119. Il Metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua

Lorenzo Perogio

1 Premessa

La Pasqua è la festività in cui i Cristiani celebrano la crocifissione e resurrezione di Gesù Cristo; essa deriva dalla parola ebraica *Pesah* che, letteralmente, significa "passare oltre" e deriva dal racconto della decima piaga, in cui l'angelo sterminatore vide il sangue dell'agnello del *Pesah* sulle porte delle case d'Israele e "passò oltre", uccidendo solo i primogeniti maschi degli egiziani.
Benché la parola Pasqua derivi dall'ebraico, il significato dato dai cristiani è completamente differente da quello dato dagli ebrei, per i quali indica la liberazione del popolo Giudeo dalla schiavitù in Egitto.
Per quanto riguarda invece la traduzione inglese *Easter* (in tedesco *Oster*) della parola "Pasqua", essa deriva dal vecchio nome del Dio della primavera *Eostre* ed ha poco a che fare con il significato tradizionalmente dato alla parola Pasqua stessa, se non per il suo metodo di calcolo.
Nel Concilio di Nicea, indetto dall'imperatore Costantino nel 325 A.D., si stabilì infatti che la Pasqua avrebbe dovuto celebrarsi la prima domenica dopo la prima luna piena che seguiva l'equinozio di primavera. Da questa semplice regola si svilupparono tutti i metodi per il calcolo della data della Domenica di Pasqua compreso quello di Gauss che illustreremo in questo articolo.

2 Le lune ecclesiastiche

Il punto di partenza per illustrare i metodi seguiti per il calcolo della Pasqua è proprio la legge enunciata nel paragrafo precedente. Essa fa riferimento alle "lune piene" ma, evidentemente, se la regola di calcolo deve essere valida per tutte le popolazioni Cristiane della terra non può far riferimento ad una "luna reale". L'idea per risolvere il problema precedentemente esposto fu proprio quella di usare, invece della "luna reale", una "luna fittizia" (detta in seguito "luna ecclesiastica") con un periodo ben definito corrispondente, almeno approssimativamente con il periodo sinodico della Luna reale; questo fu il punto di partenza per costruire tutti i vari metodi che permettevano di calcolare la data della Domenica di Pasqua. Per come sono state introdotte, il periodo con cui si succedono le "Lune ecclesiastiche" nuove o piene deve essere necessariamente legato a quello delle "lune reali" ma in ogni caso la loro predizione non richiede particolari osservazioni o calcoli astronomici.

3 I numeri d'oro

Di fondamentale importanza per lo studio delle lune, sono le osservazioni dell'astronomo greco Metone che scoprì un ciclo di 19 anni, durante il quale avvengono 235 lunazioni (intervallo di tempo tra due eclissi o lune nuove consecutive), dopo il quale le eclissi si ripetono nel medesimo ordine.
A queste osservazioni è legato il concetto di numero d'oro che sostanzialmente rappresenta la posizione nel ciclo Metonico di un determinato anno.
Il calcolo del numero d'oro di un determinato anno richiede la specificazione del primo anno di un ciclo; questo fu selezionato da Dionisio il Piccolo che fissò nel 1 A.C. (anno della natività) il primo anno del ciclo.
Segue che il numero d'oro G di un qualunque anno N *A.D.* è dato da:

(3.1) $$G = 1 + \mathrm{mod}\left(N, 19\right)$$

Per esempio, il numero d'oro dell'anno 2009 è $1 + \mathrm{mod}\left(2009, 19\right) = 15$

4 L'almanacco lunare e le tabelle Pasquali

Il primo passo fatto per calcolare la data di Pasqua fu quello di distribuire le 235 lune nuove ecclesiastiche durante tutto l'arco del ciclo Metodico (secondo il calendario Giuliano). A questo riguardo, i 19 anni di tale ciclo si suddividevano a seconda del numero di lune ecclesiastiche che vi cadevano; essi contenevano 12 anni comuni consistenti di 12 lunazioni e 7 anni embolismici contenenti

13 lunazioni. Gli anni comuni contenevano 6 lunazioni di 29 giorni (lunazioni vuote) e 6 di 30 giorni (lunazioni piene). Sei degli anni embolismici contenevano in maniera simile lunazioni di 29 e 30 giorni con una lunazione in più di 30 giorni; nel settimo anno embolismico la lunazione extra era vuota con 29 giorni. Quest'ultima eccezione era conosciuta come *saltus lunae* (il salto della Luna).
Ricapitolando, i dodici anni lunari comuni contenevano 354 giorni e i 7 anni embolismici 384 giorni eccetto l'ultimo che ne conteneva 383; le 235 lunazioni contenevano 6935 giorni infatti:

$$6935 = 12\times\left(6\times 29+6\times 30\right)+6\times\left(6\times 29+7\times 30\right)+\left(7\times 29+6\times 30\right)$$

I 19 anni giuliani avevano 6939.75 = 19 x (365+1/4) giorni in media. I 4,75 giorni in più furono inseriti aggiungendo un giorno in più ad una lunazione ogni 4 anni; essa conteneva 31 o 30 giorni (nell'anno bisestile) a seconda se aveva 30 o 29 giorni in un anno normale. Le 235 lunazioni venivano evidenziate attraverso delle tabelle conosciute come "Almanacchi lunari". Nelle colonne degli Almanacchi c'erano i mesi e nelle righe i giorni del mese; questo permetteva di individuare una data dell'anno in corrispondenza della quale si inseriva un anno del ciclo di Metone. Così ad esempio l'anno *XIX* nel 5 Gennaio indicava che una "luna nuova" cadeva in tale giorno in ogni anno il cui numero d'oro era *XIX* .
Uno di tali almanacchi è stato costruito dal matematico Clavio al servizio di Gregorio XIII:

Giorni	*Gen*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Mag*	*Giu*	*Lug*	*Ago*	*Set*	*Ott*	*Nov*	*Dic*
	C G	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*	*C G*
1	**A III**	**D**	**D III**	**G**	**B XI**	**E**	**G IX**	**C VIII**	**F XVI**	**A XVI**	**D**	**F XIII**
2	**B**	**E XI**	**E**	**A XI**	**C**	**F XIX**	**A VIII**	**D XVI**	**G V**	**B V**	**E XIII**	**G II**
3	**C XI**	**F XIX**	**F XI**	**B**	**D XIX**	**G VIII**	**B**	**E V**	**A**	**C XIII**	**F II**	**A**
4	**D**	**G VIII**	**G**	**C XIX**	**E VIII**	**A XVI**	**C XVI**	**F**	**B XIII**	**D II**	**G**	**B X**
5	**E XIX**	**A**	**A XIX**	**D VIII**	**F**	**B V**	**D V**	**G XIII**	**C II**	**E**	**A X**	**C**
6	**F VIII**	**B XVI**	**B VIII**	**E XVI**	**G XVI**	**C**	**E**	**A II**	**D**	**F X**	**B**	**D XVIII**
7	**G**	**C V**	**C**	**F V**	**A V**	**D XIII**	**F XIII**	**B**	**E X**	**G**	**C XVIII**	**E VII**
8	**A XVI**	**D**	**D XVI**	**G**	**B**	**E II**	**G II**	**C X**	**F**	**A XVIII**	**D VII**	**F**
9	**B V**	**E XIII**	**E V**	**A XIII**	**C XIII**	**F**	**A**	**D**	**G XVIII**	**B VII**	**E**	**G XV**
10	**C**	**F II**	**F**	**B II**	**D II**	**G X**	**B X**	**E XVIII**	**A VII**	**C**	**F XV**	**A IV**
11	**D XIII**	**G**	**G XIII**	**C**	**E**	**A**	**C**	**F VII**	**B**	**D XV**	**G IV**	**B**
12	**E II**	**A X**	**A II**	**D X**	**F X**	**B XVIII**	**D XVIII**	**G**	**C XV**	**E IV**	**A**	**C XII**
13	**F**	**B**	**B**	**E**	**G**	**C VII**	**E VII**	**A XV**	**D IV**	**F**	**B XII**	**D I**
14	**G X**	**C XVIII**	**C X**	**F XVIII**	**A XVIII**	**D**	**F**	**B IV**	**E**	**G XII**	**C I**	**E**
15	**A**	**D VII**	**D**	**G VII**	**B VII**	**E XV**	**G XV**	**C**	**F XII**	**A I**	**D**	**F IX**
16	**B XVIII**	**E**	**E XVIII**	**A**	**C**	**F IV**	**A IV**	**D XII**	**G I**	**B**	**E IX**	**G**
17	**C VII**	**F XV**	**F VII**	**B XV**	**D XV**	**G**	**B**	**E I**	**A**	**C IX**	**F**	**A XVII**
18	**D**	**G IV**	**G**	**C IV**	**E IV**	**A XII**	**C XII**	**F**	**B IX**	**D**	**G XVII**	**B VI**
19	**E XV**	**A**	**A XV**	**D**	**F**	**B**	**D I**	**G IX**	**C**	**E XVII**	**A VI**	**C**
20	**F IV**	**B XII**	**B IV**	**E XII**	**G XII**	**C**	**E**	**A**	**D XVII**	**F VI**	**B**	**D XIV**
21	**G**	**C I**	**C**	**F I**	**A I**	**D IX**	**F IX**	**B XVII**	**E VI**	**G**	**C XIV**	**E III**
22	**A XII**	**D**	**D XII**	**G**	**B**	**E**	**G**	**C VI**	**F**	**A XIV**	**D III**	**F**
23	**B I**	**E IX**	**E I**	**A IX**	**C IX**	**F XVII**	**A XVII**	**D**	**G XIV**	**B III**	**E**	**G XI**
24	**C**	**F**	**F**	**B**	**D**	**G VI**	**B VI**	**E XIV**	**A III**	**C**	**F XI**	**A XIX**
25	**D IX**	**G XVII**	**G IX**	**C XVII**	**E XVII**	**A**	**C**	**F III**	**B**	**D XI**	**G XIX**	**B**
26	**E**	**A VI**	**A**	**D VI**	**F VI**	**B XIV**	**D XIV**	**G**	**C XI**	**E XIX**	**A**	**C VIII**
27	**F XVII**	**B**	**B XVII**	**E**	**G**	**C III**	**E III**	**A XI**	**D XIX**	**F**	**B VIII**	**D**
28	**G VI**	**C XIV**	**C VI**	**F XIV**	**A XIV**	**D**	**F**	**B XIX**	**E**	**G VIII**	**C**	**E XVI**
29	**A**		**D**	**G III**	**B III**	**E XI**	**G XI**	**C**	**F VIII**	**A**	**D XVI**	**F V**
30	**B XIV**		**E XIV**	**A**	**C**	**F**	**A XIX**	**D VIII**	**G**	**B XVI**	**E V**	**G**
31	**C III**		**F III**		**D XI**		**B**	**E**		**C V**		**A XIII**

Possiamo notare come in ogni riquadro comparivano delle "lettere del calendario" prima dei numeri d'oro che permettevano, insieme alle "lettere domenicali" associate ad un anno, di determinare la

prima domenica che cadeva dopo questo giorno nell'anno dato. Non specifichiamo il significato delle "lettere del calendari"o e delle "lettere domenicali" ma facciamo un esempio del loro utilizzo.
Consideriamo la seguente tabella che assegna ad ogni lettera il numero di un giorno

Giorno	Numero	Lettera
Domenica	1	A
Lunedì	2	B
Martedì	3	C
Mercoledì	4	D
Giovedì	5	E
Venerdì	6	F
Sabato	7	G

e la formula che permette di calcolare la lettera domenicale L per un anno N in un anno Giuliano:

(4.3) $$L = 7 - \operatorname{mod}\left(N + \left[N/4 \right] + 4, 7\right)$$

Dove il simbolo $[\cdots]$ indica la parte intera di un numero.

Se N=1066 il numero d'oro $G = 1 + \operatorname{mod}(1066, 19) = 3 = III$ da cui:

$$L = 7 - \operatorname{mod}\left(1066 + \left[1066/4 \right] + 4, 7\right) = 7 - 6 = 1 = A$$

In base all'almanacco Lunare si ha una luna nuova il 31 marzo e la lettera del calendario è F corrispondente al numero 6.
Allora la prima domenica dopo tale data cade $\operatorname{mod}(1-6, 7) = 2$ giorni dopo, cioè il 2 Aprile.

Osservando che, si conveniva aggiungere 13 per ottenere una luna piena ecclesiastica da una luna nuova ecclesiastica si otteneva la seguente tabella pasquale che permetteva di calcolare la data della domenica di Pasqua in maniera molto simile a prima.

R (Giorni di marzo)	Data	C (lettera del calendario)	G (Numero d'oro)	E(Epatta)	Somma
21	21-mar	C	XVI	23	44
22	22	D	V	22	44
23	23	E		(21)	(44)
24	24	F	XIII	20	44
25	25	G	II	19	44
26	26	A		(18)	(44)
27	27	B	X	17	44
28	28	C		(16)	(44)
29	29	D	XVIII	15	44
30	30	E	VII	14	44
31	31	F		(13)	(44)
32	01-apr	G	XV	12	44
33	2	A	IV	11	44
34	3	B		(10)	(44)
35	4	C	XII	9	44
36	5	D	I	8	44
37	6	E		(7)	(44)
38	7	F	IX	6	44
39	8	G		(5)	(44)
40	9	A	XVII	4	44
41	10	B	VI	3	44
42	11	C		(2)	(44)
43	12	D	XIV	1	44
44	13	E	III	0	44
45	14	F		(29)	(74)
46	15	G	XI	28	74
47	16	A		(27)	(74)
48	17	B	XIX	26	74
49	18	C	VIII	25	74

Per esempio nell'anno 1066, il cui numero d'oro è III, La luna Pasquale cadeva il 13 di Aprile e la sua lettera del Calendario è *E=5*.
Allora, come prima, la Lettera Domenicale dell'anno III è uguale ad *A=1* e quindi la prima Domenica (Pasqua) dopo tale data cade $\mathrm{mod}(1-5,7)=3$ giorni dopo cioè il 16 aprile.

5 L'Epatta

Il metodo precedente richiedeva l'uso di almanacchi e tabelle pasquali, ma l'obbiettivo di determinare la luna piena pasquale e le lettere del calendario per poter calcolare la domenica di Pasqua si sarebbe potuto raggiungere utilizzando un algoritmo di calcolo simile a quello utilizzato per determinare le lettere domenicali. A questo proposito di fondamentale importanza è il concetto di Epatta di un anno, definita come l'età della luna il primo giorno dell'anno (1 gennaio). Ad esempio, nel calendario giuliano, l'epatta dell'anno 1066, il cui numero d'oro è III, è 0 in quanto si ha una luna nuova proprio il 1° gennaio mentre l'epatta dell'anno 1000, il cui numero d'oro è XII è 9, in quanto per l'anno precedente si ha una luna nuova il 23 Dicembre. Osserviamo che l'Epatta aumenta di 11 giorni per ogni anno successivo, ma quando supera 30 si sottrae 30. C'è una eccezione quando passiamo dall'anno XIX all'anno I, poiché allora l'epatta aumenta di 12 da 26 a 38 o 8 dopo aver sottratto 30.
E' chiaro che da questa definizione l'Epatta E può essere calcolata dal numero G con la formula :

(4.5) $$E=\mathrm{mod}\left(11\times(G-3),30\right)$$

Le epatte di tutti i numeri sono mostrate nella colonna E della tabella precedente. Un'analisi della tabella mostra come la colonna R indichi i Giorni di Marzo (in pratica si considera Marzo come composto da 61 giorni, così il 3 di Aprile diventa il 34 di Marzo ad esempio) e la colonna S la somma tra l'Epatta e i Giorni di Marzo. Si verifica che questa somma è 44 o 74 (quando i numeri d'oro sono uguali a VIII, XI e XIX). E' chiaro allora che la data della luna piena pasquale può essere dedotta (per il calendario Giuliano) facilmente dalle epatte (basta fare una differenza), che possono essere calcolate dal numero d'oro. Abbiamo che il giorno di Marzo R+1 del giorno seguente la luna piena di Pasqua in funzione dell'epatta E è uguale a :

$$\begin{cases}44+1-E\ se & E<24\\ 74+1-E\ se & E\geq 24\end{cases}$$

tenendo conto del fatto che i numeri d'oro VIII, XI e XIX hanno rispettivamente valori dell'Epatta E uguali a 25,28,26 abbiamo allora:

$$R+1=\begin{cases}51-(E+6)\,se & E+6<30\\ 81-(E+6)\,se & E+6\geq 30\end{cases}$$

cioè

$$R+1=\begin{cases}51-(E+6) & se \quad E+6<30\\ 51-(E+6)+30\,se & E+6\geq 30\end{cases}$$

e in ogni caso

$$R+1=\mathrm{mod}\left(51-(E+6),30\right)=\mathrm{mod}(45-E,30)=22+\mathrm{mod}(23-E,30)=22+\mathrm{mod}(30+23-E,30)$$

e infine

(4.6) $$\boxed{R+1=22+\mathrm{mod}(53-E,30)}$$

La lettera del calendario sarà data invece dalla formula

(4.7) $$C=1+\mathrm{mod}\left((R+1)+2,7\right)$$

Si è in grado ora di calcolare la domenica di Pasqua, supponendo che essa cada *d* giorni dopo *R+1* e quindi il giorno R *+1+ d* si ha:

$$\begin{cases} d=0 & se \quad L=C \\ d=L-C & se \quad L>C \\ d=7+L-C & se \quad L<C \end{cases}$$

o più in generale

$$d=\mathrm{mod}\left(7+L-C,7\right)$$

giungendo così alla formula che permette di esprimere la data di marzo S della domenica di Pasqua in funzione dell'anno N in questione:

(4.8) $$\boxed{S=R+1+\mathrm{mod}\left(7+L-C,7\right)}$$

Tornando all'esempio di prima, calcoliamo il giorno di marzo della domenica di Pasqua dell'anno 1066 secondo il calendario Giuliano.

$G=III$, $E=\mathrm{mod}\left(11\times(3-3),30\right)=0$, $R+1=22+\mathrm{mod}\left(53-0,30\right)=45$, $C=1+\mathrm{mod}\left(45+2,7\right)=6$ e $d=\mathrm{mod}\left(7+1-6,7\right)=2$, quindi $S=45+2=47$, pertanto la domenica di Pasqua dell'anno 1066 è il 47 di Marzo, ovvero il 16 di Aprile.

6 Il Calendario Gregoriano e le equazioni solari e lunari

Il calcolo della Pasqua nel calendario Giuliano è relativamente semplice più complicata è la situazione nel calendario Gregoriano.

Nel 1582 Papa Gregorio XIII modifica il calendario Giuliano, tenendo conto del fatto che si erano compiuti degli errori nel calcolo dell'anno solare e lunare.

Osserviamo che mentre la lunghezza dell'anno medio Giuliano è 365.25 giorni la lunghezza vera dell'anno è circa 365.2422 giorni; l'anno giuliano è di circa 11 minuti più lungo.

Questo significa che l'equinozio di primavera cadeva sempre prima nella data del calendario; nel 1582 si era osservato che esso doveva occorrere l'11 di Marzo cioè 10 giorni prima.

$$(\left(1582-225\right)\times\left(365.25-365.2422\right)\cong 10).$$

Similmente, in un ciclo Metonico, ci sono 235 lunazioni che contengono $19\times\left(365+0.25\right)=6939.75$ giorni. Così nel calendario giuliano il periodo medio di una lunazione era $29.53085\left(=\dfrac{6939.75}{235}\right)$ giorni, mentre il valore medio della rivoluzione sinodica della Luna è all'incirca 29.53059 giorni; la Luna ecclesiastica nel calendario giuliano è in media 22 secondi troppo lunga. Questo significa che, nel calendario giuliano le lune nuove cadevano sempre prima; nel 1582, le lune piene reali cadevano 4 giorni prima rispetto alle lune piene ecclesiastiche.

$$\left(\left(\frac{1582-225}{19}\right)\times 235\times\left(29.53085-29.53059\right)\cong 4\right)$$

La prima modifica fatta fu quella di portare l'anno indietro di 10 giorni, e quindi fu deciso di far succedere il 15 Ottobre 1582 al 4 Ottobre 1582. La seconda modifica fu quella di correggere le discrepanze nella lunghezza dell'anno Giuliano togliendo 3 anni bisestili ogni 400 anni (osserviamo che in 400 anni il calendario Giuliano considerava circa 3 giorni in più). La regola in pratica era quella di togliere gli anni bisestili secolari (divisibili per 100) ma non quelli divisibili per 400. Per esempio il 1700, 1800 e il 1900 non sono bisestili mentre il 1600 e il 2000 sono anni bisestili. In un periodo di 400 anni, secondo questa regola, ci sono 146097 giorni $\left(=\left(365\times 400\right)+100-3\right)$ così che la media della lunghezza dell'anno gregoriano è di 146097/400=365.2425 giorni. Questo periodo è ancora di 25 secondi troppo lungo e l'equinozio primaverile dovrebbe essere portato indietro di un giorno ogni 3000 anni.

Entrambi i cambiamenti alterarono evidentemente le date di tutte le lune ecclesiastiche; dopo che erano stati tolti 10 giorni, le nuove lune astronomiche sarebbero dovute occorrere 6 giorni dopo le date delle lune ecclesiastiche anziché 4 giorni prima. Ad ogni modo Clavio decise di spostare le lune 7 giorni dopo garantendo in tal modo che la Domenica di Pasqua non cadesse prima o nel giorno della Pasqua ebraica. Il cambiamento fu effettuato spostando tutti i valori nell'almanacco Lunare in una posizione 7 giorni dopo. Inoltre era necessario compensare la diminuzione degli anni bisestili; ogni qualvolta un anno bisestile veniva soppresso la data di un dato evento astronomico avrebbe dovuto essere aumentata di un giorno. In particolare, le lune nuove astronomiche sarebbero dovute occorrere un giorno dopo nel calendario. Era quindi essenziale aumentare la data dopo ogni luna nuova ecclesiastica di un giorno. Questo aggiustamento è conosciuto come equazione solare.
Un altro problema era che il periodo medio delle lunazioni ecclesiastiche che era troppo lungo ed era necessario ridurlo di un giorno ogni 311 anni. Infatti, dopo $X=\frac{1}{0.00026}=3846.153846$ lunazioni si ha un giorno di scarto e quindi dopo $\frac{X\cdot 19}{235}=310.9656301\cong 311$ anni si ha un giorno di scarto.
Si ovviò al problema, scalando in alto i numeri d'oro nell'almanacco lunare di 8 giorni ogni 2500 anni.
Il primo spostamento occorreva nel 1800, e poi un giorno ogni 3 secoli avendo l'accortezza che, dopo aver ripetuto l'operazione 7 volte, per compierla l'ottava volta, si doveva attendere un secolo in più cioè 400 anni. Il motivo di tutto questo è che, se in 2400 anni le date della lune ecclesiastiche si spostano 8 giorni indietro, in media, ogni 311 anni, tali date si spostano 1.037 giorni indietro compiendo un errore di 0.037 giorni. Viceversa, se in 2500 anni le date della lune ecclesiastiche si spostano 8 giorni indietro, in media, ogni 311 anni, tali date si spostano 0.9952 giorni indietro compiendo un errore di 0.0048 giorni molto minore rispetto a prima. Questo aggiustamento è conosciuto come equazione lunare.
I due aggiustamenti compaiono in tutti gli algoritmi per il calcolo della pasqua secondo i canoni gregoriani e in particolar modo nel metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua.

7 Metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua

Basato sui principi prima illustrati, Gauss pubblicò nel 1800 nella rivista "Monatliche Correspondence" un metodo generale per calcolare la Pasqua.
Il suo unico difetto era quello di ignorare che l'equazione lunare doveva essere applicata ogni 2500 anni anziché 2400 che comportava errori sul calcolo della domenica di Pasqua a partire dal 4200.
Illustriamo l'algoritmo:
Si indichi con N l'anno in cui vogliamo sapere la data di Pasqua e si considerino dalla seguente tabella i numeri m ed n corrispondenti ad N:

Date	m	n
Prima del 1582	15	6
1583-1699	22	2
1700-1799	23	3
1800-1899	23	4
1900-1999	24	5
2000-2100	24	5
2100-2199	24	6
2200-2299	25	0
2300-2399	26	1
2400-2499	25	1

Si calcolino i seguenti parametri:

$a=\mathrm{mod}(N,19)$ (Numero d'oro -1) $\qquad b=\mathrm{mod}(N,4)$

$c=\mathrm{mod}(N,7)$ $\qquad d=\mathrm{mod}(19a+m,30)$ $\qquad e=\mathrm{mod}(2b+4c+6d+n,7)$

Allora la data della domenica di Pasqua è:

$$\begin{cases} 22+d+e & Marzo \quad se \quad d+e\leq 9 \\ 22+d+e-31 & Aprile \quad se \quad d+e>9 \end{cases}$$

Osserviamo che vi sono due eccezioni:
Se $22+d+e\geq 31$ e $22+d+e-31=26$ allora la data di Pasqua è il 19 Aprile.
Se $22+d+e\geq 31, 22+d+e-31=25, d=28$ e $a>10$ allora la data di Pasqua è il 18 Aprile.

Esempio 1: calcoliamo la Pasqua del 1066.

$N=1066, m=15, n=6$ $\quad a=\mathrm{mod}(1066,19)=2$ $\quad b=\mathrm{mod}(1066,4)=2$

$c=\mathrm{mod}(1066,7)=2$ $\quad d=\mathrm{mod}(38+15,30)=23$

$e=\mathrm{mod}(4+8+138+6,7)=\mathrm{mod}(156,7)=2$

Ora $22+23+2=47$ e $23+2>9$ quindi la data della domenica di Pasqua è il 16 aprile.

Esempio 2: calcoliamo la Pasqua del 1492.

$N=1492, m=15, n=6$ $\quad a=\mathrm{mod}(1492,19)=10$ $\quad b=\mathrm{mod}(1492,4)=0$

$c=\mathrm{mod}(1492,7)=1$ $\quad d=\mathrm{mod}(190+15,30)=25$

$e=\mathrm{mod}(4+150+6,7)=\mathrm{mod}(160,7)=6$

Ora $22+25+6=53$ e $25+6>9$, quindi la domenica di Pasqua è il 22 di Aprile .

Esempio 3: calcoliamo la Pasqua del 2010.

$N=2010, m=24, n=5$ $\quad a=\mathrm{mod}(2010,19)=15$ $\quad b=\mathrm{mod}(2010,4)=2$

$c=\mathrm{mod}(2010,7)=1$ $\quad d=\mathrm{mod}(285+24,30)=9$

$e=\mathrm{mod}(4+4+54+5,7)=\mathrm{mod}(67,7)=4$

Ora $22+9+4=35$ e $9+4>9$ quindi la Pasqua cade il 4 di Aprile .

8 Dimostrazione del metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua

Gauss ha fatto uso della tabella pasquale del XVIII secolo:

Numero d'oro	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Data	13 Aprile	2 Aprile	22 Marzo	10 Aprile	30 Marzo	18 aprile	7 Aprile	27 Marzo	15 Aprile	4 Aprile
Giorno di Marzo	44 Marzo	33 Marzo	22 Marzo	41 Marzo	30 Marzo	49 Marzo	38 Marzo	27 Marzo	46 Marzo	35 Marzo
Numero d'oro	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	
Data	24 Marzo	12 Aprile	1 Aprile	21 Marzo	9 Aprile	29 Marzo	17 Aprile	6 Aprile	26 Marzo	
Giorno di Marzo	24 Marzo	43 Marzo	32 Marzo	21 Marzo	40 Marzo	29 Marzo	48 Marzo	37 Marzo	26 Marzo	

Questa tabella è ottenibile semplicemente dall'almanacco lunare di Clavio, convenendo di spostare i numeri d'oro in basso di 9 giorni (tenendo conto degli aggiustamenti delle equazioni solari e lunari) e quindi di 13 per ottenere l'almanacco delle lune piene ecclesiastiche per poi arrivare alla tabella soprastante. Dalla tabella di plenilunio si vede che le lune cadono tra il 21 Marzo e il 18 Aprile

8.1 Determinazione della luna di Pasqua per il secolo XVIII

Gauss indica con D i giorni che devono passare fino al primo plenilunio dopo il 21 Marzo$(0\leq D<29)$ e mette in relazione i valori di $a=\text{Numero d'oro-1}=\mathrm{mod}(\mathrm{N},19)$, dove N è l'anno in questione, con i valori che assume D e osserva che:

Verifica infine che per tutti e 19 i casi vale la relazione: $D = 23 - 11p + 19q$ dove $p + q = a$.
Quindi:
$D = 23 - 11p + 19q = 23 + 30p - 11p + 19q - 30p = 23 + 19p + 19q - 30p = 23 + 19(p+q) - 30p$
Allora $D = 23 + 19a - 30p$ cioè $23 + 19a = 30p + D$ e quindi D è il resto della divisione di 23+19a con 30.
Concludendo

$$\boxed{D = \operatorname{mod}(23 + 19a, 30)}$$

8.2 Determinazione della luna di Pasqua per un secolo qualunque

In questo caso più generale indichiamo i giorni che devono passare fino al primo plenilunio dopo il 21 Marzo con "d" dove $(0 \le d \le 29)$.

1. $1800 \le N \le 1899$

Nel 1800 si applicano sia l'equazione solare che lunare e quindi rimangono invariate le posizioni dei numero d'oro nell'almanacco lunare in questo caso si ha ancora:

$$d = \operatorname{mod}(23 + 19a, 30)$$

2. $1900 \le N \le 1999$

Nel 1900 si applica l'equazione solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in basso e in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \operatorname{mod}(23 + 19a, 30) + 1 = \operatorname{mod}(24 + 19a, 30)$$

Se $\operatorname{mod}(23 + 19a, 30) + 1$ è 30 sicuramente il numero d'oro di "a", per come è costruito l'almanacco lunare, cadrà il 21 di Marzo e d sarà uguale a 0 ovvero

$$d = \operatorname{mod}(24 + 19a, 30)$$

3. $2000 \le N \le 2100$

Nel 1800 non si applicano ne l'equazione solare ne quella lunare e quindi rimangono invariate le posizioni dei numero d'oro nell'almanacco lunare in questo caso si ha ancora:

$$d = \operatorname{mod}(24 + 19a, 30)$$

4. $2100 \le N \le 2199$

Nel 2100 si applicano sia l'equazione solare che lunare e quindi rimangono invariate le posizioni dei numero d'oro nell'almanacco lunare in questo caso si ha ancora:

$$d = \operatorname{mod}(24 + 19a, 30)$$

5. $2200 \le N \le 2299$:

Nel 2200 si applica l'equazione solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in basso; in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \operatorname{mod}(24 + 19a, 30) + 1 = \operatorname{mod}(25 + 19a, 30)$$

Quando $\operatorname{mod}(24 + 19a, 30) + 1$ è 30 si ragiona come nel caso 3 e quindi

$$d = \operatorname{mod}(25 + 19a, 30)$$

6. $2300 \le N \le 2399$:

Nel 2300 si applica ancora l'equazione solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in basso; in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \operatorname{mod}(25 + 19a, 30) + 1 = \operatorname{mod}(26 + 19a, 30)$$

Quando $\operatorname{mod}(25 + 19a, 30) + 1$ è 30 si ragiona come nel caso 3 e quindi

$$d = \operatorname{mod}(26 + 19a, 30)$$

7. $2400 \le N \le 2499$

Nel 2400 si applica l'equazione lunare ma non quella solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in alto; in questo caso si ha evidentemente:

$d = \mathrm{mod}(26+19a,30)-1 = \mathrm{mod}(25+19a,30)$

Quando $\mathrm{mod}(26+19a,30)-1=-1$ sicuramente il numero d'oro di "a", per come è costruito l'almanacco lunare, cadrà il 50 di Marzo (19 di Aprile) ricadendo così nel caso in cui d è uguale a 29 ovvero

$$d = \mathrm{mod}(25+19a,30)$$

8. $1583 \le N \le 1699$

Si osserva che nel 1700 si era applicata l'equazione solare e quindi, andando dietro nel tempo, la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in alto cioè:

$$d = \mathrm{mod}(23+19a,30)-1 = \mathrm{mod}(22+19a,30)$$

Quando $\mathrm{mod}(23+19a,30)-1=-1$ si ragiona come nel caso 7 e quindi

$$d = \mathrm{mod}(22+19a,30)$$

9. Prima del 1582

Osserviamo che tanto nel 1600 quanto prima del 1582, con il calendario Giuliano, non si applicano né l'equazione solare né quella lunare; bisogna solo tener presente che all'epoca della riforma del calendario la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare è stata spostata in basso di 7 posizioni. Evidentemente andando dietro nel tempo si ha:

$$d = \mathrm{mod}(22+19a,30)-7 = \mathrm{mod}(15+19a,30)$$

Tutti i casi speciali sono trattati come nei punti precedenti e quindi $d = \mathrm{mod}(15+19a,30)$

In maniera più compatta possiamo scrivere:

$$\boxed{d = \mathrm{mod}(m+19a,30)}$$

dove m è preso dall'ultima tabella.

8.3 La Domenica di Pasqua nel secolo XVIII

Gauss indica con E il numero di giorni che intercorrono tra il primo giorno dopo il primo plenilunio di primavera e la Domenica di Pasqua ($0 \le E \le 6$). Inizialmente il problema si risolve per gli anni N compresi tra il 1700 e il 1799. Ponendo:

i = numero di anni bisestili tra il 1700 e l'anno N (incluso)

g = il numero di giorni tra la domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N

avremo che $g = 365(N-1700)+22+d+E-21+i = 1+d+E+365(N-1700)+i$

Il valore $4[N/4] = N-\mathrm{mod}(N,4)$ fornisce N o il primo anno bisestile prima di N; quindi se N è compreso tra il 1700 e il 1799 abbiamo che $N-\mathrm{mod}(N,4)-1700$ fornisce il numero di anni compresi tra il 1700 e l'ultimo anno bisestile che non segue l'anno N.

Avremo allora che:

$$i = \frac{1}{4}(N-\mathrm{mod}(N,4)-1700) = \frac{1}{4}(N-b-1700) \quad \text{ricordando che } b = \mathrm{mod}(N,4)$$

Sostituendo *i* nella prima espressione, otteniamo che

$$g = 1+d+E+365(N-1700)+\frac{1}{4}(N-b-1700)$$

Chiaramente per definizione il numero di giorni tra due domeniche nel calendario deve essere necessariamente divisibile per 7 e quindi g è divisibile per 7.

Consideriamo ora una serie di espressioni, partendo dalla precedente, tutte divisibili per 7.

Osservando che $\frac{1}{4}(N-b-1700)$ è un intero, allora $\frac{7}{4}(N-b-1700)$ sarà un numero divisibile per 7 e quindi:

$$1+d+E+365(N-1700)+\frac{1}{4}(N-b-1700)+\frac{7}{4}(N-b-1700)=1+d+E+365(N-1700)+2(N-b-1700)$$

è divisibile per 7 .

Semplificando si vede che: $1+d+E+367(N-1700)-2b$ è divisibile per 7.

Osservando ora che il numero $364(N-1700)$ è divisibile per 7 possiamo togliere tale quantità dalla precedente espressione ottenendo che $1+d+E+3(N-1700)-2b$ è divisibile per 7.

Semplificando $1+d+E+3N-5100-2b$ è divisibile per 7. Semplificando ancora $d+E+3N-5099-2b$ è divisibile per 7. Aggiungendo 5096, che è un numero divisibile per 7, otteniamo che $d+E+3N-3-2b$ è ancora divisibile per 7. Ricordando che $c=\mathrm{mod}(N,7)$ abbiamo che $3N-3c=3N-3\left(N-7\left[N/7\right]\right)=21\left[N/7\right]$ è divisibile per 7 e quindi sottraendo $3N-3c$ all'espressione del passo precedente otteniamo che $d+E+3c-3-2b$ è ancora divisibile per 7. Sottraendo l'espressione precedente a $7c+7d$ otteniamo che $4c+6d-E+3+2b$ è ancora divisibile per 7. Ancora, scambiando i termini, si ha che $3+2b+4c+6d-E$ è divisibile per 7.

Ricordando che $0\le E\le 6$, dividendo $3+2b+4c+6d=(3+2b+4c+6d-E)+E$ per 7 vediamo subito che il resto deve essere necessariamente uguale ad E. Ricordando che, se $1700\le N<1799$ $n=3$ allora $E=e=\mathrm{mod}(3+2b+4c+6d,7)$, allora la domenica di Pasqua cadrà il $22+d+e$ di marzo; chiaramente se $22+d+e\ge 31$ la Pasqua cadrà il $22+d+e-31$ di aprile.

8.4 La domenica di Pasqua in un secolo qualunque.

Anche questa volta dobbiamo distinguere diversi casi.

1. $1800\le N\le 1899$

Il 1800 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-1$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E=\mathrm{mod}(1+3+2b+4c+6d,7)=\mathrm{mod}(4+2b+4c+6d,7)$$

2. $1900\le N\le 1999$

Il 1900 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-2$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E=\mathrm{mod}(2+3+2b+4c+6d,7)=\mathrm{mod}(5+2b+4c+6d,7)$$

3. $2000\le N\le 2099$

Il 2000 non è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è ancora

$$E=\mathrm{mod}(2+3+2b+4c+6d,7)=\mathrm{mod}(5+2b+4c+6d,7)$$

4. $2100\le N\le 2199$

Il 2100 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-3$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \mathrm{mod}(3+3+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(6+2b+4c+6d,7)$$

5. $2200 \le N \le 2299$

Il 2220 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la Domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-4$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \mathrm{mod}(4+3+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(7+2b+4c+6d,7)$$

6. $2300 \le N \le 2399$

Il 2300 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la Domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-5$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \mathrm{mod}(5+3+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(8+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(1+2b+4c+6d,7)$$

7. $2400 \le N \le 2499$

Il 2400 non è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la Domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è ancora

$$E = \mathrm{mod}(5+3+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(8+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(1+2b+4c+6d,7)$$

8. $1583 \le N \le 1699$

In questo caso l'anno N precede il 1700 e in maniera simile a prima calcoliamo il numero di giorni che intercorrono tra la Domenica di Pasqua dell'anno N e la Domenica 21 Marzo del 1700.
In maniera simile a prima poniamo:

$\bar{i}$ = Numero di anni bisestili tra il primo anno bisestile dopo N e il 1700

$\bar{g}$ = il numero di giorni tra la domenica di Pasqua dell'anno N e domenica 21 marzo 1700.

Avremo allora che $\bar{g} = 365(1700-(N+1)) + (365-(22+d+E)) + 21 + \bar{i}$ e semplificando:

$$\bar{g} = 365(1700-N) - d - E + \bar{i} = \bar{i} - (365(N-1700) + 1 + d + E)$$

D'altra parte $N - \mathrm{mod}(N,4)$ è il primo anno bisestile prima di N e quindi $N - \mathrm{mod}(N,4) + 4$ è il primo anno bisestile dopo N.

Allora otteniamo $\bar{i} = \frac{1}{4}(1700 - N + b) - 1$, ricordando che $b = \mathrm{mod}(N,4)$.

Quindi $\bar{g} = \frac{1}{4}(1700 - N + b) - 1 - (365(N-1700) + 1 + d + E)$

cioè $= -1 - \left(365(N-1700) + 1 + d + E + \frac{1}{4}(N - b - 1700)\right)$

e ragionando in maniera simile a prima otteniamo che

$$E = \mathrm{mod}(2+2b+4c+6d,7)$$

9. $N \le 1582$

In questo caso possiamo fare un ragionamento del tutto simile a prima, tenendo conto del fatto che nel 1582 con la riforma Gregoriana si erano tolti dieci giorni.

Allora in questo caso $\bar{g} = -11 - \left(365(N-1700) + 1 + d + E + \frac{1}{4}(N - b - 1700)\right)$ e quindi

$$E = \mathrm{mod}(-8+2b+4c+6d,7) = \mathrm{mod}(6+2b+4c+6d,7)$$

Per concludere riepilogando tutti i casi possiamo scrivere in maniera più compatta

$$\boxed{E = \mathrm{mod}(n+2b+4c+6d,7)}.$$

8.5 I casi speciali della formula di Gauss

La prima eccezione

Quando $22+d+e-31=26$ abbiamo che $d+e=35$ e quindi sia d che e devono assumere il loro valore massimo cioè $d=29$ ed $e=6$ e quindi la prima Luna piena ecclesiastica di primavera deve cadere domenica 19 aprile fuori dell'intervallo di 29 giorni in cui cadono le lune pasquali.

Questa situazione deriva dal fatto che, per effetto degli spostamenti dei numeri d'oro sugli almanacchi, può capitare che qualche numero d'oro non occorra nell'intervallo dei 29 giorni. In questo caso il canone gregoriano prevede uno spostamento indietro di un giorno del numero d'oro sull'almanacco o meglio uno spostamento della Luna piena ecclesiastica che cade il 19 Aprile al 18 Aprile. Spostando la Luna ecclesiastica di primavera dal 19 aprile al 18 aprile, il primo giorno dopo la Luna piena ecclesiastica è domenica 19 aprile cioè la domenica di Pasqua.

Ad esempio cerchiamo di calcolare la Pasqua dell'anno 2201.

Il suo numero d'oro è $G=1+\mathrm{mod}(2201,19)=17$ e

$$a=\mathrm{mod}(2201,19)=16$$

$$b=\mathrm{mod}(2201,4)=1$$

$$c=\mathrm{mod}(2201,7)=3$$

$$d=\mathrm{mod}(329,30)=29$$

$$e=\mathrm{mod}(2+12+174,7)=\mathrm{mod}(188,7)=6$$

$$22+d+e-31=26$$

Stiamo evidentemente nel caso descritto sopra come si può verificare da un controllo della tabella pasquale a fianco del secolo *XXIII*.

Quindi dobbiamo spostare di una posizione indietro nell'almanacco il numero d'oro XVII cioè da Domenica 19 Aprile 2201 a Sabato18 Aprile 2201; evidentemente Pasqua è domenica 19 aprile.

Tabella Pasquale 2200-2299		
Giorni	Marzo	Aprile
1	XVI	V
2	V	
3		XIII
4	XIII	II
5	II	
6		X
7	X	
8		XVIII
9	XVIII	VII
10	VII	
11		XV
12	XV	IV
13	IV	
14		XII
15	XII	I
16	I	
17		IX
18	IX	
19		XVII
20	XVII	VI
21	VI	
22		XIV
23	XIV	III
24	III	
25		XI
26	XI	
27		XIX
28	XIX	VIII
29	VIII	XVI
30	C	V
31	D XVI	

La seconda eccezione

Quando $22+d+e-31=25$ abbiamo che $d+e=34$ e quindi, tenendo sempre conto del fatto che $0\le e\le 6$, $0\le d\le 29$, può accadere che a) $d=29$ ed $e=5$ oppure che b) $d=28$ ed $e=6$.

Nel primo caso ci troviamo di fronte ad una situazione molto simile a prima: infatti la Luna piena ecclesiastica nell'anno in esame cade lunedì 19 aprile, non comparendo nell'arco del periodo pasquale. Allora la luna piena di Pasqua si sposterà ancora a domenica 18 aprile e Pasqua cadrà necessariamente il domenica 25 aprile.

Nel secondo caso la situazione cambia leggermente; il fatto che ed $e=6$ implica che la luna piena pasquale cade domenica 18 aprile.

Quando, in questo caso, il numero d'oro assume valori tra 12 e 19 e quindi, quando $a>10$, siamo nella situazione in cui un numero d'oro non occorre nell'intervallo dei 29 giorni e la posizione precedente nell'almanacco è a sua volta occupata da un altro numero d'oro che è quello in questione.

Il canone gregoriano prevede che in questa situazione entrambi i numeri si debbano spostare indietro nel calendario e quindi, nel nostro caso, la luna piena pasquale si sposta a sabato 17 aprile; in questo caso Pasqua cadrà domenica 18 aprile.