIA - ARISTOTELE NON È MORTO - IL BELLO DEI NUMERI - NUMERI PRIMI - L'EQUAZIONE - IL COEFFICIENTE BINOMIALE - MICHELE EMMER - SPICCHI DI CIELO - LIBRI - RECENSITI - MAXIMA - CRUCIVERBA - REBUS

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

I contributi da proporre devono riguardare i seguenti temi: storia della matematica e della fisica, didattica della matematica e della fisica, novità dal mondo della ricerca matematica, curiosità matematiche, matematica e cultura.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato Word, carattere Times New Roman, 12 pt, formato della pagina A4, interlinea 1. Le formule possono essere in Microsoft equation editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati. Le immagini devono essere sia nel file Word sia fornite a parte come singoli file. Eventuale materiale scannerizzato deve essere salvato in formato TIF alla risoluzione di 300 dpi.

Nella prima pagina andranno obbligatoriamente indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale, istituzione o ambiente professionale di appartenenza.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (3-6 righe), e dovrà terminare con una bibliografia ed, eventualmente, una sitografia finale. Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia. In ogni caso, i contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. All'autore non saranno inviate bozze di alcun tipo.

La responsabilità del contenuto scientifico degli articoli pubblicati è esclusivamente degli autori.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

www.matematicamente.it

* * *

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Luca Barletta
Michele Mazzucato

Hanno collaborato a questo numero

Luca Barletta, Antonio Bernardo, Francesca Bevilacqua, Angelo Blasi, Andrea Centomo, Anna Cerasoli, Flavio Cimolin, Giacomo De Laurentis, Domenico Lenzi, Domenico Licchelli, Luca Lussardi, Bruno Martelli, Luciano Sarra, Simone Severini, Maria Teresa Sica, Andrea Vitiello, Raffaele Vitolo, Gabriella Zammillo

Progetto grafico

Mario Menichella

*Il numero 2 ha avuto **48.618** download*

Sommario

Editoriale

Il mondo dei blog coinvolge anche i matematici: Simone ci dà qualche coordinata per orientarci e cominciare a 'spiare' matematici di un certo calibro. Cosa fanno, quali sono le loro ricerche, i loro appunti? Nei loro 'diari' si trova di tutto.

Anna presenta il suo secondo racconto di Metallica, una piccola 'femme fatale' per il povero protagonista, che in fondo preferirebbe darle un bacio, invece di studiare calcolo combinatorio con lei: quante parole ci vogliono per un timido!

Andrea ci parla dei poligoni a stella: dalle decorazioni dell'Alhambra al piccolo teorema di Fermat. Domenico ci presenta una matematica didatticamente nuda e povera: dalle infatuazioni per l'insiemistificazione a una riflessione sul ruolo della scuola dell'infanzia nella formazione del 'linguaggio' matematico. Bruno ci spiega come funziona Wikipedia dal di dentro: perché e come collaborare al grande progetto.

Angelo ci parla dei dubbi aristotelici degli studenti di fisica; Francesca fa un excursus storico-filosofico sui numeri interi; Maria Teresa, irriducibile ricercatrice per diletto, ci presenta un suo metodo per cercare numeri primi; Giacomo discute il modo in cui viene presentata l'equazione nei manuali scolastici.

Flavio, nella sua rubrica la formula più bella, ci presenta il coefficiente binomiale. Gabriella ha intervistato per noi Michele Emmer. Domenico ci fa vedere un altro spicchio di cielo.

Il software presentato in questo numero è Maxima, un progetto libero con funzionalità analoghe al più noto Mathematica.

Antonio Bernardo

Matematica nella blogsfera

di Simone Severini

La Blogsfera è il mondo dei blog, una terra vastissima che oggi occupa una discreta fetta del Web. Un *blog* è una specie di contenitore, in cui il *blogger* ripone tutto ciò che vuole comunicare agli altri. E' facile fare un'analogia tra il blog e il diario. Ci sono delle differenze però: il diario è *segreto*, quasi per antonomasia; il blog è *pubblico*, quasi per definizione. Ci sono blog su tutti gli argomenti dello scibile umano: la pesca, il formaggio, il tennis e la matematica. Certo, il mondo e' bello perché è vario.

Cosa può scrivere uno su un blog dedicato alla matematica? Un tentativo di risposta si può fare con qualche esempio: problemi aperti o problemi particolarmente uggiosi, liste di conferenze interessanti, notizie, discussioni, gossip, speculazioni e pensieri. Due osservazioni possono essere utili:
(i) Scrivere un blog è diventare una sorta di personaggio pubblico, anche se il pubblico può essere ridotto a due o tre amici. C'e' una relazione tra blog e mitomania? Non direi.
(ii) Scrivere un blog può impiegare un sacco di tempo, quindi solo chi ha tempo da perdere può farlo. Niente di più sbagliato.

Una ragione viene fuori dalla grande quantità di bloggermatematici.

Ecco un assaggio. Cominciamo con Terence Tao (http://terrytao.wordpress.com). Tao è tra i vincitori della Medaglia Fields nel 2006, ed è esperto di analisi armonica, teoria dei numeri, teoria delle rappresentazioni, e chi più ne ha più ne metta. Il blog di Tao è lo specchio della sua personalità matematica. Contiene di tutto, da lucidi di seminari a problemi aperti e discussioni su moltissimi campi diversi. Ce n'è per ognuno: da cose terribilmente esotiche come la formula di Gross-Zagier a cose un po' più di moda come l'interpretazione della meccanica quantistica.

Secondo blogger: Richard Borcherds (http://borcherds.wordpress.com). Borcherds ricevette la Medaglia Fields nel 1998, per il suo lavoro in algebra e fisica matematica. Il blog di Borcherds è davvero interessante e il livello della discussione molto alto!

Adesso, chi l'avrebbe mai detto che tra questi perditempo ci fosse finito anche Alain Connes (http://noncommutativegeometry.blogspot.com), l'inventore/scopritore della geometria noncommutativa?

Se la tradizione vi rimane indigesta e se vi piace la complessità computazionale allora sbizzarritevi cercando dentro Scott Aaronson (http://www.scottaaronson.com/blog), il guardiano del *Complexity Zoo* (http://qwiki.caltech.edu/wiki/Complexity_Zoo).

Tra i blog "meno personali", va di certo annoverato *The n-Category Café* (http://golem.ph.utexas.edu/category), un forum centrato su matematica, fisica e filosofia, e *Ars Mathematica* (http://www.arsmathematica.net).

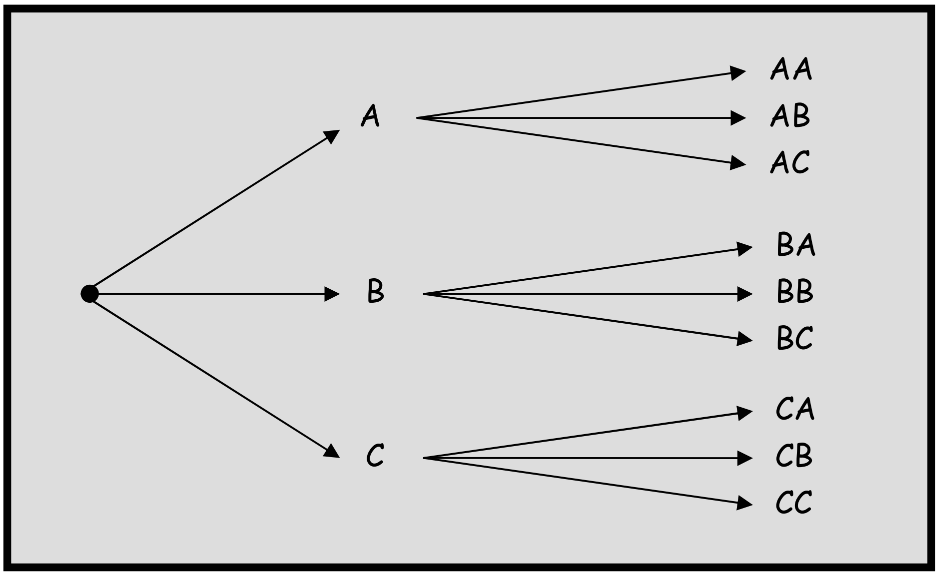
Sebbene scritto in Inglese, godetevi il blog dell'informatico teorico Luca Trevisan (http://in-theory.blogspot.com).

Bene. Qui sopra ho proposto una breve e incompletissima lista. Si sa che Internet non è un grafo ma una spirale: una volta dentro si è in balia dei flutti e tutto comincia col primo click. Quindi, buona lettura!

Metallica
2. Io timido e il modello 'quante parole?'

di Anna Cerasoli

"Il secondo modello è quello delle parole" ha continuato, seguendo i suoi appunti in cui ci capisce solo lei. "Il problema tipo è: ho un *alfabeto*, cioè un insieme di simboli, per esempio (A, B, C); con questi simboli compongo delle sequenze che chiamo *parole*, anche se sono prive di significato. Voglio sapere quante diverse parole di una certa lunghezza, per esempio lunghe 2 caratteri, posso formare. Il prof fa questo diagramma:



Dunque sono 3X3 cioè 9 parole".

"Sì, mi sembra facile." ho commentato con una sicurezza che ha stupito pure me. "La prima lettera della parola la posso scegliere in 3 modi diversi e per ciascuno di essi ho 3 modi per scegliere la seconda lettera. Dunque 3^2." E, ormai lanciato, ho aggiunto: "Se, invece, la lunghezza della parola dovesse essere di 3 caratteri, allora tutte le parole sarebbero 3^3, se dovesse essere di 4 caratteri, le parole sarebbero 3^4 , e così via ..."

Metallica mi ha guardato fisso negli occhi e, imitando la mia erre alla francese, ha continuato: "Se la lunghezza fosse di n caratteri, le parole sarebbero 3^n."

Ha questo di speciale la mia amica: fa sempre un passo avanti più degli altri. E' perché riesce a pensare in generale! Infatti, per non smentirsi, ha aggiunto: "E se abbiamo un alfabeto di m caratteri, il numero di parole lunghe n sono m alla n:

$$m^n$$

L'avrei baciata e invece ho detto: "Sì, hai ragione".

Lei, rispetto alle altre, ha proprio una marcia in più. Se penso a tutte le stupidaggini sui vari oroscopi che le mie compagne di classe si raccontano, mi sembra che lei appartenga a un'altra specie, la specie sapiens, sapiens, sapiens.

"Guarda!" ha poi esclamato. "Questo modello delle parole è proprio simpatico. Ci sono una infinità di problemi che sembrano di tutt'altro tipo e invece, a rifletterci su, si riducono a questioni di parole e alfabeti, quindi al calcolo di una semplice potenza. Qui c'è addirittura la schedina del totocalcio.

Quante sono le schedine che bisogna giocare per esser certi di vincere al totocalcio?"

"Non capisco." ho ammesso con sincerità. "Cosa c'entra la schedina con una parola?"

"Il prof ha detto che un alfabeto è un qualsiasi insieme di simboli e quindi anche l'insieme (1, 2, X) è un alfabeto; una parola, poi, è una sequenza di questi simboli. Nel caso della schedina, ogni colonna di risultati che noi assegniamo, altro non è se non una sequenza di 13 simboli dell'alfabeto (1, 2, X), quindi è una parola, poco importa se scritta in verticale e non in orizzontale come siamo abituati a fare con le parole comuni."

"Allora è facile." ho subito recuperato. "Si tratta di calcolare

$$3^{13}$$

Cioè, *il numero dei simboli dell'alfabeto elevato al numero di caratteri della parola, insomma alla lunghezza della parola*"

Lei ha fatto cantare la sua calcolatrice che in una frazione di secondo ha fornito il risultato:

1594323

"Accidenti, che numero!" ha esclamato sgranando gli occhi. "Io la schedina la lascio giocare a mio fratello che segue tutte le partite e sa quali sono le squadre forti e quelle no. Prima o poi spero che vinca, così mi porta in moto fino a Capo Nord, a vedere dove finisce il continente."

'Capo Nord!' ho pensato tra me e me 'Allora il campeggio di Santa Maria di Leuca, in fondo al tallone dell'Italia, dove sono stato quest'anno con gli amici, potrebbe piacerle! Chissà se di qui all'estate prossima avrò trovato il coraggio d'invitarla...'

Mah, forse corro troppo con la fantasia!

"Certo che questa storia dei modelli semplifica tutto!" ha proseguito ignorando i miei pensieri. "Pensa che persino il lancio di monete può essere interpretato come scrittura di parole. Ascolta questo esempio del prof: quanti sono i possibili risultati del lancio di 3 monete?

Ebbene, si tratta di tutte le parole lunghe 3, composte dai simboli T (testa) e C (croce) come, per esempio

TTT, TTC, TCT ...

"Perciò sono due alla terza, cioè 8." l'ho interrotta dimostrandomi all'altezza.

"Ora c'è un elenco di problemi e bisogna trovare quelli che corrispondono al modello 'quante parole?' Proviamo!" ha proposto guardando l'orologio.

1) In un circuito elettrico si trovano 5 interruttori, ciascuno dei quali può essere chiuso o aperto. Quante sono le possibili configurazioni?

2) Quanti sono i numeri di 4 cifre, tutte dispari?

3) In quanti modi possono ricadere 2 dadi lanciati in aria?

4) Come si possono ordinare 3 libri su uno scaffale?

"Per me però si è fatto tardi. Devo andare." si è affrettata a dire. "Forse è meglio che ognuno ci pensi per proprio conto. Quando ci vediamo? Dovremo incontrarci ancora un paio di volte per finire l'argomento."

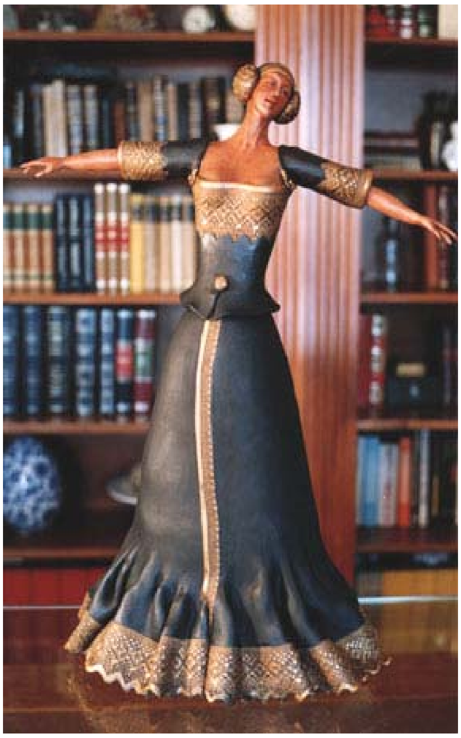
"Possiamo vederci domani e dopodomani. O vuoi che ti prospetti tutti i possibili modi in cui si possono scegliere 2 giorni tra i 5 che mancano prima del compito?" ho detto con tono scherzoso, ma in realtà ero piuttosto triste a vederla andar via, felice verso un appuntamento a me completamente oscuro.

"Bene. A domani." ha concluso riordinando le sue cose e rinfoderando la calcolatrice.

Quando sono rimasto solo, ho riletto i quattro quesiti e ho stabilito che soltanto il quarto non rientra nel modello 'quante parole?'.

Pertanto la risposta al primo quesito è 2^5, al secondo è 5^4 e al terzo è 6^2.

Speriamo bene! Non vorrei fare una brutta figura!



Franco Baldissarutti, Mi piace piacere

****

La storia di Metallica continua sul prossimo numero.
Nel frattempo, trova dei problemi che si possono inquadrare nel modello 'quante parole'.
Sai dire perché una parola *corrisponde a una funzione?*

Numeri e poligoni stellati

di Andrea Centomo [andrea.centomo@istruzione.it]

Sommario

Dopo aver riproposto la definizione di Coxeter di poligono stellato si mostra come, utilizzando questo concetto, si possano dimostrare "geometricamente" alcuni teoremi importanti della Teoria dei Numeri.

1. Introduzione

Lo studio dei poligoni stellati presenta diversi aspetti didatticamente significativi.

Nell'esplorazione del rapporto fecondo che lega matematica e arte ci basti ricordare che i poligoni stellati si ritrovano nella produzione artistica di diverse culture già a partire dall'antichità e che essi sono stati utilizzati in modo molto raffinato e sofisticato in tutta l'arte islamica; si pensi solo per citare un esempio all'utilizzo di questo tipo di poligoni nelle decorazioni del complesso palaziale andaluso dell'Alhambra di Granada.

http://www.afropop.org/img/europe/spain/andalus2004/Alhambra-pattern2.jpg

Da un punto di vista più strettamente matematico l'interesse per i poligoni stellati è altrettanto antico: pare che proprio dallo studio della costruzione del pentagramma sia stato possibile risalire all'irrazionalità del numero aureo [Boyer]. Tuttavia si dovette attendere il XIV secolo per poter disporre della prima trattazione sistematica sull'argomento dei poligoni stellati, redatta da Thomas Bredwardine. Dal Seicento in poi la matematica dei poligoni stellati e, più in generale, dei politopi stellati si fa via via sempre più ricca di risultati, l'analisi dei suoi sviluppi non rientra tra gli scopi di queste brevi pagine.

In questa breve nota vogliamo invece mostrare come, utilizzando i poligoni stellati, sia possibile dimostrare in modo semplice alcuni importanti teoremi che si incontrano in Teoria dei Numeri. Il primo teorema che si può esplorare è il Teorema di Wilson sui numeri primi, per poi passare al famoso Piccolo Teorema di Fermat. La scelta fatta non è casuale ma è resa più significativa dal fatto che questi teoremi (in particolare il secondo) oltre ad essere di per sé interessanti in Teoria dei Numeri sono alla base di importanti applicazioni alla Crittografia a chiave pubblica. Rimando il lettore interessato ad approfondire questo aspetto alla nostra recente pubblicazione A. Centomo, E. Gregorio, F. Mantese, *Crittografia per Studenti*, Edizioni MiMiSol, Milano, 2007 disponibile on line al sito
http://www.webalice.it/andrea.centomo/pubblicazioni.html

2. Poligoni Stellati

Iniziamo con l'esempio classico del pentagramma, figura che nella tradizione rappresenta uno dei simboli sacri della scuola pitagorica. Su una circonferenza qualsiasi disegniamo 5 punti equispaziati e immaginiamo di eseguire la seguente costruzione: tramite un segmento congiungiamo uno di questi punti con il punto che si trova 2 posti oltre ruotando sulla circonferenza in senso orario; congiungiamo quindi il punto di arrivo al punto che si trova 2 posti oltre ruotando sulla circonferenza sempre in senso orario e via di seguito fino a ritornare al punto iniziale. Quello che si ottiene è il pentagramma rappresentato in Figura 1.

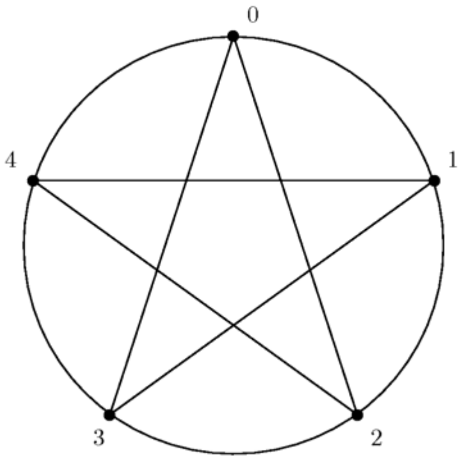


Figura 1. Pentagramma

La costruzione sopra descritta ci ha permesso di disegnare, senza mai staccare la matita dal foglio, un poligono regolare stellato con cinque vertici. Indichiamo come d'uso questo poligono con il simbolo di Schläfli {5,2} dove 5 indica il numero di vertici e 2 lo spostamento utilizzato per congiungere i punti.

Se proviamo a ripetere l'intero procedimento partendo da 6 punti, sempre con spostamento pari a 2, il poligono che si ottiene (vedi Figura 2) non ha sei vertici e, soprattutto, non è univocamente determinato. Infatti congiungendo successivamente i diversi punti otterremo due triangoli equilateri diversi, a seconda che si inizi da un punto di indice pari o dispari.

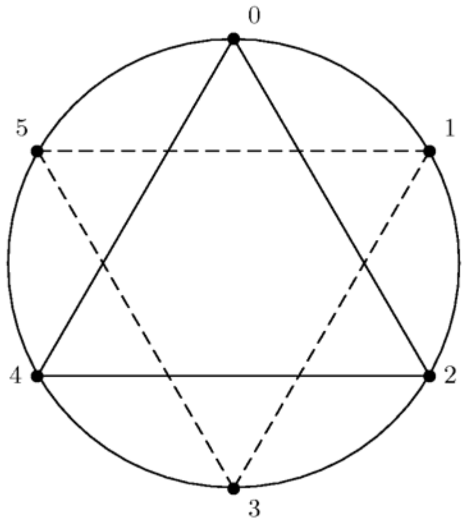


Figura 2. Stella di David

La differenza tra i due casi trattati dipende da una proprietà aritmetica che lega il numero di vertici *n* del poligono e il passo di costruzione *k*. Nel primo caso i numeri 5 e 2 sono primi tra loro, nel secondo caso 6 e 2 non sono primi tra loro e il procedimento di costruzione si arresta prima di aver raggiunto tutti e 6 i vertici. In generale allora adotteremo la seguente definizione [Coxeter]:

Definizione 1. *Dati n punti equispaziati su una circonferenza e uno spostamento k, con k < n, se n e k sono primi tra loro allora congiungendo ciascuno di questi punti con il punto che si trova k posti dopo si ottiene il poligono stellato con simbolo di Schläfli {n,k}.*

Alla luce di questa definizione, se consideriamo ad esempio i numeri 8 e 3 che sono primi tra loro, otterremo il poligono stellato {8,3} (l'ottagramma), mentre se consideriamo i numeri 8 e 2 il poligono {8,2} non è definito.

2.1. Quanti sono i poligoni stellati con n vertici?

La funzione di Eulero, che indichiamo con il simbolo $\varphi(n)$, associa a un numero intero n il numero dei primi con n e minori di n (considerando anche l'uno che non è un primo), è una funzione basilare della Teoria dei Numeri. Se la riguardiamo dal punto di vista della Definizione 1 è chiaro come la funzione di Eulero ci permetta di rispondere immediatamente alla domanda posta sopra. Infatti i poligoni stellati con n vertici sono esattamente $\varphi(n)$. Non è difficile tuttavia rendersi conto del fatto che i poligoni stellati di forma diversa sono solamente $\varphi(n)/2$ in quanto gli spostamenti k e n – k definiscono poligoni che hanno la stessa forma.

3. Numeri primi e Teorema di Wilson

Il teorema di Wilson fu scoperto per la prima volta da Ibn al-Haytham (conosciuto anche come Alhazen), ma ha preso il nome da John Wilson, uno studente del matematico inglese Edward Waring, che lo riscoprì più di 700 anni dopo. Waring annunciò il teorema nel 1770, nonostante né lui né Wilson possedessero una dimostrazione. Lagrange diede la prima dimostrazione nel 1773. Vi sono alcune ragioni per credere che Leibniz conoscesse questo risultato già un secolo prima, ma non lo pubblicò mai. Vediamo cosa afferma il teorema.

Teorema di Wilson. *Sia p un numero intero, allora p è un numero primo se e solo se p | (p – 1)! + 1, dove il simbolo | si legge "divide".*

Vediamo di comprendere il significato dell'enunciato con un esempio. Prendiamo il numero 7 e osserviamo che 6! + 1 = 721. Osservato che 721 : 7 = 13, e che quindi 7 divide 721, il Teorema di Wilson ci garantisce che 7 è primo.

Osserviamo che il teorema permette, almeno in linea di principio, di verificare la primalità di un numero intero senza dover ricorrere alla sua scomposizione in fattori primi. Tuttavia esso risulta piuttosto inutile come criterio computazionale di verifica della primalità di un numero in quanto il calcolo del fattoriale di numeri interi con molte cifre è un problema complesso, che richiede tempi di calcolo molto lunghi.

Come ha evidenziato H. S. M. Coxeter, ricorrendo ai poligoni stellati è possibile dare una dimostrazione piuttosto semplice ed elegante del Teorema di Wilson.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che se $p \mid (p-1)! + 1$, p deve essere primo, altrimenti un suo qualsiasi divisore non banale d (per la transitività della divisibilità) dovrebbe dividere $(p-1)! + 1$. Ma ciò è assurdo, poiché $d \mid (p-1)!$, perciò non può dividere anche $(p-1)! + 1$.

Viceversa supponiamo che p sia primo. Fissati p punti equispaziati su una circonferenza consideriamo l'insieme P formato da tutti i poligoni con p vertici che si ottengono congiungendo uno dopo l'altro i p punti dati con un segmento. L'insieme P contiene $(p-1)!$ poligoni. Di questi solo $\varphi(p) = p-1$ sono stellati regolari e si può dimostrare che sono invarianti per rotazioni intorno al centro della circonferenza di un qualsiasi angolo multiplo di $\alpha=2\pi/p$. Un poligono che non sia regolare stellato non è invece invariante per l'azione delle stesse rotazioni. Anzi, dato uno qualsiasi di essi, si prova che i poligoni che si ottengono ruotandolo di un multiplo di α sono tutti distinti tra loro, perciò essi sono in tutto p. In altri termini, possiamo pensare che l'insieme complementare a quello formato dai poligoni stellati regolari sia formato da un certo numero n di poligoni non regolari stellati a cui si devono aggiungere, per ciascuno di essi, $p - 1$ poligoni ottenuti per rotazione di un angolo multiplo di α intorno al centro della circonferenza. Il numero totale dei poligoni che hanno p vertici sarà allora dato da:

$$np + (p-1) = (n+1)p - 1 = (p-1)!$$

Dall'ultima uguaglianza si ha direttamente la tesi.

4. Il Piccolo Teorema di Fermat

In questo paragrafo vediamo come, sempre attraverso i poligoni stellati, si possa dimostrare il famoso Piccolo Teorema di Fermat. Fermat scoprì il teorema attorno al 1636, l'enunciato compare in una delle sue lettere, datata 18 ottobre 1640, al suo confidente Frenicle.

Piccolo Teorema di Fermat. *Sia p un numero intero, allora p è un numero primo se e solo se per ogni numero naturale a, con 0<a<p, si ha che*

(1) $$p|a^{p-1}-1$$

Dimostrazione. Anche in questo caso si vede facilmente che se $p|a^{p-1}-1$, allora p deve essere primo. Infatti, se p non fosse primo, non potrebbe dividere $a^{p-1}-1$ per ogni $0<a<p$. Infatti, denotando con d un divisore proprio di p, anche d dovrebbe dividere $d^{p-1}-1$, il che è assurdo.

Viceversa, supponiamo che p sia primo. Consideriamo i poligoni stellati $\{p,1\}$ e $\{p,a\}$ e osserviamo che essi hanno gli stessi vertici, a meno dell'ordine con cui essi vengono congiunti. Il primo poligono viene costruito congiungendo nell'ordine i vertici 0, 1, 2, ... , p – 1, 0 il secondo congiungendo nell'ordine i vertici 0, a, 2a, ... , (p - 1)a, 0. Quindi avremo:

$$1\cdot 2\cdots(p-1)\equiv a\cdot 2a\cdots a(p-1) \pmod p$$

da cui

$$(p-1)!\equiv a^{p-1}\cdot(p-1)! \pmod p.$$

Allora

$$p\mid(a^{p-1}-1)(p-1)!$$

e dal momento che p non può ovviamente dividere $(p-1)!$ si ha la tesi.

Il Piccolo Teorema di Fermat ha numerose applicazioni ma qui ci limitiamo a discuterne una che consiste nell'utilizzare la relazione (1) per eseguire un rapido test di primalità ossia per verificare velocemente se un numero è un buon candidato ad essere o meno primo. Ad esempio, consideriamo il numero 97 e immaginiamo di voler eseguire un test di primalità su questo numero. Usando il Piccolo Teorema di Fermat controlliamo se

$$97\mid 2^{97-1}-1$$

In effetti, sviluppando i calcoli, si ha

$$\left(2^{97-1}-1\right)/97=816785180559426160758185055$$

e quindi possiamo ipotizzare che 97 sia un numero primo. In effetti 97 è un numero primo!

Il test di primalità condotto utilizzando il Piccolo Teorema di Fermat non sempre funziona: se ad esempio si considera il numero 341 è semplice vedere che il numero

$$\left(2^{341-1}-1\right)/341$$

è intero mentre $341 = 11\cdot 31$ e quindi 341 non è primo.

BIBLIOGRAFIA

Boyer C., *Storia della Matematica*, Edizioni Mondadori, Milano, 2001.

Coxeter H. S. M., *Introduction to Geometry*, New York: Wiley, 1969.

Franco Baldissarutti, *Sgabello con figure geometriche*

Povera e nuda vai, Matematica!

di Domenico Lenzi [domenico.lenzi@unile.it]

La gola e 'l sonno e l'oziose piume
hanno del mondo ogni vertù sbandita,
ond'è dal corso suo quasi smarrita
nostra natura vinta dal costume; [...]
Qual vaghezza di lauro? qual di mirto?
- Povera e nuda vai, Filosofia -
dice la turba al vil guadagno intesa.
Pochi compagni avrai [...]
Francesco Petrarca

Sommario

A cura delle Società ADT e Mathesis si sono tenuti (ad Assergi e Otranto nel 2005, a Lipari nel 2006) alcuni convegni sul tema "Sempre meno iscritti alle facoltà scientifiche! Forse perché Matematica è la più odiata dagli italiani? Come farla amare?" Qui sono presentate alcune considerazioni sull'argomento svolte dall'autore in quei convegni e durante la Summer Scool organizzata dall'Ufficio Scol. Reg. per la Lombardia a S. Pellegrino Terme (BG) (nel 2006). Le stesse questioni sono state riprese nel corso di due successivi convegni ADT (Lamezia Terme nel 2006, e Salerno-Positano 2007; si veda [5] e [6]).

1. Introduzione

"Quei favolosi anni '60" si sente spesso dire. E sembrò che tali essi potessero essere anche nell'ambito di un rinnovato insegnamento della matematica. Gli addetti ai lavori che abbiano superato i cinquant'anni certamente ricorderanno gli entusiasmi che la *teoria degli insiemi*, subito ridenominata *insiemistica*, riuscì ad accendere. Come scordare la "rivoluzione fallita" che essa aveva avviato in quegli anni? Purtroppo, un suo improvvido uso in chiave didattica fece sì che tutto finisse in una bolla di sapone, tanto che a un certo punto la parola d'ordine fu di ignorare quella che ormai era diventata l'*insiemistificazione*, bandendola di fatto dall'insegnamento nella scuola dell'obbligo.

Ricordiamo ancora che a quei tempi, scimmiottando molte delle cose che in vari corsi di aggiornamento (si fa per dire!) si andava raccontando, molti insegnanti arrivarono a introdurre (e non a rivedere, cosa questa che sarebbe stata opportuna!) la nozione di moltiplicazione tra numeri naturali come cardinalità del prodotto cartesiano di due insiemi, dimenticando quella che per secoli e secoli era stata la nozione di moltiplicazione, intesa come addizione tra addendi tutti uguali. A ciò fecero seguito le numerose schiere di alunni che già in prima elementare erano costretti a recitare a memoria, senza capirne il significato: «*Dicesi prodotto di due numeri la cardinalità* … (e via sproloquiando!)». Perciò era inevitabile che le speranze presto andassero deluse. Corsi di aggiornamento abborracciati (certo non tutti) – rivolti a insegnanti impreparati (non sempre per colpa loro) – tenuti da docenti dei gradi scolastici superiori, anche universitari, spesso si ridussero a presentare ricettarî didattici approssimativi che i corsisti fruitori non riuscirono ad assimilare, soprattutto dal punto di vista della valenza didattica. Fu, quella, una grande occasione sprecata, nonostante la buona volontà di tutti.

Spesso si approntarono equilibrismi didattici inutili. Il tentativo di evidenziare, giustamente, anche alcuni aspetti linguistici della matematica a volte si realizzò in maniera approssimativa, senza le dovute precauzioni. Come non ricordare i richiami di Giovanni Melzi dalle pagine del "Periodico di matematiche" (si veda [7]), organo ufficiale della Società naz. Mathesis? Egli precisò, e non si può che essere d'accordo con lui: «*In mancanza di un'adeguata elaborazione pedagogica si finirebbe probabilmente per stra-*

volgere magari un intero capitolo della linguistica teorica [...] *per farne un idolo mummificato incomprensibile.* [...] *si avrebbe il fenomeno parallelo a quello tristissimo per il quale la teoria degli insiemi* [...] *è diventata nella scuola un inqualificabile sgorbio intriso di simbolismo fasullo che passa sotto il nome fumogeno di insiemistica*».

Ne conseguì che, a causa dei troppi errori - sia di metodo sia di sostanza - la 'restaurazione' didattica finì con l'avere la sua rivincita e una grande occasione andò perduta. E la matematica è diventata la cenerentola delle materie d'insegnamento nelle scuole di ogni ordine e grado, università compresa, anche in quelle facoltà dove ha un'importante funzione di servizio. Ma ormai anche lì non si chiedono altro che regole applicative e "ricette", spesso rifiutandosi di capire i concetti più elementari della nostra disciplina, che servirebbero a dare un senso a quelle ricette.

Certo non si pretende di essere (o di essere stati) esaurienti. La nostra speranza è di sollecitare gli addetti ai lavori a una maggiore attenzione alle questioni trattate - e ad altre che non abbiamo avuto il tempo di affrontare - affinché si possa dare tutti un più efficace contributo.

2. Matematica, disciplina odiata e incompresa

*L*a matematica è una delle materie meno amate al mondo, come se si fosse scaricata la molla che qualche millennio fa la trasformò in scienza. Questa molla agli inizi fu attivata proprio dal fatto che per i primi cultori di tale disciplina i problemi di esistenza e di sussistenza fossero stati superati. Infatti, questi cultori li ritroviamo già alcuni secoli prima della nascita di Cristo – in Mesopotamia e nel vicino oriente – soprattutto all'interno di caste sacerdotali, in cui non c'era il problema del sopravvivere. Lo stesso Aristotele parlò dell'esistenza di una scienza di tipo speculativo in Egitto nel periodo che precedette il fiorire della geometria in Grecia. E ora che nel cosiddetto mondo civile il benessere è pressoché generalizzato, sembra strano che non si riesca a ricaricare quella molla.

Secondo recenti indagini – che andrebbero prese con beneficio di inventario, ma che nel caso in questione sembrano descrivere in modo abbastanza preciso la situazione – la matematica è considerata dalla maggior parte della gente una scienza astratta (e in qualche modo si può essere d'accordo con tale valutazione); ma il guaio è che essa viene giudicata lontana dalle esperienze e dagli interessi dei comuni mortali, di scarsa utilità per la vita concreta e in definitiva inutile e forse da bandire dai programmi scolastici. Purtroppo i sentimenti di questi "nemici" della matematica sono in parte giustificati. Infatti non è che essi non capiscano che la matematica possa svolgere un ruolo importante; quello che non capiscono è il perché essa debba essere imposta a tutti, perché tutti la debbano studiare. E confessiamo che se la matematica deve continuare a essere insegnata come si insegna ora – a parte alcune eccezioni significative – forse varrebbe la pena (lo diciamo in modo volutamente provocatorio) di renderla facoltativa, così come a un certo punto è stato fatto col latino; materia importante ed utile, il cui insegnamento, però, non si è stati in grado di riconvertire in modo efficace e proficuo.

In questo atteggiamento ci sentiamo in ottima compagnia, pensando che lo stesso Henri Poincaré era dell'avviso che la matematica dovesse essere studiata solo da quelli che erano in grado di capirla. Perciò non ci sentiamo nemmeno di dar torto a quel giudice che qualche hanno fa promosse d'ufficio alla classe successiva uno studente a cui la scuola non era riuscita a far apprezzare la matematica, che per lui si era trasformata in uno "strumento di tortura". Però questo per noi non significa che non si debbano ricercare i modi più adatti ed efficaci affinché la matematica possa essere amata e compresa.

Purtroppo la crisi nell'insegnamento della matematica si fa sentire in modo particolare; e questo fenomeno non è solo italiano ma interessa quasi tutto il mondo civile.

Il 22 settembre del 2006, durante una serata dedicata alla ricerca scientifica e organizzata per via telematica dalle università pugliesi, è stata invitata a tenere una conferenza a Lecce la giornalista Michela Fontana, laureata in matematica, nonché addetto scientifico presso l'ambasciata italiana a Ottawa (Canada). Ella ha esordito presentando alcune vignette pubblicate su di un importante giornale canadese. Nella prima c'è un professore universitario che ringrazia gli studenti per essere intervenuti numerosi alla prima lezione del suo corso di astronomia. Nella seconda vignetta compare uno studente che chiede al professore quale differenza ci sia tra l'astronomia e l'astrologia. Nella terza il docente risponde che la differenza consiste soprattutto nel fatto che in astronomia si usa moltissima matematica. Infine nella quarta vignetta si vede il professore che osserva sconsolato la sua classe completamente vuota: gli studenti sono tutti scappati via nel timore di dover studiare matematica.

E pensare che un tempo la matematica era una disciplina riconosciuta come fondamentale, ovunque. La stessa Michela Fontana ha ricordato che il gesuita marchigiano Matteo Ricci, approdato in Cina come missionario verso la fine del XVI secolo, riuscì a diventare – col nome di Li (Ricci) Madou (Matteo) – uno dei personaggi di spicco di quella immensa nazione, per aver ivi diffuso aspetti importanti della cultura europea. Il che gli procurò notevoli riconoscimenti, tanto è vero che uno dei privilegi attribuitigli fu quello della sepoltura in terra cinese. E un importante dignitario della corte imperiale ebbe a dire che per tanto onore sarebbe bastato il fatto che il Ricci introdusse in Cina gli Elementi di Euclide, dando un contributo essenziale alla loro traduzione in mandarino (cfr. [2]).

Purtroppo, parafrasando una frase abbastanza nota del Petrarca – riferita alla filosofia e contenuta nel Canzoniere – ci verrebbe da dire: *povera e nuda vai, Matematica*! Ma il legame tra le due discipline va ben oltre una semplice parafrasi. Esso affonda le sue millenarie radici nella storia della nostra civiltà; e il ricordarlo, mettendolo nella giusta luce, forse gioverebbe a entrambe. Infatti è noto che a partire dall'antichità e proseguendo via via fin quasi ai giorni nostri, i più eccelsi studiosi hanno coltivato entrambe le discipline. Purtroppo ora questa antica tradizione è quasi svanita e spesso alcuni filosofi guardano con sospetto e sufficienza alla nostra e alle altre scienze; quando addirittura non ne rubano i concetti, per travisarli e appiccicarli a sproposito ai loro punti di vista, onde riceverne un ingiustificato appoggio.

È povera la nostra disciplina, ed è nuda la regina delle scienze. E noi non ci stanchiamo di gridarlo; come l'ingenuo fanciullo della novella di Andersen, che al passaggio del suo sovrano privo di abiti in mezzo ai sudditi osannanti esclamò a gran voce: "*Il re è nudo*!".

Ma riuscirà la nostra voce a giungere fin dentro i palazzi del potere? E riuscirà a smuovere tanti nostri colleghi che fanno finta di ignorare la nudità della nostra disciplina e continuano a cercare il nulla fra le nuvole, incuranti o forse ignoranti delle potenzialità dello studio della matematica come formidabile ginnastica mentale e come educazione alla razionalità? Noi lo speriamo; pur tuttavia, per le esperienze già fatte, non ci facciamo soverchie illusioni.

A proposito della sufficienza con cui alcuni filosofi d'oggi trattano la matematica, citiamo un episodio che è un indicatore significativo del pressappochismo con cui si guarda ad essa. Da qualche anno impazza su giornali e riviste la mania del *SUDOKU*. Durante i primi giorni di questo nuovo tormentone, il *Corriere della Sera* intervistò un filosofo, accademico dei Lincei, che dichiarò di aver apprezzato questa specie di gioco di società; precisando candidamente che, anche se venivano usati dei numeri, il Sudoku aveva ben poco a che fare con la matematica. Lui vi si era appassionato, e aveva affrontato il nuovo passatempo con un po' di Logica aristotelica, una cosa ben diversa dalla matematica (sic!) – diceva lui – senza usare lunghi calcoli o strane equazioni.

L'illustre filosofo non sa che oltre alla matematica dei lunghi calcoli o delle strane equazioni esiste anche un altro tipo di matematica, che prese le mosse proprio da un suo illustre collega, ma anche matematico eccelso: Leibniz. A tal proposito Leonhard Euler (Eulero) – che, tra l'altro, introdusse i *quadrati latini* (di cui il Sudoku è una variante) e diede un notevole impulso a quest'altro tipo di matematica – scrisse (si veda [1]): […] *Oltre a quella parte di geometria che si occupa di grandezze […], c'è un'altra parte, quasi sconosciuta, che Leibniz considerò per primo, e chiamò geometria di posizione* […]

Ma cerchiamo di dare qualche possibile risposta al perché la matematica sia una disciplina tanto aborrita. Ci sembra di poter dire che un primo motivo – rispetto alla naturale evoluzione mentale dei nostri bambini – risieda in una inadeguatezza da parte della società a dare completa soddisfazione all'ansia di apprendimento che si accende in ogni bambino a partire da quando egli incomincia ad avere coscienza di sé.

Andando per sommi capi e soprattutto esprimendo sensazioni – non avendo la necessaria competenza scientifica per trattare adeguatamente certi temi – ci sembra di poter dire che il primo approccio alla conoscenza avviene per via sincretica-globale, nell'ambito di un contesto in cui le cose sembrano avere tutte la stessa importanza; per passare poi, per quanto è possibile, a un'analisi e a un più o meno soddisfacente apprendimento delle cose più significative nell'ambito del contesto che è oggetto di attenzione.

Per quel che riguarda il contesto linguistico e le abilità che gli sono pertinenti, sollecitazioni continue, errori e aggiustamenti successivi fanno sì che in linea di massima si arrivi presto – in modo naturale e quasi automatico – a conquistare la lingua materna e la relativa grammatica, pur senza che ci sia piena coscienza di ciò e senza necessariamente sapere cosa sia una grammatica. Un po' come *il gentiluomo borghese* di Moliere, che a un certo punto si accorse con una certa meraviglia di aver sempre parlato in prosa.

Molti di noi ricorderanno le difficoltà incontrate con lo studio del latino (per non parlare del greco), eppure nell'antica Roma i bambini possedevano un vocabolario adeguato alle loro esigenze già prima che riuscissero a muovere i primi passi; dopodiché riuscivano ben presto a gestire in modo naturale le prime forme sintattiche elementari.

Sono cose ovvie, si dirà. Ma, purtroppo, spesso non si tiene conto proprio delle ovvietà; che potrebbero darci un aiuto formidabile e pressoché gratuito anche nell'ambito dell'insegnamento della matematica. E intanto si tende a procrastinare i primi approcci dei nostri bambini con un modo di "fare matematica" non estemporaneo e organizzato e strutturato a loro misura. Certo in ciò ha avuto un peso notevole la poca dimestichezza con la disciplina e col modo di presentare i suoi primi elementi da parte della quasi totalità degli adulti.

In un convegno svoltosi nel novembre 2006 a Castel S. Pietro, ho avuto modo di ascoltare un'interessantissima conferenza della professoressa Daniela Lucangeli, psicologa presso l'università di Padova. Essa lamentava il fatto che un periodo estremamente fertile per l'organizzazione dei primi apprendimenti numerici – quale quello della prima infanzia – resti pressoché inutilizzato in ambito scolastico, facendo perdere ai nostri bambini delle opportunità "favolose" nell'ambito delle prime conoscenze matematiche. Per fare un paragone, ella diceva, sarebbe come se noi impedissimo ai nostri bimbi di parlare prima dei sei anni.

Tutti ci rendiamo conto del danno immenso che sarebbe arrecato loro se ciò avvenisse; come l'esperienza ci ha insegnato attraverso casi di bambini che sono cresciuti nelle foreste, senza alcun contatto con la civiltà. Ebbene, per quel che riguarda l'organizzazione dei primi apprendimenti matematici, è come se fino alla prima elementare i nostri piccoli vivessero in una specie di giungla, a parte qualche eccezione. Sarebbe perciò estremamente importante impegnare la scuola dell'infanzia anche per quel che riguarda un efficace avvio ai primi concetti matematici, aiutando i bambini a superare le difficoltà – forse meno gravi di quel che appaiono – legate a una non del tutto acquisita nozione delle quantità sia continue che discrete.

Ma anche nelle scuole elementari non sono rose e fiori, a volte a causa delle riserve di molti genitori. Qualche mese fa, durante una tavola rotonda tenutasi nel corso di un convegno, una partecipante – docente di scuola media superiore – lamentava il fatto che l'insegnante di sua figlia pretendesse di insegnare in terza elementare la rappresentazione dei numeri in base 2.

Ebbene non possiamo fare a meno di tornare sulla *rivoluzione mancata* degli anni '60 del secolo scorso; rivoluzione fallita a causa di una gestione approssimativa e velleitaria di un progetto che aveva dato risultati lusinghieri in moltissime scuole.

La rappresentazione dei numeri, anche in base diversa dal 10, fu in quegli anni (insieme all'aritmetica modulare) uno dei cavalli di battaglia della nostra scuola elementare, avendo come "strumenti fondamentali" i regoli multibase e l'abaco.

A proposito della rappresentazione dei numeri in basi diverse da quella del *dieci*, spesso si afferma che esse – in quanto diverse dalla usuale – potrebbero confondere gli alunni, inducendoli in errore. Ebbene uno dei buoni risultati della "nuova matematica" degli anni '60 fu la dimestichezza che moltissimi alunni riuscirono ad avere col concetto di numerazione posizionale proprio perché non si fossilizzarono su di un'unica base. Per non parlare dell'importanza e dell'utilità dello studio della base *due*, fondamentale per il funzionamento dei computer.

Ricordo con nostalgia un esperimento didattico da me condotto con due laureande in matematica, insieme alle quali nei primi anni '80 avviai un gruppo di scolari, di poco superiori ai cinque anni, alla rappresentazione dei numeri in base *due*. I risultati furono sorprendenti, al di là di ogni aspettativa, nonostante si trattasse di bambini del tutto normali di alcune classi di scuola materna di una cittadina dell'entroterra leccese. I piccoli furono addestrati anche all'algoritmo dell'addizione in base 2. Tale algoritmo, come è noto, è analogo a quello della base *dieci*, ma non presenta le difficoltà mnemoniche dovute alla necessità di ricordare la "tabellina" dell'ad-dizione delle dieci cifre di quest'altra base; il che fa sì che ci si possa concentrare sulla natura e sul senso del calcolo, per poi trasportarlo facilmente alle altre basi.

Ma quali sono le ragioni di questa paradossale crisi della matematica in ambito didattico? Esse sono molteplici; qui vogliamo analizzarne alcune – a nostro avviso cruciali – su cui già in altre occasioni ci è capitato di soffermarci. Alcune sono esterne alla matematica e risiedono nel lassismo che ha investito il mondo del benessere e del consumismo, ed ha portato molti dei nostri ragazzi (certo, con le immancabili eccezioni) a dare poca importanza alla cultura e alla scuola. Il che si riflette soprattutto su ogni materia che presenti delle difficoltà che sembrano intrinseche ad essa, ivi compresa la matematica.

Per quel che riguarda la nostra disciplina, forse con un'oculata ricerca didattica quelle difficoltà potrebbero essere meglio individuate e attenuate, se non proprio eliminate. Purtroppo in Italia la ricerca in didattica della matematica è condotta in maniera estemporanea e scoordinata; ed è molto difficile che in un immediato futuro le cose possano cambiare.

In un Convegno sull'Educazione scientifica in Italia, organizzato dall'I.R.R.E. dell'Umbria e svoltosi nel mese di marzo del 2005 a Foligno, Lucio Russo ha affermato: «*Se la didattica della matematica non può rimanere ancorata a concezioni superate sul piano scientifico, essa non può neppure inseguire le novità della ricerca, che in gran parte restano inaccessibili a livello di scuola secondaria*».

E purtroppo bisogna dire che a volte in didattica della matematica non solo si sono volute improvvidamente inseguire le novità della ricerca, ma addirittura le si è volute interpretare a sproposito e sopravanzare, con risultati spesso disastrosi, trasformando in deludenti "debacles" le attese e le speranze che si erano dischiuse, come nel caso ricordato della teoria degli insiemi.

Tra le mode culturali vogliamo ricordare anche quella legata alla "riscoperta" in chiave didattica delle *geometrie non euclidee*, che seppero dare un nuovo impulso allo studio della geometria – compresa la geometria euclidea – contribuendo a chiarire meglio il ruolo degli assiomi, facendo emergere la necessità di evitare pericolose commistioni tra motivazioni intuitive di una teoria e il suo sviluppo rigoroso. E l'educazione al rigore di pensiero è fondamentale soprattutto in un momento come quello che la nostra società sta attualmente attraversando, in cui il pressappochismo la fa da padrone.

Ma le geometrie non euclidee, che a detta di qualcuno sarebbero in grado di descrivere meglio il mondo in cui siamo immersi, in realtà – a parte alcuni esempi significativi e modelli legati proprio alle geometrie euclidee – hanno ben poco di intuibile e di riconducibile al mondo dei nostri sensi (si veda [3]). E a proposito di ciò si pensi a cosa potrebbe essere una pavimentazione con mattonelle quadrate qualora queste, in accordo con certe geometrie non euclidee, avessero gli angoli interni inferiori (oppure superiori) a un angolo retto. Sarebbe la fine della "nostra geometria"; quella dell'"uomo qualunque"; quella del muratore, col suo "filo a piombo"; del falegname con le sue porte che non potrebbero svolgere la loro funzione se i relativi angoli non fossero rigorosamente rettangoli; quella del meccanico con i suoi torni, i suoi cuscinetti, e via discorrendo.

Dal 9 al 17 aprile 1965 si svolse a Ravenna il «*XIX Rencontre*» della *Commission internationale pour l'etude e l'amélioration de l'ensei-gnement des mathématique*, composta da personaggi prestigiosi nell'ambito della didattica della matematica. Ci limitiamo a ricordare il presidente George Papy (Belgio), la vicepresidente Zofia Krygoska (Polonia), gli italiani Emma Castelnuovo e Angelo Pescarini.
Al termine del *Rencontre* la commissione approvò all'unanimità una mozione – proposta dal francese A. Revuz – di cui qui di seguito riportiamo le prime righe ([8], p. 126): «*L'introduzione di nozioni di algebra moderna nell'insegnamento da 10-11 anni a 18 anni si sta realizzando senza gravi difficoltà. Queste nozioni portano proprietà e chiarezza in un campo in cui il principiante non conosceva altro che una tecnica basata sulla routine piuttosto che sulla riflessione; esse stimolano l'in-teresse in uno studio in cui spesso regnava la noia*.»

Parole che ci sentiamo di condividere in pieno, ma con un segnale di *attention* e di precauzione.

Intanto c'è da dire, purtroppo, che verso la fine del documento si incontra una proposta velleitaria e ingiustificata, che si basa su di una visione della geometria che può essere comprensibile in studiosi di notevole livello, quali erano moltissimi dei membri della Commissione, ma che è impensabile nella maggior parte degli studenti, per i quali è già difficile confrontarsi con l'usuale visione euclidea della geometria. Infatti a un certo punto della mozione si afferma: "[...] *La geometria occupa senza dubbio un posto a sé nell'insegnamento dagli 11 ai 18 anni* [...] *Ma questa teoria si inserisce perfettamente nell'organizzazione unificata della matematica: è lo studio di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo dei reali, dotato di un prodotto scalare* [...]."

I membri della commissione – un po' ingenuamente e forse in preda a un eccessivo entusiasmo – si rendevano conto che la "verità" da loro affermata nei riguardi della geometria altro non era che una "riscoperta" – anche sotto una forma più semplice – di questo importante settore della matematica; ma non capirono che ciò poteva valere per loro, che già da prima avevano cognizione della geometria euclidea presentata nei termini usuali, come visione e descrizione del mondo che ci circonda. Con la nozione di perpendicolarità ben chiara anche a mio nonno, che pur si vantava di non aver capito mai nulla di matematica, ma che quando mi vedeva posizionato un po' di traverso non esitava a dirmi di stare diritto; il che addirittura esprimeva una nozione di perpendicolarità ben più forte: quella di ortogonalità (al piano del pavimento); che lui possedeva, senza il bisogno di esprimerla attraverso la nozione di prodotto scalare. Il suo era un richiamo a una "postura" di tipo geometrico, anche se non ne aveva coscienza, così come per tanti anni *le bourgeois gentilhomme* di Moliere non si era reso conto di parlare in prosa.

Quella della *Commission* – coadiuvata dall'at-teggiamento irresponsabile di una parte del mondo accademico matematico, che addirittura pretese di bandire dalla geometria l'uso di figure esplicative – fu un'ingiustificata fuga in avanti e contribuì a far bandire dall'insegnamento pre-universitario la cosiddetta *nuova matematica*.

La visione che la *Commission* aveva dell'alge-bra moderna, intesa come portatrice di *proprietà e chiarezza in un campo in cui il principiante non conosceva altro che una tecnica basata sulla routine piuttosto che sulla riflessione*, esprimeva anche una sollecitazione e un auspicio che spesso sono rimasti inascoltati.

Ricordo di aver conosciuto molti anni fa un giovane laureatosi in matematica presso una prestigiosa università italiana, che dichiarava candidamente di aver preso 30 in algebra, ma studiando tutto a memoria senza capire niente. Erano gli anni in cui l'introduzione delle frazioni e della relativa moltiplicazione si trasformò, anche prima dell'università, nella simmetrizzazione di un semigruppo commutativo dotato di regola di semplificazione, pur se non sempre questa terminologia veniva adoperata. Ma questo tipo di impostazione dava – e dà – soltanto una garanzia formale all'usuale moltiplicazione, però perdendo di vista le ragioni concrete del modo di effettuare quest'operazione. Su ciò torneremo in seguito.

Purtroppo da noi la crisi nell'ambito dell'ap-prendimento della matematica si fa sentire in modo particolare, e – nonostante la nostra collocazione tra i paesi più evoluti del mondo industrializzato – in una gara internazionale di matematica svoltasi nel 2005 i ragazzi italiani si sono classificati ben oltre il ventesimo posto (però nel 2006 la situazione è migliorata). Ed è eclatante il fatto che il nostro ministro della pubblica istruzione dell'epoca abbia inviato loro un telegramma di felicitazioni.

Cosa ben diversa da quello che succede in Italia di fronte a *debacles* sportive. Ricordiamo che dopo una competizione di atletica leggera di altissimo livello internazionale, in cui l'Italia si era classificata intorno al 10° posto, i responsabili delle varie discipline atletiche furono tutti esonerati dai loro incarichi. Invece i colpevoli del fallimento sul piano didattico della nostra materia sono da anni al loro posto. Per fortuna ora pare che in alcuni ambienti si stia incominciando a capire l'importanza della matematica nella formazione del cittadino in termini di educazione alla razionalità, alla coerenza e al rigore di pensiero, alla "pulizia" nei ragionamenti. Con la conseguente capacità, come ha ricordato qualche tempo addietro Thomas Mackinson sul Corriere della Sera […] *di comprendere, interpretare, governare la complessità attraverso modelli, appunto di natura matematica, capaci di conferirle ordine e direzione* […].

3. Sull'importanza del linguaggio in matematica.

*U*na delle ragioni per le quali in matematica si incontrano, a ogni livello, molte difficoltà è che non sempre i termini in essa adoperati sono sufficientemente evocativi: spesso i simboli usati per designare alcuni concetti non hanno in sé niente che aiuti a richiamarli, anche se quei concetti sono di per sé chiari.

Si dirà che questa è una caratteristica tipica della comunicazione. E' quello che spesso viene designato come "contratto sociale" che porta ad accettare la convenzione tramite la quale, anche nel linguaggio ordinario, a un oggetto o a una nozione corrispondono parole o simboli che li individuano attraverso definizioni opportune.

Ma non è di questo che qui si vuol discutere. Infatti lo spirito di quel contratto viene accettato e rispettato senza difficoltà sin dai primi anni di vita, anche in evenienze occasionali. E i giochi infantili sono pieni di situazioni in cui una sedia diventa un'automobile, o uno scatolone diventa una casa. Inoltre nella scuola materna il cosiddetto 'contrassegno' è usato con naturalezza dai bambini, che accettano senza difficoltà di individuare le loro cose con cartoncini personalizzati, usati come segni di riconoscimento. Piuttosto, qui si vuole sottolineare che quando il simbolo prescelto non è sufficientemente evocativo - e quindi non presenta elementi atti a ricordare stabilmente ciò che esso significa - in mancanza di un suo uso frequente possono sorgere problemi di carattere mnemonico che hanno ripercussioni notevoli sull'apprendimento.

A tal proposito segnaliamo che in un congresso svoltosi alcuni anni fa è stato illustrato uno studio sui segnali di pericolo adatti ai bambini. E' risultato che il teschio con tibie incrociate – il cui significato per gli adulti è evidente

– non è abbastanza evocativo per i fanciulli. Invece il segnale più efficace è risultato quello che raffigurava un volto infantile che piange.
Perciò è importante offrire all'alunno appigli mnemonici e tempi che consen-tano gli opportuni rinforzi affinché il legame tra ciò che si vuol rappresentare e il simbolo prescelto diventi stabile e quindi efficacemente fruibile.

Inoltre ci sono situazioni in cui un'analisi ragionata e attenta dei significati di certe parole usate in matematica potrebbe risultare utilissima in termini sia di educazione linguistica sia di apprendimento matematico. Gli esempi possono essere tanti; qui per ora ci limitiamo a presentarne uno, riguardante la moltiplicazione tra numeri interi.

Si pensi alla moltiplicazione 4x3. E' noto che il primo numero è detto *moltiplicando* e il secondo *moltiplicatore*. Questi termini hanno un significato ben preciso; e non sarebbe la stessa cosa se al loro posto usassimo i nomi *Cip* e *Ciop*. Quanti insegnanti sottolineano ancora – come avveniva tanti anni fa; ma mi auguro che siano ancora in molti, – che "moltiplicando" significa "da moltiplicare"? Onde, in 4x3, il 4 deve essere moltiplicato, cioè addizionato a se stesso più volte; nello stesso tempo c'è un "agente", un "operatore" che dice in che modo il 4 sia da moltiplicare; cioè c'è un *moltiplicatore*, che in questo caso è il 3, che impone che 4 sia addizionato a se stesso tre volte. Questo fa sì che i due fattori 3 e 4 nella moltiplicazione (anche se poi essa si rivela commutativa) non entrano in gioco allo stesso modo; il che potrebbe tornare utile nel passaggio dalla nozione di moltiplicazione tra numeri naturali a quella tra altri tipi di numeri.

Ad esempio, una volta conosciuti da parte dell'alunno i numeri interi relativi e la conseguente nozione di addizione tra questi, in (-4)x3 il simbolo "3" continua a svolgere lo stesso ruolo di moltiplicatore. Cioè, (-4)x3 significa semplicemente (-4)+(-4)+(-4). Invece in (-4)x(-3) il segno "-" che accompagna "l'operatore 3" sta a significare, *per convenzione*, che "3" svolge ancora lo stesso ruolo, ma dopo che a -4 è stato cambiato il segno. Perciò (-4)x(-3) significa semplicemente (+4) + (+4) + (+4) (o, se si preferisce, 4 + 4 + 4). Cosicché la regola dei segni perde il suo aspetto incomprensibile e arcano; e soprattutto diventano superflui i tentativi (concettualmente errati) di dimostrarla.

Piuttosto, a proposito di 4x3, e di altre moltiplicazioni tra numeri naturali, sarebbe il caso di leggere il segno "x" come "volte": cioè, "4 volte tre" e non "4 per 3" (che significa "3 volte 4"); così come si fa in altre lingue. Ad esempio, in francese la "x" di 3x4 si legge "fois", in inglese "times" e in tedesco si legge "mal" (e in tutti e tre i casi la traduzione italiana è "volte"). Infatti, terminata la scuola elementare, per i nostri studenti scrivere 3xa (o meglio, 3a) significherà a + a + a, onde l'*operatore* sarà il numero collocato sulla sinistra. Il che si accorda col fatto che, nel rappresentare l'immagine di un elemento a tramite una funzione $\boldsymbol{f}$, si ha l'abitudine di scrivere $\boldsymbol{f}a$ o anche $\boldsymbol{f}(a)$, onde l'operatore $\boldsymbol{f}$ è collocato sulla sinistra [notazione sinistra]. È vero che talora l'operatore $\boldsymbol{f}$ si pone anche a destra [notazione destra], ma ciò avviene soprattutto nel caso particolare in cui esso figuri come esponente: a^f [notazione esponenziale].

Un altro esempio significativo è offerto dalle frazioni. Infatti in 2/5 il 2 è detto *numeratore*, cioè 2 è qualcosa che numera, che esprime un conteggio. Ma che cosa enumera questo 2, cosa quantifica? Ebbene ciò è precisato dall'altro numero – che nel nostro caso è il 5 – detto *denominatore*. Cioè, il 5 "denomina", dà il nome di *quinti* a parti di un *qualcosa* (di una torta, di un segmento, di una superficie, ecc.) che è stato suddiviso in 5 parti eguali. Ciò fa sì che si possa arrivare a capire perché la moltiplicazione tra due frazioni a/b e c/d avvenga nel modo ben noto; onde il risultato è una frazione che ha come numeratore il prodotto ac dei numeratori e come denominatore il prodotto bd dei denominatori. Ebbene, procedendo per semplicità con un caso concreto, $3/4 \cdot 2/5$ significa che di un *qualcosa* (una torta, un segmento ...) si considera prima i 2/5, dopodiché della parte ottenuta si considerano i 3/4. Però questo processo, svoltosi in due tempi, dà un risultato che si sarebbe potuto ottenere in una sola volta, considerando di quel *qualcosa* iniziale i $(3 \cdot 2)/(4 \cdot 5)$;

cioè, i sei ventesimi. Il che *a priori* non è detto che dovesse accadere.

Invece addizionare due frazioni a/b e c/d è altra cosa, poiché la somma di due frazioni formalizza un ben altro e ben conosciuto processo concreto, onde non c'è alcuna ragione – a parte una ingiustificabile analogia formale – perché quella somma si debba svolgere sommando tra loro rispettivamente i due numeratori e i due denominatori.

Tornando alla moltiplicazione tra frazioni, per una proficua presa di coscienza del perché la moltiplicazione si svolga come è stato ricordato precedentemente, intanto sarebbe il caso che accanto ai nomi "numeratore" e "denominatore"– e non in sostituzione di questi – si usassero rispettivamente anche i nomi di "moltiplicatore" e di "divisore", che meglio ricordano il ruolo operativo di quei numeri, sottolineando il fatto che col simbolo c/d sono rappresentati due processi sequenziali unificati, che per brevità indicheremo con $/d$ (o anche $1/d$) il primo e con c il secondo.

Cioè, come si diceva, di un certo qualcosa, chiamiamolo q, prima si considera la sua suddivisione in d parti eguali e poi di queste se ne considerano c. Onde il risultato di questo processo viene sinteticamente indicato con (c/d)q.

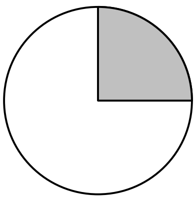


fig. 1

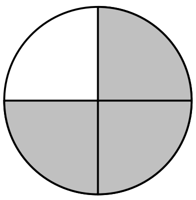


fig. 2

Cioè, se **q** è una torta, allora (3/4)**q** significa che della torta prima si considera la quarta parte (si veda quella evidenziata in fig. 1) e poi di queste parti se ne considerano 3 (si veda fig. 2).

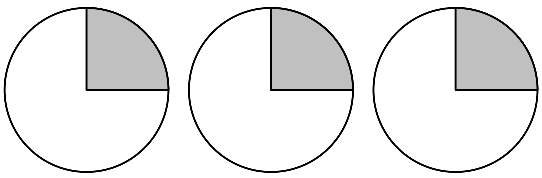


fig. 3

Naturalmente, lo stesso risultato si sarebbe ottenuto se prima la torta di fig. 1 fosse stata moltiplicata per 3 (cioè, si fossero considerate tre torte) e poi in ognuna delle torte si fosse presa la quarta parte (si veda fig. 3).

Cioè, quei due processi di suddivisione e di moltiplicazione sono intercambiabili tra loro. Per capire meglio quello che intendiamo dire, si pensi a una procedura lavorativa in cui un oggetto **p** venga sottoposto a quattro successivi processi di trasformazione che chiamiamo rispettivamente f_1, f_2, f_3, f_4. Per cui l'oggetto verrà ad assumere l'uno dopo l'altro quattro nuovi stati che indicheremo con

$$f_1\mathbf{p},\ f_2f_1\mathbf{p},\ f_3f_2f_1\mathbf{p},\ f_4f_3f_2f_1\mathbf{p}.$$

Talora può capitare che due processi successivi siano svolti da una medesima persona, dando luogo a un unico processo in cui si compendiano i due. Per esempio, se un individuo svolge di seguito i processi f_2 e f_3, allora gli ultimi due stati saranno indicati rispettivamente con $[f_3f_2]f_1\mathbf{p}$ e $f_4[f_3f_2]f_1\mathbf{p}$. Comunque è chiaro che l'esito delle due procedure è il medesimo:

$$f_4f_3f_2f_1\mathbf{p} = f_4[f_3f_2]f_1\mathbf{p}.$$

Inoltre a volte due processi svolti l'uno dopo l'altro si possono scambiare tra di loro, sono intercambiabili. Ad esempio, se **p** è una patata che vogliamo friggere, essa subirà i seguenti quattro processi: f_1, pelatura; f_2, lavaggio; f_3, taglio; f_4, friggitura. È chiaro che i due processi di taglio e di lavaggio sono tra loro intercambiabili, per cui risulta: $f_4f_3f_2f_1\mathbf{p} = f_4f_2f_3f_1\mathbf{p}$.
Tornando alle frazioni, il risultato

$$a/b \quad c/d \quad \mathbf{q}$$

lo si può scomporre così:

$$a \quad 1/b \quad c \quad 1/d \quad \mathbf{q}.$$

Ma lì il processo di divisione per b (indicato con $1/b$) e quello di moltiplicazione per c sono intercambiabili, come è stato mostrato precedentemente, onde risulta:

$$a \quad 1/b \quad c \quad 1/d \quad \mathbf{q} = a \quad c \quad 1/b \quad 1/d \quad \mathbf{q} =$$
$$[a \quad c] \quad [1/b\_1/d] \quad \mathbf{q} = [ac] \quad [1/(bd)] \quad \mathbf{q},$$

perciò $(a/b)(c/d)\mathbf{q} = (ac)/(bd)\mathbf{q}$.

N. B. Si noti che moltiplicare una certa quantità per b (cioè, *riprodurla* b volte) e poi moltiplicare per d il prodotto ottenuto è come moltiplicare la quantità iniziale direttamente per bd. Inoltre dividendo una certa quantità prima per d e poi per b, si ha lo stesso risultato che si avrebbe dividendo per bd: $1/b\ 1/d = 1/(bd)$. Poiché ognuno dei primi d pezzi ottenuti viene poi suddiviso in b pezzetti, ottenendo così un totale di bd pezzetti.

Io mi resi conto di quanto detto precedentemente soltanto durante la frequenza del liceo. Nessuno me l'aveva mai detto, anche se ne avevo un'inconscia convinzione; come moltissimi studenti, io penso. Però è significativo che ci siano fatti riguardanti la matematica che si accettano, senza prove, con molta naturalezza.

Si pensi ad esempio alla decomposizione di un numero naturale in fattori primi. Forse quella proprietà e altre ancora hanno un carattere filogenetico e nel corso dell'evoluzione della nostra specie sono rimaste incise a poco a poco nel nostro DNA. Al contrario di quel che diceva Aristotele nel "De anima", la nostra mente non è, io penso, non può essere una "*...tabula rasa in qua nihil scriptum est...*". I nostri riflessi innati ne sono una prova. Ma ora non vogliamo aprire un discorso che ci porterebbe troppo lontano dagli interessi di questo scritto. Ci limitiamo a precisare che il nostro discorso sull'innatezza si riferisce alle capacità, alle attitudini degli individui della nostra specie; e non alle abilità che eventualmente essi vengano ad acquisire grazie ad esperienze e ad attività educative, didattiche. In definitiva, tanto per fare un paragone, pur se una molla compressa e "imprigionata" da vincoli non esercita alcuna azione, ciò non vuol dire che essa non ne abbia la "capacità". Basta metterla in condizione di farlo, liberandola da quei vincoli.

Avviandoci alla conclusione, dedichiamo una breve attenzione alle proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione tra numeri naturali (quelle dell'addizione sono del tutto naturali, dato il significato di questa operazione, soprattutto in relazione a una sua interpretazione insiemistica).

La presentazione che faremo è propedeutica, in un senso che si capirà facilmente, all'introduzione dei concetti di area di un rettangolo e di volume di una "scatola" (di un parallelepipedo).

Noi ci riferiremo a un caso particolare, ma ciò che faremo non sarà solo una verifica su quel caso, che potrebbe essere fatta calcolando separatamente (6x4)x3 e 6x(4x3). Invece quanto diremo può servire ad aiutare lo studente a capire che ciò che viene illustrato si estende al caso generale.

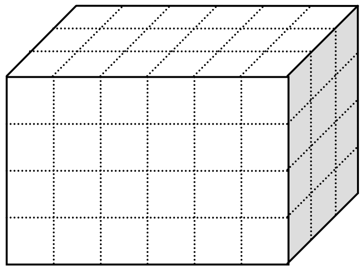


fig. 4

Ebbene, osservando fig. 4, si vede subito che la faccia situata di fronte esprime il prodotto 6x4. Infatti essa presenta uno "schieramento" orizzontale di 6 cubetti ripetuto in verticale 4 volte. Ma è chiaro che se il disegno viene ruotato di 90 gradi, allora il numero di cubetti situati di fronte non cambia; solo che ora questi cubetti si presentano secondo uno schieramento orizzontale di 4 cubetti ripetuto in verticale 6 volte. Perciò risulta 6x4 = 4x6.

Per quel che riguarda la proprietà associativa, si osservi che lo schieramento di 6x4 cubetti situato di fronte è ripetuto – andando in profondità – 3 volte; perciò abbiamo un totale di (6x4)x3 cubetti. Però, immaginando di osservare il solido dalla faccia di destra, il che non cambia il numero totale di cubetti, questo numero lo si ritrova come (3x4)x6, che – per la proprietà commutativa già vista – risulta eguale a 6x(4x3). Onde risulta: (6x4)x3 = 6x(4x3).

Ora veniamo a un altro aspetto che determina difficoltà nell'apprendimento della matematica. Anche esso ha un carattere linguistico, però non di tipo semplicemente terminologico, ma di tipo strutturale. Intendiamo dire che ciò che rende difficile la nostra disciplina è anche il modo che noi abbiamo di discutere di essa e di presentare i suoi concetti. Un modo che deve necessariamente rifuggire dall'approssimazione e dal relativismo comunicativo imperante, dal "così è se vi pare", dal "qui lo dico e qui lo nego". Tuttavia, a volte certi concetti – che per loro natura sono semplici, sulla base di nozioni già acquisite dagli alunni – risultano incomprensibili, poiché il linguaggio che si adopera per presentarli non riesce a svolgere efficacemente la sua funzione. Quindi la difficoltà sembra risiedere non nella matematica ma nel modo in cui è organizzato il suo linguaggio: è questo che a volte rende difficile la nostra disciplina.

Ci è capitato di spiegare a uno studente di un istituto superiore cosa fosse la distanza di un punto da una retta, dopo aver disegnato i due enti geometrici. Costui non riusciva a districarsi con le parole (… *la lunghezza del segmento di perpendicolare condotto da quel punto alla retta* …). Ma non appena – un po' impropriamente – gli si chiese di mostrare la distanza più breve per andare dal punto alla retta, egli indicò immediatamente il dovuto segmento.

Concludendo, ricordiamo un curioso episodio occorso ad Anna Cerasoli, docente di matematica e affermata divulgatrice della disciplina. Ella era alle prese con uno studente delle scuole medie superiori che aveva difficoltà nel risolvere un problema di matematica. Dovendo svolgere il prodotto 3x7, questi era in estremo imbarazzo, poiché non ne ricordava il risultato. Allora la Cerasoli gli domandò che quantità di danaro egli avrebbe ricevuto se, avendo 3 zii, ognuno di essi gli avesse regalato 7 euro. "*Professorè*, *ventuno euro*!", rispose quello prontamente. Solo che nello svolgere il suo conteggio concreto non aveva riconosciuto un modo per rispondere alla domanda che gli era stata rivolta precedentemente.

Però è triste prendere coscienza del fatto che i canoni di una comunicazione precisa e priva di aspetti approssimativi – che inizialmente, come è stato già detto, sono patrimonio naturale dei nostri bambini, che privilegiano un linguaggio di tipo "pane al pane e vino al vino" – a un certo punto diventino incomprensibili e appaiano come inutili ed estranei alla realtà concreta. Perciò, pur concordando con l'importanza di accedere a forme comunicative più evolute e più efficaci sul piano della comunicazione usuale, sarebbe il caso di coltivare nei nostri alunni, a partire già dalla scuola materna, la loro naturale propensione al linguaggio della precisione, che in matematica ha un'importanza fondamentale. E per loro non solo l'apprendimento matematico sarebbe facilitato, ma anche il loro modo di rapportarsi agli altri sul piano comunicativo risulterebbe più efficace, sottraendoli ai venditori di fumo e agli azzeccagarbugli che infestano la nostra società.

Bibliografia

[1] Euler L., *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sc. Petrop., t. 8 (1736), pp. 128-140. Reprinted in Commentationes Algebraicae, Teubner, Lipsia, Berlin (edidit L. G. Du Pasquier) (1923).

[2] Fontana M., *Matteo Ricci*, Mondadori (Le Scie), Milano, 2005.

[3] Lenzi D., *Di crisi in crisi – Ma forse l'ultima mi preoccupa di più*. Lettera matematica Pristem, n. 56, (2005).

[4] Lenzi D., *L'educazione matematica e il linguaggio letterale.* **Italiano e oltre**, n. 4 (2003).

[5] Lenzi D., *Matematica vecchia e nuova: quale contrasto, quali difficoltà?* Atti del convegno su Matematica, Formazione Scientifica e Nuove Tecnologie", Lamezia Terme (2006).

[6] Lenzi D., *Matematica vecchia e nuova tra errori, fughe in avanti e occasioni mancate.* Atti del convegno su Modelli e Tecnologie per la nuova Didattica della Matematica, Salerno-Positano (2007).

[7] Melzi G., Matematica e comunicazione sociale. Periodico di matematiche, **1-2**, 1978.

[8] Revuz A., La geometria in un insegnamento moderno della matematica. Periodico di Matematiche, serie IV, n. 3 (1965).

La matematica in Wikipedia

di Bruno Martelli

1. Una enciclopedia libera

Wikipedia è una enciclopedia presente in rete in 250 lingue, che si distingue dalle enciclopedie tradizionali essenzialmente per due motivi:

1. il suo contenuto è liberamente consultabile, riproducibile e riutilizzabile, perché rilasciato con una licenza libera,
2. chiunque può partecipare alla scrittura delle pagine.

Il termine *wiki*, che in Hawaiano vuol dire "veloce", sta ad indicare il programma usato per la scrittura e la consultazione delle pagine. Questo programma permette a chiunque di modificare e aggiungere voci con un semplice *click* sul tasto "modifica". Per fare ciò non è necessaria una registrazione, e la modifica effettuata compare immediatamente in rete, ben visibile a tutti, senza nessun filtro preventivo!

L'assenza di un controllo preventivo, che invece è presente in ogni rivista scientifica (la cosiddetta *revisione paritaria*), è probabilmente la novità più importante del progetto. Prima l'informazione viene inserita e dopo controllata.

Controllata da chi? Da chiunque ne abbia voglia. Ogni modifica è infatti ben visibile, ed ogni voce ha una sua *cronologia*: una registrazione dettagliata di tutte le modifiche effettuate. Quindi è possibile in ogni momento (e da parte di chiunque) effettuare controlli, tenere sotto osservazione alcune pagine, vedere chi ha scritto cosa, esaminare i contributi di un singolo utente registrato.

L'evoluzione di wikipedia ha delle similitudini con la selezione naturale: una informazione sbagliata, o scritta poco chiaramente, prima o poi verrà probabilmente cancellata o scritta in modo più appropriato, mentre una informazione giusta o scritta bene rimarrà tale.

Fedele al significato originario della parola "wiki", l'enciclopedia cresce a ritmi vertiginosi. La versione in lingua inglese conta attualmente quasi due milioni di voci distinte, quella italiana più di 300.000. Le versioni in lingua francese e tedesca contengono più di 500.000 voci. Nella versione italiana ne vengono create ogni giorno più di 300, in quella inglese più di 1.000.

2. Come contribuire

Vi sono vari modi di contribuire all'enciclopedia. Il lettore occasionale che trova una imprecisione può modificarla immediatamente. L'utente che ritiene di voler dare un contributo più continuativo può registrarsi. Per fare ciò non è necessario fornire alcuna credenziale, né lasciare *e-mail*: le conoscenze e capacità di un editore vengono valutate sulla base dei contributi, non sui titoli acquisiti nella vita reale.

Ogni voce di Wikipedia possiede una *pagina di discussione* dedicata. In questa pagina gli editori si incontrano per scambiare informazioni e pareri sulla redazione della voce. Generalmente, l'utente è invitato ad essere *audace* e ad effettuare le modifiche che ritiene utili *prima* di discuterne, eventualmente, solo se un altro utente non si troverà d'accordo con queste.

Capita infatti, ovviamente, che contributori non siano d'accordo sulla stesura di alcune parti. In questo caso vengono in aiuto innanzitutto alcune pagine di servizio, dedicate alla descrizione delle linee guida di Wikipedia, utili ad appianare i contrasti. Ogni voce dovrebbe essere scritta secondo un *punto di vista neutrale* (e quindi presentare tutti i maggiori punti di vista contrastanti su ogni argomento dibattuto) e non contenere *ricerche originali* (una enciclopedia raccoglie fatti e opinioni di altri, non nuove teorie: non è una *fonte primaria* di informazioni).

Negli ultimi mesi è stata dedicata una attenzione sempre maggiore alla *citazione delle fonti*: all'editore che inserisce una informazione dubbia viene richiesto di fornire una fonte, ad esempio un sito web che la comunità ritiene sufficientemente autorevole.

Le decisioni vengono prese discutendo. Scopo principale di ogni discussione è la ricerca di una soluzione che raggiunga il maggiore *consenso*. Sorprendentemente, queste semplici linee guida sono sufficienti per risolvere gran parte dei contrasti che, non è difficile immaginare, possono sorgere nella stesura di voci complesse come aborto, 11 settembre, pseudoscienza, Lenin, etc.

Fra i collaboratori troviamo di tutto: ricercatori universitari, semplici appassionati, smanettatori informatici, studenti. Collaborare è un arricchimento per tutti: lo studente si trova a sperimentare le proprie conoscenze, il ricercatore testa le proprie capacità didattiche ed espositive, ed esce così dal "guscio" in cui forse si è venuto a trovare troppo spesso nel suo lavoro.

3. La matematica su wikipedia

Come tutte le altre voci, le pagine di carattere scientifico su wikipedia dovrebbero risultare utili sia al neofita che allo specialista. Il condizionale è d'obbligo, perchè raggiungere questo scopo non è certo cosa facile. Una voce modello ha un *cappello* introduttivo che descrive il concetto matematico in modo più accessibile, elenca le applicazioni alle altre discipline, ne evidenzia i fattori più importanti. Seguirà quindi una definizione più rigorosa.

Ad esempio, la voce *autovettore* deve poter dare delle informazioni utili al semplice appassionato, all'ingegnere che ha già incontrato il concetto quando era studente, e al matematico che conosce bene la nozione ma sta cercando alcune proprietà più specifiche.

Per questo difficile compito viene in aiuto lo spazio a disposizione, che essendo potenzialmente infinito, permette agli editori di creare più pagine a cui dedicare argomenti più circoscritti. Ad esempio, la voce *limite* può descrivere il concetto di limite in matematica in modo generale, mentre *limite di una funzione* e *limite di una successione* contengono una carrellata di informazioni più concrete e specifiche, come il *teorema dell'unicità del limite*, che è però qui solo enunciato, mentre viene dimostrato e analizzato a sua volta più dettagliatamente in una pagina a parte.

Questa descrizione non dovrebbe però condurre all'impressione erronea che Wikipedia sia organizzata come un enorme albero: le relazioni fra voci assomigliano più ad una rete, perché il *teorema dell'unicità del limite* è in verità un concetto importante anche in *topologia*, e quindi ha connessioni con altre voci ancora.

È importante notare che una enciclopedia non è un libro di testo. Ogni voce è un concetto a sé e dovrebbe essere fruibile come tale. Non vengono proposti esercizi, e le dimostrazioni sono descritte solo se ritenute importanti, oppure spostate in pagine apposite per non appesantire il testo. Le formule sono scritte in LaTeX. Talvolta, quando si tratta di formule molto semplici, si preferisce usare il semplice HTML. Infine, la stesura delle voci in italiano è spesso facilitata dalla presenza di voci analoghe in altre lingue. Le voci inglesi, francesi, tedesche, spagnole possono essere tranquillamente tradotte, perché tutte rilasciate con licenza libera. Questo è particolarmente utile nelle voci di matematica, che possono essere agevolmente comprese anche da chi non padroneggia tutte le sfumature della lingua usata.

Tutti questi aspetti, quando riguardano voci di matematica, sono curati da un relativo progetto, il *progetto matematica*, che unisce tutti gli utenti della Wikipedia in lingua italiana interessati all'argomento. Al progetto è affiancato un locale virtuale, il *Luogo geometrico*, dove i contributori possono discutere di qualsiasi aspetto attinente alle voci matematiche. In questo luogo si decidono le linee guida generali, si dialoga di fatti attinenti a voci specifiche, si risponde ai nuovi utenti. C'è ancora tanto lavoro da fare e qualsiasi sia il vostro livello di conoscenza potete contribuire costruttivamente: vi aspettiamo per una tazza di tè al *Luogo geometrico* :-)

Aristotele non è morto

Il ruolo dei preconcetti non scientifici nell'apprendimento della fisica elementare

di Angelo Blasi [abla59@libero.it]

Sommario
Accelerazione, forze, gravità, attriti: le esperienze quotidiane di senso comune sembrano spesso in contrasto con la meccanica newtoniana. E l'apprendimento della fisica da parte degli studenti ne risente.

La fisica è comunemente considerata dagli studenti una materia difficile, destinata a specialisti o persone dalla "forma mentis" particolare. Un ruolo importante in questo giudizio è giocato dalla presenza, nelle menti degli studenti, di preconcetti non scientifici difficili da abbandonare.

In questi ultimi anni molti ricercatori hanno verificato come, sulla base delle esperienze quotidiane, gli studenti spesso sviluppino alcune idee di senso comune relative al mondo fisico che, seppur in contrasto con le teorie scientifiche accreditate, risultano essere fortemente radicate nelle loro menti e quindi di ostacolo al corretto apprendimento di nuovi concetti durante lo studio della fisica.

1. Risultati sperimentali

Molte ricerche, soprattutto nel campo della meccanica, hanno mostrato come gli schemi concettuali presenti negli studenti al momento di iniziare lo studio della fisica producano spesso problemi anche con concetti semplici come posizione, velocità ed accelerazione.

Tali ricerche sono frutto, generalmente, di test scritti ed interviste nelle quali viene chiesto di prevedere l'evoluzione di una data configurazione oppure di spiegare la causa di taluni comportamenti di un dato sistema. Alcuni ricercatori, in alternativa, assegnano dei compiti pratici in laboratorio e, in relazione alle tecniche adottate dagli studenti per risolverli, cercano di risalire alla loro interpretazione dei concetti fisici legati al moto.

Di seguito si riporta una panoramica dei risultati ottenuti:

1.1. Uso di sistemi di riferimento assoluti

Diversi studi hanno identificato una tendenza tra gli studenti a definire il moto come una proprietà intrinseca dell'oggetto e non relativa ad un certo sistema di riferimento. In altri termini moto e quiete vengono fondamentalmente ritenuti non equivalenti. [1]

La mancanza di chiarezza circa il problema dei sistemi di riferimento porta ad esempio spesso gli intervistati a credere che su di un corpo che si muove di moto circolare uniforme agiscano contemporaneamente due forze di uguale intensità ma di verso opposto (centripeta e centrifuga) e che quindi esse si annullino ! [2].

1.2 Cinematica in due dimensioni

Altre ricerche [3] hanno evidenziato le difficoltà incontrate dagli studenti nel descrivere semplici traiettorie in due dimensioni e definire correttamente il concetto di velocità.

Le domande utilizzate allo scopo erano basate su alcuni "esperimenti concettuali" descritti da Galileo nel suo "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" e trattavano oggetti di masse diverse in caduta libera, oggetti in caduta in un sistema di riferimento con velocità orizzontale costante e, infine, un oggetto inizialmente in quiete che cade contemporaneamente ad un secondo oggetto con una data velocità orizzontale.

Molti studenti hanno manifestato la convinzione che in assenza di una forza orizzontale, la velocità orizzontale si annulli rapidamente e l'oggetto cada verticalmente.

Le risposte hanno quindi indicato l'incapacità di concepire le componenti orizzontale e verticale della velocità come indipendenti.

1.3. Il moto implica una forza

Un gran numero di studi ha individuato la tendenza da parte degli studenti ad associare i concetti di forza e di moto.

John Clement [4] ha mostrato come gran parte dei soggetti intervistati a proposito delle forze agenti su di un pendolo semplice, abbia indicato una forza in direzione del moto (tangente alla traiettoria) grazie alla quale "il pendolo va dall'altra parte". Questa regola intuitiva del "moto che implica una forza" ha naturalmente una forma inversa: "in assenza di forza non può esserci moto". Questa concezione è stata evidenziata in molti lavori; in uno di questi [5] vi è una semplice esperienza che consiste nel dare ad uno studente una palla e nel chiedergli di muoversi nella stanza lasciando cadere la palla, quando lo crede opportuno, in modo da poter colpire un bersaglio posto sul pavimento. I risultati indicano che la maggioranza degli studenti lascia la palla esattamente sopra al bersaglio, trascurando la velocità orizzontale di essa o assumendo implicitamente che tale velocità sia zero non essendoci forza diretta orizzontalmente.

Un'altra conseguenza di questo schema "forza-moto" è l'opinione che l'assenza di moto precluda la possibilità della presenza di una forza. Molti studenti hanno infatti difficoltà nell'individuare la presenza di forze passive in equilibri statici. In un esperimento in cui veniva chiesto ad una classe quali forze agissero su di un libro poggiato sopra ad un banco, tutti gli interrogati individuarono la forza (gravità) che il libro esercitava sul banco, mentre solo la metà indicò la forza diretta verso l'alto che il banco esercitava sul libro in opposizione alla gravità.

Le concezioni intuitive che legano i concetti di moto e di forza possono quindi essere riassunte in tre "principi":

- ogni moto implica una forza;
- se non c'è forza non c'è moto;
- se non c'è moto non c'è forza.

1.4 La forza varia con la velocità

Al precedente punto 3 sono state discusse le relazioni tra forza e moto. Esistono però molti studi che hanno cercato di evidenziare a quale aspetto particolare del moto fosse legato, nella mente degli studenti, il concetto di forza. Ne è scaturito che i ragionamenti intuitivi degli studenti sembrano far uso di una relazione pseudo-lineare tra forza e velocità del moto del tipo **F=f(v).**

Uno dei migliori esempi di come vada condotta una ricerca in questo campo è costituito dal lavoro della Viennot [2]: in esso troviamo diversi quesiti ai quali i soggetti intervistati rispondono secondo lo schema **F=f(v).**

Uno di tali quesiti prevede che sei sfere identiche, lanciate in aria da un giocoliere, si trovino ad un dato istante tutte alla stessa altezza, ciascuna però con diversa velocità sia in direzione sia in modulo. La domanda era corredata da una illustrazione che mostrava le sei palle, le rispettive traiettorie ed i sei vettori velocità applicati ad esse. Agli studenti fu chiesto se le forze agenti sulle sfere fossero uguali o differenti: più della metà rispose che le forze erano differenti.

Se il diagramma avesse mostrato solo i sei oggetti alla stessa quota, senza specificare velocità e traiettorie, la percentuale di errore sarebbe stata sicuramente bassissima.

La presenza di informazioni aggiuntive sulla velocità delle sfere ha dunque provocato delle grosse difficoltà agli intervistati, impegnandoli nel considerare le differenze (di nessuna importanza pratica) tra ciascuna delle sei palle.

1.5. Gravità

I molti studi effettuati sul concetto di gravità e sugli effetti da essa prodotti, mostrano per prima cosa una tendenza naturale ad associare questa forza con l'aria e l'atmosfera.

Si ritiene spesso che la gravità agisca solo fin dove arriva l'atmosfera terrestre e che sia invece assente nello spazio, sulla Luna, e, per alcuni, sott'acqua. Sovente essa viene associata unicamente agli oggetti in caduta e ritenuta agire solo a partire dalla massima altezza raggiunta dalla traiettoria di un proiettile. E' grazie, infatti, a tale azione che il proiettile viene riportato a terra.

Essa viene inoltre vista operare in modo diverso a seconda delle circostanze. Per esempio, spesso si crede che l'accelerazione di gravità dipenda dalla massa dell'oggetto, di modo che anche tra gli studenti universitari persiste la convinzione che più un oggetto è pesante e più rapidamente esso raggiunge il terreno.

Questi preconcetti vengono continuamente rinforzati dalle conversazioni quotidiane e dai mass media, ove i termini peso, pressione atmosferica, forza di gravità e spazio vuoto si fondono disordinatamente nel cercare di fornire la spiegazione del fenomeno di caduta libera di un corpo sulla Terra o del comportamento di oggetti nello spazio interplanetario [6].

2. Implicazioni per l'insegnamento

Il criterio adottato dalla maggioranza degli insegnanti della scuola superiore è generalmente quello di ignorare che nella mente degli studenti possano esistere schemi esplicativi preconcetti, per seguire invece il metodo cosiddetto della "tabula rasa": si procede, cioè, come se la semplice esposizione di formule e dimostrazioni rigorose sia sufficiente a produrre una corretta e completa comprensione della materia.

Il criterio proposto dai ricercatori in questo campo è al contrario quello di accettare l'esistenza di schemi intuitivi e, partendo da essi, cercare di educare gli studenti alla modifica graduale di tali schemi nella direzione delle teorie scientifiche accreditate.

Per esempio, secondo Clement [4]:

"*I preconcetti posseduti dagli studenti non devono essere considerati esclusivamente come ostacoli per l'apprendimento. Dal momento che tali preconcetti hanno un certo potere di previsione in alcune limitate situazioni pratiche, essi possono essere pensati come <u>modelli di ordine zero</u> posseduti dagli studenti; modelli che possono poi essere modificati per ottenere una maggiore precisione e generalità*".

Il problema a questo punto consisterebbe nell'organizzare l'insegnamento in modo tale da produrre il passaggio dalle teorie intuitive alle teorie scientifiche in maniera graduale, senza imporre d'autorità agli studenti tale cambiamento. Le varie proposte avanzate dai ricercatori su un possibile modello di lezione sono riassumibili nei seguenti punti:

- identificare e chiarire le idee preconcette degli studenti (ciò va fatto ponendo loro domande, senza giudicare le loro idee);
- rendere gli studenti ben consapevoli delle proprie concezioni attraverso una discussione generale in classe;
- sfidare i loro modelli attraverso controesempi;
- introdurre nuovi concetti ed idee che permettano di eliminare le contraddizioni;
- verificare la validità delle nuove idee in un ampio insieme di contesti.

3. Parallelismo tra sviluppo storico ed apprendimento della fisica

Gli studi [7] sulla crescita intellettuale di un individuo hanno portato a confrontare lo sviluppo della conoscenza individuale con lo sviluppo storico del pensiero scientifico.

Sia nello sviluppo individuale che nello sviluppo storico della scienza si riscontra, infatti, che ogni volta che un nuovo concetto non riesce ad essere integrato in una struttura concettuale già esistente, esso viene eliminato ancor prima che possa penetrarvi. Pertanto, quando una persona (o un'intera comunità scientifica) è sollecitata ad interpretare fatti che richiedono strutture cognitive non ancora disponibili, essa manifesta confusione e rifiuto della novità.

Secondo quanto appena detto non sarebbe sorprendente trovare qualche analogia tra il fenomeno della conoscenza intuitiva (ed il relativo "rifiuto" della meccanica newtoniana) ed un certo periodo della storia della scienza [8]. Vediamo dunque quali sono, se ci sono, i legami tra le idee preconcette possedute dagli studenti e le concezioni scientifiche via via succedutesi nel corso dei secoli.

Le concezioni intuitive che alcuni studenti hanno nell'ambito della meccanica sono state etichettate da diversi studiosi come "aristoteliche".

Jean Lythcott [9] fece notare come questa classificazione venne introdotta in origine con molta prudenza ed il termine “aristotelico” era più che altro una maniera di sintetizzare un concetto del tipo “*le idee intuitive degli studenti sembrano rifarsi a concezioni pre-newtoniane*”. Questa etichetta tuttavia ha fatto rapidamente molta strada essendo stata usata da molti ricercatori, senza però le opportune precauzioni e puntualizzazioni. Spesso, in questi ultimi anni, si è quindi affermato che gli schemi intuitivi degli studenti sono simil-aristotelici, la qual cosa, detta così senza spiegazioni, equivale a dire che gli studenti credono a quello cui Aristotele stesso credeva. Tutto questo, dimostra Lythcott, non è affatto vero.

A proposito della gravità il filosofo greco sosteneva che quando un oggetto cade a terra nessuna forza agisce su di esso. Egli era così fermo su questo punto da chiamare il moto di caduta libera “moto naturale” a differenza di moti soggetti a forze che venivano detti “moti violenti” o “innaturali”. Nel caso quindi di problemi relativi ad oggetti in caduta libera, su piani inclinati, ecc. è del tutto scorretto definire come aristotelico lo schema “il moto implica una forza” che viene solitamente riscontrato nei soggetti intervistati.

Anche la relazione che gli studenti spesso stabiliscono spontaneamente tra forza e velocità sembra che non avere nulla a che fare con Aristotele. Le concezioni degli studenti, seppur non newtoniane, non sono pertanto etichettabili neanche come aristoteliche.

Una sorprendente somiglianza è stata invece riscontrata [4] tra le concezioni di alcuni studenti e quelle di Galileo nei primi anni della sua carriera. Le risposte di alcuni studenti per descrivere il moto di una moneta lanciata in aria parlavano infatti di “forza impressa dalla mano maggiore del peso della moneta” e quindi di “forza che si va indebolendo fino a quando la gravità non prende il sopravvento”. Interpretazioni del tutto simili, non solo nei contenuti ma anche nella terminologia, sono ritrovabili in una delle prime opere di Galileo: “De motu”. Sebbene nelle opere successive Galileo abbia manifestato dei dubbi circa questo modo di interpretare il suddetto fenomeno, è comunque un fatto impressionante la somiglianza esistente tra le affermazioni di persone separate tra loro da quasi 400 anni di storia. Alla luce di questa scoperta gli errori degli studenti non appaiono più come ingenui frutti della fantasia, ma come una teoria plausibile costruita sulla base delle esperienze quotidiane.

La domanda che a questo punto dovrebbe sorgere spontanea è la seguente: qual’è l’origine di queste concezioni tanto simili seppur distanti ?

Una risposta abbastanza convincente è stata trovata da McCloskey [10], il quale sostiene che le idee intuitive degli studenti sono in accordo con una teoria ritenuta valida tre secoli prima di Newton: la teoria dell’impeto. Questa era una variazione medievale alle concezioni del moto di Aristotele. Questi due modi di pensare condividevano l’idea che il moto dovesse avere una causa, concezione questa negata dalla meccanica newtoniana. Nella fisica aristotelica la forza responsabile del moto era supposta esterna all’oggetto in movimento; ciò rendeva problematica la spiegazione del moto di un proiettile, una volta lanciato, in quanto veniva a mancare la sorgente di una forza esterna. La teoria dell’impeto aggirava questa difficoltà ipotizzando una forza interna, detta impeto, acquisita dal corpo quando veniva messo in movimento. Per spiegare il fatto che un qualsiasi corpo in movimento prima o dopo finiva con il fermarsi, i teorici avevano ipotizzato che l’impeto si dissipasse gradualmente.

Questa teoria è decisamente incompatibile con la meccanica newtoniana: se infatti secondo Newton un oggetto può essere indifferentemente considerato in quiete oppure in moto rettilineo uniforme unicamente in funzione del sistema di riferimento scelto, per la teoria dell’impeto i due stati, di moto o di quiete, sono nettamente distinti: nel primo caso l’oggetto possiede un impeto, nel secondo assolutamente no.

Riprendendo in esame l’esempio precedente della moneta lanciata per aria, la teoria in questione ne spiegava il moto ipotizzando che l’impeto verso l’alto posseduto dalla moneta stessa fosse predominante sul peso e che la dissipazione dell'impeto fosse tale da produrre un rallentamento del moto fino a quando la gravità non avesse prevalso su di esso con conseguente movimento della moneta verso il basso. Questa interpretazione è esattamente uguale a quella adottata da Galileo nei suoi primi scritti ed anche, come già detto, da un gran numero di studenti non ancora istruiti secondo la teoria newtoniana.

Un'altra importante corrispondenza si riscontra a proposito del moto circolare: per la teoria medievale un oggetto in movimento su una traiettoria circolare acquista un impeto circolare che agisce in modo da conservare tale moto. Questa idea veniva utilizzata per spiegare, ad esempio, perché una ruota, una volta messa in rotazione,continuasse a girare per un certo tempo.

Anche in molti studenti è stata riscontrata [5] una concezione di questo tipo: si è constatato infatti che una buona parte di essi ritiene che una pallina, uscendo con una certa velocità da una guida di plastica circolare, continui a muoversi lungo una traiettoria curva, piuttosto che in linea retta, nella direzione della tangente, come vuole la risposta corretta.

Un ulteriore esempio è rappresentato dalla previsione della traiettoria percorsa da un corpo in caduta libera dotato di velocità iniziale orizzontale. La risposta corretta è, ovviamente, che la velocità orizzontale (costante) e quella verticale (in continuo aumento) si combinino formando un arco di parabola. Molti studenti invece ritengono, seguendo inconsapevolmente la teoria dell'impeto, che il corpo nel primo tratto si muova con moto orizzontale e poi, quando l'impeto inizia a dissiparsi, percorra un tratto curvo, per cadere infine verticalmente.

Sembra dunque che il senso comune induca gli studenti ad una interpretazione dei fenomeni naturali (limitatamente alla meccanica) in accordo con la suddetta teoria dell'impeto; teoria che evidentemente si basava molto più sull'apparenza e sull'intuizione che non sulla verifica sperimentale. Alla luce di queste conclusioni è più facile capire per quale motivo un così grande numero di giovani incontri difficoltà nell'assimilare correttamente la teoria newtoniana: basta considerare il lungo periodo di tempo trascorso per modificare il concetto di moto dal medioevo fino a Newton e confrontarlo con i tempi ristretti disponibili nelle scuole per compiere analoga evoluzione nella mente degli studenti.

Si può quindi sicuramente concordare con la seguente conclusione:

"*Oggigiorno ogni studente di fisica elementare deve lottare con gli stessi errori e preconcetti che erano già stati vinti in passato e quindi, seppur in scala ridotta, il cammino seguito dalla scienza si ripete ogni anno nelle scuole*". [9]

BIBLIOGRAFIA

[1] WALSH E. et al. (1993), "*Physics Students' Understanding of Relative Speed: A Phenomenographic Study*", Journal of Research in Science Teaching, 30(9), p.1133-1148.
[2] VIENNOT L. (2001), "*Reasoning in Physics*" – Dordrecht. Kluwer Academic Publisher
[3] THOMPSON P.W. (1994), *The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate*, in: G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany: SUNY Press.
[4] CLEMENT J. (1982), *Students' preconceptions in introductory mechanics* – Am. J. Phys. N. 50, p. 66-71
[5] McCLOSKEY M. (1984), *Cartoon physics* – Psychology Today, April, p.52
[6] VICENTINI M. et al. (1984), *Gravità e pressione dell'aria* – La fisica nella scuola, XVII, 2, p.83
[7] PIAGET J. , INHELDER B. (1958), *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence* – Basic Books, New York
[8] ECKSTEIN S.G. , KOZHEVNIKOV M. (1997), *Parallelism in the development of children's ideas and the historical development of projectile motion theories* - International Journal of ScienceEducation, 19(9), p.1057-1073.
[9] LYTHCOTT J. (1985), *Aristotelian was given as the answer, but what was the question?* – Am. J. Phys. N. 53, p. 428
[10] McCLOSKEY M. (1983), *Fisica intuitiva* – Le Scienze, Giugno, p.108

Il bello dei numeri

di Francesca Bevilaqua

Che cos'è il numero perché un uomo possa capirlo?
E che cos'è l' uomo perché possa capire un numero?
(W. McCulloc, 1965)

I. Prendiamo il numero 1. Direi che rappresenta l'unità e sa di interezza, di unicità e di vittoria, ma non riesce a liberarsi dell'amaro sapore della solitudine. Ognuno di noi è uno, e lo è per definizione: ogni 1. Dunque, a seconda della prospettiva in cui ci mettiamo, possiamo sentirci afflitti dal problema della solitudine, da quello del sovraffollamento o, nei momenti migliori, da nessuno dei due.

II. Non così succede al Creatore: Dio è uno e trino, dicono gli esperti, cosa che mi è sempre risultata alquanto ostica da digerire. Ma in questo momento, parlando dell'unità, mi pare quasi di intuire che la solitudine di un Dio che fosse proprio unico (come la logica pretenderebbe da un essere supremo) sarebbe in pratica una solitudine senza rimedio, psico-logicamente inconciliabile con la magnifica tolleranza e benevolenza di cui speriamo sia ammantato (quando speriamo che ci sia). Vedi? Pensando, pensando, un pensiero tira l'altro. Così siamo passati da un pensiero a due e, se continuiamo così, si passa a tre, a quattro e così via. Il processo di produrre pensieri potrebbe non arrestarsi più, finché chi lo compie abbia voglia o vita. Se avessi sempre voglia di pensare e fossi immortale potrei anche arrivare a produrre un'infinità di pensieri. Se... Però nessuno sa quando mi passerà la voglia, né fin quando avrò vita, quindi nessuno si deve permettere di dare un valore massimo al numero dei miei pensieri. Quella di infinito, a ben vedere, non è un'idea assurda, è solo una realtà impraticabile.

III. Ciononostante mi devo proprio rassegnare: io riesco a produrre solo un numero finito di pensieri successivi e, per giunta, spesso perdo il filo. Quando questo accade, se la cosa mi indispettisce, tento di risalire la filiera, di precedente in precedente fino all'idea originaria. Se resto concentrata non posso sbagliare: i pensieri si sono succeduti in un ordine ben preciso e quindi il pensiero che ho presente al momento mi farà tornare in mente esattamente (ed inequivocabilmente) il pensiero che l'aveva preceduto.

IV. Se anche avessi raggiunto l'infinito a furia di pensare, nel mio processo di ricapitolazione sarei sicura di rivedere tutti i miei pensieri, dall'ultimo(?) al primo, ovvero da quello etichettato col simbolo ∞ (infinito) a quello etichettato con il simbolo 1.

V. Ma prima di quel pensiero originario lì, non ne avevo un'altro (almeno, non in quella sessione di pensieri). Mi trovavo in uno stato di vacuità, con niente da considerare.
Adesso, invece, tu potresti trovarti a considerare il fatto che la mia successione di ragionamenti ha ben poco a che fare con la matematica, e potresti sospettare che io stia cercando con ogni mezzo di confonderti le idee pur di farti ammettere che parlare di matematica ti diverte. Eppure, ti assicuro, il mio ragionamento ricalca ordinatamente la prima versione dei famosi cinque assiomi sui quali Giuseppe Peano (Torino, 1858-1932) ha proposto di fondare la teoria dei numeri.

Controlla tu stesso:

(1) $1 \in N$,

cioè: 1 è un numero naturale (vedi I capoverso);

(2) $se\ n \in N \rightarrow n+1 \in N$,

cioè: se n è un naturale anche il suo immediato successivo lo è (vedi il II capoverso);

(3) $se\ m,n \in N\ e\ m+1 = n+1 \rightarrow m = n$,

cioè: due numeri che abbiano lo stesso successivo sono uguali, ovvero esiste un solo precedente per ogni numero (III capoverso);

(4) se, pescando fra i numeri naturali, prendo l'1 e anche il successivo di ogni numero naturale significa che li ho presi proprio tutti (vedi il IV capoverso);

(5) $\forall n \in N : n+1 \neq 1$

cioè: 1 non è il successivo di alcun numero naturale (V capoverso).

Nella successiva (e definitiva) versione dei suoi assiomi, Peano ha fatto partire il ragionamento dallo zero, ma io credo che l'abbia fatto più per dare una "casa" allo zero che per intima convinzione: lo zero sembra a tutti un numero tanto poco naturale!

Comunque sia, che obiettivo poteva mai sperare di raggiungere Peano con questi 5 assiomi, così innocenti nell'aspetto da sembrare banalità? Tutti ritengono che volesse dare alla teoria dei numeri (che poggiava sui numeri naturali senza mai averli definiti come si deve) una base indistruttibile, e così facendo intendeva dare ai matematici la certezza del fatto che nessun crollo teorico avrebbe mai vanificato le loro vite, passate a costruire o a consolidare l'edificio matematico. Così, come Euclide aveva fatto a suo tempo (300 a.C.) con la geometria, cercava di individuare il minor numero possibile di affermazioni primitive (assolutamente intuitive sebbene non dimostrabili) da cui ogni cosa (relativa ai numeri) sarebbe dovuta discendere come conseguenza inevitabile.

Ma è davvero bello che la certezza esca dal mondo dei sogni per entrare nel mondo reale? Forse no. E forse proprio per questo la Matematica si ribellò a tanta arroganza e, nel 1930, mandò Kurt Gödel (Austria, 1906-1978) a sistemare la faccenda.

E lui: "dimostrò che qualsiasi sistema matematico preciso (formale) di assiomi e regole procedurali, purché abbastanza vasto da contenere descrizioni di semplici proposizioni aritmetiche e purché esente da contraddizioni, deve contenere qualche proposizione che non sia né dimostrabile né confutabile con i mezzi consentiti all'interno del sistema".[Penrose (1989)]

Da cui si capisce che: "E' possibile avere una teoria priva di contraddizioni ma non è possibile dimostrare che all'interno di quella teoria non ci sono contraddizioni". [Marcus du Sautoy (2003) "L'enigma dei numeri primi"]

Ovvero che:"Dio esiste perché la matematica è coerente, e il demonio esiste perché non possiamo dimostrare che lo è". [A. Weil cit. in M. du Sautoy (2003)]

Il suo sconvolgente teorema, procurò a Gödel immediata notorietà ed eterno rispetto all'interno comunità matematica ma, contemporaneamente, gli mise addosso anche l'antipatico timore di essere percepito come un maledetto guastafeste. Chissà se la sua ipocondria, sempre più grave con l'andar del tempo, sia stata il prodotto di un'evoluzione un po' patologica di quel disagio?

Il fatto è che Gödel sapeva di aver infranto il più bel sogno dei grandi scienziati del suo tempo e cioè quello di poter arrivare, un giorno o l'altro, a sapere tutto. Sapeva, insomma, di aver fatto lo sgambetto ad una meravigliosa generazione di matematici che il grande carisma di David Hilbert (Germania, 1862-1943) aveva convinto a credere che "*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*" (Noi dobbiamo sapere. E ci riusciremo).

Non deve essergli stato facile sopravvivere a questa responsabilità.

Tuttavia va detto che Gödel non ha affatto demolito gli assiomi della teoria dei numeri: ha solo dimostrato che sono insufficienti a guadagnarci l'onniscienza. E dunque noi comuni mortali, che l'onniscienza non sappiamo neanche dove stia di casa, possiamo seriamente tentare di raccattare qualche briciola di scienza tornando nel sereno paesaggio di Peano & C. e provando a contemplarlo ancora per un po'.

Bibliografia

Roger Penrose (1989), *La mente nuova dell'imperatore*, Rizzoli, Milano, 1992.

Marcus du Sautoy (2003), *L'enigma dei numeri primi*, Rizzoli, Milano, 2004.

Percorso alternativo per la ricerca dei numeri primi e per la fattorizzazione

di Maria Teresa Sica

Distribuendo i numeri interi a partire dal 5 su 6 colonne si evidenzia che, incolonnati sotto il 5 ed il 7, si allineano oltre che tutti i numeri primi anche alcuni loro multipli con un ordine preciso.

TABELLA 1

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2					11	12	13	14	15	16
3					17	18	19	20	21	22
4					23	24	25	26	27	28
5					29	30	31	32	33	34
6					35	36	37	38	39	40
7					41	42	43	44	45	46
8					47	48	49	50	51	52
9					53	54	55	56	57	58
10					59	60	61	62	63	64
11					65	66	67	68	69	70
12					71	72	73	74	75	76
13					77	78	79	80	81	82
14					83	84	85	86	87	88
15					89	90	91	92	93	94
16					95	96	97	98	99	100
17					101	102	103	104	105	106
18					107	108	109	110	111	112
19					113	114	115	116	117	118
20					119	120	121	122	123	124
21					125	126	127	218	129	130
22					131	132	133	134	135	136
23					137	138	139	140	141	142
24					143	144	145	146	147	148
25					149	150	151	152	153	154
26					155	156	157	158	159	160
27					161	162	163	164	165	166
28					167	168	169	170	171	172

Nella tabella sono presenti 6 colonne di numeri, tra cui le più interessanti risultano essere la C5 e la C7. Si può dire che se il numero dei righi lo chiamiamo K, tutti i numeri che cadono in C6 corrisponderanno a 6K, e quindi quelli in C5 e C7 corrisponderanno rispettivamente a 6K-1 e 6K+1.

Continuando la numerazione, inoltre, si potrà notare che al rigo 16 in C10 cade il numero 100, al rigo 66 cade il 400, al rigo 116 il 700, al rigo 166 il 1000, vale a dire che, a parte per i primi 100 numeri che occupano 16 righi, la numerazione è ordinata e ripetitiva per posizione di centinaia, decine ed unità in blocchi di 300 che si sviluppano su 50 righi; ne segue che per ricerche su grandi numeri, dato che ci si può soffermare sulle ultime tre cifre, le quali costituiscono la variabile determinante, può essere utile tenere conto della successione ordinata dei blocchi di 300, e quindi della posizione dei diversi numeri nelle colonne e nei righi. A tale proposito è interessante constatare che 10^2 cade al rigo 16, 10^3 cade al rigo 166, 10^4 cade al rigo 1666, 10^7 cade al rigo 1666666, e così via.

Si può osservare come sottraendo ad un qualsiasi numero un multiplo di 6 fino ad arrivare ad un risultato compreso tra 5 e 10, si può determinare la colonna di appartenenza del numero indagato; allo stesso modo, per il ragionamento inverso, moltiplicando un qualsiasi numero per un multiplo di 6 ed aggiungendo al risultato 5 oppure 7, si ottiene un numero che cade in C5 o C7. Per calcolare invece il rigo di posizione di un qualsiasi numero è possibile sottrarre 4 ad un qualsiasi numero, dividere il risultato ottenuto per 6 e quindi aggiungere 1 alla risultante porzione intera; più semplicemente, considerato che in C6 cadono tutti i multipli di 6 e che tali numeri corrispondono a 6K, basterà sottrarre o aggiungere 1 ad un qualsiasi numero, se il risultato è un multiplo di 6 tale numero cade in C5 o in C7. Un altro procedimento parte dall'osservazione dei numeri in C10, qui in particolare vi cadono il 1000, il 10000, il 100000, … Sottraendo 4 a tale numero si ottiene il numero in C6 sul rigo corrispondente, dividendo il risultato per 6 si ottiene il numero dei righi interessati, che corrisponde al numero dei numeri presenti in una colonna; moltiplicando per 2 tale risultato, si ottiene il numero dei numeri (primi e composti) presenti nelle due colonne principali, che poi sono i numeri di interesse di indagine.

Altro calcolo possibile è quello che permette di identificare i 6 numeri di tutte le 6 colonne che occupano un determinato rigo, per poi prendere in considerazione i due presenti in C5 e C7: bisogna calcolare in quale blocco di 300 cade il rigo considerato e quali numeri comprende, quindi sottrarre il numero del 1° rigo di quel blocco ed aggiungere 1; il risultato deve essere considerato quale rigo del blocco 101-400, osservando quali numeri si trovano in questo blocco al rigo risultato, bisognerà considerare la decina e l'unità (superati numeri nell'ordine delle migliaia considerare anche le centinaia) che li compongono e quindi "trasferire" queste due cifre sui numeri del blocco considerato. Se ad esempio si vogliono conoscere i numeri che occupano il rigo 183, considerato che tale rigo cade nel blocco 1001-1300 e si sviluppa sui righi 167-216, bisognerò fare: (183-167)+1=17; nel blocco 101-400 il rigo 17corrisponde al rigo 33, dove ci sono i numeri dal 197 al 202, perciò al rigo 183 ci sono i numeri dal 1097 al 1102, chiaramente ci si sofferma sul 1097 che è in C5 e sul 1099 che è in C7.

Operare sui righi piuttosto che sui numeri, ha il vantaggio di poter operare con numeri di gran lunga inferiori rispetto a quelli indagati, inoltre, considerato che in questa numerazione i numeri di interesse cadono solo in C5 e C7, l'indagine viene ad essere ridotta rispetto al crivello di Eratostene, di cui risulta essere una sintesi, oltre che una variante, poiché la ricerca si effettua solo su 1/3 della totalità dei numeri.

Poiché

I multipli di 5 in C5 sono ogni 5 righi,
I multipli di 11 in C5 sono ogni 11 righi, ….
I multipli di 7 in C7 sono ogni 7 righi,
I multipli di 13 in C7 sono ogni 13 righi, …

e

I multipli di 5 in C7 sono, partendo da 25 (risultato di 5 * 5) , ogni 5 righi,
I multipli di 11 in C7 sono, partendo da 121 (risultato di 11 * 11) , ogni 11 righi, ..
I multipli di 7 in C5 sono, partendo da 35 (risultato di 7 * 5) , ogni 7 righi,
I multipli di 13 in C5 sono, partendo da 65 (risultato di13 * 5) , ogni 13 righi, …

ed inoltre

7 * 11 = 77 è multiplo di 7 in C5
13 * 17 = 221 è multiplo di 13 in C5

o

5 * 7 = 35 è multiplo di 5 in C5
11 * 13 = 143 è multiplo di 11 in C5

e

7 * 7 = 49 è multiplo di 7 in C7
13 * 13 = 169 è multiplo di 13 in C7

in definitiva,

in C5 risultano multipli dei numeri in C7 * 11, *17, * 23, * 29, * 35, * 41, * 47, * 53, …..
e dei numeri in C5 * 1, * 7, * 13, * 19, * 25, * 31, * 37, * 43, …
cioè i prodotti di C5 * C7 (prodotti incrociati)

in C7 risultano multipli dei numeri in C5 * 11, * 17, * 23, * 29, * 35, * 41, * 47, * 53, …..
e dei numeri in C7 * 1, * 7, * 13, * 19, * 25, * 31, * 37, * 43, …
cioè i prodotti di C5 * C5 e C7 * C7 (prodotti diretti)

Vengono così fuori le seguenti formule:

(r np) + np= x; x + np=xx; xx + np=xxx; …. (1)

dove "r" = rigo ed "np" = numero primo. Continuando in questo modo, il risultato sarà sempre il numero del rigo dove è posizionato il multiplo del np considerato; vale a dire:

[k+(6k-1)]=x; x+(6k-1)=xx; xx+(6k-1)=xxx; ... e [k+(6k+1)]=x; x+(6k+1)=xx; xx+(6k+1)=xxx; ...

(np – r np)=y; y + np= yy; yy + np = yyy; ….. (2)

dove "r" = rigo ed "np" = numero primo. Al risultato della formula, aggiungendo il np considerato, si ottiene sempre un numero di rigo occupato dal suo multiplo; vale a dire

[(6k+1)-k]=y; y+(6k+1)=yy; yy+(6k+1)=yyy; ....
e [(6k-1)-k]=y; y+(6k-1)=yy; yy+(6k-1)=yyy; ....

ed inoltre

N1 * N2 (3) - (4)

N1 * N2 (3) - (4)

dove N1 è il numero primo indagato presente nella C5 ed N2 è il numero presente nella C7 sullo stesso rigo (3); oppure dove N1 può essere un numero della colonna 7 ed N2 il numero della colonna 5 presente sul rigo immediatamente successivo (4): il risultato di questi ultimi due calcoli cade nella colonna 5, e sarà in una riga posizionata abbastanza oltre il numero N1, in questo modo si può spostare il rigo di partenza per il calcolo ordinato della disposizione dei multipli, e può essere utile se i numeri che precedono non sono oggetto di indagine; vale a dire

(6k-1)*(6k+1) contigui + (6k-1)=x; x+(6k-1)=xx; xx+(6k-1)=xxx; ...
e (6k+1)*(6k-1) contigui + (6k+1)=y; y+(6k+1)=yy; yy+(6k+1)=yyy; ...

aggiungendo 6k-1 si cadrà sempre nella posizione dei multipli dello stesso sulla C5, e aggiungendo 6k+1 si cadrà sempre nella posizione dei multipli di quest'ultimo sulla C5, la colonna 6k-1.

N1*N1 (5)

cioè un numero primo per se stesso; il numero primo indagato per se stesso: il risultato utile cadrà nella colonna 7 e potrà essere considerato quale rigo di partenza per la cadenza delle esclusioni; vale a dire

$(6k-1)^2$=x; x+(6k-1)=xx; xx+(6k-1)=xxx; ... e $(6k+1)^2$=y; y+(6k+1)=yy; yy+(6k+1)=yyy; ...

si cadrà sempre nella posizione dei multipli dello stesso sulla C7, la colonna 6k+1.

np * N1 (8)

dove N1 è un qualsiasi numero della C7

e np * N2 (9)

dove N2 è un qualsiasi numero delle C5; vale a dire

qualsiasi (6k-1) * (6k-1) qualsiasi e qualsiasi (6k+1) * (6k+1) qualsiasi

cadono sempre in C7

qualsiasi (6k+1) * (6k-1) qualsiasi e qualsiasi (6k-1) * (6k+1) qualsiasi

cadono sempre in C5.

Altra cosa rilevata è che se si vuole ricercare quali e quanti numeri sono primi entro un dato numero, bisogna considerare il rigo di posizione di quel numero, quindi si deduce quanti numeri ci saranno nelle due colonne (facendo k*2), bisognerà quindi calcolare la quantità dei prodotti possibili poichè quelli che restano fuori saranno numeri primi. L'indagine è ristretta fino al numero primo che al quadrato dà un risultato contenuto nel numero dato all'inizio. Si dovrà vedere quindi quanti prodotti risultano dall'incrocio dei numeri primi considerati, quanti prodotti compaiono nelle due colonne di indagine

due, tre, quattro o più volte, poiché risultano essere prodotti di prodotti (prodotti composti), ed escludere questi risultati senza cadere in ripetizioni, per ottenere così il numero dei numeri primi presenti.
Per trovare i prodotti che si ripetono si possono effettuare i seguenti calcoli:

Doppi

sulla C5: da $(6k-1)^2 * 5$ ogni $(6k-1)^2 * 6$
oppure per i righi da $\{[(6k-1)^2 * 5] +1\} / 6$ e poi si aggiunge sempre $(6k-1)^2$
e da $(6k+1)^2 * 5$ ogni $(6k+1)^2 * 6$
oppure per i righi da $\{[(6k+1)^2 * 5] +1\} / 6$ e poi si aggiunge sempre $(6k+1)^2$
sulla C7: da $(6k-1)^2 * 7$ ogni $(6k-1)^2 * 6$
oppure per i righi da $\{[(6k-1)^2 * 7] -1\} / 6$ e poi si aggiunge sempre $(6k-1)^2$
e da $(6k+1) \times 5^2$ ogni $(6k+1) * (4 * 6k)$ [4 è il rigo di 25]
oppure per i righi da $\{[(6k+1) * 5^2] -1\} / 6$ e poi si aggiunge sempre $(6k+1) \times 4$

Tripli

Sulla C5:
$5 * (6k+1) * (6k+1)$ non uguali e $5 * (6k-1) * (6k-1)$ non uguali
sulla C7:
$5 * (6k+1) * (6k-1)$ diverso da 5

Quadrupli

Sulla C5:
$5 * (6k-1) * (6k+1) * (6k-1)$ diversi da 5 e non uguali
sulla C7:
$5 * (6k-1) * (6k+1) * (6k+1)$ diverso da 5 e non uguali
e $5 * (6k-1) * (6k-1) * (6k-1)$ non uguali

Bisogna ricordare sempre che in C5 ci sono i prodotti incrociati ed in C7 i prodotti diretti, quindi C5*C5*C5 cadrà in C5, e C5*C5*C7 cadrà in C7 poiché C5*C5 cade in C7, e questo risultato *C5 nuovamente darà un risultato in C5, mentre *C7 darà un risultato in C7.

Ho osservato che le ripetizioni dei prodotti cadono sempre, partendo dal rigo del risultato di un prodotto incrociato sulla C5 e dal rigo di un prodotto diretto sulla C7, sul rigo risultante l'aggiunta all'infinito del prodotto ottenuto al numero del rigo stesso di partenza, o se si considera il numero, seguendo lo stesso intervallo numerico; ad esempio 7*5=35, cade sul rigo 6, tutti i prodotti che si ripetono cadranno sui righi risultanti dalla somma 6+35, e quindi +35 all'infinito, oppure aggiungendo a 35 ed ai risultati successivi il numero 210; per 13*5 partendo da 11 si dovranno effettuare salti di 65 oppure aggiungere al 65 ed ai successivi risultati il numero 390; per 5*5 partendo da 4 bisogna aggiungere sempre 25 oppure il numero 150; il numero fisso da aggiungere è facilmente calcolabile trovando il primo intervallo, comunque è più semplice e conveniente lavorare sui righi.

Penso che questa distribuzione sia molto armonica, quasi "magica", e che abbia molto potenziale; con le giuste regole impostate con un buon programma è possibile creare tabelle d'uso di riferimento. Riguardo la ricerca dei numeri primi, l'idea è di creare un programma con delle impostazioni tali per cui sulle sole colonne C5 e C7 restino evidenti solo i numeri ricercati all'infinito; io ho creato un piccolo programma in basic, ed ho estratto i numeri primi della C5 e della C7 in sequenza, ma sono arrivata solo fino ad un certo punto, perché mi interessava solo verificare che realmente funzionasse.

Riguardo la fattorizzazione ho creato quattro tabelle di ricerca (C5suC5 detta anche C5(2), C7suC5 detta anche C5, C7suC7 detta anche C7(2), C5suC7 detta anche C7), dove ho evidenziato ricorrendo alle formule (1) e (2), i righi dove cadono i multipli in C5 e C7 dei numeri primi presenti in

C5 e C7, vale a dire la posizione dei righi dei numeri composti. Considerato un numero, e la sua posizione di colonna e di rigo, bisogna ricercare nelle tabelle corrispondenti il numero del rigo. Se la somma compare, significa che quel numero non è primo e ne vengono evidenziati immediatamente i fattori che lo compongono, i quali a loro volta potrebbero essere numeri composti. Con una ricerca a ritroso è possibile arrivare a determinare i fattori primi del numero considerato; e la ricerca funziona.

C5suC5

5	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16
17	18	**19**	20	21	22
23	24	25	26	27	28
29	30	**31**	32	33	34
35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60	**61**	62	63	64
65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76
77	78	**79**	80	81	82
83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94
95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106

mul su C5 r np +np									
1	6	11	16	21	26	31	36	41	46
2	13	24	35	46	57	68	79	90	101
3	20	37	54	71	88	105	122	139	156
4	27	50	73	96	119	142	165	188	211
5	34	63	92	121	150	179	208	237	266
6	41	76	111	146	181	216	251	286	321
7	48	89	130	171	212	253	294	335	376
8	55	102	149	196	243	290	337	384	431
9	62	115	168	221	274	327	380	433	486
10	69	128	187	246	305	364	423	482	541
11	76	141	206	271	336	401	466	531	596
12	83	154	225	296	367	438	509	580	651
13	90	167	244	321	398	475	552	629	706
14	97	180	263	346	429	512	595	678	761
15	104	193	282	371	460	549	638	727	816
16	111	206	301	396	491	586	681	776	871
17	118	219	320	421	522	623	724	825	926

C7suC5

5	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16
17	18	**19**	20	21	22
23	24	25	26	27	28
29	30	**31**	32	33	34
35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60	**61**	62	63	64
65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76
77	78	**79**	80	81	82
83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94
95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106

mul su C5 np C7-r									
6	13	20	27	34	41	48	55	62	69
11	24	37	50	63	76	89	102	115	128
16	35	54	73	92	111	130	149	168	187
21	46	71	96	121	146	171	196	221	246
26	57	88	119	150	181	212	243	274	305
31	68	105	142	179	216	253	290	327	364
36	79	122	165	208	251	294	337	380	423
41	90	139	188	237	286	335	384	433	482
46	101	156	211	266	321	376	431	486	541
51	112	173	234	295	356	417	478	539	600
56	123	190	257	324	391	458	525	592	659
61	134	207	280	353	426	499	572	645	718
66	145	224	303	382	461	540	619	698	777
71	156	241	326	411	496	581	666	751	836
76	167	258	349	440	531	622	713	804	895
81	178	275	372	469	566	663	760	857	954
86	189	292	395	498	601	704	807	910	1013

C7suC7

5	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16
17	18	**19**	20	21	22
23	24	25	26	27	28
29	30	**31**	32	33	34
35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60	**61**	62	63	64
65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76
77	78	**79**	80	81	82
83	84	85	86	87	88

mul su C7 np C5 -r									
4	9	14	19	24	29	34	39	44	49
9	20	31	42	53	64	75	86	97	108
14	31	48	65	82	99	116	133	150	167
19	42	65	88	111	134	157	180	203	226
24	53	82	111	140	169	198	227	256	285
29	64	99	134	169	204	239	274	309	344
34	75	116	157	198	239	280	321	362	403
39	86	133	180	227	274	321	368	415	462
44	97	150	203	256	309	362	415	468	521
49	108	167	226	285	344	403	462	521	580
54	119	184	249	314	379	444	509	574	639
59	130	201	272	343	414	485	556	627	698
64	141	218	295	372	449	526	603	680	757
69	152	235	318	401	484	567	650	733	816

C5suC7

5	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16
17	18	**19**	20	21	22
23	24	25	26	27	28
29	30	**31**	32	33	34
35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60	**61**	62	63	64
65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76
77	78	**79**	80	81	82
83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94
95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106

mul su C7 r np + np									
1	8	15	22	29	36	43	50	57	64
2	15	28	41	54	67	80	93	106	119
3	22	41	60	79	98	117	136	155	174
4	29	54	79	104	129	154	179	204	229
5	36	67	98	129	160	191	222	253	284
6	43	80	117	154	191	228	265	302	339
7	50	93	136	179	222	265	308	351	394
8	57	106	155	204	253	302	351	400	449
9	64	119	174	229	284	339	394	449	504
10	71	132	193	254	315	376	437	498	559
11	78	145	212	279	346	413	480	547	614
12	85	158	231	304	377	450	523	596	669
13	92	171	250	329	408	487	566	645	724
14	99	184	269	354	439	524	609	694	779
15	106	197	288	379	470	561	652	743	834
16	113	210	307	404	501	598	695	792	889
17	120	223	326	429	532	635	738	841	944

Esempi pratici

Esempio1

Preso un numero, ad esempio 1179349, si calcolano colonna e rigo di posizione; questo numero si trova in C7 al rigo 196558. Si effettua una ricerca del valore 196558 nelle due tabelle C7, se è presente una somma in C7 si deve continuare ad indagare il numero presente nella C5 al rigo rispettivo della somma (poiché la tabella C7 determina i multipli incrociati), se invece la somma è presente in C7(2) bisogna indagare il numero trovato nella C7 al rigo rispettivo della somma (poiché la C7(2) determina i multipli diretti). In questo caso la somma si trova in C7(2) ed è determinata dal numero 62071 che sta in C7 al rigo 10345. Si continua perciò la ricerca del rigo (il numero 10345) nelle due colonne del 7. Non risultano somme, perciò il numero 62071 è primo, inoltre dividendo il numero di partenza 1179349 per 62071 ne risulta 19, che pure è primo: si sono trovati i due fattori che costituiscono il numero di partenza.

Esempio2

Preso un numero, ad esempio 1179347, si calcolano colonna e rigo di posizione; questo numero si trova in C5 al rigo 196558. Si effettua una ricerca del valore 196558 nelle due tabelle C5. In questo caso la somma si trova nella tabella C5 che raccoglie i multipli dei numeri della C7 (multipli incrociati), quindi il numero da continuare ad indagare è quello che si trova al rigo della somma in C7, e cioè 14209. Questo numero si trova in C7 al rigo 2368. Si continua la ricerca del numero 2368 nelle due tabelle C7. La somma è presente in C7(2), che riporta i multipli delle colonne dirette. La somma 2368 risulta dal numero 1093, che sta al rigo 182. Bisogna adesso cercare 182 nelle due colonne C7. Non compare nessuna somma che dà 182, quindi il numero 1093 è primo ed è fattore di 1179331, infatti dividendo i due numeri risulta 1079. Posso vedere se quest'ultimo numero è o non è primo. Si trova in C5 al rigo 180, quindi cerco 180 nelle due tabelle della C5. Il valore si trova nella tabella C5, quella cioè che riporta i multipli incrociati. Al rigo della somma in C5 c'è 13, che è primo. 1079 diviso 13 fa 83, che è primo. 13 ed 83 sono i fattori più piccoli di 1179347.

Esiste un altro calcolo per trovare i numeri dei righi occupati dai multipli, una strada diversa che porta allo stesso risultato, per ottenere cioè le quattro tabelle di ricerca:
si considera un blocco 300, ad esempio quello che comprende i numeri dal 1001-1300, e che quindi si estende dal rigo 167 al 216; quindi nelle tabelle dirette (C5suC5 e C7suC7) per trovare il primo risulta-

to nella serie bisogna addizionare l'unità + il numero del rigo + una cifra variabile che può essere 0, 10, 20,...100, 110, 120...1000, 1100, 1110... a seconda se il numero indagato è ad una, due, tre, quattro cifre, e da quale decina, centinaia, migliaia è composto. Perciò per il numero 1001 che è al rigo 167 il calcolo sarà: 1+167+1000 cui risulta 1168 che sarà il numero del rigo di un multiplo; per il numero 1091 posto al rigo 182: 1+182+1090; per il numero 1093, posto al rigo 182: 3+182+1090. Per ottenere il primo risultato delle tabelle di ricerca incrociate (C5suC7 e C7suC5), il calcolo necessario è:(unità - rigo) + numero + una cifra variabile che può essere 0, 10, 20,...100, 110, 120...1000, 1100, 1110... a seconda se il numero indagato è ad una, due, tre, quattro cifre, e da quale decina, centinaia, migliaia è composto. Perciò per il numero 1001 (1-167)+1001+1000; per il 1091: (1-182)+1091+1090. Queste operazioni sono una strada diversa per ottenere il primo numero della serie di ogni tabella di ricerca, al risultato, come visto in precedenza bisogna poi aggiungere il numero che si sta considerando per ottenere tutti i numeri dei righi in serie.

Vista la regolarità di sequenze e l'armonia, penso che questo lavoro possa essere utilizzato con risultati interessanti anche per osservazioni sulle congetture dei numeri primi, ad esempio sulle coppie di numeri primi gemelli, in quanto risulta facilmente visibile l'intervallo tra i numeri primi presenti sulla C5 e sulla C7, e sulla congettura di Goldbach, in quanto prendendo in considerazione un numero pari e due intervalli di righi dove si possono evidenziare i numeri primi, si può verificare quale coppia di numeri primi dà come risultato il numero pari considerato.

Ontologia dell'equazione

di Ing. Giacomo De Laurentis

Sunto
Proposta di definizioni inerenti l'equazione e rilevazione della necessità di coerenza della definizione di equivalenza tra equazioni con i principi di equivalenza delle stesse.

Premessa

In questo articolo ci proponiamo di raggiungere i seguenti scopi:

1) Far rilevare la mancanza di oggettività e l'assoluta parzialità che caratterizza *la definizione scolastica di equazione* (con tale espressione intenderemo riferirci alla definizione secondo cui un'equazione è "*un'uguaglianza letterale contenente una o più variabili e che è vera solo per particolari valori assegnati alle stesse"*) nonché il *paradosso* contenuto sia in quella definizione sia nella conseguente definizione di equazione impossibile.

2) Definire, ricorrendo all'ontologia applicata e al concetto di oggettività-invarianza di R. Nozick, i concetti-oggetto di uguaglianza e di equazione concetti questi che oggi per *l'ontologia applicata* sono sì entità astratte, ma al tempo stesso, *solo però se correttamente definiti, iscritti e tradizionalizzati*, anche *"oggetti reali"* che rientrano in quella *"teoria dell'oggetto"* che quella stessa ontologia ha formulato e oggi utilizza per svolgere il suo compito. Si noterà che ne viene fuori un nuovo modo di concepire l'equazione ossia una nuova concezione che ci consente di poter considerare l'equazione come *un oggetto reale*, non però chiuso in sé ed esclusivamente inserito in ambito matematico, dove di fatto la definizione scolastica di equazione relega il concetto stesso di equazione, bensì invece aperto e connesso intimamente con la nostra realtà, da considerare in tutti i suoi vari aspetti, fisico, economico, sociale ma soprattutto nel suo *carattere principale* che accomuna tutti questi aspetti e che è essenzialmente *possibilistico e probabilistico*: cogliamo l'occasione per ricordare al lettore che il termine *natura* riferito all'universo fisico (che ovviamente non costituisce da solo tutta la nostra realtà anche se questa su quell'universo fonda tutta la propria esistenza) ha il significato di *ciò che sta per nascere*, derivando tale termine dal verbo latino *nascor* di cui conserva la forma dell'infinito futuro, e che la natura in questo suo star per nascere evolve e mentre evolve *scrive* (nel DNA esiste addirittura un sistema di stampa) e mentre *scrive* crea sia la realtà sia le possibilità che con quella realtà coesistono, si connettono e si compenetrano.

3) Proporre, per non dire imporre, alla luce di tale nuova concezione dell'equazione, in sostituzione del vecchio, sia nuove definizioni in grado di potersi connettere con la nuova definizione di equazione sia conseguentemente un nuovo modo di coordinare i principi di equivalenza per le equazioni con la corrispondente definizione di equivalenza tra equazioni, sperando vivamente che questo articolo venga letto anche dagli autori di libri di testo scolastici.

1. La definizione scolastica di equazione

Va anzitutto e immediatamente rilevato che *la definizione scolastica di equazione* evidentemente non è e non deve ritenersi adeguata a definire il concetto-oggetto di equazione.
Le motivazioni che inducono a sostenere ciò, sono le seguenti:

1) *La definizione scolastica di equazione* non si coordina con quella di uguaglianza, concetto- oggetto anch'esso ancora non chiaramen-

te ben definito nei libri di testo scolastici, concetto che in questo articolo sarà definito e giustificato nel paragrafo successivo.

2) *La definizione scolastica di equazione*, e ovviamente ogni altra ad essa equivalente o pressoché equivalente, pone erroneamente sullo stesso livello ontologico sia il concetto di equazione sia l'esito risolutivo della stessa: infatti tale errore ontologico risulta evidente nel momento in cui poniamo mente al fatto che quella definizione si focalizza essenzialmente sull'aspetto secondario dell'equazione, ossia sull'aspetto relativo all'esito risolutivo dell'equazione stessa, e non invece sulla sua caratteristica ontologica principale che invece impone di considerare come *vera essenza* dell'equazione la sua stessa *capacità di descrivere* la realtà che c'è, ma anche quella che non c'è ma che ci potrebbe essere e inoltre la realtà che non c'è e non ci potrebbe essere: vedremo infatti che un'equazione, riassumendo in sé non solo il luogo in cui essa è vera (insieme di verità) ma anche, sia il luogo in cui pur non essendo vera è dotata di senso (insieme di definizione considerato al netto dell'insieme di verità) sia il luogo in cui non ha senso (insieme complementare al suo insieme di definizione), se considerata strettamente nel luogo dove l'equazione stessa sussiste (ossia il suo insieme di definizione o di senso), essa *può essere* o sempre vera (equazione identica o identità), oppure vera o non vera (a seconda del valore assunto dalle variabili incognite), oppure infine sempre non vera (equazione impossibile).

Si accennava in precedenza ad eventuali definizioni scolastiche equivalenti o pressoché equivalenti a quella precedentemente indicata; si prenda per esempio in considerazione la seguente definizione tratta da un libro di testo scolastico edito nel 2007, ossia all'inizio dell'anno in cui scriviamo: "Si dice equazione un'uguaglianza fra due espressioni algebriche per la quale si vogliono determinare i valori delle variabili che la rendono vera" ; senza entrare nel merito dell'aggettivo algebrico, secondo me limitativo, è possibile affermare che tale definizione rispetti il criterio di oggettività della scienza? essa invece evidenzia che l'oggetto - concetto equazione sia del tutto privo di una sua realtà autonoma e che anzi ancori la propria esistenza solo ed esclusivamente alla nostra volontà calcolatrice, fatto questo che è solo molto secondario rispetto a ciò che veramente è di per sé un'equazione.

Il presente articolo infatti è anche un modo di richiamare i matematici a non dimenticarsi del criterio (o postulato) di oggettività della scienza, specialmente quando definiscono gli oggetti- concetto matematici che, se pensati, devono essere colti nella loro realtà e autonomia ossia indipendentemente dall'utilizzo che il matematico fa di essi per effettuare calcoli e conseguire risultati: è solo questo l'unico modo che c'è per ancorare la matematica alla realtà.

Emerge, da quanto sopra e già da ora, il fatto che, se l'equazione è quell'oggetto-concetto matematico atto a descrivere la realtà (che, già si è detto, è da considerare soprattutto nel suo *carattere principale* che è essenzialmente *possibilistico e probabilistico*), allora consegue che *l'essenza* dell'equazione non può che essere data in primis se non solo ed esclusivamente dal suo *"poter essere"* e solo quindi in secundis dal suo *''essere''* o vera o non vera ma comunque dotata di senso oppure infine priva di senso.

3) *La definizione scolastica di equazione* conseguentemente, per come si pone, non ammette assolutamente la possibilità che un'equazione non abbia alcuna soluzione; conseguentemente quindi impedisce logicamente ed ontologicamente l'esistenza delle equazioni impossibili e quindi impone di dover considerare paradossale il solo stesso fatto di definirle.

Infatti una tale definizione, e ovviamente ogni altra ad essa equivalente, pur cogliendo la vera essenza dell'equazione, ossia il suo *poter essere* (la definizione fa infatti riferimento a variabili che devono essere contenute in un'uguaglianza), congiuntamente limita tale essenza, imponendo di fatto all'equazione il suo *dover essere vera* comunque, sia pure per particolari valori assegnati alle variabili; sicché la definizione scolastica di equazione, sottintendendo essa stessa l'impossibilità che una equazione sia un'uguaglianza sempre non vera nel suo insieme di definizione (di senso), ovvero che esistano le equazioni impossibili, impedisce, logicamente e ontologicamente, di definire impossibile l'equazione stessa; infatti, una volta che si sia accettata la definizione scolastica di equazione, il definire successivamente impossibile un'equazione implica il *paradosso* di *ammettere che esistano. come equazioni, anche le equazioni impossibili che invece, di fatto*, non essendo equazioni**,** nel rispetto propriamente di quanto la definizione scolastica stessa di equazione stabilisce che un'equazione debba essere, *come equazioni, non possono esistere affatto, restando esse stesse entità del tutto indefinite in quanto ontologicamente poste al di fuori della definizione scolastica di equazione*: a meno che non si ritenga che sia lecito ammettere (fatto che personalmente ritengo oggettivamente errato) che *il non essere (l'impossibilità) di un ente (l'equazione scolasticamente intesa) possa identificarsi o far coincidere con l'essere di un altro ente (l'uguaglianza che, non essendo più un'equazione, sarà sempre o non vera o, addirittura, priva di senso)*, restando evidente il fatto che una tale ammissione equivale ad affermare erroneamente che il non essere o l'impossibilità di un cavallo, che quindi non c'è, coincida con l'essere di una pecora che ovviamente c'è ed è ben altro di un cavallo che non c'è; ossia equivale anche ad affermare che un cavallo, precedentemente e precisamente ben definito, è anche dotato della facoltà di non essere, ossia di sparire per diventare una pecora con cui identificarsi**.**

4) *La definizione scolastica di equazione* è utilizzata erroneamente ancora oggi anche al fine di considerare l'identità, qui intesa come uguaglianza contenente variabili, come un caso che si pone in alternativa e in contrapposizione all'equazione stessa. Dopo aver dato, in questo articolo, le definizioni di uguaglianza, equazione e identità risulterà evidente che ciò non è affatto vero; del resto non è ammissibile che ancora oggi sui libri di testo scolastici, e non solo, si definisca l'identità come un'uguaglianza letterale comunque sempre vera *"per valori numerici comunque scelti o arbitrari"* attribuiti alle lettere: in questo mondo non esiste niente di assolutamente arbitrario !

Chiudiamo il paragrafo facendo rilevare che la situazione al momento è paradossale, giacché mentre si può dire che esistono le uguaglianze, le equazioni e le identità che noi conserviamo e utilizziamo nella nostra realtà, contemporaneamente non si può dire che esistono i loro corrispondenti concetti-oggetto che continueranno a non esistere finché la matematica non avrà ufficialmente e chiaramente ben formulato le loro corrispondenti definizioni!

Esistono i triangoli e la matematica ha formulato la definizione del concetto-oggetto di triangolo. Esistono le equazioni ma la matematica non ha ancora ben formulato la definizione né del concetto-oggetto di equazione né dei concetti di uguaglianza e identità che col concetto di equazione si connettono e coordinano.

Inoltre nell'ambito della suddetta analogia, stante la suddetta definizione scolastica di equazione, affermare che un'equazione è impossibile quando essa non ammette alcuna soluzione equivale ad affermare che un triangolo è impossibile quando esso, ossia il triangolo, è un quadrato!

2. L'uguaglianza

*Q*uale definizione adottare per il concetto-oggetto di uguaglianza?

La definizione di uguaglianza che diamo e che successivamente giustifichiamo è la seguente:

Dicesi *uguaglianza* la *"scrittura"* costituita dal segno di uguaglianza che separa due espressioni matematiche che prendono rispettivamente il nome di primo membro (quella a sinistra del segno di uguaglianza) e secondo membro (quella a destra di quello stesso segno).

Si osservi che nella suddetta definizione è necessariamente insita l'essenza stessa dell'uguaglianza ossia il suo *''poter essere''* numerica o letterale e, all'interno di ciascuna di tali due tipologie, il suo poter essere o *vera* (caso questo in cui i due suoi membri sono identici o possono ricondursi ad essere tali) oppure *non vera* (caso questo in cui l'uguaglianza pur non essendo vera è però dotata di significato ossia di senso) oppure infine *priva di senso* (il riferimento è almeno a quello matematico); infatti il fulcro della suddetta definizione è posto nel termine *"scrittura"* che come il termine *natura* (da *nascor*) conserva la forma dell'infinito futuro latino del verbo *scribo*, forma che conferisce congenitamente al termine *scrittura* il suo carattere essenzialmente possibilistico e probabilistico; infatti, al fine di giustificare il termine scrittura da noi adottato nella definizione, facciamo osservare che una qualsiasi scrittura, vera, o comunque dotata di senso, in un contesto, può risultare falsa (non vera o priva di senso) in un altro, ad esempio in un contesto spazio temporale diverso da quello in cui quella stessa scrittura è stata scritta.

Riteniamo inoltre necessario che si debba dare la seguente definizione di equivalenza tra due uguaglianze.

Due uguaglianze sono equivalenti se l'una è la trasformata reversibile dell'altra, dalla quale è ottenuta tramite l'applicazione dei seguenti *principi di equivalenza per le uguaglianze*:

1°- Sommando o sottraendo ad ambo i membri di un'uguaglianza una stessa quantità nota si ottiene un'uguaglianza equivalente a quella data.

2°- Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'uguaglianza per una stessa quantità nota e diversa da zero si ottiene un'uguaglianza equivalente alla data.

3. L'equazione

Quale definizione adottare per il concetto-oggetto di equazione?

La definizione di equazione che diamo e che successivamente giustifichiamo è quella data dall'enciclopedia libera *Wikipedia* , definizione questa peraltro da noi già prima intuita, quasi nel momento stesso in cui coglievamo il paradosso contenuto nella definizione scolastica di equazione, quindi appositamente cercata e finalmente trovata a riscontro di ciò che già avevamo intuito; da notare che Wikipedia, al momento in cui si stava scrivendo il presente articolo, formulava pure le definizioni di uguaglianza e identità ma in maniera diversa da quanto qui proposto e comunque non in modo tale da potersi coordinare con la definizione wikipediana di equazione così da riuscire a *classificare* tutte le equazioni come invece questo articolo fa con la rappresentazione insiemistica da esso fornita grazie proprio alle definizioni di uguaglianza e identità come qui invece proposte.

Dicesi *equazione* l'uguaglianza letterale contenente una o più variabili (generalmente indicate con x,y,z…) dette *anche* incognite, alla quale resta a priori associato il suo *insieme di senso* (S).

Tale insieme è l'insieme di definizione dell'equazione ossia è l'insieme di valori per cui, sia le singole variabili quando li assumono, sia l'equazione stessa con le espressioni in essa contenute hanno significato ossia senso; si osservi che tale insieme resta stabilito non necessariamente solo dal senso delle regole matematiche bensì anche dal contesto del problema che si sta affrontando e che inoltre *una proprietà caratteristica dell'equazione è data dal fatto che essa, a differenza dell'uguaglianza, non possa mai essere totalmente priva di senso giacché nel suo S dovrà necessariamente avere almeno senso matematico* .

L'insieme costituito da tutte le soluzioni dell'equazione si chiama *insieme di verità* (V) dell'equazione ed è sempre contenuto o al più può coincidere con l'insieme di senso dell'equazione stessa.

Ovviamente l'equazione nel suo insieme di senso *può essere*: *o impossibile* se non ha alcuna soluzione (V= $\varnothing$: l'equazione è *sempre non vera* ma comunque sempre dotata di senso in S), *o indeterminata* se ha un numero infinito di soluzioni (V$\subseteq$ S), *o determinata* se ha un numero finito (determinato) di soluzioni (V$\subseteq$ S), caso quest'ultimo quasi del tutto improbabile per un'equazione a più incognite, dipendendo esso molto strettamente dall'insieme di senso assunto a priori per l'equazione stessa (S discreto e finito).

Si osservi che dalla suddetta definizione di equazione, uguale a quella data dalla enciclopedia libera, Wikipedia, consegue l'essenza dell'equazione, che, all'interno delle uguaglianze letterali la cui essenza è già un ''poter essere'' vere o false, è data in primis dal ''suo semplice contenere almeno una variabile'' ossia, ovviamente e a maggior ragione, dal suo "poter essere" e solo quindi in secundis, a seconda dei valori dati alle variabili, dal suo ''essere'' o vera o non vera ma comunque dotata di senso oppure infine priva di senso.

4. L'identità letterale o equazione identica

Per il concetto-oggetto identità adottiamo la seguente definizione:

Dicesi *''identità letterale a n* ≥ 1 *variabili'' o "equazione identica" o semplicemente ''identità''* l'equazione i cui due membri sono *separatamente* riconducibili ad *una stessa espressione, da conseguirsi senza alterare l'insieme di senso dell'equazione stessa.*

Fatto questo che si può rendere anche affermando che *l'identità* è *un'equazione identicamente vera nel suo insieme di senso, che necessariamente in tal caso coincide con l' insieme di verità dell'equazione stessa* (S=V).

Si osservi che, poiché nella *quasi totalità* dei casi S è costituito da un numero *infinito* di valori (quando l'equazione è ad una sola incognita) o di gruppi ordinati di valori (quando l'equazione è a più incognite) si ha che *l'identità* è *un'equazione indeterminata su tutto il suo intero insieme di senso*, fatto questo che si può rendere affermando che *l'identità* è *un'equazione identicamente indeterminata nel suo insieme di senso*.

Si osservi inoltre che la suddetta definizione di identità coglie e stabilisce inevitabilmente che, poiché, all'interno delle uguaglianze letterali, sia l'equazione che l'identità condividono la stessa essenza, ossia quella di essere ciascuna una uguaglianza letterale contenente almeno una variabile, anche l'identità debba considerarsi un'equazione; infatti la suddetta definizione fa rilevare che, essendo l'identità dotata di una proprietà in più, ossia del "*suo dover essere identicamente vera*", rispetto all'equazione e poiché tale proprietà non mina né pregiudica minimamente il suo essere un'equazione, l'identità stessa altro non possa essere se non un'equazione particolare ossia un'equazione che *congiuntamente* può e deve essere identicamente vera nel suo insieme di senso.

Da quanto sopra deriva conseguentemente che, per le uguaglianze, il quadro che si viene a determinare è dato dalla seguente rappresentazione insiemistica:

UGUAGLIANZE

UGUAGLIANZE LETTERALI

UGUAGLIANZE LETTERALI CON ALMENO UNA VARIABILE
ossia EQUAZIONI che nel loro insieme di senso S *__''possono essere''__*:

1) SEMPRE VERE (V= S)	**2) SEMPRE NON VERE (V=$\varnothing$)**
- identità, dette anche eq. identiche **- equazioni che, pur non essendo identità, hanno S=V (sono eq. deter. o indeter.)**	**- equazioni impossibili**

3) VERE O NON VERE
a seconda dei valori dati alle variabili (V $\subset$ S)

- **equazioni determinate ad una sola incognita e, solo eccezionalmente, a più incognite**
- **equazioni indeterminate a una o a più incognite**

La definizione di equazione data da Wikipedia quindi conseguentemente, necessariamente e logicamente, impone che si debba considerare l'identità solo come un'equazione particolare, ossia in definitiva come un caso particolare di equazione e non come un caso che si pone in alternativa e in contrapposizione all'equazione stessa, come invece le definizione scolastiche di equazione e di identità lasciano intendere e impongono grossolanamente ed erroneamente che debba essere, lasciando supporre che l'identità sia un'uguaglianza che vale incondizionatamente, mentre l'equazione una uguaglianza che sussiste condizionatamente, essendo invece lecito supporre come vero, per quanto detto, proprio l'esatto contrario, nei limiti ovviamente delle condizioni sempre imposte da S .

Pertanto, per tutto quanto precedentemente detto e osservato, se ne deve dedurre necessariamente che il concetto di identità non può sussistere, se non, solo ed esclusivamente, all'interno del concetto stesso di equazione, concetti, questi, entrambi da intendersi ovviamente nel senso qui innovato e proposto attraverso le corrispondenti definizioni, così come sono state formulate nel presente articolo, definizioni che, se accettate ed adottate, non possono che condurre inevitabilmente alla rappresentazione insiemistica di cui sopra.

5. Grado di un'equazione razionale intera

È risaputo che il grado di un'equazione posta nella forma razionale intera è il grado del polinomio P(x,y,z…) uguagliato a zero; stando alla nuova definizione di equazione, l'equazione per essere tale deve contenere necessariamente almeno una variabile; pertanto nel caso l'equazione sia un'identità o un'equazione impossibile, il suo grado sarà sempre quello del polinomio suddetto che necessariamente dovrà contenere tutti i termini che è necessario che siano mantenuti al fine sia di far sussistere l'equazione stessa, sia di definirla correttamente come identità o equazione impossibile: in tal caso i coefficienti dei termini contenenti incognite saranno ovviamente tutti pari a zero.

Franco Baldissarutti, *Frattura ricomposta*

6. La definizione di equivalenza tra equazioni e principi di equivalenza.

Se si accetta come definizione di equazione quella secondo cui essa è un'uguaglianza letterale contenente almeno una variabile e dotata di insieme di definizione (o di senso), allora implicitamente si accetta di ammettere che l'equazione è di fatto l'insieme di tutte le uguaglianze, dotate di senso, a ciascuna delle quali resta associato un valore di x (o un gruppo di valori x,y,z... se l'equazione è a più incognite) preso ovviamente dall'insieme di definizione dell'equazione stessa; ne consegue logicamente che si accetta pure di ammettere che il contenuto essenziale (la sostanza) di un'equazione non possa essere dato solo dalle sue soluzioni, ossia dall'insieme di verità dell'equazione, bensì invece sia da tale insieme che dall'insieme di tutte le uguaglianze che, rappresentate dall'equazione, risulteranno sì non vere ma mai comunque prive di senso.

Ora, dato che il concetto di equivalenza impone che, nella variazione di forma, si abbia invarianza di sostanza ossia di contenuto, allora ne consegue necessariamente e oggettivamente che due equazioni non potranno considerarsi equivalenti solo ed esclusivamente perché hanno le stesse soluzioni: *perché possano considerarsi equivalenti dovranno avere, oltre che le stesse soluzioni, anche lo stesso insieme di definizione (di senso).* E ciò perché un'equazione riassume in sé non solo il luogo in cui essa è vera ma anche, sia il luogo in cui pur non essendo vera è dotata di senso sia il luogo in cui non ha senso.

Pertanto la definizione oggettiva di equivalenza tra due equazioni comunemente accettata dovrebbe essere la seguente:

2- Due equazioni si dicono equivalenti se, nello stesso insieme di definizione (di senso) S, le soluzioni dell'una sono tutte e sole quelle dell'altra *(concetto di equivalenza locale)*.

Perché allora molti libri di testo nel dare la definizione di equivalenza tra due equazioni non fanno alcun riferimento al fatto che quelle equazioni devono essere considerate equivalenti anche nello stesso insieme di definizione?
La risposta secondo cui lo si darebbe per scontato non è plausibile: infatti potrebbe esserlo, e neppure in modo sufficiente, solo se la definizione da essi precedentemente data di equazione fosse uguale a quella riportata in questo articolo, mentre è risaputo che ciò non avviene affatto.

Non resta che pensare che gli autori di quei libri abbiano voluto mantenere inalterata in essi la classica e tradizionale, nonché puramente matematica, definizione di equivalenza tra equazioni, ossia la seguente:

1- Due equazioni si dicono equivalenti se le soluzioni dell'una sono tutte e sole quelle dell'altra *(concetto di equivalenza assoluta)*.
Essi però, nel dare la suddetta definizione, non hanno considerato un fatto essenziale, ben più profondo di quanto quegli stessi autori potessero immaginare, soprattutto se considerato in relazione alle conseguenze che tale fatto comporta, nel momento in cui lo si trascuri.

Non hanno colto nella 1 il fatto che tale definizione fa riferimento solo ed esclusivamente alla *equivalenza assoluta* tra due equazioni ossia al fatto che secondo questa definizione *due equazioni sono equivalenti se, indipendentemente dal fatto di avere o no lo stesso insieme di definizione contestuale ma con riferimento invece e ovviamente al proprio insieme di definizione matematico più generale possibile per ciascuna, le soluzioni dell'una sono tutte e sole quelle dell'altra*; conseguentemente, trascurando ciò, non hanno neppure minimamente pensato, errando, al fatto che la conseguente formulazione dei principi di equivalenza dovesse necessariamente coordinarsi strettamente e solo con la definizione di equivalenza precedentemente data. Ora i principi di equivalenza che la tradizione matematica esprimeva fino ad alcuni decenni fa (anni sessanta-settanta) in perfetta coordinazione con la 1, espressi quindi *in termini di equivalenza assoluta*, erano:

1°- Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica intera (contenente anche incognita(e)), si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

2°- Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero, o per una stessa espressione algebrica non contenente incognita (e) e non nulla, si ottiene una equazione equivalente a quella data.

3°- Moltiplicando i due membri di un'equazione per una stessa espressione M contenente incognita(e) e intera rispetto ad essa(e) si ottiene un'equazione che ''può essere'' o equivalente o più generale della equazione data; inoltre anche elevando entrambi i membri di un'equazione ad una stessa potenza ''si può'' ottenere un'equazione più generale della equazione data.

Risulta evidente, da quanto sopra, sia il fatto che i tre principi suddetti non fanno alcun riferimento all'insieme di definizione contestuale dell'equazione data, sia il fatto che il terzo di essi rilevi solo la possibilità, non la certezza che l'equazione ottenuta sia equivalente, ovviamente in senso assoluto, alla equazione data all'origine; l'equazione ottenuta infatti può essere anche *un'equazione più generale della data*, ossia un'equazione che, rispetto a quella ''data all'origine'', oltre a tutte le soluzioni eventuali della data, ne contiene altre che per l'equazione data risultano essere *inaccettabili o estranee*. La definizione di *equazione più generale della data* veniva data subito dopo la definizione di equivalenza e poi si sottolineava il fatto che essa per definizione non poteva giustamente considerarsi equivalente alla data; mentre subito dopo il terzo principio si spiegava perché e come, dopo aver trovato tutte le soluzioni dell'equazione ottenuta, tra queste dovessero essere scartate tutte quelle estranee e inaccettabili per l'equazione data all'origine, considerata però ora strettamente ed esattamente nel suo insieme di definizione contestuale; infatti è risaputo che tali soluzioni estranee o rendono l'equazione data priva di senso perché poste al di fuori del suo insieme di definizione contestuale o, comunque, nel caso di elevamento alla stessa potenza di entrambi i membri, non la verificano pur appartenendo a tale insieme strettamente contestuale.

È inoltre evidente che il procedimento risolutivo 1 di un'equazione, fondato sulla 1 e sui conseguenti, e perfettamente coordinati con 1, principi di equivalenza suddetti, sia un procedimento mirato essenzialmente e prioritariamente alla ricerca delle soluzioni dell'equazione; i principi di equivalenza adottati da tale procedimento, considerati nel loro complesso, a causa del terzo non garantiscono sempre l'equivalenza, intesa ovviamente in modo assoluto, tra l'equazione data e l'equazione ottenuta, visto che questa può anche essere un'equazione più generale della data.

Allora è lecito porsi questa domanda: come mai oggi, agli inizi del 2007, i principi di equivalenza che vengono riportati diffusamente sui libri di testo, bandendo del tutto l'incertezza in merito all'equivalenza di cui sopra, sbandierano invece in pompa magna la certezza che l'equazione ottenuta è sempre e comunque equivalente alla equazione data? Cos'è cambiato da allora a oggi?

È ovvio che, se la conclusione dei principi di equivalenza espressi oggi è quella della totale certezza dell'equivalenza tra l'equazione ottenuta e quella data, qualcosa di sicuro deve essere cambiato; e ciò che è cambiato, consciamente o inconsciamente, è proprio il modo di intendere il concetto di equivalenza tra equazioni, modo che oggi fa riferimento alla 2 e non più alla 1; ma il fatto grave è che questo cambiamento di vedute, per lo più, non è stato ancora al momento espressamente dichiarato, dato che, in tali libri di testo ancora attuali, non solo è rimasta la vecchia definizione di equivalenza 1 ma, nella maggior parte di essi, i principi di equivalenza adottati non fanno riferimento alcuno, come invece inevitabilmente dovrebbero, all'insieme di definizione dell'equazione data.
Riportiamo ora come dovrebbero essere espressi i principi di equivalenza *in termini di equivalenza locale*, in coordinazione cioè con quanto stabilito dalla 2, affinché gli stessi garantiscano la certezza dell'equivalenza locale tra l'equazione data e quella ottenuta:

1°- Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione definita nell'insieme S uno stesso numero o una stessa espressione algebrica (che, se contiene incognita(e), abbia sempre significato in tutto S) si ottiene un'equazione equivalente in S alla equazione data.

2°- Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero, o per una stessa espressione algebrica non contenente incognita (e) e non nulla, si ottiene una equazione equivalente in S alla equazione data.

3°- Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione definita nell'insieme S per un'espressione contenente incognita(e), che abbia sempre significato in tutto S e che non si annulli mai in S, si ottiene un'equazione equivalente in S alla equazione data.

Si sottolinea che solo pochi autori tra la generalità di quelli che, con manifesta intenzione, esprimono principi di equivalenza in funzione del concetto di equivalenza locale ossia della 2, formulano i principi di equivalenza pressoché nel modo suddetto e inoltre che a tale formulazione sono giunti gradualmente solo dopo formulazioni che, nelle precedenti edizioni, non facevano riferimento alcuno all'insieme di definizione S dell'equazione data. Molti comunque dei suddetti autori fanno precedere, fatto secondo me assai grave, i principi di equivalenza suddetti, qualunque sia il modo con cui questi stessi vengono formulati, dalla definizione di equivalenza 1 e non invece, come dovrebbe essere, dalla definizione 2.

Risulta evidente, dai principi immediatamente suesposti, sia il fatto che i tre principi suddetti fanno sempre riferimento all'insieme di definizione dell'equazione data, sia il fatto che ciascuno di essi, nel rispetto delle condizioni da esso dettate, assicuri sempre la certezza che l'equazione ottenuta sia localmente equivalente alla equazione data all'origine; l'equazione ottenuta infatti potrà essere anche un'equazione più generale della data, ma essa, una volta decurtata delle sue soluzioni inaccettabili per la equazione data, soluzioni che di fatto neppure l'equazione ottenuta in S ha, risulterà comunque e sempre localmente equivalente in S alla equazione data .

È inoltre evidente che il procedimento risolutivo 2 di un'equazione, fondato sulla 2 e sui conseguenti, e perfettamente coordinati con 2, principi di equivalenza suddetti, sia un procedimento che, pur finalizzato alla ricerca delle soluzioni dell'equazione, badi anche, se non soprattutto, a dettare tutte le condizioni il cui rispetto garantisce e assicura che l'equazione ottenuta sarà comunque e sempre localmente equivalente in S alla data.

Stando così le cose, è quindi lecito ora chiedersi quale si ritiene possa essere la definizione di equivalenza migliore da adottare e proporre nei libri di testo, la 1 (concetto di equivalenza assoluta) o la 2 (concetto di equivalenza locale, più oggettivo e rigoroso del primo), consapevoli però del fatto che una tale scelta non si esaurisce in sé, in quanto essa implicitamente e congiuntamente comporta in sé anche la scelta sia dei corrispondenti principi di equivalenza sia infine del procedimento risolutivo (1 oppure 2) dell'equazione data, procedimento risolutivo che, come si dovrebbe ben sapere, è infine il fine ultimo per cui la definizione di equivalenza viene data.

Quindi se accettiamo l'idea di fondo, universalmente condivisa e valida per ogni procedimento finalizzato, che anche il procedimento risolutivo di un'equazione debba avere più un carattere tecnico che scientifico, allora arriviamo alla conclusione secondo cui non necessariamente siamo costretti a scegliere la 2 perché più oggettiva della 1; anzi probabilmente è proprio questo il motivo per cui oggi la 1 è ancora presente sui libri di testo nonostante incongruentemente i principi di equivalenza siano espressi, in forma corretta o meno, nella forma che corrisponde alla 2.

Ebbene sì, come il lettore avrà già capito, le mie preferenze vanno tutte a favore del procedimento risolutivo 1, ossia sia della definizione 1 sia dei principi di equivalenza che ad essa congruentemente conseguono.

Esprimo le motivazioni della mia preferenza per il procedimento 1 nei seguenti punti, ritenendo più importante proprio l'ultimo:

1) Il procedimento 2, proprio per il fatto di voler stabilire tutte le condizioni di vincolo locale che bisogna rispettare per essere sicuri di ottenere sempre un'equazione localmente equivalente alla data, finisce per non indicare chiaramente il percorso più breve, immediato ed efficace che consente, indipendentemente da vincoli di natura locale, di pervenire ad una equazione qualsiasi che sia più semplice da risolvere e che però contenga anche almeno tutte le soluzioni puramente matematiche dell'equazione data; non dice infatti espressamente che per pervenire a ciò basta moltiplicare ambo i membri dell'equazione per una espressione intera contenente incognite.

2) Il procedimento 2 non fa rilevare che di fatto esso non garantisce per niente l'equivalenza assoluta tra l'equazione data e l'equazione ottenuta; infatti l'equazione risolvente ottenuta che consegue alla sua applicazione, qualora si prescinda dal fatto che essa debba necessariamente essere definita in S, non sempre è assolutamente equivalente alla data; può capitare infatti che essa sia un'equazione più generale della data: vedi il caso in cui capita di ottenere soluzioni inaccettabili per la equazione data. Insomma il procedimento 2 non fa rilevare che comunque per risolvere un'equazione data è necessario che si pervenga o ad un'equazione assolutamente equivalente alla data o a un'equazione più generale della data.

3) Il procedimento 1 trova applicazione anche nel caso si voglia risolvere un'equazione irrazionale fatto questo non consentito al procedimento 2; in questo caso infatti le soluzioni inaccettabili per la irrazionale data potranno trovarsi anche dentro il suo insieme di definizione senza però ovviamente verificarla.

4) Il procedimento 2 utilizza il suo terzo principio che, a ben guardare, altro non è se non una fotocopia banalmente localizzata del secondo che di fatto garantisce sia l'equivalenza assoluta che l'equivalenza locale.

5) Il procedimento 2 impone che l'equazione ottenuta abbia lo stesso insieme di definizione dell'equazione data e, così facendo, tende a far intendere falsamente che *la totalità delle soluzioni* della equazione data o di un'equazione in generale, indipendentemente dalla loro accettabilità rispetto all'insieme di definizione dell'equazione stessa, possano dipendere solo dall'insieme di definizione di quella stessa equazione, insieme che invece, come già detto nel momento in cui definivamo l'equazione, è particolarmente locale e contestuale; laddove invece è e deve essere risaputo che *la totalità delle soluzioni* di un'equazione dipende solo dall'insieme di senso matematico più generale possibile dell'equazione stessa.

6) Il procedimento 2 non fa rilevare, nel suo terzo principio che utilizza, che in realtà esso fonda la sua essenza e validità su di un semplice prodotto (quello tra un'espressione contenente incognite con ciascuno dei due membri dell'equazione data) nel quale si annida solo la possibilità, non la certezza di ottenere un'equazione assolutamente equivalente alla data. Il procedimento 2 insomma trascura di rilevare il fatto che se noi abbiamo la possibilità di risolvere equazioni algebriche (irrazionali comprese), tale possibilità non è data solo dalla possibilità di ottenere un'equazione risolvente assolutamente equivalente alla data ma anche dalla possibilità di ottenere un'equazione più generale della data.

7) A giustificazione della scelta della definizione 1 che, nonostante sia meno oggettiva della 2, tuttavia coesiste allo stato possibile a fianco della 2, interviene inoltre il senso del termine *prassi* (già introdotto da Aristotele): la *prassi* infatti è un tipo di conoscenza che, diversamente da quella scientifica ma pur sempre alla luce di essa , riguarda le cose che "*possono essere diversamente da quello che sono"* e si impone nel caso dove si esigono delle scelte che riguardano per principio l'utile futuro che nel nostro caso coincide col conseguimento immediato delle soluzioni dell'equazione data e non con la conoscenza delle condizioni oggettive entro le quali essa risulterà certamente localmente equivalente all'equazione ottenuta; insomma la *prassi* è lì a ricordarci che *è necessario sempre distinguere il caso in cui è necessario essere oggettivi e rigorosi dal caso invece in cui bisogna essere pragmatici e che inoltre per fare ontologia (ossia per descrivere ciò che c'è) è necessario prima fare caso al caso e distinguere caso per caso* .

Niente impedisce agli autori di libri di testo scolastici di formulare principi di equivalenza sulla base della 2, a patto però che essi li esprimano correttamente e inoltre esplicitino manifestamente la loro intenzione, usando come definizione di equivalenza la 2 e non la 1, e a patto di rivolgersi ad alunni di liceo scientifico amanti si presume più della scienza che non della tecnica e comunque in grado di cogliere meglio pregi e difetti del procedimento 2; è però evidente che in tal caso si sarà trascurato di evidenziare il carattere pragmatico del procedimento risolutivo dell'equazione e comunque un aspetto caratteristico della matematica che spesso, secondo René Thom, all'inizio progredisce più per astuzia (*metis)* che per mezzo di applicazioni rigorosamente logiche e formali.

7. Conclusioni

Willard Van Orman Quine, in merito ai paradossi, ha scritto che: " più di una volta nella storia la scoperta di un paradosso ha rappresentato l'occasione per una rilevante ricostruzione dei fondamenti del pensiero", uno strumento, come altri hanno aggiunto, per migliorare una teoria o per consentire di formularne di nuove e più potenti. È forse giunto per la matematica e per tutti noi il momento di dover rivisitare i concetti sia di equivalenza sia di uguaglianza, equazione e di identità, concetti che per *l'ontologia applicata* sono sì entità astratte, ma al tempo stesso, *solo però se correttamente definiti, iscritti e tradizionalizzati*, anche "oggetti reali" che rientrano in quella "*teoria dell'oggetto*" che quella stessa ontologia ha formulato e oggi utilizza per svolgere il suo compito che è quello di cogliere e identificare i fili di collegamento con cui ciò che è astratto, come ad esempio proprio la matematica, si connette alla nostra realtà, che si badi non è solo fisica, nella quale, l'astratto appunto, si inserisce e si pone come realtà, come realtà integrante ed integrata in questa nostra stessa realtà, di cui ovviamente fa parte anche la realtà sociale, quella descritta da John Searle nella sua "Costruzione della realtà sociale" con tutti i suoi *termini Y- indipendenti*. Il lettore potrà trovare temi e problemi inerenti l'ontologia applicata, oltre che naturalmente sui vari testi specializzati, anche nella sezione *Scienza e filosofia* dell'edizione domenicale de *Il sole-24 ore*, dove sono ben esposti, coordinati e integrati dal prof. Maurizio Ferraris, direttore del CTAO (*Center for Theoretical and Applied Ontology*) dell'Università di Torino e autore di numerose pubblicazioni.

Bibliografia

1) Bruno de Finetti, *La logica dell'incerto*, Milano, Il Saggiatore, 1995;
2) John R. Searle, *The construction of Social Reality*, Free Press, New York 1995; traduzione italiana di Andrea Bosco, La costruzione della realtà sociale, Edizioni di Comunità, Milano 1996;
3) Ilya Prigogine e Isabelle Stangers, *La nuova alleanza. Metamorfosi della scienza*; edizioni Einaudi 1999; trad. Napolitani P. D.; collana Piccola Biblioteca Einaudi. Nuova serie, pag. 288.
4) Robert Nozick, *Invariances: The structure of the objective world*, Harvard University Press, Cambridge, Mass 2001, pag. 416;
5) Fabrizio Palombi, *La stella e l'intero. La ricerca di Gian-Carlo Rota tra matematica e fenomenologia*, Bollati Boringhieri, Torino 2003, pag. 162.

Franco Baldissarutti, *Dalla realtà all'astrazione*

Il Coefficiente Binomiale

di Flavio Cimolin

Supponete di avere davanti a voi 7 palline di colori diversi, da cui ne dovete scegliere 3 a vostro piacimento. In quanti modi diversi potete fare la scelta? Rifletteteci un attimo e vi accorgerete che la risposta non è facile: probabilmente avrete bisogno di qualche minuto di concentrazione e di un bel po' di carta prima di individuare tutte le 35 possibilità che si presentano. E per giunta la risposta non è $7\cdot 3$ e neppure $7+3$, ma un terribile $7\cdot 5$ che diventa difficile da giustificare a partire dai dati di partenza anche impiegando parecchia fantasia...!

Il problema appena enunciato è uno dei più classici di quella disciplina che viene chiamata *calcolo combinatorio*. Essa si occupa di 'contare' in quanti modi diversi si possano combinare fra loro, in modo ordinato oppure no, elementi di un qualche insieme prestabilito. Altri esempi di problemi di tipo combinatorio sono i seguenti: Quanti sono gli anagrammi diversi della parola 'MAMMA'? E della parola 'AMMANETTARE'? Quanti risultati diversi si possono ottenere dal lancio contemporaneo di 10 monete? Quante possibilità ci sono nell'estrarre ordinatamente 7 palline da un'urna che ne contiene in tutto 30, di cui 15 rosse, 10 verdi e 5 blu? E ancora: in quanti modi diversi si possono classificare i 50 concorrenti che partecipano ad una corsa podistica?

L'unico modo per affrontare problemi del genere con una certa serenità (vi assicuro che con problemi di una certa dimensione dimenticare qualche caso è estremamente facile) consiste nel cercare di ricondursi a una serie ben definita di problemi astratti, formalizzati appunto nel calcolo combinatorio. Una delle applicazioni più interessanti di questa disciplina è legata al *calcolo delle probabilità*, in cui come ben noto bisogna letteralmente "contare" i casi favorevoli e farne il rapporto con tutti quelli possibili, in modo da ottenere un'indicazione della probabilità che l'evento considerato ha di verificarsi oppure no. Vedremo più avanti un'applicazione di questo genere al gioco del Lotto, attorno al quale due volte alla settimana girano parecchi soldi.

Per saggiare le potenzialità del calcolo combinatorio ci occuperemo ora di descrivere una delle sue più basilari (ma non banali) entità: il *coefficiente binomiale*. Grazie a questo importante concetto matematico ci scopriremo immediatamente in grado non solo di risolvere il problema presentato in partenza, ma anche di affrontare un'ampia classe di problemi combinatori simili ad esso… Vedremo come con questo nuovo strumento calcolare la probabilità di fare un ambo al lotto diventa davvero un gioco da ragazzi. E poi… in un batter d'occhio si sveleranno davanti a noi tutta una serie di proprietà notevoli del coefficiente binomiale, a partire da considerazioni puramente intuitive che faremo sulla lista ordinata di tutti i coefficienti binomiali. Scopriremo in particolare come da essa si generi quella meravigliosa struttura che è il *Triangolo di Tartaglia*, fonte inesauribile di curiosità numeriche.

Per iniziare, però, non possiamo che partire dalla base di tutto quello che abbiamo anticipato: la definizione del concetto di *combinazione*.

Chiamiamo "combinazione di n elementi a gruppi di k" un sottoinsieme di k oggetti estratti da un insieme che ne contiene n. Consideriamo diversi due raggruppamenti solo se presentano almeno un elemento differente: non distinguiamo cioè gruppi che contengono gli stessi elementi ordinati in maniera differente. La versione formale del problema con cui abbiamo esordito diventa quindi la seguente: quante sono le possibili combinazioni di 7 palline a gruppi di 3 ciascuna?

Per avere almeno un'idea di come si ricavi la formula che fornisce il risultato, che vedremo a breve, cerchiamo prima di risolvere due problemi più semplici che ci consentiranno di dedurla in maniera assolutamente lineare. Essi coinvolgono altre due entità del calcolo combinatorio, le *permutazioni* e le *disposizioni*, che si distinguono dalle *combinazioni* perché in esse l'ordine con cui vengono elencati gli elementi del sottoinsieme scelto è importante, mentre nelle combinazioni no. Non lasciatevi spaventare: si tratta solo di nomi assegnati a concetti decisamente semplici, che servono a definire nel modo più generale possibile i ragionamenti di base del calcolo combinatorio: non c'è nascosto nulla di difficile. Chiamiamo "permutazioni di n elementi" tutti i modi possibili di elencare gli n elementi di un insieme. Il calcolo del numero di permutazioni di n oggetti è decisamente semplice: al primo posto ci può essere infatti uno qualsiasi degli n oggetti, al secondo uno qualsiasi degli (n-1) rimasti, al terzo uno degli (n-2) rimasti, e così via fino all'ultimo posto, dove ci sarà l'unico rimasto. Il totale risulterà quindi:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Un esempio renderà ancora più chiaro ciò che stiamo elencando. Supponiamo di avere un insieme di 4 oggetti indicati con le lettere {A, B, C, D}. Le possibili permutazioni risultano 4! = 24, e sono date dalle sequenze:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Anziché prendere tutti gli n oggetti disponibili, consideriamone adesso solo un sottoinsieme di k di essi (con $0 \leq k \leq n$), che chiameremo *disposizione*. Il calcolo del numero di "disposizioni di n oggetti a gruppi di k" segue la stessa linea di quello già visto per le permutazioni: occorrerà però troncare il prodotto dopo i primi k termini. Il totale risulterà di conseguenza:

$$D(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Tornando al nostro esempio, se fra gli n = 4 oggetti consideriamo le disposizioni di k = 2 di essi, ne otteniamo in totale 4!/2! = 12:

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

Come abbiamo detto, le disposizioni si differenziano dalle combinazioni solo per il fatto che nelle prime è importante l'ordine con cui vengono elencati gli elementi, mentre nelle seconde no. Possiamo facilmente elencare a questo punto le combinazioni di 4 elementi in gruppi di 2, che risultano essere solo più 6:

AB	AD	BD
AC	BC	CD

E' evidente che le disposizioni sono di più delle combinazioni, ma precisamente quante di più? Ragionando un momento sulle ultime due tabelle dell'esempio, è abbastanza semplice constatare che tutte le coppie di combinazioni appaiono esattamente replicate nelle disposizioni: se nell'elenco c'è XY, allora c'è anche YX. Questo significa che le combinazioni di 4 elementi a gruppi di 2 sono esattamente la metà delle relative disposizioni. Non è difficile generalizzare al caso più generale, osservando che nelle disposizioni ciascun gruppo di k elementi sarà ripetuto esattamente $k!$ volte, cioè il numero di possibili permutazioni dei k elementi che lo compongono. In definitiva, per ottenere il numero di combinazioni di n elementi a gruppi di k dovremo dividere il numero delle disposizioni per $k!$, ottenendo infine:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se avete qualche dubbio sul ragionamento fin qui esposto, il modo migliore per convincervi della validità della formula è senz'altro quello di fare qualche altra prova con valori differenti di n e k. Il risultato che abbiamo ottenuto è talmente importante da meritare un simbolo matematico tutto nuovo, che viene chiamato *coefficiente binomiale* (l'origine del nome sarà chiaro più avanti, quando vedremo una sua applicazione all'algebra):

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

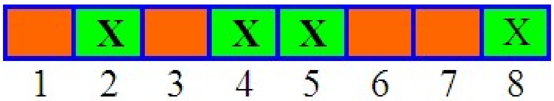
La parentesi tonda che contiene la n in alto e la k in basso si legge "n su k" ed è un simbolo alternativo alla scrittura $C(n,k)$, che per semplicità di notazione continueremo a usare più avanti nel testo. La formula non è nient'altro che una definizione, dunque non esprime in sé alcun risultato particolare. Tuttavia, vedremo a breve che da essa scaturiscono una valanga di stupefacenti proprietà che la rendono indubbiamente degna di rivestire un'importanza di primo piano.

Notiamo anzitutto come il coefficiente binomiale ci consenta una risoluzione quasi immediata di tanti problemi di calcolo delle probabilità apparentemente complicati. Ad esempio: qual è la probabilità di vincere al Lotto giocando un ambo su di una determinata ruota? Il numero di cinquine che possono uscire dall'estrazione è dato dalle combinazioni di 5 dei 90 numeri, cioè C(90,5). Le cinquine che ci faranno vincere sono tutte quelle che contengono l'ambo che abbiamo giocato più qualsiasi terna dei rimanenti 88 numeri, ovvero C(88,3). Per individuare la probabilità di ottenere l'ambo non ci resta a questo punto che da fare il rapporto fra i casi possibili e i casi favorevoli:

$$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{88!}{3!85!} \cdot \frac{5!85!}{90!} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} \approx 0.0024969$$

Il risultato si poteva in realtà ottenere in diversi altri modi, ma indubbiamente l'uso del coefficiente binomiale rende il calcolo chiaro, elegante e facilmente generalizzabile. Se siete giocatori, vi consiglio di andare a controllare qual è la vincita riconosciuta dal gestore nel caso di uscita dell'ambo e di trarre da soli le vostre conclusioni su quanto sia conveniente giocare…

È interessante, sempre rimanendo nell'ambito del calcolo combinatorio, constatare come lo stesso coefficiente binomiale consenta di risolvere anche il seguente problema, apparentemente diverso da quello che abbiamo finora visto. In quanti modi diversi si possono collocare k oggetti identici dentro $n \geq k$ contenitori, mettendone al più uno per contenitore? Che ci crediate o no, il risultato è nuovamente C(n,k). Per capire come mai questo problema sia equivalente al precedente, basta in realtà assegnare un numero identificativo a ciascuno dei contenitori (si veda la figura sotto). Inserire k oggetti equivale a questo punto a scegliere k contenitori fra n, e quindi... ecco riapparire le combinazioni, questa volta associate ai contenitori anziché agli oggetti!



Quanto abbiamo visto finora non sono altro che applicazioni del concetto di base da cui siamo partiti. Il coefficiente binomiale non sarebbe così interessante se ci si limitasse solo alle peculiarità che seguono direttamente dalla sua definizione. Mostreremo ora come le sue proprietà vadano in realtà ben oltre il calcolo combinatorio...

Per fissare le idee, scriviamo in modo ordinato *tutti i coefficienti binomiali*. Dato che il valore di k deve essere compreso fra 0 e n, ne avremo ogni volta uno in più: disponiamoli dunque a piramide, otterremo la struttura seguente:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{1}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

Fin qui nulla di speciale, si tratta di un modo come un altro di elencare tutte le possibili combinazioni. Il bello viene quando si sostituisce al posto dei coefficienti binomiali il loro valore calcolato con la formula. Il gruppo di numeri che ne deriva viene chiamato *Triangolo di Tartaglia* o anche *Triangolo di Pascal*:

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

Sicuramente avrete già notato almeno una delle peculiarità di questo triangolo: lungo le diagonali esterne ci sono tutti '1' e in ogni casella interna il numero è dato dalla somma dei due numeri immediatamente al di sopra di esso. L'eclettico matematico italiano del XVI secolo, Niccolò Fontana, detto "Tartaglia" per la sua balbuzie, fu il primo a costruire il Triangolo, ottenendolo appunto con la regola ricorsiva che prevede di sommare le coppie di numeri di una riga per ottenere quelli della riga sottostante. Soltanto un secolo dopo, il matematico (ma anche fisico e filosofo) francese Blaise Pascal scoprì l'intima relazione tra il Triangolo di Tartaglia con i coefficienti binomiali.

Dal punto di vista dei coefficienti binomiali la proprietà che abbiamo osservato giunge assolutamente inaspettata rispetto alla formula da cui siamo partiti. Sembra proprio che esista una relazione ricorsiva per i numeri all'interno del triangolo che consenta di calcolare C(n,k) a partire da sui valori più piccoli, ovvero per la precisione:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Per chi lo desidera, sarà un semplice esercizio mostrare algebricamente che questa relazione è valida, tuttavia è molto più illuminante riflettere su di essa in modo "combinatorio". Una simpatica interpretazione è la seguente: consideriamo uno qualsiasi degli oggetti fra gli n dell'insieme dato, e chiamiamolo X. Supponiamo ora di avere sul tavolo davanti a noi tutte le possibili combinazioni degli n oggetti a gruppi di k. Decidiamo di spostare sulla sinistra del tavolo tutte quelle che non contengono l'oggetto X, mentre sulla destra quelle in cui esso è presente. Quante sono le combinazioni che abbiamo messo a sinistra? Sono C(n-1,k), infatti sono tutte le combinazioni degli n-1 elementi diversi da X a gruppi di k. E quelle dalla parte destra? Dato che sappiamo già che l'elemento X è presente, il loro numero sarà dato dalle combinazioni dei rimanenti n-1 oggetti a gruppi di k-1, cioè C(n-1,k-1). Ecco che la scomposizione, che prima ci poteva apparire quantomeno strana, ora diventa perfettamente chiara e convincente!

E adesso non c'è che da sbizzarrirsi con le proprietà del triangolo di Tartaglia, che saltano letteralmente fuori come noccioline. Anzitutto è chiaro (e anche banale da mostrare) che il triangolo è simmetrico rispetto alla verticale, che sulle due diagonali esterne ci sono tutti '1', sulle seconde diagonali ci sono tutti i numeri naturali, poi sulle terze ci sono le somme dei numeri naturali (1, 1+2=3, 1+2+3=6, ...), ovvero i cosiddetti *numeri triangolari*, poi sulle quarte ci sono le somme delle somme, cioè i *numeri tetraedrici*, e così via... Se guardiamo ancora più "storto" il triangolo, ovvero secondo diagonali inclinate evidenziate nella figura dai colori, riusciamo addirittura a trovare i *numeri di Fibonacci* (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), ovvero quelli in cui ogni numero è la somma dei due precedenti. Per vederlo, proviamo a fare la somma dei numeri dello stesso colore lungo una diagonale "storta". Ad esempio, partendo dal numero 1 giallo nella quarta riga a destra e scendendo verso il basso in diagonale, troviamo sempre in giallo i numeri 1, 6, 5, 1. Sommandoli si ottiene 13, esattamente l'ottavo numero di Fibonacci! Ve lo sareste mai aspettato?

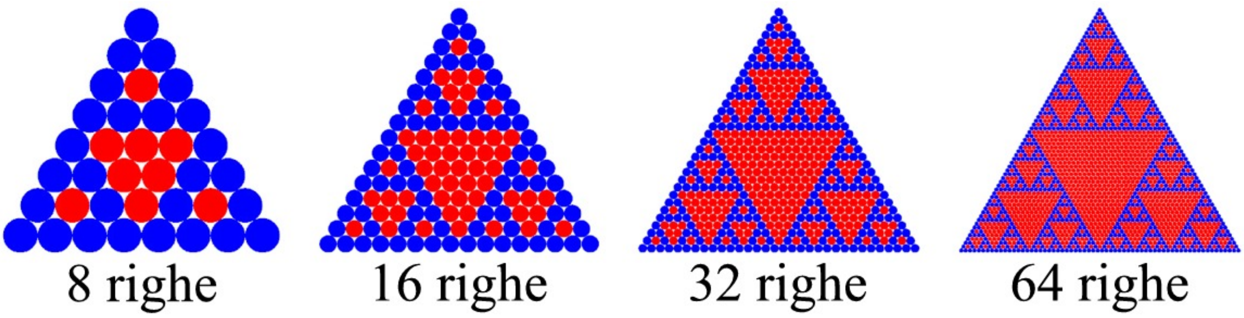
Adesso basta con le diagonali, leggiamo la tabella per linee orizzontali! Anzitutto, notiamo che nelle prime righe si leggono direttamente 11^0=1, 11^1=11, 11^2=121, 11^3=1331, 11^4=14641 (e si potrebbe anche andare avanti, se trattassimo opportunamente i riporti). Possiamo anche aggiungere degli zeri in mezzo e considerare che 1001^2=1002001, 1001^3=1003003001, e così via per altri casi: mettendo sempre più zeri in mezzo si vedranno comparire intercalati ad essi esattamente i numeri del Triangolo di Tartaglia delle varie righe!

Si può anche dare un'interpretazione algebrica ai numeri delle righe, osservando che essi sono i coefficienti del cosiddetto *binomio di Newton* (da cui il nome "coefficiente binomiale"): $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,... In generale, si ha l'importantissima formula:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Ora guardate quale altra bella sorpresa ci riserva questa interpretazione che sfrutta i polinomi. Se sostituiamo *a* e *b* con il numero 1, cosa otteniamo dalla formula? La somma dei coefficienti binomiali sulla riga *n*-esima della tabella (iniziando a contare da 0 sulla prima riga) vale esattamente 2^n. Provare per credere! La spiegazione intuitiva di questo fatto è che la somma di tutti i modi possibili di combinare fra loro *n* elementi corrisponde al numero di *partizioni* dell'insieme considerato. Le partizioni sono un altro concetto combinatorio che consiste appunto nell'unire assieme tutti i possibili raggruppamenti di oggetti di un insieme dato (comprendendo anche l'insieme con nessun oggetto e l'insieme originario). Si può dimostrare che il numero di partizioni possibili di *n* oggetti è dato proprio da 2^n (se per caso volete provare a dimostrarlo, il suggerimento è di provare a farlo per induzione, ovvero mostrando che vale per $n = 1$ e poi che, se vale per *n*, allora vale anche per $n+1$).

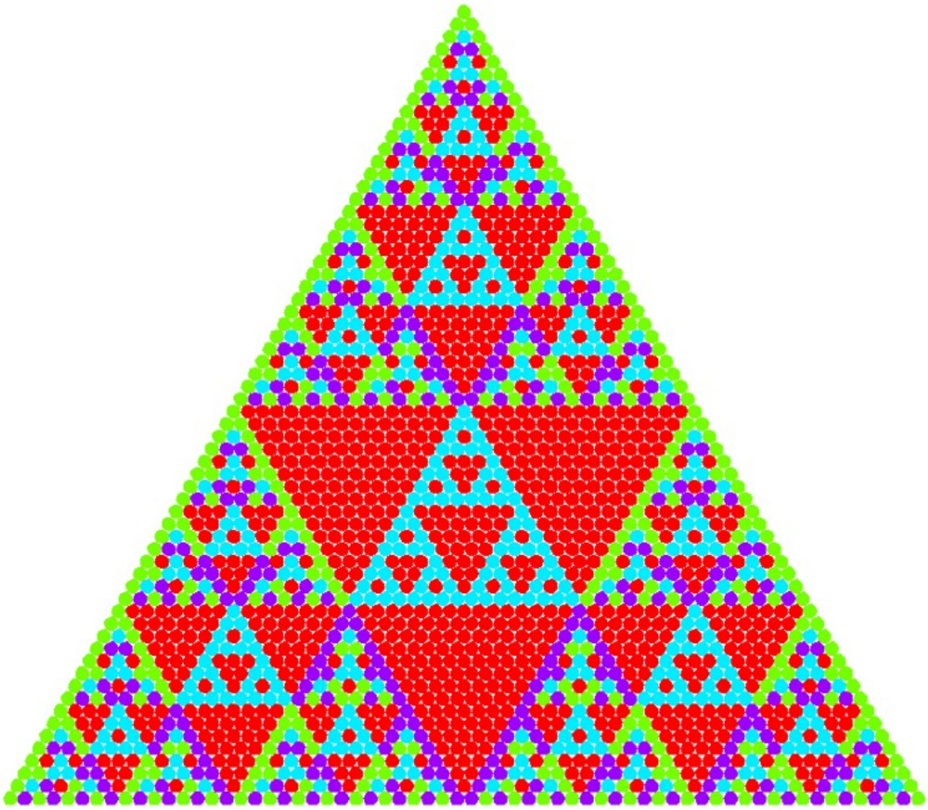
Per concludere in bellezza – mai come in questo caso l'espressione è stata più appropriata – vediamo un risvolto "artistico" del Triangolo, che lo collega all'affascinante mondo dei *frattali*. Dopo aver calcolato una buona quantità di righe (a farlo a mano sarebbe un po' lunghetto, perciò lo abbiamo fatto qui con l'aiuto di un software), coloriamo in rosso tutte le caselle in cui compaiono numeri pari e in blu quelle con i dispari. Ecco cosa risulta:



Come si vede, i numeri pari appaiono disposti su triangolini rovesciati di diverse dimensioni. Via via che vengono aggiunte righe si delinea una struttura davvero molto particolare, caratterizzata da una sorprendente *autosimilarità*. Se dimenticassimo per un momento che le immagini derivano dal Triangolo di Tartaglia, potrebbe quasi sembrare che esse costituiscano ognuna un "infittimento" della precedente, ottenuao aggiungendo dei triangolini rossi sempre più piccoli in corrispondenza dei "buchi" lasciati nella zona blu. Ma questo è esattamente il tipo di procedura che si usa per la generazione di figure frattali! Il frattale corrispondente a questo tipo di costruzione è noto come *Gemma di Sierpinski*. Ecco una inaspettata quanto spettacolare relazione fra il Triangolo di Tartaglia (e di conseguenza anche fra il coefficiente binomiale) e il mondo dei frattali!

Altre immagini ancora, sempre con struttura di tipo frattale, si possono ricavare se, anziché considerare i numeri pari e dispari, ovvero il resto della divisione per 2, si assegna un colore diverso ai vari resti della divisione per un qualsiasi numero naturale *N*. Ad esempio, i possibili resti della divisione per

4 sono 0, 1, 2, 3. Se ad essi associamo rispettivamente i colori rosso, verde, azzurro, viola e usiamo questi colori per rappresentare le prime 4^3=64 righe del triangolo di Tartaglia, otteniamo l'immagine seguente:

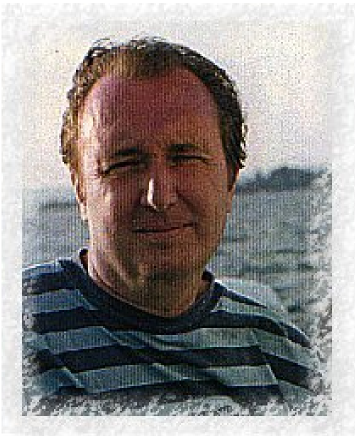


Le figure di queste pagine sono forse le parole migliori per descrivere l'incredibile eleganza che compare nelle strutture che derivano dal coefficiente binomiale. Il calcolo combinatorio, la teoria delle probabilità, le divertenti proprietà aritmetiche del Triangolo di Tartaglia, ma anche la potenza di espressione analitica del binomio di Newton e il raffinato legame con il mondo dei frattali. Chi l'avrebbe mai detto che quel concetto combinatorio da cui siamo partiti potesse racchiudere in sé tutte queste meraviglie matematiche?

Intervista a Michele Emmer

di Gabriella Zammillo

Arte, architettura e matematica: visibili armonie



Chissà a quanti, leggendo questo titolo, sarà tornato alla mente il film "Bianca" del 1983 in cui Nanni Moretti, indossati i panni di insegnante alle prese con la difficoltà di trattare la matematica in maniera meno noiosa del solito, si soffermava sulle possibili relazioni tra matematica e arte. Allo stesso modo, non nuovo alle iniziative organizzate dal *Seminario permanente "Matematica: scienza senza frontiere" dell'Università del Salento*, Michele Emmer (matematico/regista dell'Università "La sapienza" di Roma) ha catturato l'interesse in un'aula gremita del Dipartimento di Matematica dell'Ateneo salentino, affermando che non è vero che tutto è matematica e, che senza matematica non si può parlare di arte, ma neppure che la matematica è una parte separata della conoscenza umana riservata a pochi eletti. Emmer ha così dato inizio ad un viaggio fatto di parole, immagini, numeri, spazi, forme e segni lasciati da artisti, scrittori, registi e naturalmente matematici dimostrando quanto l'arte, l'architettura, il cinema e il teatro siano ricchi di contaminazioni matematiche... "visibili armonie" appunto.

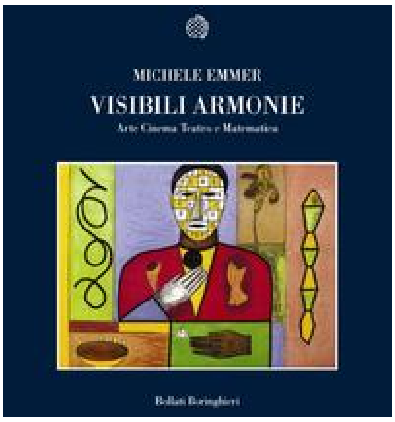
Zammillo:
Professore, si parla tanto di "diffusione della cultura scientifica", a prescindere dal fatto che la Cultura è unica, intesa come totalità dei saperi, e che quindi sarebbe più corretto parlare di "diffusione del sapere scientifico", quanto ritiene che ciò sia importante per lo sviluppo della società?

Emmer:
Le conoscenze matematiche di un paese sono uno dei parametri in base ai quali si stabilisce quanto quel paese sia più o meno evoluto. Qualche anno fa, l'American Mathematical Society ha aperto un'inchiesta sugli stipendi delle persone ed è stato scoperto che chi ha un phd in matematica, mediamente guadagna di più di chi non lo possiede perché è uno dei dottorati più richiesti nel mondo produttivo. Per questo è importante promuovere la conoscenza matematica a tutti i livelli.
Che sia parte o meno integrante della Cultura è un fatto oggettivo che in molte situazioni non viene considerato normale. Da questo punto di vista, spero che i festival servano a qualcosa senza ovviamente mettere in testa alla gente che le cose siano facili. Nulla è facile e nulla si ottiene senza fatica.
La matematica è certamente più faticosa delle altre discipline.

Zammillo:
Sin da bambino ha avuto la possibilità di frequentare i set cinematografici di suo padre, il famoso regista Luciano Emmer. Il ricordo di chi le è rimasto più scolpito nella mente e quanto quel mondo ha influenzato le sue scelte future?

Emmer:
Nella mia memoria è rimasto scolpito il ricordo di Ennio Flaiano, Dario Fo, Pasolini e Marina Vlady dalla indescrivibile bellezza. Ho sempre amato il cinema sebbene quel mondo non mi sia mai piaciuto molto, perché un mondo molto caotico. Al contrario, mi è sempre piaciuto poter controllare la mia attività e sin da bambino ho sempre voluto fare il matematico. Un mondo astratto, ma preciso e sicuro, senza comunque mai dimenticare i documentari famosi di mio padre su Giotto, Leonardo, Goya e Picasso, immagini alle quali inevitabilmente ho fatto riferimento nella mia professione di matematico.

Zammillo:
Matematico, regista, critico d'arte, dal 1997 organizza a Venezia il convegno internazionale "Matematica e cultura" che ha lo scopo di approfondire le connessioni tra matematica e altri aspetti del sapere. Ha vinto il premio Galileo nel 1998 ed ha realizzato 18 film sul tema matematica e arte. Ultima sua creatura il libro "Visibili armonie" (ed. Boringhieri, 2006) un racconto molto personale alla ricerca di alcuni "fili d'Arianna" per cercare di rendere visibile il legame tra matematica, arte e cultura. Un viaggio alla ricerca di segni e numeri lasciati da artisti e scienziati durante il quale lei afferma che "la matematica apre nuove strade alla creatività". Quale messaggio sente di voler lasciare ai numerosi ragazzi che oggi hanno provato l'emozione di incontrarla?



Emmer:
Non voglio dire che la matematica sia migliore di ogni altra cosa. Ognuno può trovare il proprio ambito entro cui esercitare la propria creatività e la matematica, al contrario di quanto si possa pensare, è uno di questi ambiti. Importante è fare quello in cui si crede, in cui si scopre di avere passione e si capisce di possedere delle capacità. A quel punto il lavoro diventa finanche divertimento.
Io ho avuto questa fortuna. Certo non è da tutti, però non tralascerei la matematica perché, se si prova un minimo di interesse verso questa disciplina e si è dotati di una sufficiente dose di fantasia, può diventare un campo di grande soddisfazione.

Brindisi, 11 maggio 2007

Sitografia
Il sito di Michele Emmer
http://www.mat.uniroma1.it/people/emmer/
Il sito del Convegno "Matematica e Cultura"
http://www.mat.uniroma1.it/~venice/2006/

Spicchi di cielo

di Domenico Licchelli
www.dlcosmos.eu

Il diagramma H-R: la straordinaria storia evolutiva delle stelle

Se osservassimo il cielo stellato durante tutta la nostra esistenza difficilmente noteremmo sostanziali modifiche. Al più può capitare che qualche cometa di passaggio decida di farci visita o che una stella *nova* faccia la sua apparizione in cielo. La forma delle costellazioni così come la conosciamo resterebbe però sostanzialmente immutata. Le stelle sembrano indifferenti al tempo che scorre, come destinate ad una sorta di vita eterna. In realtà si tratta di una illusione dovuta all'estrema brevità della vita media di un essere umano se confrontata con quella tipica delle stelle.

Di primo acchito potrebbe sembrare perciò impossibile dedurre alcunché sulla loro esistenza. In realtà, se noi fossimo dei visitatori alieni e volessimo capire il ciclo evolutivo degli esseri umani, più che seguire le vicissitudini di un singolo essere, probabilmente studieremmo contemporaneamente un'intera popolazione. Ci accorgeremmo quasi immediatamente che sarebbe composta da neonati come da ultranovantenni, passando per tutte le fasi intermedie. Analogamente, un astrofisico, per capire come le stelle nascono, si evolvono e muoiono, studia la più grande e variegata popolazione stellare possibile, in maniera tale da considerare un campione statisticamente significativo. Naturalmente deve conoscere alcune informazioni di base che consentano di stabilire dei criteri di classificazione e di interpretazione dei dati che via via raccoglie. Ai giorni nostri il quadro è delineato molto bene nelle sue caratteristiche fondamentali. In alcuni casi il livello di dettaglio raggiunto dai più recenti modelli è tale da poter seguire processi piuttosto complessi fin nei minimi particolari. Agli inizi del 1900 la situazione era invece completamente differente. La grande maggioranza delle domande sulla fonte di energia delle stelle, sulla loro evoluzione, sulle caratteristiche intrinseche, rimaneva senza risposta. I primi lavori di spettroscopia indicavano che probabilmente dovevano esistere delle relazioni tra i vari parametri stellari, ma non era affatto chiaro dove trovarle. Già da alcuni anni, pionieri come Kirkhoff e Fraunhofer avevano dedotto che negli spettri delle stelle erano presenti molti degli elementi terrestri. Secchi e Pickering avevano correlato il colore delle stelle con i loro tipi spettrali.

Tuttavia fu solo grazie all'opera di alcune menti straordinarie e alla fruttuosa sinergia tra fisici, astronomi, chimici e matematici, che si sarebbe intrapresa la strada giusta, che avrebbe radicalmente cambiato il modo di intendere l'Universo. In particolare A. Einstein nell'anno mirabile 1905, pubblicò alcuni lavori che sarebbero diventati dei monumenti all'ingegno umano. La sua dimostrazione dell'effetto fotoelettrico confermò l'ipotesi dei quanti formulata da Planck anni prima, per spiegare lo spettro di emissione del corpo nero. La Teoria della Relatività, ed in particolare l'equivalenza tra massa ed energia, svelò il mistero delle fonti di energia delle stelle. Inoltre, la constatazione che lo spettro delle stelle poteva in buona approssimazione essere confrontabile proprio con quello di un corpo nero ad una determinata temperatura, consentì di ricavare in questo modo anche le temperature fotosferiche delle stelle. (Fig. 1)

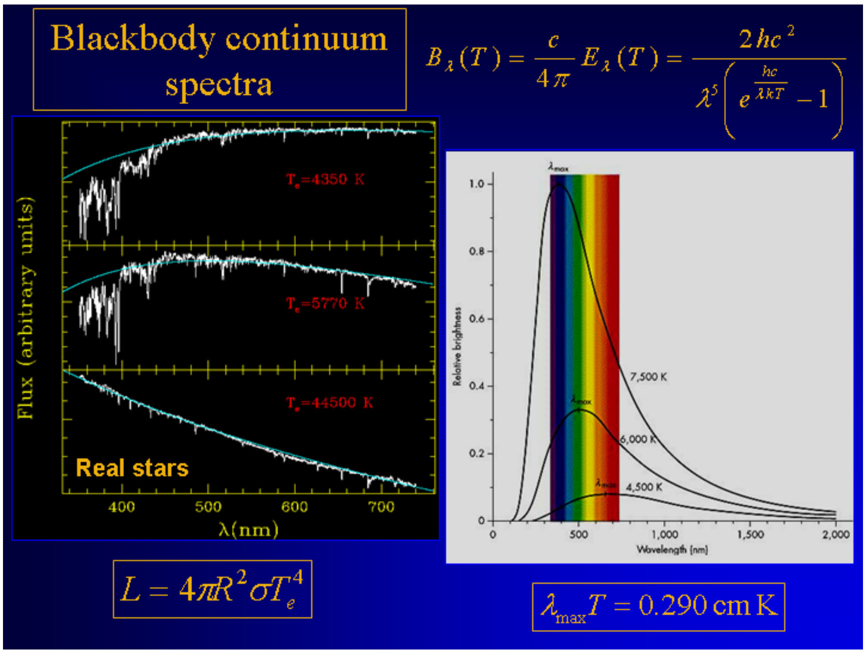


Fig. 1 Le equazioni del corpo nero e i modelli stellari

Nello stesso anno, un articolo pubblicato sulla rivista “Zeitschrift für Wissenschaftliche Photographie” da parte di Ejnar Hertzsprung, un giovane ingegnere chimico che si era da poco dedicato all’Astronomia, gettò le basi di quello che sarebbe diventato famoso come il diagramma di Hertzsprung-Russell o diagramma H-R (Fig.2).

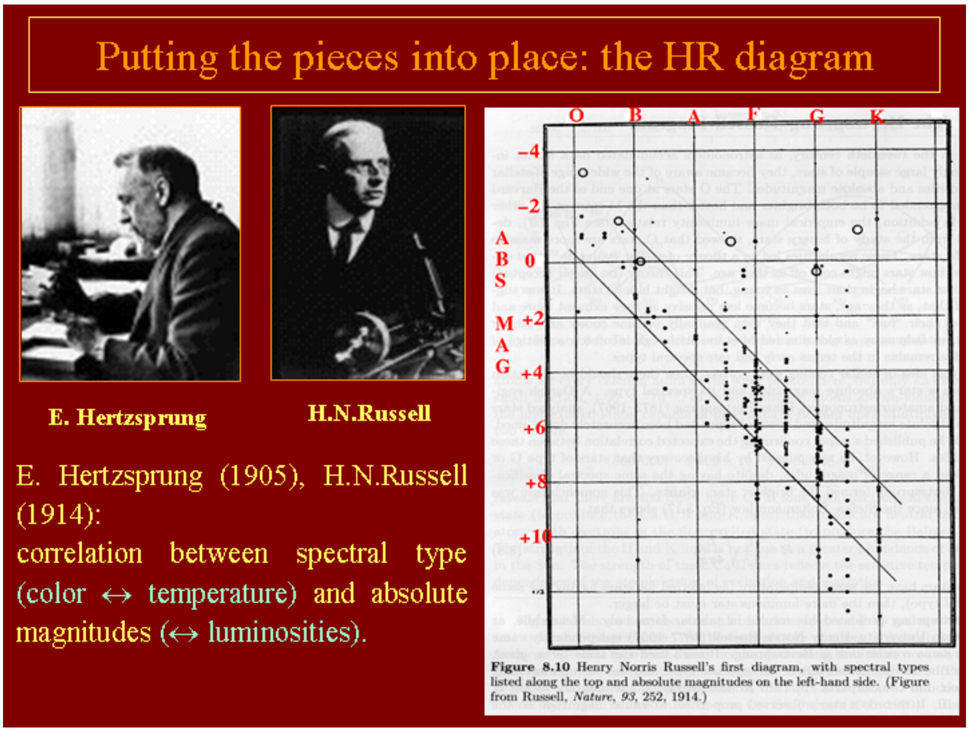


Fig.2 Il primo Diagramma H-R

Quando gli scienziati hanno a che fare con una grande mole di dati, cercano sempre di trovare una qualche correlazione statistica tra le grandezze osservate, per poi riportare tale correlazione su un grafico. Se la relazione trovata è rappresentativa di una classe di fenomeni, allora il grafico così ottenuto si trasforma da semplice supporto visivo, in potente strumento di indagini e di successive elaborazioni. Riportando nel piano cartesiano che aveva sull'asse delle ascisse i tipi spettrali e le magnitudini assolute, su quello delle ordinate, i due autori si accorsero che le stelle non si disponevano a caso, ma si raggruppavano in certe regioni preferenziali, lasciando praticamente vuote ampie zone del diagramma. In particolare, la stragrande maggioranza dei punti tendeva ad accumularsi lungo una striscia diagonale che correva dall'alto a sinistra, in corrispondenza del tipo spettrale O, fino in basso a destra dove si collocava il tipo spettrale M della classificazione di Harvard (sequenza principale o ZAMS, Zero Age Main Sequenze). Un altro raggruppamento meno consistente andava dal tipo spettrale G a quello M, attorno alla magnitudine assoluta 0, (ramo delle giganti). Uno sparuto gruppetto in basso a sinistra (nane bianche) completava il quadro. La scelta di questi nomi derivava dalla constatazione che, pur essendo dello stesso tipo spettrale le giganti erano decisamente più luminose delle corrispondenti stelle della sequenza principale (nane). Questo fatto poteva essere spiegato solo assumendo che le loro dimensioni fossero considerevolmente maggiori, essendo la potenza luminosa irradiata per unità di superficie approssimativamente identica essendo alla stessa temperatura. Al fine di evidenziare anche queste differenze, sono state poi aggiunte ulteriori suddivisioni che tengono conto della differente luminosità (Fig. 3).

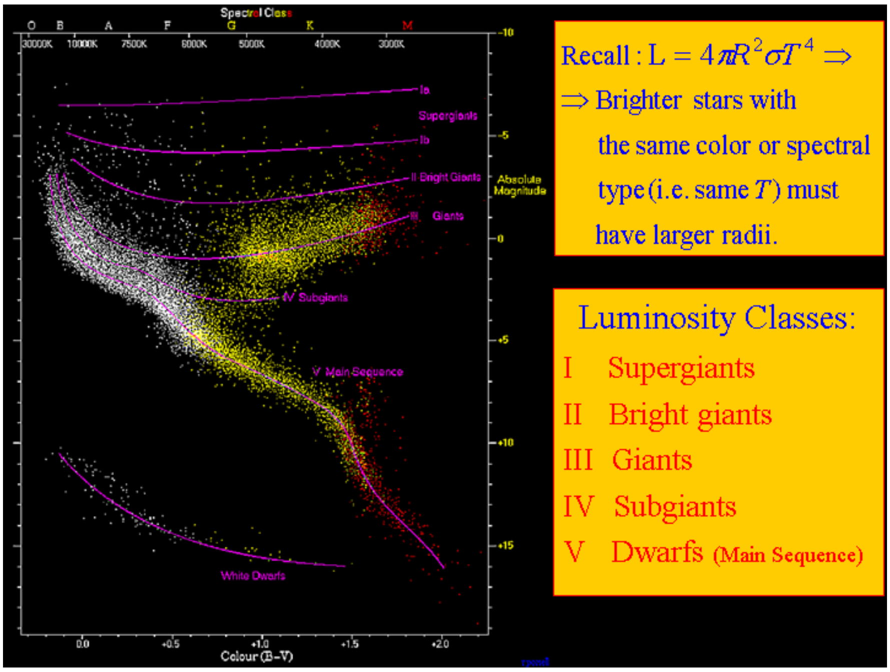


Fig. 3 Il diagramma H-R e le classi di luminosità

La diversa collocazione nel diagramma in realtà riflette soprattutto la diversa fase evolutiva in cui si trovano gli astri rappresentati. Le stelle si formano generalmente all'interno delle grandi nubi molecolari ricche di gas e polveri disseminate sul piano galattico. Molte delle nebulose più belle del cielo sono delle immense *nursery*, dove centinaia e spesso migliaia di stelle nascono ed eccitano con la loro prima luce, i gas circostanti producendo quella straordinaria fantasmagoria di colori e forme ben visibile nella Grande Nebulosa di Orione o nell'altrettanto famosa nebulosa Laguna (Fig. 4).

Fig. 4 Le enormi volute di gas e polvere della Nebulosa Laguna (M8)

Quando la stella raggiunge, nel suo nucleo, una temperatura abbastanza alta da innescare le reazioni di fusione nucleare, essa si colloca sulla sequenza principale; la sua fonte primaria di energia per miliardi di anni, se di piccola massa, solo per qualche milione se dei primi tipi spettrali, sarà la fusione dell'idrogeno e la produzione di elio. Questo è sicuramente lo stadio più lungo e più stabile della vita di una stella (il nostro Sole per esempio ha già trascorso 5 miliardi di anni in questa fase e ne trascorrerà circa altrettanti). Quando il nucleo della stella ha trasformato in elio tutto il suo idrogeno, la fusione termonucleare si arresta, e cessa la produzione di energia. L'involucro soprastante, non più sostenuto dall'energia prodotta dall'interno, tende a collassare, e così facendo, a produrre nuova energia, che sviluppa calore nello strato di idrogeno non ancora bruciato che è rimasto intorno al nucleo di elio, e ne innalza la temperatura fino a reinnescare le reazioni termonucleari. Così si viene a produrre energia in un guscio esterno che circonda il nucleo di elio. Quest'energia tende a far dilatare gli strati superiori, che espandendosi si raffreddano; la stella si gonfia fino ad assumere dimensioni enormi rispetto a quelle che aveva in precedenza, dell'ordine dell'orbita di Venere per una stella di tipo solare. In cielo appare quindi una *gigante rossa* come Aldebaran o Betelgeuse, con un minuscolo nucleo di elio estremamente denso, intorno al quale brucia un sottile guscio di idrogeno, ed un involucro estremamente rarefatto ma immenso, relativamente freddo in confronto alla temperatura superficiale che la stella aveva prima di espandersi, che prende il posto della tranquilla e molto meno luminosa stellina progenitrice.

Ad un certo punto anche la riserva di elio inizia a scarseggiare e la stella ricomincia a contrarsi. L'elio può trasformarsi, attraverso altri processi di fusione termonucleare, in carbonio e ossigeno, elementi di maggior peso atomico. Ma le reazioni termonucleari capaci di questa nuova trasformazione richiedono temperature dell'ordine dei 100 milioni di gradi, che possono essere raggiunte in fase di contrazione solo se la stella ha ancora una massa sufficientemente grande. In caso contrario attraverso una serie di convulse pulsazioni la stella espelle i suoi strati esterni, che daranno origine ad una nuova nebulosa planetaria, come la famosa M27 Dumbell, (Fig. 5) mentre il nucleo della stella messo a nudo, collassa in una forma di materia estremamente densa che non è più in grado di produrre energia e che è destinata a spegnersi lentamente, come una sorta di tizzone cosmico.

Fig. 5 La nebulosa planetaria Dumbell (M27)

Questo nucleo residuo prende il nome di nana bianca: Sirio B è l'esempio più noto, ed è ben visibile al centro di molte nebulose planetarie, come la famosa nebulosa anulare della Lira (Fig. 6). Se invece la stella ha una massa superiore a 3 masse solari, la parte più interna raggiunge la temperatura necessaria a bruciare l'elio e lo trasforma in carbonio ed ossigeno. Se la massa è inferiore alle 4-5 masse solari, il nucleo di carbonio e ossigeno degenere non raggiunge mai la temperatura necessaria per innescare nuove reazioni termonucleari. Per masse maggiori, ma al di sotto delle 9 masse solari, la temperatura interna può raggiungere il miliardo di gradi, cosicché nel nucleo si verifica un'accensione del carbonio e dell'ossigeno rapida e violenta, forse abbastanza da poter distruggere la stella.

Fig. 6 La nebulosa Anulare della Lira (M57) con al centro la nana bianca progenitrice

Infine, se la stella raggiunge le 9 masse solari, la temperatura d'innesco viene raggiunta all'interno del nucleo prima che il gas che lo compone degeneri, e in tal caso si ha la produzione non violenta, in stato di equilibrio, di elementi via via più pesanti quali neon, sodio, magnesio, silicio e zolfo. A temperature ancora superiori anche questi elementi cominciano a subire complesse trasformazioni termonucleari che li conducono in brevissimo tempo a fondersi in ferro. A questo punto siamo alla fine della storia. Il ferro infatti non può fondere in elementi più pesanti in quanto quest'ultima reazione è fortemente esoenergetica. Non esistendo più una fonte di energia interna in grado di sostenere il peso degli strati superiori, la stella va incontro ad un catastrofico collasso che si conclude con una immane deflagrazione cosmica, la cosiddetta esplosione di supernova che disperde nello spazio la stragrande maggioranza della massa della stella, arricchita di quasi tutti gli elementi chimici, lasciando al centro una stella di neutroni o un buco nero, a seconda della massa residua del nucleo prima dell'esplosione.

Quella che sembra la fine del percorso è in realtà solo l'inizio di un nuovo ciclo. I gas e le polveri disseminate nello spazio come il resto di supernova del Cigno (fig. 7) finiranno col contrarsi nuovamente e dare origine ad una nuova stella con la sua corte di pianeti, satelliti, rocce e almeno nel nostro caso, forme di vita straordinariamente varie, compresi noialtri esseri pensanti, vero e proprio sottoprodotto dell'evoluzione stellare.

Fig.7 Una parte della nebulosa Velo, residuo di supernova nella costellazione del Cigno (NGC6992)

Sitografia

http://zebu.uoregon.edu/~soper/Stars/hrdiagram.html
http://abyss.uoregon.edu/~js/ast122/lectures/lec11.html
http://www.astro.uiuc.edu/~kaler/sow/hrd.html

Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo

Adriana Sartore Dan, *I disegni periodici in geometria. Applicazioni didattiche del metodo di Escher*, Erickson, 2002, pp. 112, euro 21,90.

Questo libro si basa sull'esperienza dell'autrice che ha progettato e realizzato diverse attività didattiche sulla tassellazione di superfici piane e sui disegni periodici. Gli insegnanti della scuola primaria, ma non solo, possono trovare validi spunti per progettare un percorso didattico personalizzato che utilizzi gli stessi strumenti di base.

I motivi geometrici ripetuti hanno avuto da sempre per l'umanità un fascino particolare: forme sempre uguali e sempre diverse, forme che intersecandosi generano nuove forme: dalle pareti e pavimenti decorati tipici dell'arte islamica alle opere di Escher, morto qualche decennio fa.

"Sappiamo che gli apprendimenti migliori sono quelli ottenuti attraverso il gioco – sostiene l'autrice – le attività manipolatorie, la ricerca, la scoperta, l'intuizione e tutto ciò che stimola la curiosità e il desiderio di trovare soluzioni". Giocando a calcio, i bambini usano correttamente termini che sono comuni a questa disciplina sportiva e alla geometria: calcio d'angolo, area, rimessa laterale, … ma si disorientano quando gli stessi termini vengono usati nell'insegnamento della geometria. Alcuni semplici giochi, come il Tangram e gli Origami, hanno dimostrato di possedere una grande valenza didattica per l'esplorazione del piano geometrico. A questi strumenti l'autrice aggiunge il ricoprimento di superfici con tassellature e disegni periodici alla Escher. Gli alunni rispondono con entusiasmo: si scambiano impressioni, pongono domande appropriate, imparano il linguaggio della geometria, acquisiscono capacità di orientamento, di riconoscimento delle forme, imparano a organizzare le conoscenze geometriche man mano che vengono intuite.

Ordine e struttura sono i concetti chiave intorno ai quali ruotano queste esperienze, e sono concetti chiave di diverse discipline, non solo della matematica. Anche dell'informatica, per esempio, in quanto permettono di arrivare a nozioni come messaggio, codice, istruzione, ordinamento, iterazione, ricorsività, algoritmo. In generale, le attività presentate permettono di raggiungere obiettivi che coinvolgono anche l'area linguistica e l'educazione all'immagine.

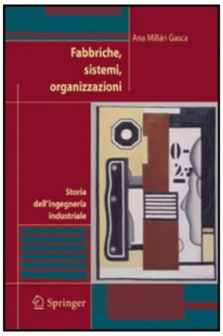
Secondo l'esperienza dell'autrice le abilità che si acquisiscono con queste esperienze di tassellazione del piano comportano anche un miglioramento nella lettura e nella scrittura, in quanto le due attività (tassellazione e lettura) hanno in comune la capacità di distinguere le forme, di seguire ritmi e sequenze, di procedere nel verso 'logico' della lettura e della scrittura.
Inizialmente, all'alunno viene richiesto di ricoprire un foglio a quadretti con forme e colori che si ripetono seguendo semplici regole e semplici spostamenti. In pratica, l'insegnante disegna alla lavagna una figura piana semplice (quadrato, rettangolo, triangolo, parallelogramma, …), gli alunni vengono invitati a osservarla con attenzione, a riconoscerne alcune proprietà, a ricopiarla su un foglio a quadretti e ad accostare più volte la stessa figura in modo da ricoprire tutta la superficie del foglio. Gli alunni troveranno diversi modi di accostare le figure, tutti ugualmente validi; devono però eseguire i disegni con una certa preci-

sione, cosa che inizialmente contrasta con la spontaneità grafico-espressiva. Viene poi chiesto di colorare l'interno delle forme con la semplice condizione che due figure adiacenti non abbiano lo stesso colore. L'esercizio seguente sarà quello di utilizzare il minor numero di colori diversi, evitando sempre che due figure contigue siano colorate con lo stesso colore. Man mano gli alunni cominciano ad apprendere un lessico appropriato e alcuni concetti geometrici. Come attività finale, devono inventare un modulo che si ripete secondo una regola ben precisa: inizialmente con spostamenti orizzontali e verticali, poi con rotazioni, simmetrie e traslazioni.

Il libro è corredato di numerose tavole a colori che possono costituire un valido aiuto per l'insegnante in quanto forniscono gli strumenti di base per iniziare le attività.

Antonio Bernardo

***



Ana Millan Gasca, *Fabbriche, sistemi, organizzazioni. Storia dell'ingegneria industriale*, Springer, 2006, pp. 294, euro 29,95.

L'ingegnere è una figura professionale che è alla base del sistema industriale moderno, una figura che è andata di pari passo con il processo di industrializzazione dei paesi occidentali. L'ingegneria moderna nasce nel XIX secolo, nel 1818 a Londra viene fondata la prima associazione di ingegneri civili, una figura professionale che invece di entrare nei corpi statali e militari prestava la propria consulenza professionale presso aziende private, principalmente nel campo delle macchine. Nel 1829 a Parigi nasceva la Scuola centrale delle arti e delle manifatture con l'obiettivo di formare una figura professionale specializzata nella realizzazione di impianti industriali. Il progresso tecnologico comportava anche una progressiva specializzazione di questa figura professionale, a fianco all'ingegnere meccanico nascevano le figure dell'ingegnere elettrotecnico e dell'ingegnere chimico.

L'ingegnere specializzato nei processi di gestione aziendale nasce tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento. Si tratta di una figura professionale fortemente specializzata non tanto nelle problematiche tecnologiche delle macchine, dell'elettronica e dei processi chimici ma nei problemi 'immateriali' legati ai processi di lavorazione, alla struttura degli impianti, all'organizzazione delle mansioni: la fabbrica non più vista come un'aggregazione di macchine ma come un sistema integrato di macchine e uomini. L'ingegneria industriale vera e propria, in quanto tecnologia della gestione aziendale, attività trasversale alle tecnologie di produzione, che ha come obiettivo quello di trattare da un punto di vista teorico i problemi di pianificazione, organizzazione e coordinamento della produzione industriale nasce attorno al 1900 ed ha alla base gli strumenti matematici della ricerca operativa, della programmazione lineare, dell'ottimizzazione combinatoria.

Il libro di Ana Millán Gasca è una dettagliata storia dell'ingegneria, dalle origini ai nostri giorni. Un testo utile non solo per la ricerca storica ma anche per avere una visione critica di una delle figure professionali che ha un ruolo centrale nello sviluppo tecnologico attuale. L'autrice presenta anche diverse fonti primarie che permettono di leggere alcune problematiche direttamente dagli autori che hanno segnato cambiamenti importanti. Tra i 17 brani originali presentati segnalo la lettura "La fabbrica degli spilli" tratta dal libro di Adam Smith "Indagine sulla natura e le cause della ricchezza delle nazioni" (1776). Si tratta di un passaggio importante per la comprensione dei meccanismi della organizzazione industriale. Come osserva Smith, un uomo da solo riuscirebbe a stenti a produrre uno spillo al giorno, invece esistono piccole 'fabbriche' di dieci persone che riescono a produrre dodici libbre di spilli al giorno, cioè circa 48.000 spilli. La fabbrica di spilli è, come si direbbe oggi, un 'caso studio' importante per la comprensione della organizzazione del lavoro, poiché un piccolo gruppo di persone situate quasi sempre in un unico ambiente era in grado di completare il ciclo di produzione degli spilli, pertanto lo studioso poteva cogliere tutte le fasi del processo di produzione.

Antonio Bernardo

***

Stefan Hildebrandt & Antony Tromba, *Principi di minimo. Forme ottimali in natura,* Edizioni della Normale, 2007, pp. 300, € 35,00.

Qual è la forma dei flagellati? Che forma hanno i pianeti? E gli scheletri delle diatomee, e le bolle di sapone? Pare che la natura scelga sempre la forma che più le conviene, la forma *ottimale*.

Questo libro è la traduzione di *The Parsimonius Universe (Springer, New York 1996)* e di *Kugel, Kreis und Seifenblasen (Birkhauser, Basilea, 1996),* che a loro volta sono versioni rivedute ed ampliate del trattato originale di W. H. Freeman: *Mathematics and Optimal Form, 1984*. Gli autori dipingono un quadro abbastanza completo delle forme ottimali che la natura sceglie, prendendo anzitutto in considerazione una serie di esempi di forme che si trovano più o meno comunemente.

Tutto si muove e si dispone secondo dei principi di minimo o massimo di carattere generale: è questo il principio di Maupertius, reinterpretato successivamente da Eulero, fondatore del *Calcolo delle variazioni*.

Tale principio risale alla metà del 1700 ma lo studio dei problemi di minimo e di massimo ha le sue origini nei greci, in Pitagora, Archimede, e molti altri: problemi spesso di natura puramente geometrica (problema di Didone) o di natura meccanica (Archimede); arriva ad Eulero e ai fratelli Bernoulli con la teoria delle connessioni minime è finalmente al primo accenno al Calcolo delle variazioni, seguito da una teoria energetica di carattere generale che mette dei fondamenti di tipo variazionale alla meccanica newtoniana.

Ma in tutto ciò c'è anche spazio per il divertimento: la matematica delle bolle di sapone, un divertimento per bambini e per matematici. Dal problema di Plateau, agli esperimenti fisici di Courant e Charles, alla teoria delle superfici minime, branca del Calcolo delle variazioni molto feconda ed ancora oggi molto studiata, vista la sua grande complessità matematica. Una serie molto ampia di immagini accompagna il lungo capitolo sulle superfici minime.

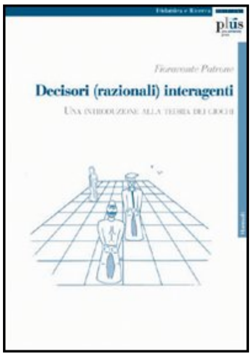
Finalmente si giunge ad un'applicazione molto importante del Calcolo delle variazioni che è l'impostazione variazionale dei principi di base della meccanica newtoniana, ovvero i fondamenti della meccanica razionale.

Gli autori sono quindi partiti da semplici osservazioni sulle forme preferite dalla natura, per poi estrapolare quali principi di economia ci siano sotto tali scelte, passando attraverso teorie che prendono spunto dalla geometria, dalla fisica e anche dal divertimento.

Il libro è scritto con chiarezza, molto ricco di esempi e ampiamente illustrato; a tratti è molto tecnico, di comprensione abbastanza impegnativa, ma complessivamente adatto ad una lettura non necessariamente specialistica.

Luca Lussardi

***



Fioravante Patrone, *Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi*, Editore PLUS, 2006, pp. 260, € 20,00.

Coloro che hanno letto i numeri precedenti di "Matematicamente Magazine" ricorderanno di sicuro il nome dell'autore di questo libro. I più attenti, inoltre, avranno notato che gli articoli scritti finora da Fioravante Patrone per la nostra rivista rientrano nell'ambito della Teoria dei Giochi, disciplina che ha avuto negli ultimi decenni un successo elevato e sempre crescente. La presenza di articoli dello stesso autore inerenti tale materia non è affatto casuale. Difatti Patrone è professore ordinario di Teoria dei Giochi presso l'Università di Genova e si occupa da anni anche di attività di ricerca nel medesimo ambito.

Spiegare in poche parole cosa sia la Teoria dei Giochi è alquanto arduo. Essa non è soltanto una branca della matematica, non è una disciplina facilmente incasellabile… E' un potente strumento per capire e valutare tanti comportamenti che possiamo osservare attorno a noi quotidianamente o che comunque avvengono ogniqualvolta c'è interazione tra individui (non necessariamente esseri umani). Per spiegazioni ulteriori sull'argomento in generale o per vederne qualche esempio di applicazione, si può far riferimento all'articolo dello stesso Patrone, apparso sul primo numero di Matematicamente Magazine, dal titolo *Matematica d'oggi: la teoria dei giochi*, titolo ampiamente giustificato dall'enorme diffusione della disciplina in tempi recenti. Ed è proprio a fronte di questo interesse diffuso che è nata l'idea della realizzazione di *Decisori (razionali) interagenti*, che da ora in avanti chiameremo affettuosamente (e per ovvi motivi di brevità!) *DRI*.

Lo scopo del libro è quello di riuscire ad introdurre il lettore nel contesto della Teoria dei Giochi, esaminandone molti dei suoi aspetti salienti. Attenzione però, perché l'opera di Patrone non è una "chiacchierata" sul contesto storico in cui è sorta e si è sviluppata la Teoria dei Giochi e sui principali personaggi che ad essa hanno dato un forte impulso. Effettivamente, da un normale libro divulgativo ci si dovrebbe aspettare una cosa di quel genere. Patrone potrebbe invece venir accusato di essere entrato subito nel vivo della materia, tralasciando quasi del tutto ogni discorso preliminare. Ma molti, quelli a cui piace andare subito al sodo, condivideranno questa scelta.

Dopo una fugace introduzione-prefazione, in cui si fa una carrellata del contenuto dei vari capitoli, *DRI* dà subito il via alla descrizione del modello classico della Teoria dei Giochi. A partire dalle prime pagine, il lettore capirà la differenza tra *gioco* e *game-form*, conoscerà la *forma strategica* e la *forma estesa* di un gioco e avrà chiaro il concetto di *decisore razionale e intelligente*. Ben presto, viene presentato il cosiddetto *equilibrio di Nash*, pietra miliare della Teoria dei Giochi classica, tramite una lunga serie di esempi, che ne mettono in risalto il ruolo chiave da esso svolto, ma anche le ambiguità e gli effetti collaterali. Una volta forniti i concetti basilari, si inizia a fare sul serio. Si discute dei *giochi ripetuti*, in cui gli individui si trovano ad affrontare la stessa situazione un numero molteplice (e a volte non ben definito) di volte, e dei *giochi a informazione incompleta*, dove le caratteristiche del gioco e degli altri individui che vi partecipano non sono note con chiarezza al giocatore. Già tutto quanto accennato finora basterebbe per rendere *DRI* un libro di interesse notevole, poiché costituirebbe una ricca sintesi degli aspetti principali del modello classico della Teoria dei Giochi. Ma Patrone è andato oltre e ha deciso di non fermarsi entro i confini del contesto classico, bensì ha scelto di presentare anche situazioni diverse e innovative della materia. A tal proposito, è emblematica la presenza delle parentesi che racchiudono il termine *razionale* nel titolo del libro. Perché limitarsi al caso particolare di *decisori razionali*? Che succede se supponiamo che i giocatori non siano poi del tutto *razionali*? Anche a questo quesito è fornita una interessante risposta. Infine, non si può dimenticare il corposo discorso sui *giochi cooperativi*, nei quali i giocatori possono cooperare e stringere accordi vincolanti.

Le problematiche trattate nel corso del libro sono molteplici, alcune di esse richiedono un minimo di sforzo per essere comprese. Niente paura però: l'autore si è prodigato in una vasta gamma di esempi esplicativi, sempre corredati da schemi e grafici molto chiari ed intuitivi.

DRI si pone al limite tra il divulgativo e il tecnico. Patrone ha sì cercato di semplificare le cose, per renderle accessibili a un numero di persone quanto più elevato possibile, ma senza commettere l'errore, piuttosto diffuso nella letteratura moderna di divulgazione scientifica, di sfociare nell'approssimativo mancando di rigore. Egli presenta sempre in modo formale tutte le definizioni, per poi spenderci parole chiarificatrici in seguito. Non dobbiamo a tal proposito dimenticare che la Teoria dei Giochi fa sempre parte di quell'universo rigoroso quale è la matematica e che lo stesso Patrone è matematico di professione. Non si può negare che una discreta conoscenza di base della matematica sia necessaria, se non altro per poter "apprezzare" il libro e la materia nel suo complesso. Non si spaventino però i lettori: *DRI* non è un testo accademico stracolmo di formule e teoremi; semplicemente, concetti come il già citato *equilibrio di Nash* o le fondamentali *funzioni di utilità di von Neumann e Morgenstern* non possono essere resi (e, di conseguenza, capiti) appieno senza il ricorso al linguaggio chiaro e inequivocabile della matematica.

Sicuramente il libro non è adatto a chi non ha senso dell'ironia: battute, ma anche commenti ed esempi scherzosi sono disseminati un po' ovunque. Per tutta la durata del testo, l'autore mantiene un tono piuttosto colloquiale: sembra che a parlare sia un collega di studio o di lavoro, piuttosto che un docente seduto dietro una cattedra.
Più difficile, invece, identificare in modo univoco uno stereotipo di potenziale lettore. *DRI* è adatto per coloro a cui piace la matematica… è adatto per chi vuole conoscere davvero qualcosa di concreto della Teoria dei Giochi… si rivolge a un pubblico eterogeneo senza limiti di età o titolo di studio… va bene per chi legge per passatempo, ma può essere utilissimo come supporto a chi segue corsi di Teoria dei Giochi anche a livello universitario.

La propensione a gradire qualche vocabolo in inglese è consigliata: c'è da aspettarsi da Patrone termini come *payoff*, *belief*, *offspring*, *expertise*, *challenging*, *mess*… Per chi non li conoscesse, quale occasione migliore per impararli?

Molti discorsi portati avanti nel libro non terminano con le consuete e prevedibili "conclusioni perentorie" dell'autore, che assurge al ruolo di maestro. Tutt'altro. Al lettore viene data ampia facoltà di farsi un'idea personale e trarre le proprie conclusioni. Sicuramente questa scelta dell'autore è dettata dalla natura stessa della disciplina, la cui finalità è spesso e volentieri fraintesa. A tal proposito, è interessante leggere quanto riportato in uno dei capitoli conclusivi:

Volendo comunque esprimere qualche considerazione sul lato propositivo, osservo che non si deve pensare che il compito dell'esperto di TdG sia quello di indicare quale sia "la" soluzione da applicare.

Questo discorso è sorprendente e magari difficile da accettare, in particolar modo da parte di quelli che sono abituati ad aver a che fare con aree diverse della matematica, il cui scopo è esattamente quello di ricercare e identificare la "soluzione esatta", magari, al problema del calcolo di un integrale o alla ricerca della soluzione di un problema di Cauchy. Il lettore di *DRI*, invece, diventa parte attiva. E proprio per rendere ancora più "attivi" i lettori, l'autore ha pensato di creare un capitolo interamente dedicato a problemi inerenti gli argomenti trattati nel corso del libro: una raccolta di ben 50 problemi, divisi per capitoli, in cui potersi cimentare per mettere a frutto le conoscenze acquisite durante la lettura.

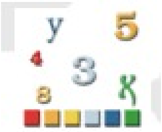
A supporto della propria opera cartacea, Patrone ha creato un sito web dedicato al libro http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/decisori_razionali_interagenti_web.htm che contiene, tra le varie cose, una ricca serie di approfondimenti riguardo a tematiche in parte già affrontate nel testo e in parte totalmente nuove ai lettori. Il sito contiene anche molto altro materiale, come esercizi, definizioni, dispense, commenti dei lettori… Tutto ciò è inquadrato nell'ottica di un progetto più vasto, sostenuto in prima persona da Patrone stesso, di diffusione della Teoria dei Giochi e del quale *DRI* è senza dubbio un'efficace ed accurata sintesi.

Andrea Vitiello

Recen… siti

a cura di Antonio Bernardo

"Progetto ArAl". *Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico*
Indirizzo: http://www.aralweb.it



Il progetto ha come obiettivo principale quello di avviare gli studenti della scuola dell'obbligo all'algebra come linguaggio, nella convinzione che i modelli mentali del pensiero algebrico vanno costruiti già all'inizio della scuola primaria, parallelamente a quelli dell'aritmetica. L'ipotesi a fondamento del progetto è che vi sia una analogia fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e quelle del linguaggio algebrico. Nella sezione Materiali si può consultare un glossario e un elenco di definizioni dei termini più 'tecnici'. La parte più significativa dei materiali consultabili riguarda un gruppo di Unità (8 ad oggi) che derivano da un lungo lavoro di ricerca e sperimentazione nelle classi. Ogni progetto comincia con una sequenza di situazioni problematiche e viene sviluppato durante l'anno scolastico in più classi sperimentali. Nelle classi di scuola primaria, gli insegnanti della classe lavorano in compresenza dei ricercatori. Per ogni attività si verbalizzano gli incontri e si raccolgono materiali di documentazione. I verbali vengono periodicamente diffusi all'interno del gruppo di ricerca e al termine dell'anno scolastico diventano le Unità da testare in altre classi. Dopo numerose sperimentazioni, queste Unità assumono, infine, la loro veste definitiva.

*****

"Esplora" La TV delle scienze
Indirizzo: http://www.explora.rai.it

Explora è una mediateca della RAI che raccoglie diverse trasmissioni televisive didatticamente interessanti; il progetto è diretto da Luciano Onder, vicedirettore del TG2, noto al grande pubblico come conduttore di TG2 Salute e Medicina 33; il coordinamento su Internet è di Marco Zela. Si tratta complessivamente di oltre 1000 video di durata variabile (20-30 minuti) che spaziano su tantissimi argomenti. Explora intende avvicinare il grande pubblico al mondo della ricerca scientifica italiana attraverso la divulgazione di notizie, informazioni e approfondimenti su progetti, iniziative ed eventi. Nella sezione dedicata alla matematica sono disponibili attualmente 31 video di trasmissioni televisive, interviste, dibattiti, laboratori didattici, attività svolte nelle classi, lezioni, presentazione di progetti di particolare rilievo. Segnalo l'intervista a Benoit Mandelbrot il padre della geometria dei frattali; l'attività di laboratorio "Il percorso più breve" con le bolle di sapone; la lezione di Jon Barrow su matematica e teologia; la mostra "Simmetria, giochi di specchi". Oltre ai video sono presenti documenti testuali, recensioni video di siti Internet (Explora Web), e il Dizionario, video presentazioni di alcune parole tecniche.

Recen… *Soft*

Introduzione a Maxima

di Raffaele Vitolo

1. Introduzione

Da un punto di vista metodologico, è conveniente imparare un linguaggio di programmazione usandolo, piuttosto che studiando il manuale. Quindi, in questa lezione il linguaggio di Maxima sarà introdotto tramite una serie di esempi. Il testo si riferisce alla versione 5.10 di Maxima.

2. Descrizione del programma

Maxima è un programma che può funzionare con varie modalità:
1. è utilizzabile come terminale che interpreta comandi in modo interattivo;
2. è utilizzabile come un vero e proprio linguaggio di programmazione (interpretato, non compilato come il C);
3. ha un'interfaccia grafica semplice dal terminale, di nome xmaxima;
4. ha un'interfaccia grafica più evoluta, wxmaxima, che facilita l'inserimento dei comandi dal terminale anche ai non esperti.

Il testo che segue si riferisce all'utilizzo interattivo di Maxima. Le istruzioni descritte nel testo possono essere inserite dal terminale in una modalità qualsiasi (grafica o no), questo non cambia il comportamento del programma. Le differenze tra le varie interfacce saranno indicate di volta in volta.

3. Installazione

Per Windows
bisogna scaricare ed installare la versione eseguibile per Windows (quella con l'estensione .exe), che si trova nella sezione 'Downloads' del sito web di Maxima http://maxima.sourceforge.net/. Inoltre, se si desidera fare grafici, è necessario il programma di disegno gnuplot, scaricabile in versione eseguibile per Windows (quella con l'estensione .exe), che si trova nella sezione 'Downloads' del sito web http://www.gnuplot.info/.
Per Linux
Tutte le maggiori distribuzioni hanno i pacchetti necessari. Ad esempio, per le distribuzioni basate su Debian (pacchetti .deb) si installino i pacchetti maxima, maxima-doc, maxima-emacs, maxima-share, maxima-src, maxima-test, xmaxima, wxmaxima, insieme a gnuplot, gnuplot-doc, gnuplot-mode, gnuplot-nox, gnuplot-x11 per i disegni. Per le distribuzioni basate su RedHat (pacchetti .rpm), il discorso è analogo.
Si possono usare anche live-CD dedicati al calcolo scientifico (come Quantian) o all'educazione (come EduKnoppix, http://www.eduknoppix.org/).

4. Primi passi

1. Come funziona il programma? Ci sono due modalità: interattiva e di interpretazione di una lista di comandi (programma, o file batch).
Nella modalità interattiva si scrivono i comandi sulle righe che cominciano per (%i1), (%i2), ... o simili. Queste sono le righe di input, e sono numerate progressivamente. Alla fine di una riga di input, si

preme il tasto 'Invio', e Maxima interpreta i comandi producendo, se è il caso, una riga di output, indicata con (%o1), (%o2), ... numerata progressivamente.

2. Come si scrive un comando? Bisogna sempre terminare i comandi, o le combinazioni di comandi, con un ';'. Se si omette il ';', il programma entra in condizione di errore, dalla quale si può uscire scegliendo la voce di menu 'Interrupt' (anche attivabile con la sequenza di tasti 'ctrl-g'). Si noti che wxmaxima inserisce automaticamente il ';'.
Si può anche terminare un comando con '$', che però non mostra l'eventuale output del comando.

3. Come si ottiene aiuto su di un comando? Si usa la funzione *describe*. Ad esempio, per chiedere aiuto sulla funzione sin si scrive:

```
(%i1) describe(sin);
```

Inoltre, il comando example fornisce esempi di utilizzo, con la stessa sintassi di describe.
Tutte queste funzioni sono accessibili dal menu Help di wxmaxima.

4. Come si richiama un comando già eseguito? Il comando precedente si richiama digitando '%;' il comando numerato con 'n' si richiama digitando '%in;'.

5. Come si usano le costanti standard? Sono variabili predefinite, e sono '%e', '%i', '%pi'.

5. Radici di polinomi

Si introduca il polinomio

$$\frac{x^4}{2}+\frac{3x^3}{4}-\frac{5x^2}{4}-\frac{7x}{4}-\frac{1}{2}$$

con lo scopo di trovare le sue radici. La sintassi `e la seguente:

```
(%i1) f(x) := x^4/2+3*x^3/4-5*x^2/4-7*x/4-1/2;
```

in questo modo il programma definisce la funzione f(x). Se, ad esempio, si vuole calcolare un valore specifico di f, ad esempio il valore in x = 3

```
(%i2) f(3);
```

si ottiene

$$(\%o2)\quad \frac{175}{4}$$

L'operazione funziona anche sostituendo un'espressione algebrica: si provi con

```
(%i3) f(y+3);
```

si ottiene

$$(\%o3)\quad \frac{(y+3)^4}{2}+\frac{3(y+3)^3}{4}-\frac{5(y+3)^2}{4}-\frac{7(y+3)}{4}-\frac{1}{2}$$

Se si vogliono calcolare le radici del polinomio, ovvero gli zeri di f(x), si scriva

```
(%i4) f(x)=0;
```

Questo comando definisce un'equazione che può essere risolta con l'istruzione *solve*,

```
(%i5) solve(f(x)=0,x);
```

(%o5) $[x=-\frac{1}{2}, x=-2, x=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$

il secondo argomento è la variabile rispetto alla quale si risolve l'equazione f(x) = 0.
Si ottengono 4 radici. Si possono convertire le radici in numeri usando le istruzioni float o bfloat:

```
(%i6) float(%o6);
(%o6) [x=-0.5,x=-2.0,x=-0.61803398874989,x=1.618033988749895]
```

bfloat permette di fare calcoli con precisione arbitraria, controllata dalla variabile
fpprec.

```
(%i7) fpprec;
(%o7) 16
```

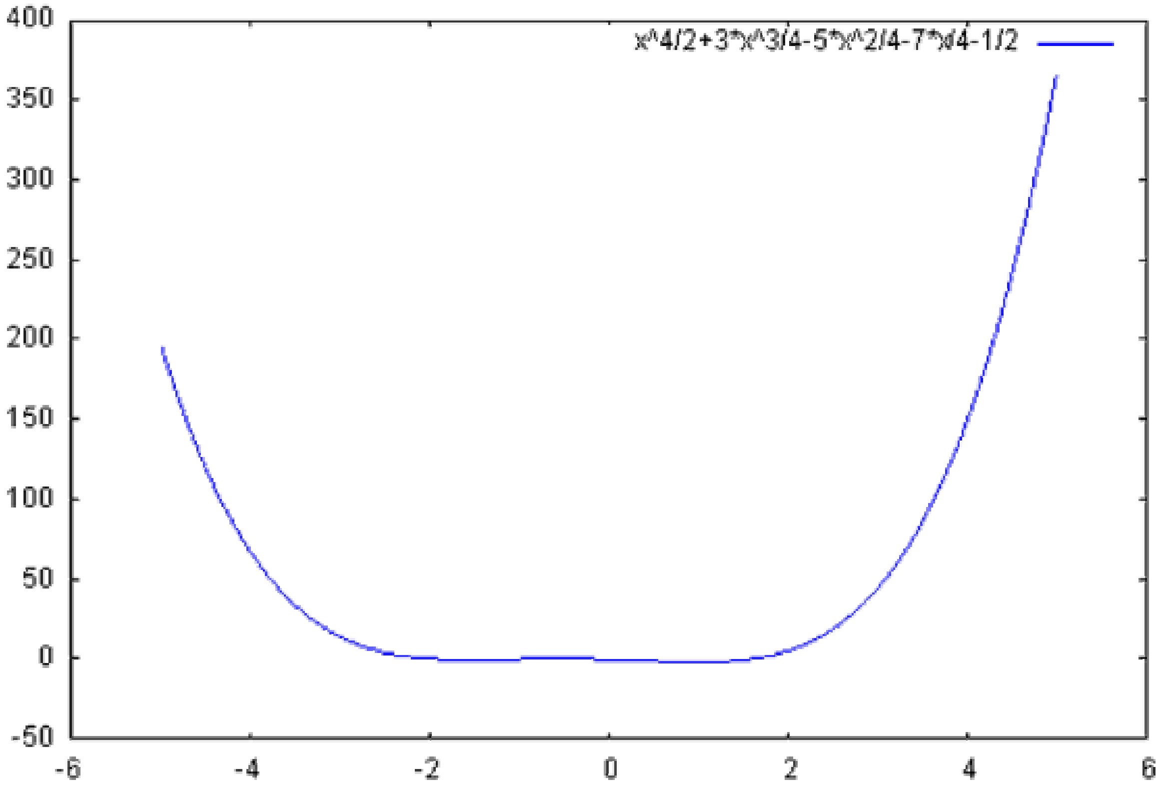
Aumentando il valore di fpprec si può ottenere il valore di %pi con il numero di cifre desiderato:

```
(%i8) fpprec : 100;
(%o8) 100
(%i9) bfloat(%pi);
(%o9)3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459
2307806286208998628034825342117068B0
```

Ora, per calcolare graficamente gli zeri della funzione f(x) si può usare l'istruzione seguente:

```
(%i10) plot2d(f(x),[x,-5,5]);
```

Il risultato è il seguente (figura 1):



Le opzioni del programma di disegno fornito a corredo con Maxima, che si chiama GNUplot [2], forniscono molti effetti grafici. Ad esempio, la seguente istruzione ridisegna il grafico con l'asse x:

```
(%i11) plot2d(f(x),[x,-5,5],[gnuplot_preamble,"set key off;set xze-
roaxis; set yzeroaxis"]);
```

L'opzione di gnuplot 'set key off' elimina la didascalia (come quella inclusa nella figura 1).

Per individuare meglio gli zeri sul grafico, si ricorre ad un ingrandimento cambiando la scala:

```
(%i12) plot2d(f(x),[x,-2,0],[y,-2,2],[gnuplot_preamble,"set key
off;set xzeroaxis;set yzeroaxis"]);
```

con il risultato della figura 3.

Esercizi. Risolvere esplicitamente e graficamente le seguenti equazioni, ad esempio con il metodo di bisezione:

$x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 42 = 0,$ $\qquad$ $4x^4 - 25x^2 + 20x - 4 = 0.$

6. Raccoglimento e sviluppo

Si assegni alla variabile 'pol' il polinomio

$$\frac{a+(a-b)}{x}+\frac{a-b}{x}+\frac{(b-1)^2}{x^2-y^2}$$

```
(%i13) pol : (a+(a-b))/x+(a-b)/x+(b-1)^2/(x^2-y^2);
```

(%o13) $\frac{(b-1)^2}{x^2-y^2}+\frac{2a-b}{x}+\frac{a-b}{x}$

Si può espandere il polinomio:

```
(%i2) expand(pol);
```

(%o2) $\frac{b^2}{x^2-y^2}-\frac{2\,b}{x^2-y^2}+\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{2\,b}{x}+\frac{3\,a}{x}$

I criteri con i quali funziona expand si possono cercare nella documentazione, nel paragrafo 'Polynomials'. L'idea generale è quella di avere un numero massimo di addendi.

Si possono raccogliere fattori specifici nel polinomio:

```
(%i3) expandwrt(pol,a);
```

(%o3) $\frac{(b-1)^2}{x^2-y^2}-\frac{2\,b}{x}+\frac{3\,a}{x}$

La funzione factor raccoglie a fattor comune (rispetto agli interi) i fattori in cui può essere scomposto il polinomio.

```
(%i4) factor(pol);
```

(%o4) $-\frac{2\,b\,y^2-3\,a\,y^2-2\,b\,x^2+3\,a\,x^2+b^2\,x-2\,b\,x+x}{x\,(y-x)\,(y+x)}$

Tuttavia, per operare su funzioni razionali si utilizzano i comandi *ratexpand* e *ratsimp*, che permettono di espandere in una somma di frazioni semplificate o raccogliere sotto un unico denominatore.

Se si vuole sostituire un'espressione algebrica ad una lettera del polinomio si usi il seguente comando:

```
(%i5) %o2, x=5/z;
```

(%o5) $-\frac{2\,b\,z}{5}+\frac{3\,a\,z}{5}+\frac{b^2}{\frac{25}{z^2}-y^2}-\frac{2\,b}{\frac{25}{z^2}-y^2}+\frac{1}{\frac{25}{z^2}-y^2}$

Si consideri ora il polinomio

$x^6 - 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 12x + 16$
Usando l'istruzione *factor* si nota che il risultato è
$(x - 1)(x + 2)(x - 2x - 2)^2(x + x + 4)^2$
Questo perché il programma fattorizza usando gli interi (o i razionali, il che è sostanzialmente equivalente). Tutti i principali programmi di calcolo simbolico hanno questo comportamento.
Per fattorizzare usando un'estensione del campo dei razionali si usi l'istruzione `factor(polinomio,pmin)`
dove pmin è il polinomio minimo dell'elemento che estende il campo dei razionali. Ad esempio:

```
(%i6) poli : x^4 - 4*x^3 + x^2 + 8*x - 6;
(%i7) factor(poli);
```

(%o7) $(x-3)(x-1)(x^2-2)$

```
(%i8) factor(poli,A^2-2);
```

(%o8) $(x-3)(x-1)(x-A)(A+x)$

Analogamente si possono raccogliere e/o sviluppare espressioni contenenti funzioni trigonometriche:

```
(%i9) expr : sin(u+v)*cos(u)^3;
(%i10) trigexpand(expr);
```

(%o10) $\cos(u)^3(\cos(u)\sin(v)+\sin(u)\cos(v))$

```
(%i11) trigreduce(expr);
```

(%o11) $\frac{\sin(v+4u)+\sin(v-2u)}{8}+\frac{3\sin(v+2u)+3\sin(v)}{8}$

Esercizi.
1. Semplificare l'espressione polinomiale $(1 + b/a + b^2/a^2)(a/(a^3 - b^3))$.
2. Fattorizzare i polinomi al primo membro delle seguenti equazioni:
$x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 42 = 0$, $\quad 4x^4 - 25x^2 + 20x - 4 = 0$
risolvere esplicitamente e graficamente.

7. Sistemi di equazioni

Per dare un sistema di equazioni lineari, il formato è quello di un vettore di equazioni:

```
(%i1) sist : [x-2*y=3,x+y=1];
```

(%o1) $[\, x - 2y = 3 \,,\, y + x = 1 \,]$

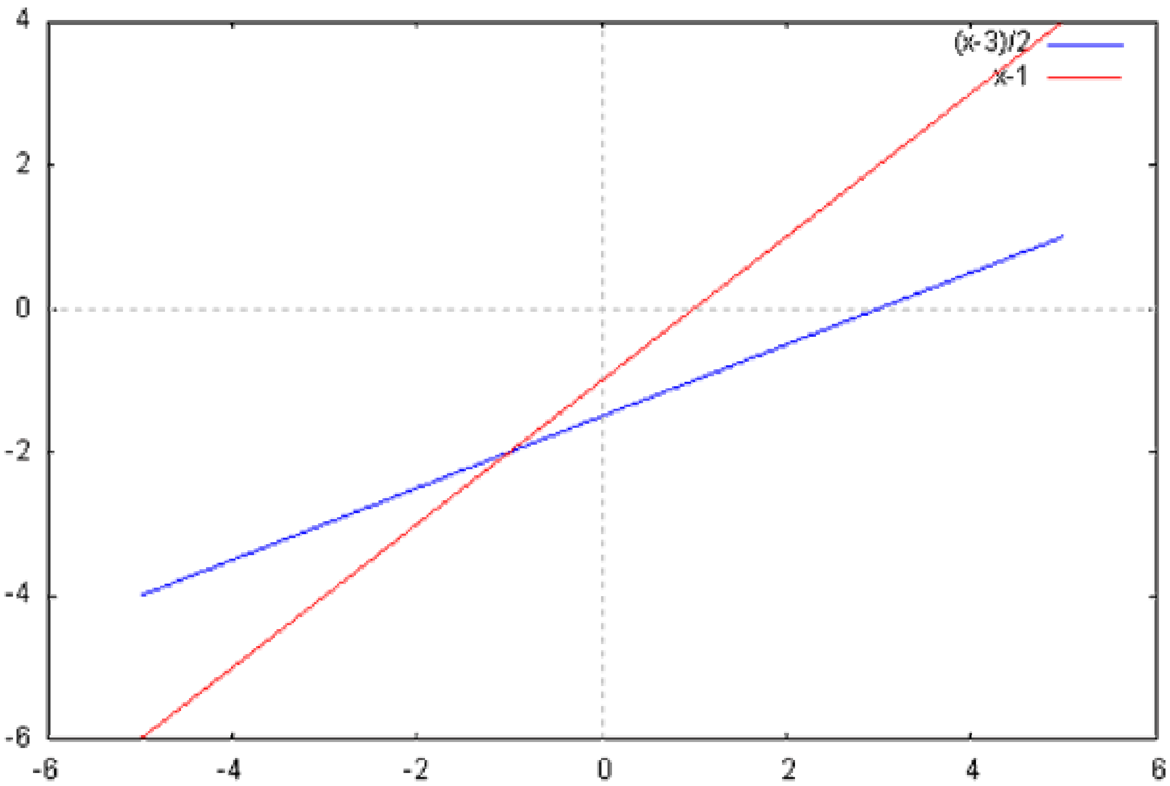
al quale si può applicare il comando solve:

```
(%i2) solve(sist,[x,y]);
```

(%o2) $[\,[\, x = \frac{5}{3} \,,\, y = -\frac{2}{3} \,]\,]$

anche se l'istruzione *linsolve* è quella ottimizzata per la soluzione dei sistemi lineari.
Si può visualizzare la soluzione graficamente, disegnando le due rette corrispondenti alle due equazioni lineari:

```
(%i3) plot2d([(x-3)/2,x-1],[x,-5,5],[gnuplot_preamble,"set xzeroaxis;
set yzeroaxis"]);
```



Esercizi. Risolvere esplicitamente e graficamente i seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=\sqrt{2} \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

8. Analisi con Maxima

Maxima può essere utile per ripassare le regole di derivazione.
Si ponga

```
(%i5) depends(a,x);
(%i6) depends(b,x);
```

allora la regola della derivata del quoziente si ottiene come

```
(%i7) quoziente:diff(a/b,x);
```

(%o7) $$\frac{\frac{d}{d\,x}\,a}{b} - \frac{a\left(\frac{d}{d\,x}\,b\right)}{b^2}$$

La regola deve essere semplificata per ottenere la forma più usuale:

```
(%i9) ratsimp(quoziente);
```

(%o8) $$-\frac{a\left(\frac{d}{d\,x}\,b\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,a\right)b}{b^2}$$

9. Studio di funzioni

9.1. Funzioni elementari

Si inserisca una funzione in Maxima

```
(%i1) f(x) := ((x-1)/(x-2))*(%e^(x - 1));
```

I limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ sono

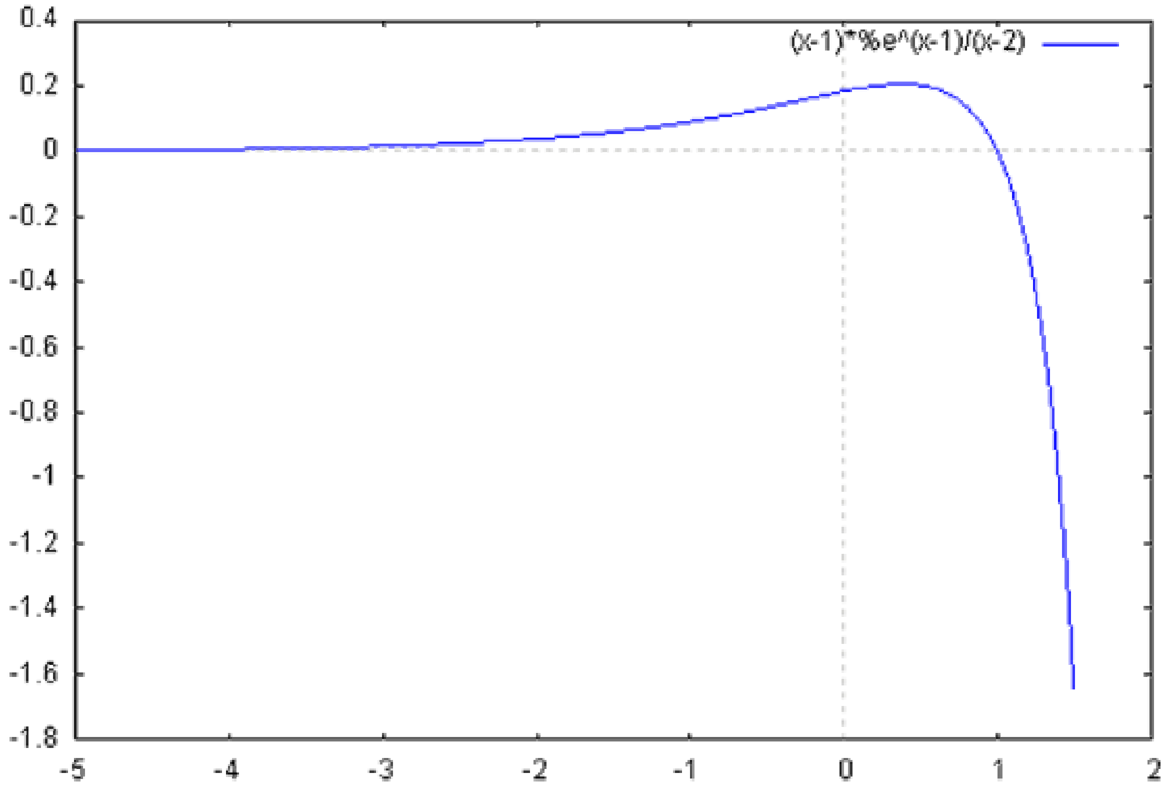
```
(%i2) limit(f(x),x,inf);
(%o2) inf
(%i3) limit(f(x),x,minf);
(%o3) 0
```

Analogamente si possono calcolare i limiti per valori finiti, usando *plus* e *minus* come ultimo argomento quando si vuole il limite destro e sinistro:

```
(%i4) limit(f(x),x,2,plus);
(%o4) inf
```

Si può controllare la presenza di un asintoto obliquo calcolando il limite di f(x)/x.
Per comprendere meglio l'andamento della funzione può essere necessario ingrandire parti di grafico:

```
(%i5) plot2d(f(x),[x,-5,1.5],[gnuplot_preamble, "set xzeroaxis; set
yzeroaxis"]);
```




```
(%i6) plot2d(f(x),[x,2.1,4],[gnuplot_preamble, "set xzeroaxis; set
yzeroaxis"]);
```

Si calcoli la derivata prima:

```
(%i13) diff(f(x),x);
```

(%o13) $$\frac{(x-1)\%e^{x-1}}{x-2}-\frac{(x-1)\%e^{x-1}}{(x-2)^2}+\frac{\%e^{x-1}}{x-2}$$

purtroppo il risultato non è in forma semplificata, si deve procedere con un'ulteriore comando:

```
(%i14) factor(%);
```

(%o14) $$\frac{(x^2-3x+1)\%e^{x-1}}{(x-2)^2}$$

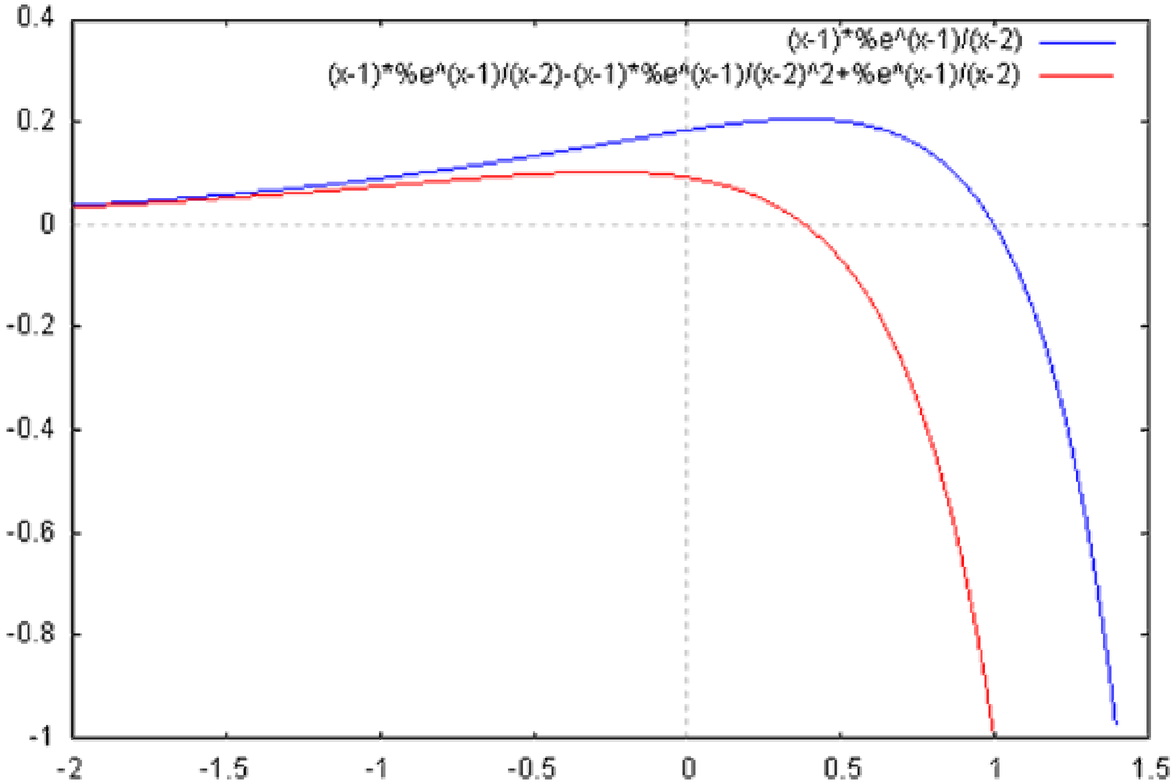
Usando solve si trovano le radici della derivata prima, che sono due (come era da aspettarsi).

```
(%i15) solve(diff(f(x),x)=0,x);
```

(%o15) $$[x=-\frac{\sqrt{5}-3}{2},\ x=\frac{\sqrt{5}+3}{2},\ \%e^{x-1}=0]$$

Iterando il procedimento si trova la derivata seconda, con le sue radici.
E' molto interessante disegnare il grafico di una funzione sovrapposto al grafico della sua derivata:

```
(%i16) plot2d([f(x),diff(f(x),x)],[x,-2,1.5],[y,-1,1],
      [gnuplot_preamble,"set xzeroaxis; set yzeroaxis"]);
```



Esercizi

1. Studiare la funzione (4 + log x)x log3 x;
2. Studiare la funzione $e^{\sin x}|\sin x|$
3. Disegnare la tangente nel punto di flesso della funzione studiata nel paragrafo.

9.2 Funzioni definite "a blocchi"

Si possono definire e studiare funzioni assegnate mediante una lista di espressioni, ognuna valida in un certo intervallo, in questo modo. Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{2-\sqrt[3]{x}} & x \in (-\infty, 0] \\ e^{-x}\sqrt[3]{(e^x - 1)} & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Questa si può assegnare in Maxima come

```
(%i1) f1(x):=(1+(x)^(1/3))/(2-(x)^(1/3));
```

$$(\%o1) \quad f1(x) := \frac{1 + x^{1/3}}{2 - x^{1/3}}$$

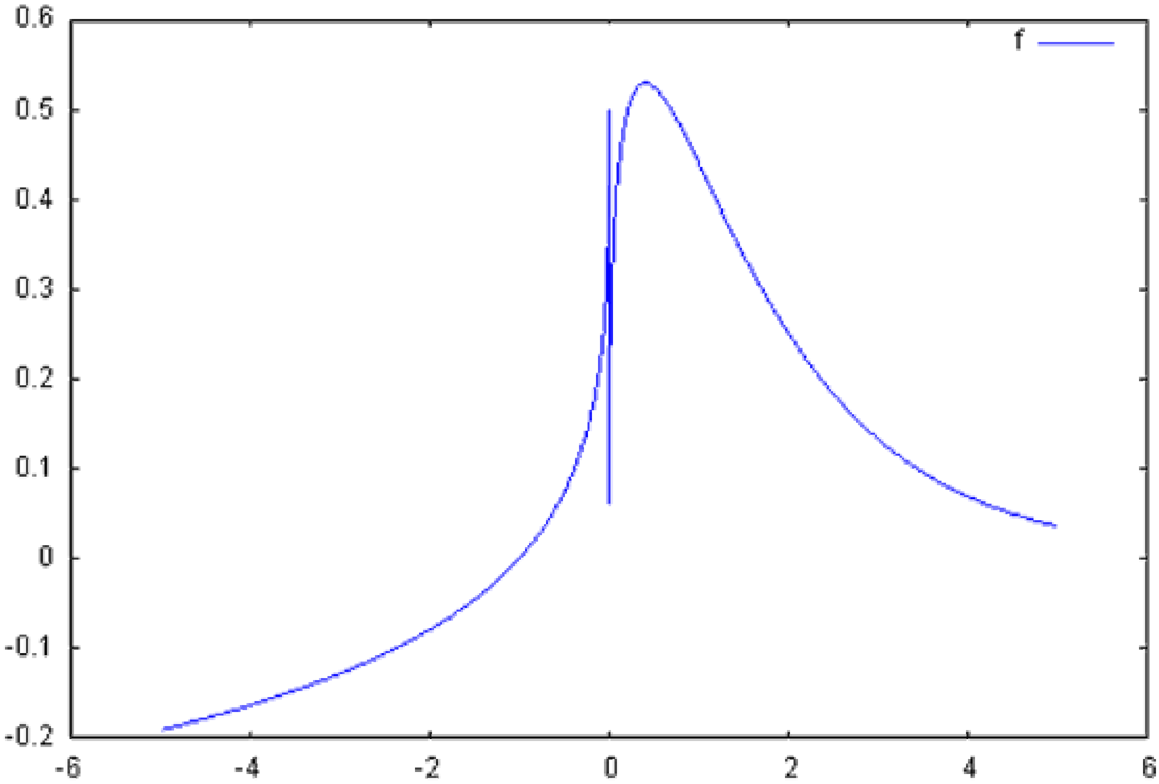
```
(%i2) f2(x):=(%e)^(-x)*((%e)^x-1)^(1/3);
```

$$(\%o2) \quad f2(x) := \%e^{-x}\left(\%e^{x} - 1\right)^{1/3}$$

```
(%i3) f(x):=block([],if (x<=0) then return(f1(x))
     else return(f2(x)));
```

Il grafico della funzione così definita è ottenuto con

```
(%i4) plot2d(f,[x,-5,5]);
```



Ovviamente qui è interessante studiare i limiti sinistro e destro nei punti in cui le funzioni cambiano.

9.3 Funzioni composte

Siano f e g due funzioni per le quali abbiano senso le composizioni f ∘ g e g ∘ f. Allora Maxima è in grado di calcolare le espressioni corrispondenti alle due composizioni.

```
(%i1) f(x):= x^3-1;
(%i2) g(y):=2*sin(y);
(%i3) comp1(x):=g(f(x));
(%i4) comp2(x):=f(g(y));
(%i5) [comp1(x),comp2(y)];
```

(%o5) $[2\sin(x^3-1), 8\sin(y)^3-1]$

E' interessante confrontare i grafici delle composizioni di due funzioni in ordine inverso.
Si può inoltre verificare la regola della derivata della funzione composta.

```
(%i6) depends(y,x);
(%i7) diff(g(y),x);
```

(%o7) $2\cos(y)\left(\frac{d}{d\,x}y\right)$

10. Integrazione

L'istruzione a cui fare riferimento è *integrate*. Può essere usata con limiti di integrazione (integrale definito) o senza (integrale indefinito). Maxima non integra funzioni arbitrarie come f(x).

```
(%i1) integrate(log(x),x);
(%o1) x log(x) - x
(%i2) integrate(log(x),x,1,2);
(%o2) 2 log(2) - 1
```

E' possibile integrare funzioni contenenti parametri:

```
(%i1) integrate (x/ sqrt (b^2 - x^2), x);
```

(%o1) $-\sqrt{b^2-x^2}$

Si può usare il comando *integrate* per ripassare la formula di integrazione di un polinomio:

```
(%i1) integrate(x/(x^2+x+1),x,0,2);
```

(%o1) $-\frac{\sqrt{3}\,\operatorname{atan}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)}{3}+\frac{\log(7)}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\%pi}{18}$

Se si vuole un'approssimazione numerica:

```
(%i2) %,numer;
(%o2) 0.5608861122167
```

A volte Maxima chiede informazioni sui parametri introdotti:

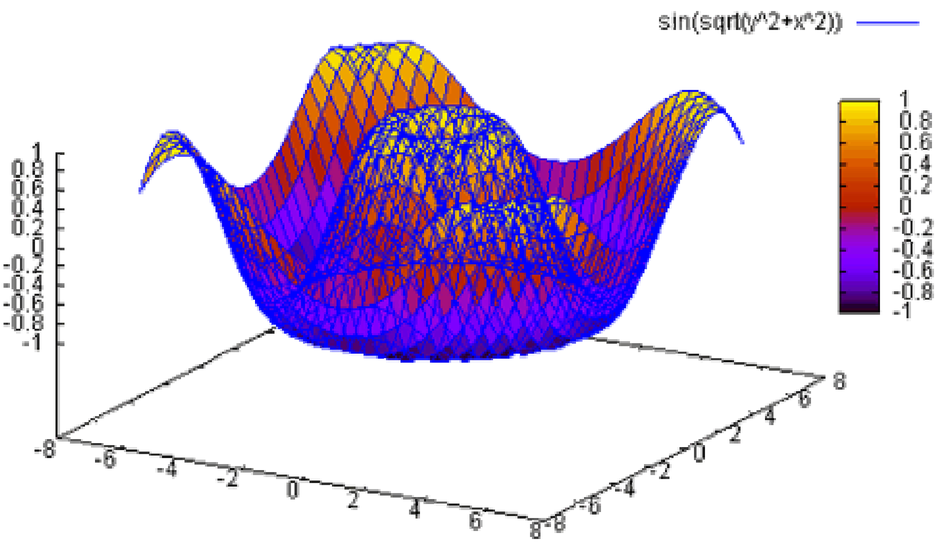
```
(%i7) integrate(asin(x),x,0,u);
Is u positive, negative, or zero?
pos;
```

(%o3) $u\,\operatorname{asin}(u)+\sqrt{1-u^2}-1$

11. Grafica 3D

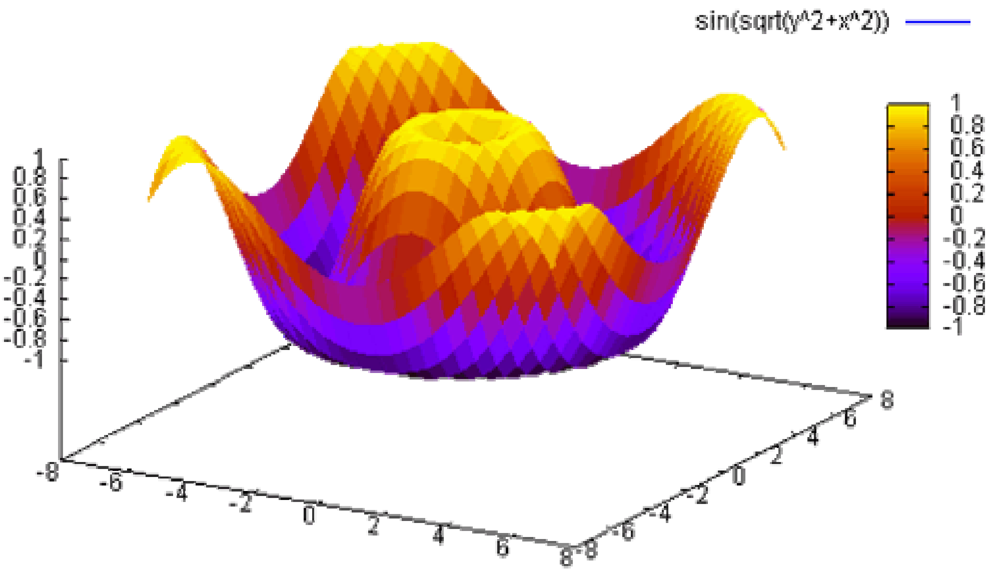
*L*a grafica in Maxima è gestita dal programma GNUplot. Dunque, i comandi eseguiti dal terminale di Maxima sono poi passati a GNUplot che disegna la figura richiesta e restituisce il controllo a Maxima. La documentazione di GNUplot è reperibile in Rete [2]; qui saranno indicati alcuni esempi specifici per la grafica 3D.

```
(%i1) plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2)),[x,-2*%pi,2*%pi],[y,-2*%pi,2*%pi]);
```



Volendo eliminare la sovrapposizione con le linee nascoste, bisogna passare a GNUplot il parametro set hidden3D, come segue

```
(%i2) plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2)),[x,-2*%pi,2*%pi],
     [y,-2*%pi,2*%pi],[gnuplot_preamble,"set hidden3d"]);
```



Riferimenti bibliografici

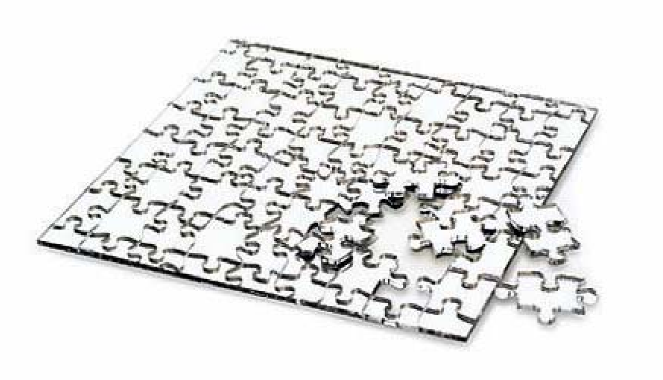
[1] Maxima website: http://maxima.sourceforge.net
[2] GNUplot website: http://www.gnuplot.info

Giochi matematici

Nel tempo del puzzle

di Marco Piumetti

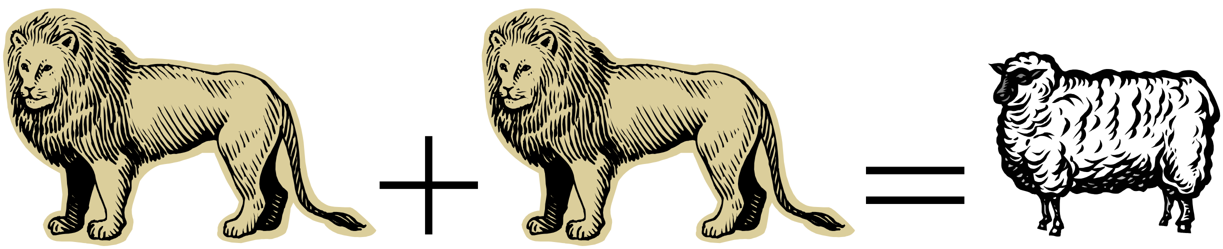
Un vecchio matematico, ormai in pensione, decide di ingannare il tempo risolvendo dei puzzle alquanto difficili (e stravaganti). Tutti i pezzi sono a tinta unica e non hanno alcuna immagine raffigurata. Il matematico tenta quindi di risolvere un puzzle con 1000 pezzi ed osserva che ci impiega circa 10 ore per completarlo. Non soddisfatto decide di cimentarsi con un puzzle di 2000 pezzi. Stranamente però si accorge che il tempo necessario per risolverlo è di circa 40 ore! Come è possibile ciò?



Inviare la soluzione a marco.piumetti@gmail.com; *come oggetto della mail scrivere* "GIOCHI MATEMATICI" *le risposte ritenute più interessanti saranno pubblicate sul prossimo numero della rivista*

Rebus

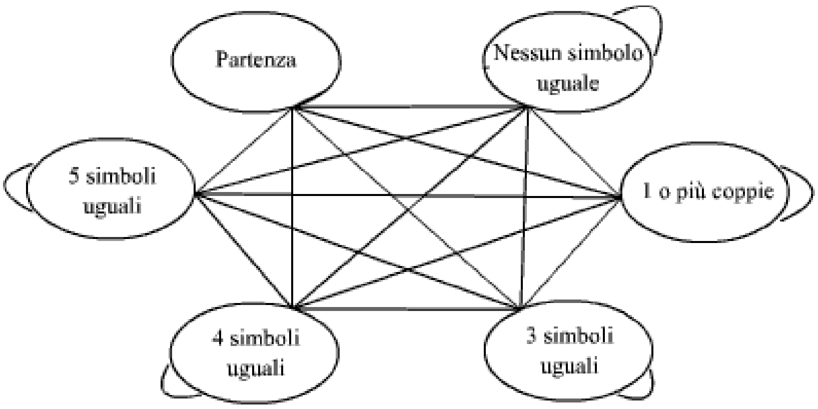
di Luciano Sarra



A lettera uguale numero uguale

Soluzione del gioco del numero precedente: Slot Machine

Il gioco prevede 3 lanci successivi e, grazie alla strategia di mantenere la miglior combinazione dopo ogni lancio, ognuno di questi dipenderà esclusivamente da quello accaduto nel lancio precedente. L'osservazione permette di schematizzare il problema con una macchina a stati finiti:



Per la strategia adottata si può passare solo da uno stato con combinazione inferiore ad uno con combinazione superiore, o al più si può rimanere nello stesso stato. Rimane da trovare le probabilità di transizione da uno stato all'altro, ovvero associare i pesi ad ogni arco orientato del grafo.

Si può descrivere sinteticamente l'insieme delle probabilità di transizione tramite una matrice:

$$P = \{p_{ij} = \Pr[S(k) = j \mid S(k-1) = i], j \geq i\}$$

dove con $S(k)$ si è indicato lo stato al lancio k-esimo, $k = \{1,2,3\}, S = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Ogni probabilità p_{ij} può essere calcolata come combinazioni favorevoli su combinazioni totali, e facendo uso del calcolo combinatorio; a conti fatti risulta:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{720}{7776} & \frac{5400}{7776} & \frac{1500}{7776} & \frac{150}{7776} & \frac{6}{7776} \\ 0 & \frac{120}{1296} & \frac{900}{1296} & \frac{250}{1296} & \frac{25}{1296} & \frac{1}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{120}{216} & \frac{80}{216} & \frac{15}{216} & \frac{1}{216} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il quesito chiedeva quale fosse la probabilità che dopo 3 lanci ci si trovasse nello stato $S = 5$, vale a dire "5 simboli uguali"; la risposta allora è l'elemento P_{05}^3, la probabilità che in 3 passi sul grafo si arrivi allo stato $S = 5$ partendo da $S = 0$.

In definitiva $P_{05}^3 \approx 0{,}046$.

Luca Barletta

La soluzione di Aurelio Mascheroni

Nella prima giocata, il numero totale delle combinazioni dei 6 simboli nelle 5 finestre è dato dalle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti presi 5 a 5: $D_{6,5} = 6^5$=7776.

Il numero delle diverse combinazioni di simboli è dato da:

Cinquine= 6

Quaterne= 6*5*5= 150
Terne= (10*6)*5*5= 1500 (10 rappresenta il numero delle combinazioni di 5 simboli presi 2 a 2)
Coppie. Si possono ottenere coppie singole o doppie; denotando con n(2,1) il numero delle singole e n(2,2) quello delle doppie:
n(2,1)=(10*6)*5*4*3= 3600 (10 rappresenta il numero delle combinazioni di 5 simboli presi 3 a 3)
n(2,2)= 6*5*5*4*3= 1800
Simboli tutti diversi = 6*5*4*3*2= 720
Condizione necessaria è che la somma di tutte le combinazioni dia 7776, come si verifica immediatamente.
Nelle successive giocate si bloccano le finestre corrispondenti alle quaterne, alle terne e alle coppie (nel caso di doppie coppie si blocca indifferentemente una delle due).
Denotando con Pi(j) la probabilità di ottenere nella seconda giocata un numero di simboli eguali j (j= 5,4,3,2,1) a partire dagli I simboli eguali (I=4,3,2,1) ottenuti nelle prima giocata, si ottiene:

Seconda giocata	Terza giocata
P4(5)= 1/6 ->	STOP
P4(4)= 5/6 ->	1/6*5/6= 5/36

P4(5)tot= 1/6+5/36= 11/6^2

P3(5)= 1/6*1/6= 1/36 ->	STOP
P3(4)= 5/36+5/36= 10/36 ->	1/6*10/36= 10/216
P3(3)= 5/6*5/6= 25/16 ->	1/36*25/36= 25/6^4

P3(5)tot= 1/36+10/6^3+25/6^4= 121/6^4

P2(5)= 1/6*1/6*1/6= 1/6^3 ->	STOP
P2(4)= 5/216+5/216+5/216= 15/6^3 ->	1/6*15/6^3= 15/6^4

P2(3) Vi sono 2 modalità.

Terne a partire dalla coppia:
25/216+25/216+25/216= 75/6^3
Terne a partire dai 3 simboli diversi:
5/6*5/6*5/6= 5/6^3
Sommando

P2(3)= 80/6^3 ->	1/36*80/6^3= 80/6^5

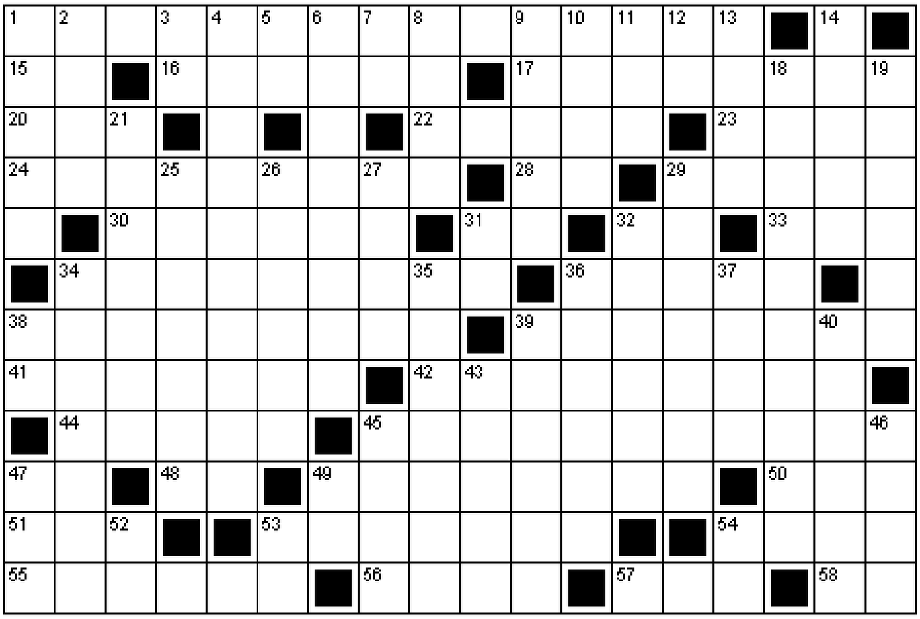
P2(2) Anche ora Vi sono 2 modalità.
Rimangono le coppie della prima giocata:
(5*4*3)/6^3= 60/6^3
Si formano nuove coppie accanto alle precedenti:
(5*4*3)/6^3= 60/6^3
Sommando
P2(2)= 120/6^3 -> 1/6^3*120/6^3= 20/6^5
P2(5)tot= 1/6^3+15/6^4+80/6^5+20/6^5= 226/6^5
Partendo dal caso di simboli tutti diversi, si ricade nei calcoli iniziali relativi alla prima giocata.
P1(5)= 6/6^5 -> STOP
P1(4)= 150/6^5 1/6*150/6^5= 150/6^6

P1(3)= 1500/6^5 ->	1/36*1500/6^5= 250/6^6
P1(2)= 5400/6^5 ->	1/6^3*5400/6^5= 150/6^6
P1(1)= 720/6^5 ->	6/6^5*720/6^5= 20/6^7

P1(5)tot=6/6^5+150/6^6+250/6^6+150/6^6+20/6^7= 3536/6^7
Per calcolare la probabilità di ottenere 5 simboli eguali dopo 3 giocate, ipotizzando di usare sempre la miglior strategia di gioco, occorre sommare le probabilità di ottenere le cinquine in tutti i casi esaminati, tenendo conto logicamente che- a parte le 6/6^5 probabilità di ottenere la cinquina alla prima giocata- le altre si ottengono come prodotto delle probabilità di ottenere i vari simboli nella prima giocata per quella di ottenere la cinquina nella seconda e terza giocata.
P(5)tot= 6/6^5+ 150/6^5*P4(5)tot+ 1500/6^5*P3(5)tot+ 5400/6^5*P2(5)tot+ 720/6^5*P1(5)tot
Sostituendo I valori numerici:
P(5)tot= 2.783.176/6^10= 4,60%.

Cruciverba matematico

di Nicola Vitale



ORIZZONTALI - 1 Si usa in chimica per calcolare le percentuali in peso. - 15 Olandese... puntato. - 16 Vengono prima dei centesimi. - 17 Una macchina di lusso. - 20 Prestigiosa università statunitense. - 22 Piccolo canale, orifizio. - 23 Rifugio da lupi. - 24 La passò Bartali a Coppi. - 28 Rieti. - 29 Isola nel sud dell'arcipelago indonesiano. - 30 Il più famoso matematico svizzero. - 31 Bologna. - 32 Simbolo del cromo. - 33 Il chitarrista jazz Metheny. - 34 Struttura anatomica come il nervo. - 36 Fece una brutta fine nella Battaglia delle Ombrelle. - 38 Le equazioni a coefficienti e soluzioni intere. .- 39 Il nome di Milosevic. - 41 L'antica regione con Scodra. - 42 Srinivasa, famosissimo matematico indiano. - 44 L'altro nome delle Muse. - 45 L'unità soluzione dell'equazione $x^2+1=0$. - 47 Nescio Nomen. - 48 In fondo alla via. - 49 La cittadella fortificata al centro di Mosca. - 50 Un giorno di buon auspicio per i Romani. - 51 Ottobre. - 53 Un punto non di accumulazione. - 54 Può essere generato da un cerchio che ruota attorno a una retta. - 55 Un operatore del calcolo vettoriale. - 56 Neanche ottavo. - 57 Incognita. - 58 L'opposto di off.

VERTICALI - 1 Parallelogrammo con 4 lati uguali. - 2 Un gas nobile. - 3 Congiunzione disgiuntiva. - 4 Legge romana sui giochi d'azzardo. - 5 Avanti Cristo. - 6 La matematica... senza continuità. - 7 Le iniziali di Montale. - 8 La capitale del Perù. - 9 Microscopico insetto. - 10 Quattro nel quadrato. - 11 L'antico nome di Tokyo. - 12 Vivere... poco. - 13 Tutt'altro che bassi. - 14 Piccola imbarcazione. - 18 Pende dal soffitto. - 19 Uno dei pionieri dell'algebra omologica. - 21 Ogni singolo filo di una fune. - 25 Dimostrò che le equazioni di quarto grado non sono risolubili algebricamente. - 26 Pesci pregiati. - 27 Un atomo elettrizzato. - 29 Politicante demagogo. - 31 Simbolo del bario. - 32 Scrisse La cittadella. - 34 Albero del Paradiso. - 35 Enunciò per primo l'assioma della scelta.- 36 Copia fuorilegge. - 37 Comune spagnolo nella Cantabria. - 38 Preposizione semplice. - 39 Vernice per le unghie. - 40 Privo di acqua. - 43 La capitale della Giordania. - 45 Ferro inglese. - 46 L'antagonista di Dio. - 47 La funzione logica di Nicod. - 49 Simbolo del cesio. - 52 Otto senza vocali. - 53 Internet Explorer. 54 Sigla di Trieste.

Soluzione del crucinumero del n°2

SARRA

1 7	2 1	3 8	4 2	8	1	5 8	6 2	7 8	4
■	8 2	0	3	■	■	9 1	1	0	■
10 4	■	11 1	9	12 8	13 9	1	1	■	14 1
15 2	16 1	■	17 1	9	4	9	■	18 1	8
19 9	2	0	■	20 7	0	■	21 3	1	4
22 2	0	■	23 1	0	3	24 5	■	25 1	9
5	■	26 3	6	2	8	8	27 0	■	6
■	28 3	5	1	■	■	29 1	0	30 1	■
31 6	1	8	0	3	3	9	8	8	7

Rivista di matematica per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito *www.matematicamente.it*

Anno 1 Numero 3 - Luglio 2007

Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Dir. resp. Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it