

• Numero 10 – Luglio 2009 •



Thomas Claveirole, *Geometry for Dummies*
<http://www.flickr.com/photos/thomasclaveirole/538797534/>

GEOMETRIA NON EUCLIDEA – CURVA SEGMENTATA – IL SOFTWARE
CARTESIO - LA DATA DELLA PASQUA – TEOREMI DI PUNTO FISSO

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .rtf o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail, CV sintetico (100-200 parole).

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo [3].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione. La redazione

non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it

Diego Alberto
Luca Barletta
Michele Mazzucato

Hanno collaborato a questo numero

Antonio Bernardo, Stefano B., Luca Francesca, Rosa Marincola, Lorenzo Peroglio, Bruno Sanchini.

Sommario

115. La cosiddetta geometria non euclidea	5
Felix Klein	
116. Curva segmentata	11
Bruno Sanchini	
117. Lo studio dei poliedri col software libero Cartesio	22
di Rosa Marincola	
118. I teoremi di punto fisso e i film d'azione	32
<i>Dialogo tra due personaggi di un film americano</i>	
<i>(ma vanno bene anche certi cartoni animati giapponesi!)</i>	
Stefano B.	
119. Il Metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua	35
Lorenzo Peroglio	
120. Lo scaffale dei libri	47

Editoriale

In questo numero un importante scritto di Felix Klein del 1871 che ha determinato un chiarimento sul ruolo matematico delle cosiddette geometrie non euclidee: tre tipi di geometrie perfettamente equivalenti dal punto di vista matematico. Klein le fa discendere come casi particolari del passaggio dalla geometria proiettiva alla geometria metrica: per aggiungere una metrica alla geometria proiettiva si può fissare una superficie di secondo grado come superficie fondamentale. A seconda del tipo di superficie usata si ha un modello per le diverse geometrie: ellittica, parabolica e iperbolica. Bruno Sanchini ci presenta una famiglia di segmenti che realizzano una curva intrecciata a maglia rombica dalla forma simile ai centrini della nonna. Le equazioni costruite possono essere di una qualche utilità per chi si interessa di realizzare a video rappresentazioni di oggetti complessi come appunto un centrino. Rosa Marincola continua un tema che in questa rivista ha sempre avuto un ruolo di primo piano: la presentazione di software utili per la didattica e le applicazioni della matematica. Marincola presenta in questo articolo il software libero Cartesio che permette di disegnare e rappresentare i poliedri. Stefano B., che vuole restare in incognito, racconta l'essenza dei teoremi di punto fisso con uno stile narrativo piuttosto originale: due personaggi da fumetto d'azione che tra bazooka, spari e caccia all'uomo hanno modo di parlare di matematica e tiri al bersaglio. Lorenzo Perogio ci presenta il complicatissimo metodo per stabilire il giorno della Pasqua. Infine le recensioni di due libri: Una introduzione alla Teoria della Relatività di Amadori e Lussardi e la nuova edizione de Il Risparmio Tradito di Beppe Scienza.

Antonio Bernardo

115. La cosiddetta geometria non euclidea

di Felix Klein

[Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie]

Memoria presentata da A. Clebsch alla Società Reale delle Scienze di Gottinga, pubblicata nel Notiziario della suddetta Società numero 17 del 30 agosto 1871

Traduzione italiana a cura di Antonio Bernardo¹

La discussione che segue si riferisce alla cosiddetta geometria non euclidea di Gauss, di Lobacevskij e di Bolyai, nonché alle osservazioni avanzate da Riemann e da Helmholtz sui fondamenti delle nostre rappresentazioni geometriche. La presente discussione, tuttavia, non deve essere impostata sulle speculazioni filosofiche, che hanno condotto ai lavori suddetti: il suo principale scopo è quello di esporre, limitatamente alla teoria delle parallele, in modo nuovo e chiaro i risultati matematici di quei lavori e quindi di offrire di essi una formulazione semplice e generale. Per raggiungere un tale scopo, sarà necessario passare attraverso la geometria proiettiva e dimostrare l'indipendenza di quest'ultima dalla teoria delle parallele. In realtà, seguendo il procedimento di Cayley, è possibile costruire una metrica proiettiva generale riferita a una qualsiasi superficie di secondo grado considerata come superficie fondamentale. Questa metrica proiettiva offre, a seconda del tipo di superficie di secondo grado usata, un modello per le diverse teorie delle parallele formulate nei lavori citati. Essa, comunque, non fornisce soltanto un modello di quelle teorie, ma ne rivela addirittura l'intrinseca struttura.

I. Le diverse teorie delle parallele

L'undicesimo assioma di Euclide² è, lo sappiamo, equivalente alla proposizione secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti. Legendre ha dimostrato³ che la somma degli angoli interni di un triangolo non può essere maggiore di due retti; e ancora che, se in un triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, la stessa cosa deve valere per qualsiasi triangolo. Legendre, tuttavia, non è riuscito a dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo non può essere minore di due retti.

Quest'ultima riflessione sembra aver costituito il punto di partenza delle ricerche di Gauss sull'argomento. Gauss riteneva impossibile dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo sia uguale a due retti, pensava invece che si potesse costruire una geometria logicamente coerente nella

¹ Questa traduzione è stata pubblicata in F.Klein, *Il programma di Erlangen*, a cura di A. Bernardo, Editrice La Scuola, Brescia, 1998; viene riprodotta qui per concessione dell'editore.

² L'undicesimo assioma di Euclide viene normalmente citato come quinto postulato. La duplice definizione è dovuta al fatto che la prima edizione in lingua latina del 1482 eseguita sui testi arabi distingue gli assiomi dai postulati, cosa che non si verifica nell'edizione greca del 1533. Ne consegue che l'affermazione euclidea sulle rette parallele è il quinto postulato dell'edizione latina e l'undicesimo assioma di quella greca. Cfr. R. BONOLA, *La geometria non euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna, Zanichelli, 1906, p. 16. NOTA DEL TRADUTTORE.

³ Questa dimostrazione e quella di Lobacevskij sullo stesso argomento, postula la lunghezza infinita della retta. Se si lascia cadere questa ipotesi (cfr. il testo che segue), allora cadono anche le dimostrazioni, che invece dovrebbero valere anche per la geometria sulla superficie sferica. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

quale la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti. Gauss chiamò questa geometria non euclidea⁴: si è occupato a lungo dell'argomento ma purtroppo, a parte alcuni cenni, non ha pubblicato nulla a riguardo. Nella geometria non euclidea di Gauss, è presente una certa costante⁵ che caratterizza la metrica spaziale. Quando la suddetta costante ha un valore infinito, si costruisce l'usuale geometria euclidea. Quando, invece, la costante ha un valore finito, si ottiene una diversa geometria, per la quale valgono, a titolo d'esempio, le seguenti proposizioni: la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti e questa somma è tanto più piccola quanto più è grande la superficie del triangolo. Per un triangolo, i cui vertici siano infinitamente lontani, la somma degli angoli interni è nulla. Per un punto esterno a una retta, si possono tracciare due parallele, cioè due linee che tagliano la retta, dall'uno o dall'altro lato, in un punto infinitamente lontano. Le rette che passano per il punto, rimanendo tra le due parallele, non tagliano mai la retta data.

A questa stessa geometria non euclidea sono pervenuti Lobacevskij⁶, professore di matematica nell'Università di Kazan, e, qualche anno dopo, il matematico ungherese J. Bolyai⁷; questi autori hanno trattato l'argomento in pubblicazioni specifiche. I loro lavori sono rimasti quasi ignorati, finché la corrispondenza tra Gauss e Schumacher, pubblicata nel 1862, non ha richiamato l'attenzione su di essi. Da quel momento, si è diffusa l'opinione che la teoria delle parallele sia stata finalmente chiarita, nel senso che è stata riconosciuta l'impossibilità di determinarla in modo univoco.

Una tale opinione ha subito, comunque, una sostanziale modifica, sia nel 1867, quando, dopo la morte di Riemann, è apparsa la sua lezione di abilitazione del 1854, *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria*, sia subito dopo, quando Helmholtz ha pubblicato, in questo stesso Notiziario (1868), le sue ricerche *Sui fatti che stanno a fondamento della geometria*⁸.

Nello scritto di Riemann, è detto esplicitamente che l'illimitatezza dello spazio, sperimentabile empiricamente, non ne implica di necessità l'infinitezza. È in realtà possibile pensare, e ciò non contraddice la nostra intuizione che si riferisce sempre e solo a una parte finita dello spazio, che lo spazio sia finito e ritorni su se stesso: la geometria del nostro spazio diverrebbe allora la geometria di una varietà a tre dimensioni collocata su di una sfera a quattro dimensioni. Quest'idea, che si trova anche in Helmholtz, comporterebbe che la somma degli angoli interni di un triangolo (come l'usuale triangolo sferico) sia maggiore⁹ di due retti e tanto maggiore quanto più grande è l'area del triangolo. La linea retta non avrebbe allora punti all'infinito e quindi non si potrebbe tracciare da un punto dato nessuna parallela a una data retta.

Una geometria fondata su affermazioni di un tale tipo si verrebbe a porre a fianco della geometria euclidea proprio come quella già menzionata di Gauss, di Lobacevskij e di Bolyai. Mentre, in quest'ultima, ogni singola retta possiede due punti [reali] all'infinito, nell'altra le rette non hanno punti [reali] all'infinito (ma solo due punti immaginari). Tra le due, come caso intermedio, si trova la geometria euclidea, nella quale la retta possiede due punti [reali] all'infinito ma coincidenti.

⁴ Cfr. SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN, *Gausfi zum Gedächtnis*, p. 81. Inoltre alcune lettere dello scambio epistolare di Gauss con Schumacher. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

⁵ Nel 1831, in una lettera a Schumacher, Gauss indica una formula per calcolare la lunghezza della circonferenza nella geometria generale, cioè nella geometria che esclude l'assioma delle parallele. Nella formula compare un fattore costante che Gauss aveva lasciato indeterminato, poiché a suo avviso, doveva essere determinato da prove sperimentali. Gauss era convinto che bisognasse supporre questa costante di valore infinitamente grande. NOTA DEL TRADUTTORE.

⁶ In *Kasanschen Boten* 1829. - *Schriften der Universität Kasan* 1836-38. - *Crelles Journal*, V. 17, 1837 (Geometrie imaginaire). - *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Berlin 1840. *Pangeometrie*. Kasan 1855 (La Pangeometria si trova in traduzione italiana nel voi. 5 del «Giornale di Matematiche», 1867); *Ges. Werke*, vol. I, II. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

⁷ In *un'Appendice* ai lavori di W. BOLYAI: *Tentamen juventutem...* Maros-Vasarhely, 1832. Una traduzione italiana della stessa nel voi. 6 del «Giornale di Matematiche», 1868. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

⁸ Cfr. H. L. VON HELMHOLTZ, *Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen*, «*Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*», 1868, pp. 193-222. [H. VON HELMHOLTZ, *Opere*, ed. it. a cura di V. CAPPELLETTI, Torino, U.T.E.T., 1973, pp. 421-444]. NOTA DEL TRADUTTORE.

⁹ Le contrapposte dimostrazioni di Legendre e Lobacevskij presuppongono, come abbiamo già osservato, che lo spazio sia infinito. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

Servendomi del linguaggio usuale, denoterò rispettivamente queste tre geometrie come *iperbolica*, *ellittica*¹⁰ e *parabolica*, a seconda che i due punti all'infinito della retta siano reali, immaginari o [reali e] coincidenti.

II. Visualizzazione delle tre geometrie per mezzo della determinazione metrica generale di Cayley

L'esigenza di visualizzare le speculazioni molto astratte, che hanno condotto alla costruzione di tre distinte geometrie, ha sollecitato la ricerca di metriche in grado di rendere concepibili modelli delle suddette geometrie e di dimostrare la coerenza interna di ciascuna di esse.

La geometria parabolica non necessita della suddetta visualizzazione, in quanto coincide con la geometria euclidea, che è per noi di uso corrente.

Per le geometrie ellittica e iperbolica sono stati creati modelli, che spiegano le caratteristiche di queste geometrie per mezzo di oggetti misurabili in senso euclideo. Questi modelli, comunque, rendono ragione solo della parte planimetrica delle geometrie in questione. Beltrami, al quale si deve la visualizzazione della geometria iperbolica¹¹, ha dimostrato che non è possibile qualcosa di analogo per lo spazio. La rappresentazione planimetrica della geometria ellittica è, com'è facile capire, la geometria su di una sfera¹², o più in generale, la geometria di una superficie a curvatura costante positiva. La geometria iperbolica viene invece interpretata per mezzo di una superficie a curvatura costante negativa. Quest'ultima interpretazione, purtroppo, non consente, così almeno sembra, un'immagine dell'intero piano: in quanto, la superficie a curvatura costante negativa è sempre limitata da una curva che ritorna su se stessa¹³.

Io voglio, in primo luogo, costruire modelli capaci di dominare completamente, cioè sia nel piano sia nello spazio, le caratteristiche delle tre citate geometrie. Dimostrerò poi che questi modelli non sono semplici interpretazioni delle suddette geometrie, bensì un modo di evidenziarne l'interna struttura e quindi di renderle pienamente comprensibili.

I modelli in questione trattano il piano e lo spazio come oggetti misurabili ma si servono di una metrica diversa da quella usuale, precisamente di quella metrica che nella geometria proiettiva si presenta come una generalizzazione della metrica usuale. Questa metrica generale è stata costruita da Cayley¹⁴, ma il punto di vista di Cayley è diverso da quello che presento in questo scritto. Cayley ha costruito la metrica generale per dimostrare che la geometria metrica (euclidea) può essere concepita come una parte speciale della geometria proiettiva. Cayley ha trattato soltanto il piano e ha dimostrato che nel piano proiettivo si può individuare una metrica per mezzo di una qualsiasi conica, assunta come "assoluto". Se questa conica degenera in una coppia di punti immaginari, si ha una metrica del tipo di quella che applichiamo (nella geometria euclidea); in particolare si ottiene la metrica usuale, quando si fanno coincidere entrambi i punti fondamentali immaginari con due particolari punti del piano, precisamente i due punti ciclici.

Trasferirò la metrica generale di Cayley allo spazio ed esporrò il problema, diversamente da quel che ha fatto Cayley, dando maggiore risalto agli aspetti geometrici. Considero una qualsiasi superficie di secondo grado e la assumo come superficie "fondamentale". La retta che unisce due qualsiasi punti dello spazio interseca la superficie fondamentale in altri due punti. I quattro punti in questione formano

¹⁰ L'usuale [geometria] sferica sarà quindi indicata come un caso particolare di geometria "ellittica". [1871] NOTA DELL'AUTORE.

¹¹ *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea*, «Giornale di Matematiche» v. 6, 1868. *Scritti*, v. I, pp. 374-406. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

¹² In questo testo non è stata fatta una distinzione netta tra la geometria ellittica e la geometria sferica, come è stato fatto nella memoria *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, «Mathematische Annalen», (4) 1871. [1921] NOTA DELL'AUTORE.

¹³ Ciò è stato infatti confermato da un successivo teorema di Hilbert. Cfr. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Edizione 2 e seguenti, appendice V. [1921] NOTA DELL'AUTORE.

¹⁴ Cfr. *Sixth Memoir upon Quantics*, «Phil. Trans.», V. 149 [*Coli. Papers*, v. II, pp. 583-592]. Confronta anche la traduzione di Fiedler delle Coniche di Sal-mon, 2 ed. (Lipsia 1860), o Fiedler: *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen* (Lipsia 1862). [1871] NOTA DELL'AUTORE.

un birapporto; il logaritmo di questo birapporto, moltiplicato per una certa costante arbitraria¹⁵ e, sarà per definizione la distanza tra i punti dati¹⁶. Analogamente, quando si considerano due piani, è possibile metterli in relazione, per mezzo della retta in cui s'intersecano, con due piani tangenti alla superficie fondamentale. Questi ultimi due piani assieme ai due considerati formano un birapporto. // logaritmo di questo birapporto, moltiplicato per una costante arbitraria c' , lo indichiamo come angolo tra i due piani.

Stando alle suddette definizioni, i punti della superficie fondamentale sono a distanza infinita da tutti gli altri punti: la superficie fondamentale è quindi il luogo dei punti all'infinito. Ugualmente, i piani tangenti alla superficie fondamentale sono piani che formano un angolo di ampiezza infinita con un qualsiasi altro piano. Tutti i punti della tangente alla superficie hanno distanza nulla tra di loro. Due piani, che si intersecano lungo una retta che è tangente alla superficie, formano tra di loro un angolo nullo. Una sfera è, allora, una superficie di secondo grado che tocca la superficie fondamentale lungo una curva piana.

Il centro della sfera è il polo del piano. Al posto dei movimenti dipendenti da sei parametri, che lasciano inalterata la metrica usuale, c'è ora un ciclo¹⁷ di altrettante trasformazioni lineari. La superficie fondamentale, infatti, come ogni superficie di secondo grado, si trasforma in se stessa per mezzo di trasformazioni lineari dipendenti da sei parametri. Queste trasformazioni lineari si scindono in due schiere a sei parametri, a seconda che entrambi i sistemi di rette generatrici della superficie siano interscambiabili oppure no. In questa sede, parlerò solo delle trasformazioni del secondo tipo. Tuttavia, anche le trasformazioni del primo tipo lasciano inalterate le distanze, poiché esse, come le altre, non alterano i birapporti; i logaritmi dei quali sono per definizione le distanze. Le trasformazioni lineari del primo tipo non corrispondono, comunque, ai movimenti dello spazio ma piuttosto a quelle trasformazioni che trasformano figure spaziali in figure congruenti disposte in modo simmetrico¹⁸.

Da questa determinazione metrica generale si deduce, con un passaggio al limite, una geometria metrica analoga alla usuale geometria *parabolica*: ciò si verifica, quando la superficie fondamentale di secondo grado degenera in una conica immaginaria. Nel caso particolare in cui questa conica è il cerchio immaginario all'infinito, si ottiene esattamente l'usuale geometria metrica.

La determinazione metrica proiettiva generale produce inoltre, con una scelta appropriata della superficie fondamentale, una geometria metrica in grado di rappresentare sia la geometria *ellittica*, sia quella *iperbolica*: le suddette rappresentazioni sono proprio i modelli di geometria ellittica e iperbolica, di cui si è parlato in precedenza.

Si perviene a una geometria metrica corrispondente alla geometria *ellittica*, quando la superficie fondamentale è assunta come immaginaria. In questo caso, evidentemente, non esiste nessuna retta con punti reali all'infinito; di conseguenza, la retta si presenta come una curva chiusa di lunghezza finita. Otterremo, in particolare, proprio le formule (trigonometriche) tipiche della geometria ellittica. Si tratta

¹⁵ Cayley definisce la distanza dei due punti con una formula, nella quale a questa costante viene dato un valore particolare: $\frac{2}{\pi} \sqrt{-1}$. Lo stesso vale per la costante C. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

¹⁶ Klein intende dimostrare la possibilità di fondare la metrica sulla geometria proiettiva. Per stabilire la distanza tra due punti dello spazio, che possiamo chiamare A e B, cerca, sulla superficie fondamentale, altri due punti C e D in modo da ottenere il birapporto (AC:BC) : (AD:BD). Dato che il suddetto birapporto costituisce un invariante proiettivo, Klein dimostra che il logaritmo di esso esprime la distanza fra i due punti A e B e che la suddetta distanza può assumere valori diversi in funzione del tipo di superficie assunta come fondamentale. Estende poi il discorso del birapporto dei punti ai piani, per individuare attraverso il logaritmo di questo secondo birapporto la misura degli angoli. NOTA DEL TRADUTTORE.

¹⁷ Klein usa "ciclo" invece di "gruppo": quando ha scritto questo saggio è ancora convinto che non si possa usare la nozione di gruppo per un insieme infinito e continuo di elementi. NOTA DEL TRADUTTORE.

¹⁸ Klein esclude dalla propria trattazione le simmetrie. Queste trasformazioni, pur conservando le distanze, alterano la forma delle figure, allo stesso modo in cui uno specchio scambia il lato sinistro con il lato destro di un oggetto riflesso. Nella geometria iperbolica, da un punto passano due parallele a una retta data, e ciascuna di esse incontra la retta data in un punto all'infinito che si trova sulla superficie fondamentale. Poiché nella geometria proiettiva tutte le rette si incontrano in un punto, ogni retta che è compresa tra le due parallele deve incontrare la retta data in un punto. Questo punto non può che trovarsi al di là della superficie fondamentale. NOTA DEL TRADUTTORE.

delle formule dell'usu-ale trigonometria sferica, nella quale entra in gioco la costante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$ che dipende dal raggio della sfera¹⁹.

Si ottiene, invece, una geometria corrispondente a quella *iperbolica*, quando si assume la superficie fondamentale come reale e non rigata, e quando si considerano solo i punti al suo interno. Una tale limitazione all'interno della superficie fondamentale è del tutto naturale. Se ci si trova infatti all'interno della superficie e se è possibile cambiare la propria posizione nello spazio solo in ragione di determinate trasformazioni lineari spaziali, precisamente quelle che per la metrica in questione interpretiamo come i movimenti nello spazio, allora non si potrà mai uscire dall'interno della superficie di secondo grado, perché quest'ultima, in ragione della metrica considerata, si trova all'infinito. Al di là della superficie fondamentale si troverebbe ancora una parte di spazio della cui presenza non si sa niente; ci s'immagina che essa esista solo perché, se due rette giacenti in un piano non si incontrano mai, esse dovrebbero incontrarsi nello spazio al di là della superficie²⁰. Se invece ci si limita alle costruzioni all'interno della superficie e alla metrica a essa relativa, valgono le leggi della geometria iperbolica. Ogni retta, per esempio, ha due punti reali all'infinito, perché qualsiasi retta interna alla superficie taglia quest'ultima in due punti reali. Per un punto si possono condurre due parallele a una retta: le parallele sono quelle linee che collegano il punto in questione con i due punti in cui la retta data taglia la superficie fondamentale. È nulla la somma degli angoli interni di un triangolo con i vertici all'infinito, cioè di un triangolo i cui vertici si trovino sulla superficie fondamentale: infatti, due linee che si incontrano sulla superficie fondamentale (due parallele) formano un angolo nullo, e così di seguito. Infine, la costante c , per la quale deve essere moltiplicato il logaritmo del birapporto onde ottenere la distanza tra due punti, è la citata costante caratteristica propria della geometria iperbolica.

III. Indipendenza della geometria proiettiva dalla teoria delle parallele. fondamento delle tre geometrie metriche

In precedenza, ho individuato per le geometrie metriche ellittica e iperbolica adeguati modelli nella metrica generale di Cayley, assumendo la superficie fondamentale una volta come immaginaria e un'altra volta come reale e non rigata. Allo stesso modo, ho individuato un modello per la usuale geometria parabolica, nel caso in cui la superficie fondamentale degenera in una conica immaginaria. Questo modello diventa visualizzabile, diventa cioè un oggetto della geometria parabolica, quando si faccia coincidere la conica fondamentale con una particolare conica, il cerchio immaginario all'infinito. Analogamente, le geometrie metriche, che ho rispettivamente costruito come modelli delle geometrie ellittica e iperbolica, diventano proprio queste geometrie, se si fa coincidere la superficie fondamentale di queste geometrie con una particolare superficie di secondo grado, quella all'infinito.

Questa convinzione deriva dal fatto che la geometria proiettiva è indipendente dal problema delle parallele²¹. Infatti, per sviluppare la geometria proiettiva e dimostrarne la validità in un qualsiasi spazio assegnato e limitato, è sufficiente realizzare in questo spazio delle costruzioni, che non vanno al di fuori di esso e che riguardano solo le cosiddette relazioni di posizione. I bi-rapporti (unici elementi fissi della geometria proiettiva) non devono inoltre essere definiti attraverso relazioni di distanze, come di solito si fa, perché un tale modo di operare presuppone la conoscenza di una metrica. Nell'opera di von Staudt, *Contributi alla geometria di posizione*²², sono date le indicazioni necessarie per definire il birapporto come un

¹⁹ Per comodità si suppone c come una costante puramente immaginaria. Cfr. *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, «Mathematische Annalen», (4) 1871, §5. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

²⁰ Nella geometria iperbolica, da un punto passano due parallele a una retta data e ciascuna di esse incontra la retta data in un punto all'infinito che si trova sulla superficie fondamentale. Poiché nella geometria proiettiva tutte le rette si incontrano in un punto, ogni retta che è compresa tra le due parallele deve incontrare la retta data in un punto, ogni retta che è compresa tra le due parallele deve incontrare la retta data in un punto. Questo punto non può che trovarsi al di là della superficie fondamentale. NOTA DEL TRADUTTORE.

²¹ Ciò si può verificare facilmente anche nel seguito. Infatti sulla base della geometria ellittica o iperbolica si può, così come è stato fatto per la geometria parabolica, costruire la geometria proiettiva. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

²² *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856, § 27, Nr. 393. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

numero puro²³. Dal birapporto è possibile poi risalire alle coordinate omogenee di punto e di piano, le quali altro non sono che i valori relativi del suddetto birapporto, cosa dimostrata da von Staudt²⁴ e recentemente ripresa da Fiedler²⁵. Rimane invece indeciso se sia possibile trovare i corrispondenti elementi spaziali per tutti i valori delle coordinate. Quando ciò non si verifica, niente impedisce di aggiungere allo spazio elementi reali impropri in modo tale che questi corrispondano ai valori delle coordinate in questione. È quanto accade nella geometria parabolica, quando parliamo del piano all'infinito. Per fondare la geometria iperbolica, invece, si dovrebbe aggiungere un intero pezzo di spazio. Al contrario, nella geometria ellittica non sarebbe necessario aggiungere elementi impropri. Costruendo in questo modo la geometria proiettiva, vi si può introdurre la metrica generale di Cayley. Quest'ultima rimane inalterata, come ho detto poco fa, per trasformazioni lineari a sei parametri considerate come movimenti dello spazio.

Tratto ora i movimenti che di fatto si verificano nello spazio e la metrica alla quale danno origine. Si è visto che i movimenti a sei parametri sono anche trasformazioni lineari. Queste lasciano inalterata una superficie, la superficie dei punti all'infinito. E non ci sono, è facile dimostrarlo, altre superfici che si trasformano in se stesse per trasformazioni lineari a sei parametri, esclusa quella di secondo grado e le sue degenerazioni. I punti all'infinito formano pertanto una superficie di secondo grado e i movimenti dello spazio sono inclusi nel ciclo a sei parametri di trasformazioni lineari, che lasciano inalterata una superficie di secondo grado. Dopo quel che si è detto, risulta evidente che la metrica dei fatti²⁶ è una parte di quella generale proiettiva: per la metrica proiettiva ci si può servire di una qualsiasi superficie di secondo grado, mentre per quella fattuale se ne può assumere una soltanto.

Il tipo di superficie di secondo grado, che si trova a fondamento della metrica fattuale, può essere determinato in maniera più precisa, se si considera che un piano ritorna nella posizione iniziale, quando lo si fa ruotare intorno a un qualsiasi asse posto al finito. Il che equivale ad affermare che una retta posta al finito individua due piani tangenti immaginari sulla superficie fondamentale. Essendo questi due piani all'infinito (cioè piani che con tutti gli altri formano un angolo di ampiezza infinita), se fossero reali si troverebbero nel fascio di piani individuato dalla rotazione e non consentirebbero di fare ritornare un piano del fascio nella sua posizione iniziale dopo una rotazione effettuata sempre nella stessa direzione.

Esistono solo tre casi in cui questi piani sono immaginari o, il che è lo stesso, è immaginario il cono tangente alla superficie fondamentale, cono che parte da un punto dello spazio (accessibile a noi attraverso i movimenti):

1. *La superficie fondamentale è immaginaria.* In questo caso la geometria è ellittica.
2. *La superficie fondamentale è reale, non rigata e ci racchiude.* È l'ipotesi della geometria iperbolica.
3. *(Intermedio) La superficie fondamentale è degenerata in una curva immaginaria.* È l'ipotesi della usuale geometria parabolica.

Siamo così arrivati alle tre geometrie, che, come ho detto nel primo paragrafo, sono state costruite a partire da considerazioni del tutto diverse.

²³ Klein afferma di aver appreso queste notizie sull'opera di von Staudt da alcune conversazioni con il suo amico Stoltz e precisa che il riferimento dato nella nota precedente è falso, anche se il riferimento all'opera di von Staudt è corretto. Cfr. F. KLEIN, *Vorbemerkungen zu den Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie*, [Premesse ai lavori sui fondamenti della geometria], *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, cit., I, pp. 241, 242. NOTA DEL TRADUTTORE.

²⁴ §29, Nr. 411. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

²⁵ Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zurich, XV. 2. (1871). [1871] NOTA DELL'AUTORE.

²⁶ È ipotizzabile che l'espressione "*thatsächlich*", usata da Klein, sia un implicito riferimento all'autorità di Helmholtz, il quale aveva scritto un saggio dal titolo *Sui fatti che sono a fondamento della geometria*, nella quale aveva dimostrato che la geometria euclidea è l'unica compatibile con il 'fatto' che esistono corpi rigidi. NOTA DEL TRADUTTORE.

116. Curva segmentata

di Bruno Sanchini¹

Sunto: Nuova funzione di una "famiglia di segmenti":

$$\frac{y-h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm(|x+h| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{x+h}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1,3,5,\dots \\ \pm(R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |x+h|); & k^2 \leq \left(\frac{x+h}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0,2,4,\dots \end{cases}$$

$R > 0; n = 1,2,3,\dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots$

Seguono le equazioni del "centrino".

Abstract: A new function of a "family of segments":

$$\frac{y-h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm(|x+h| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{x+h}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1,3,5,\dots \\ \pm(R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |x+h|); & k^2 \leq \left(\frac{x+h}{R \cos^n \theta_0}\right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0,2,4,\dots \end{cases}$$

$R > 0; n = 1,2,3,\dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots$

The equations of the "doily effect" follow.

1 Introduzione

Da un mio lavoro di ricerca di nuove funzioni che ha per titolo "Alcune curve e superfici di famiglie di segmenti" ho scelto una curva, la C_1 , denominata: "rete intrecciata a maglia rombica" che presenterò, appunto, nell'articolo seguente. Per la ricerca del suo diagramma e delle sue equazioni (funzione a cinque parametri e a due variabili) utilizzo le traslazioni di assi e le simmetrie. Per partire è necessario introdurre una funzione ausiliaria il cui studio darà origine alla curva, nella quale poi si praticheranno le suddette operazioni. Una volta determinate le equazioni della "rete intrecciata a maglia rombica", la loro rappresentazione nel piano cartesiano avviene per segmenti, vale a dire, che l'elemento generico di rappresentazione della curva è il segmento da individuare mediante le coordinate dei suoi estremi. A partire dalla C_1 (curva madre) si ricavano tante altre equazioni di piccole o grandi famiglie di segmenti (frammenti della curva) la cui scelta (di queste famiglie) si può fare nella maniera più arbitraria e fantasiosa possibile.

¹ brunosanchini@yahoo.it

Seguono alcuni esempi, quasi tutti non oggetto di approfondimento, per ragioni di spazio:

- 1) Curva centrino, per il tipo particolare di superficie che delimita.
- 2) Reticolo della dama, ovvero l'intero contorno dei suoi 8×8 quadrati.
- 3) Rete infinita a maglia quadrata, composta da due fasci di rette parallele ad incidenza normale, tali da racchiudere dei quadrati.
- 4) Contorno delle illimitate file di rombi, posizionati nelle direzioni dell'asse delle x o di qualsiasi altra direzione.

L'articolo che segue si compone di due parti. Nella prima parte si va alla ricerca di γ , attraverso lo studio della funzione. Nella seconda parte, a partire da γ , si va a trovare la curva C_1 , detta di già rete intrecciata a maglia rombica. L'autore, in particolare, vede questa ricerca interessante e stimolante anche per i cultori di informatica.

2 Rete intrecciata a maglia rombica

Data la funzione $f(x)$:

$$\frac{y}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm (|x| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{x}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ \pm (R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |x|); & k^2 \leq \left(\frac{x}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$R > 0; n = 1, 2, 3, \dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$$

trovare il suo diagramma: la curva γ .

La curva γ è simmetrica rispetto agli assi. Non passa per l'origine. Causa la sua simmetria, è sufficiente studiarla solo nel primo quadrante. Segue, dunque, il dominio della $f(x)$, per $x \geq 0$:

$$(D) \quad kR \cos^n \theta_0 \leq x \leq (1+k)R \cos^n \theta_0; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Questi intervalli chiusi (uno per ogni valore di k) rappresentano nel semiasse positivo dell'asse della x una famiglia di segmenti di ampiezza $R \cos^n \theta_0$ e disposti in ordine consecutivo a partire dall'origine degli assi. Ora, se si considera la prima equazione lineare della $f(x)$, presa con il segno positivo, quando $k = 1, 3, 5, \dots$ e se si trovano i valori della $f(x)$ nei punti estremi di tutti gli intervalli del dominio (il punto zero, escluso):

$$(1) \quad y(kR \cos^n \theta_0) = \tan \theta_0 (kR \cos^n \theta_0 - R \cos^n \theta_0 k) = 0$$

$$(2) \quad y((1+k)R \cos^n \theta_0) = \tan \theta_0 (|(1+k)R \cos^n \theta_0| - R \cos^n \theta_0 k) = R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0$$

si avrà che le coordinate

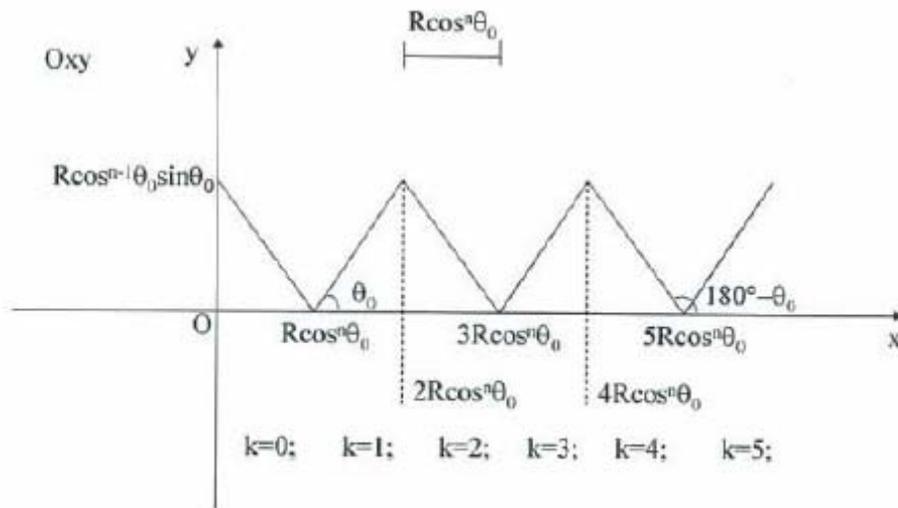
x	$kR \cos^n \theta_0$	$(1+k)R \cos^n \theta_0$
y	0	$R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0$

individuano sulle rette una famiglia di segmenti uguali, tali da formare con il semiasse positivo dell'asse delle x l'angolo θ_0 . Infatti: $\frac{R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0}{R \cos^n \theta_0} = \tan \theta_0$. Si ribadisce: $k = 1, 3, 5, \dots$

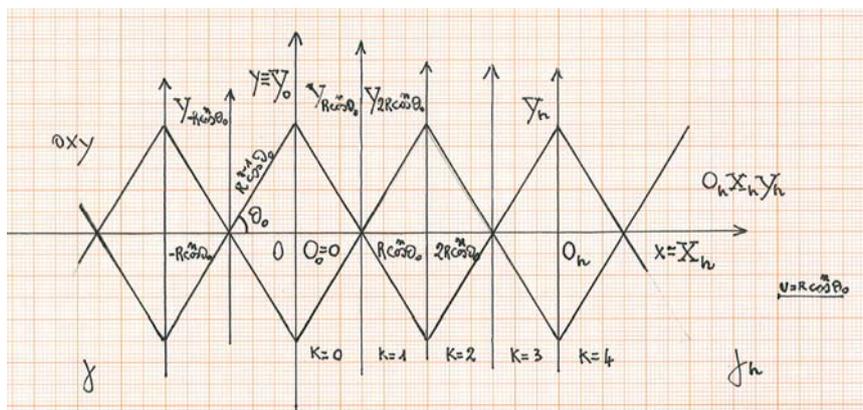
Analogamente, se si farà ciò anche per l'altra equazione lineare della $f(x)$, presa appunto con il segno positivo, quando $k = 0, 2, 4, \dots$, si avrà che le coordinate:

x	$kR \cos^n \theta_0$	$(1+k)R \cos^n \theta_0$
y	$R \cos^{n-1} \theta_0 \sin \theta_0$	0

individuano sulle rette una famiglia di segmenti uguali a quelli trovati, tali però da formare con il semiasse positivo dell'asse delle x un angolo di $180^\circ - \theta_0$. E' dall'insieme delle due famiglie di segmenti che, se rappresentate nel piano, si troverà il diagramma della $f(x)$, per $x \geq 0$ (primo quadrante). Segue la figura di quanto detto sopra:



E quindi, per la rilevata simmetria di γ , ne seguirà sul piano la rappresentazione geometrica della $f(x)$, cioè γ :



Ora, se i punti del piano, già riferiti al sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , li riferisco ad un nuovo sistema di assi cartesiani ortogonali $O_h X_h Y_h$ allorquando fra le coordinate (x, y) e (X_h, Y_h) intercorrono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = X_h + h \\ y = Y_h \end{cases} \text{ con } h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots$$

(traslazione di assi cartesiani per $h \neq 0$; $\begin{cases} x = X_0 \\ y = Y_0 \end{cases}$ per $h = 0$),

dove O_h ha nel vecchio sistema Oxy le coordinate $(h,0)$, e se nella $f(x)$ sostituisco le precedenti relazioni, avrò la funzione $f_h(X_h + h)$ la quale rappresenterà nel sistema nuovo la curva γ che io chiamerò γ_h . Segue la $f_h(X_h + h)$:

$$\frac{Y_h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm (|X_h + h| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{X_h + h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ \pm (R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |X_h + h|); & k^2 \leq \left(\frac{X_h + h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

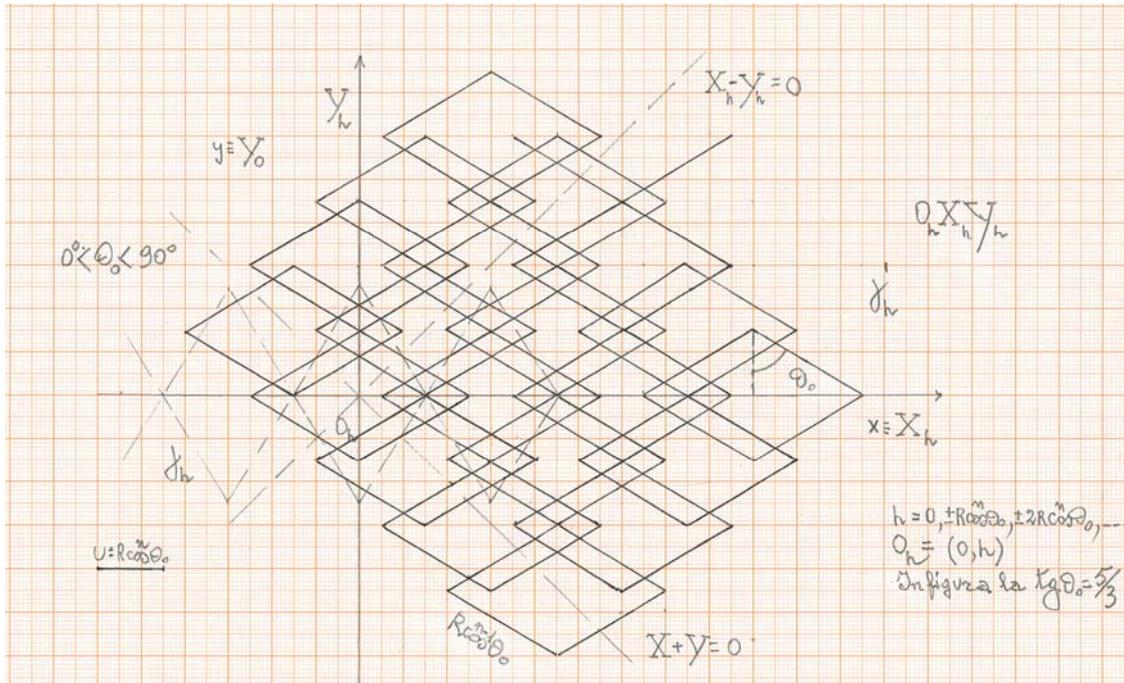
$$R > 0; n = 1, 2, 3, \dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots$$

e la γ_h , riferita al nuovo sistema di riferimento (vedere ancora la figura precedente). Se, poi, nella $f_h(X_h + h)$ scambio l'ufficio tra la X_h e la Y_h si ha la $f_h(Y_h + h)$ che nel nuovo sistema rappresenterà una curva γ'_h che è la simmetrica di γ_h . I loro assi di simmetria sono le rette $X_h \pm Y_h = 0$. Segue la $f_h(Y_h + h)$:

$$\frac{X_h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm (|Y_h + h| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{Y_h + h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ \pm (R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |Y_h + h|); & k^2 \leq \left(\frac{Y_h + h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$R > 0; n = 1, 2, 3, \dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots \text{ e la curva } \gamma'_h.$$

A seguire la figura.



Per uno stesso valore di h , la curva γ'_h si può ottenere dalla curva γ_h , facendola ruotare attorno all'origine O_h di 90° .

Inversamente, se la curva γ'_h viene riferita al vecchio sistema di riferimento Oxy utilizzando le formule inverse della precedente trasformazione di assi, si avrà la seguente funzione:

$$\frac{x-h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm (|y+h| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{y+h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1,3,5,\dots \\ \pm (R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |y+h|); & k^2 \leq \left(\frac{y+h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0,2,4,\dots \end{cases}$$

$$R > 0; n = 1,2,3,\dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots$$

dove y è la variabile indipendente e x la variabile dipendente.

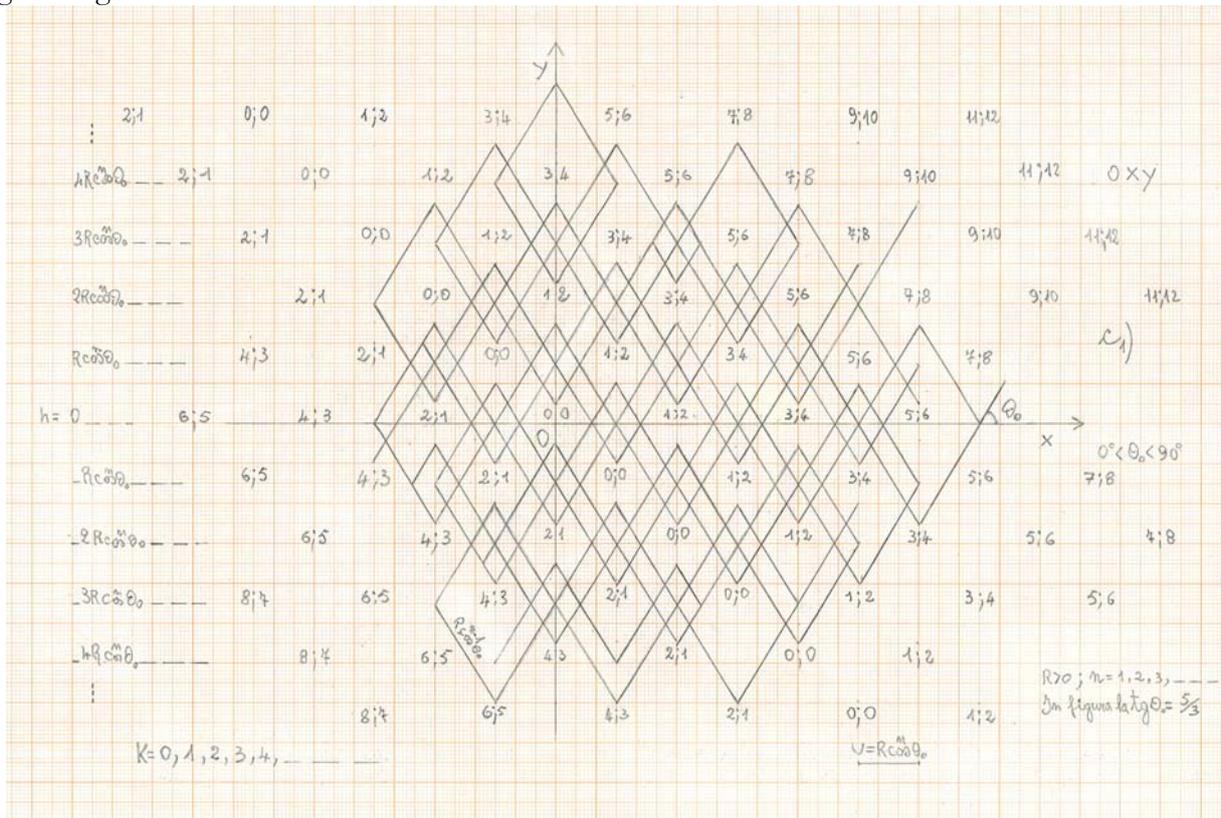
Ed ancora: se si scambia nella precedente funzione l'ufficio tra la x e la y , si ha l'equazione conclusiva r :

$$\frac{y-h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm (|x+h| - R \cos^n \theta_0 k); & k^2 \leq \left(\frac{x+h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 1,3,5,\dots \\ \pm (R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k - |x+h|); & k^2 \leq \left(\frac{x+h}{R \cos^n \theta_0} \right)^2 \leq (1+k)^2; \quad k = 0,2,4,\dots \end{cases}$$

$$R > 0; n = 1,2,3,\dots; 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ; h = 0, \pm R \cos^n \theta_0, \pm 2R \cos^n \theta_0, \dots$$

la cui rappresentazione geometrica si compone dei lati di infiniti rombi.

Sia questa la curva C_1 detta, appunto, "rete intrecciata a maglia rombica".
Segue la figura:



La C_1 si potrebbe ottenere dalla curva γ'_h (riferita al sistema Oxy) facendola ruotare attorno all'origine O degli assi cartesiani di un angolo di 90° .

Per i valori di θ_0 decrescenti, i rombi (i cui contorni compongono il frammento) si schiacciano sull'asse delle x e si allungano. Se $\theta_0 = 45^\circ$ si ha una "rete a maglia quadrata".

Da qui, segue la motivazione del posizionamento dei valori di h e k dell'equazione della rete sulla rete stessa perchè, se presi a piacere nella stessa riga, l'equazione che si avrà in corrispondenza di questi valori avrà quale diagramma due coppie di segmenti, delimitante "ciascuna coppia" il valore di k .

Come applicazione dell'equazione r , si propone quanto segue:

1) Trovare l'equazione della rete nel caso di $h = 2R \cos^n \theta_0$ e $k = 3$, nonchè il suo diagramma (due coppie di segmenti).

Se nell'equazione di C_1 sostituisco ad $h = 2R \cos^n \theta_0$ e $k = 3$, avrò l'equazione:

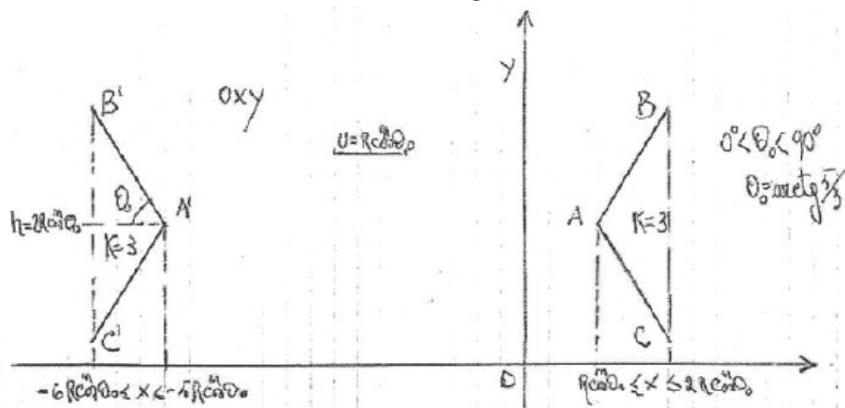
$$y = \pm \left(x + 2R \cos^n \theta_0 \mid - 3R \cos^n \theta_0 \right) \tan \theta_0 + 2R \cos^n \theta_0$$

e il dominio: $R \cos^n \theta_0 \leq x \leq 2R \cos^n \theta_0 \cup -6R \cos^n \theta_0 \leq x \leq -5R \cos^n \theta_0$.

Seguono le coordinate degli estremi di quattro segmenti che formeranno le "due coppie":

x	y	Punto
$R \cos^n \theta_0$	$2R \cos^n \theta_0$ (punto doppio)	A
$2R \cos^n \theta_0$	$R \cos^n \theta_0 \tan \theta_0 + 2R \cos^n \theta_0$	B
$2R \cos^n \theta_0$	$-R \cos^n \theta_0 \tan \theta_0 + 2R \cos^n \theta_0$	C
$-5R \cos^n \theta_0$	$2R \cos^n \theta_0$ (punto doppio)	A'
$-6R \cos^n \theta_0$	$R \cos^n \theta_0 \tan \theta_0 + 2R \cos^n \theta_0$	B'
$-6R \cos^n \theta_0$	$-R \cos^n \theta_0 \tan \theta_0 + 2R \cos^n \theta_0$	C'

Infatti, è con le coordinate di questi punti che si può tracciare il diagramma. In pratica, nello specifico e per comodità, traccio una curva per la quale la $\tan \theta_0 = \frac{5}{3}$.

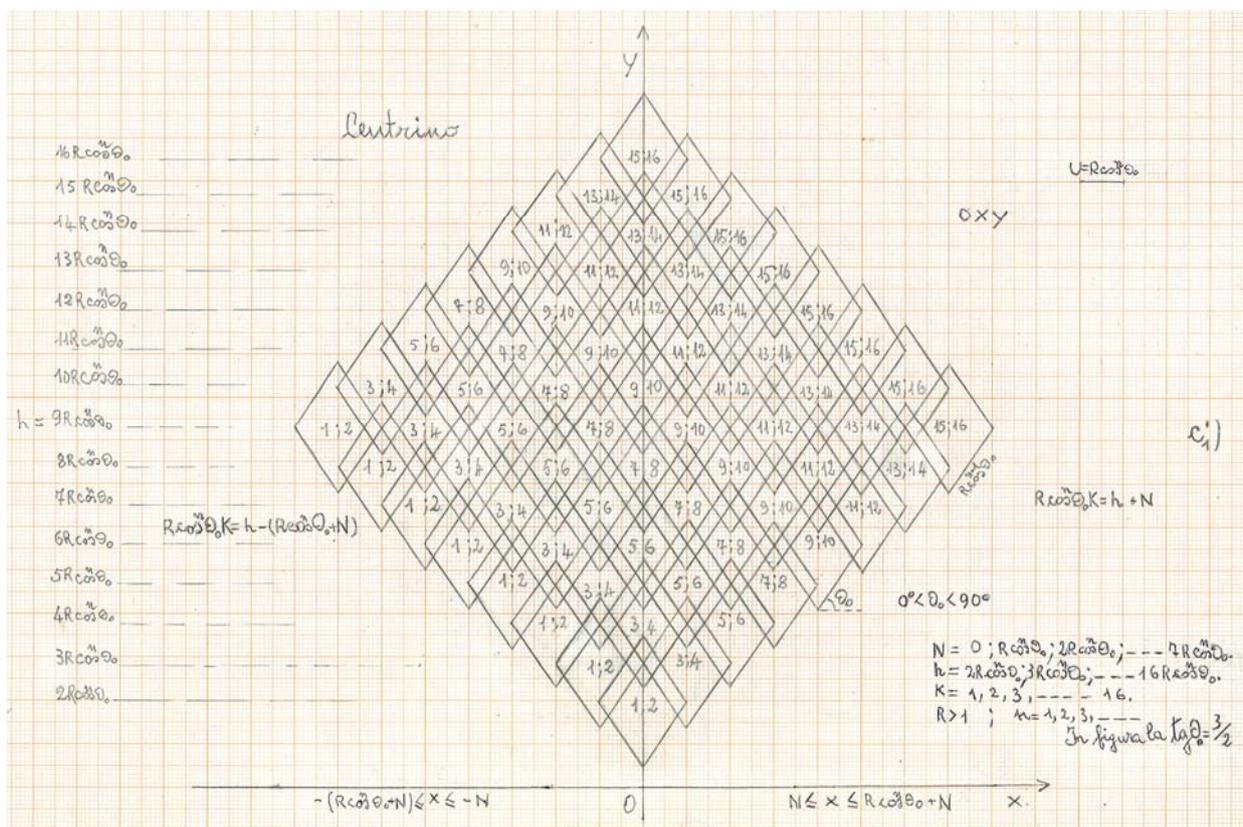


2) Trovare l'equazione r della rete nel caso particolare di $\theta_0 = 45^\circ$ con $R \cos^n \theta_0 = 1$. Previa sostituzione fatta in r , segue l'equazione richiesta:

$$y - h = \begin{cases} \pm(|x + h| - k); & k^2 \leq (x + h)^2 \leq (1 + k)^2; & k = 1, 3, 5, \dots \\ \pm(1 + k - |x + h|); & k^2 \leq (x + h)^2 \leq (1 + k)^2; & k = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad \text{con } h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sappiamo trattarsi di una "rete a maglia quadrata".

3) Dei possibili frammenti della rete C_1 , si consideri quello cos detto: "centrino", C'_1 (di cui si fa seguito in figura) del quale mi propongo di trovare le equazioni.



Sia D_1 il dominio della $f(x)$ (da determinare), rappresentata nel primo quadrante degli assi cartesiani ortogonali:

$$D_1: N \leq x \leq R \cos^n \theta_0 + N; \quad N = 0, R \cos^n \theta_0, 2R \cos^n \theta_0, \dots, 7R \cos^n \theta_0.$$

Dalla figura del "centrino" si deducono le soglie di h :

$$h = \begin{cases} h_{\min} = 2R \cos^n \theta_0 + N \\ h_{\max} = 16R \cos^n \theta_0 - N \end{cases}$$

da cui per ogni valore di N i seguenti valori di h :

$$2R \cos^n \theta_0 + N \leq h \leq 16R \cos^n \theta_0 - N$$

mentre dalla relazione di k, h, N :

$$R \cos^n \theta_0 k = h + N \rightarrow k = \frac{h + N}{R \cos^n \theta_0}, \text{ i valori di } k;$$

$$k = \begin{cases} k_{\min} = \frac{h_{\min} + N}{R \cos^n \theta_0} = \frac{2(R \cos^n \theta_0 + N)}{R \cos^n \theta_0} \\ k_{\max} = \frac{h_{\max} + N}{R \cos^n \theta_0} = 16, \end{cases}$$

da cui per ogni valore di N i seguenti valori di k :

$$\frac{2(R \cos^n \theta_0 + N)}{R \cos^n \theta_0} \leq k \leq 16.$$

Sia D_2 il dominio della $f(x)$, rappresentata nel secondo quadrante degli assi cartesiani:

$$D_2: -(R \cos^n \theta_0 + N) \leq x \leq -N; \quad N = 0, R \cos^n \theta_0, 2R \cos^n \theta_0, \dots, 7R \cos^n \theta_0.$$

Dalla figura, si deducono stesse soglie di h e stessi valori di h per ogni valore di N :

$$2R \cos^n \theta_0 + N \leq h \leq 16R \cos^n \theta_0 - N$$

mentre dalla relazione di k, h, N :

$$R \cos^n \theta_0 k = h - (R \cos^n \theta_0 + N) \rightarrow k = \frac{h - (R \cos^n \theta_0 + N)}{R \cos^n \theta_0}, \text{ i valori di } k;$$

$$k = \begin{cases} k_{\min} = \frac{h_{\min} - (R \cos^n \theta_0 + N)}{R \cos^n \theta_0} = 1 \\ k_{\max} = \frac{h_{\max} - (R \cos^n \theta_0 + N)}{R \cos^n \theta_0} = \frac{15R \cos^n \theta_0 - 2N}{R \cos^n \theta_0}, \end{cases}$$

da cui per ogni valore di N i seguenti valori di k :

$$1 \leq k \leq \frac{15R \cos^n \theta_0 - 2N}{R \cos^n \theta_0}.$$

Seguono, dunque, le equazioni del "centrino":

$$\frac{y-h}{\tan \theta_0} = \begin{cases} \pm (|x+h| - R \cos^n \theta_0 k_1); & N \leq x \leq R \cos^n \theta_0 + N; \quad (*) \\ \pm (R \cos^n \theta_0 + R \cos^n \theta_0 k_2 - |x+h|); & -(R \cos^n \theta_0 + N) \leq x \leq -N; \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \quad k = \frac{h + N}{R \cos^n \theta_0},$$

$$(**) \quad k = \frac{h - (R \cos^n \theta_0 + N)}{R \cos^n \theta_0}$$

$$N = 0, R \cos^n \theta_0, 2R \cos^n \theta_0, \dots, 7R \cos^n \theta_0.$$

$$2R \cos^n \theta_0 + N \leq h \leq 16R \cos^n \theta_0 - N; R > 0; n = 1, 2, 3, \dots;$$

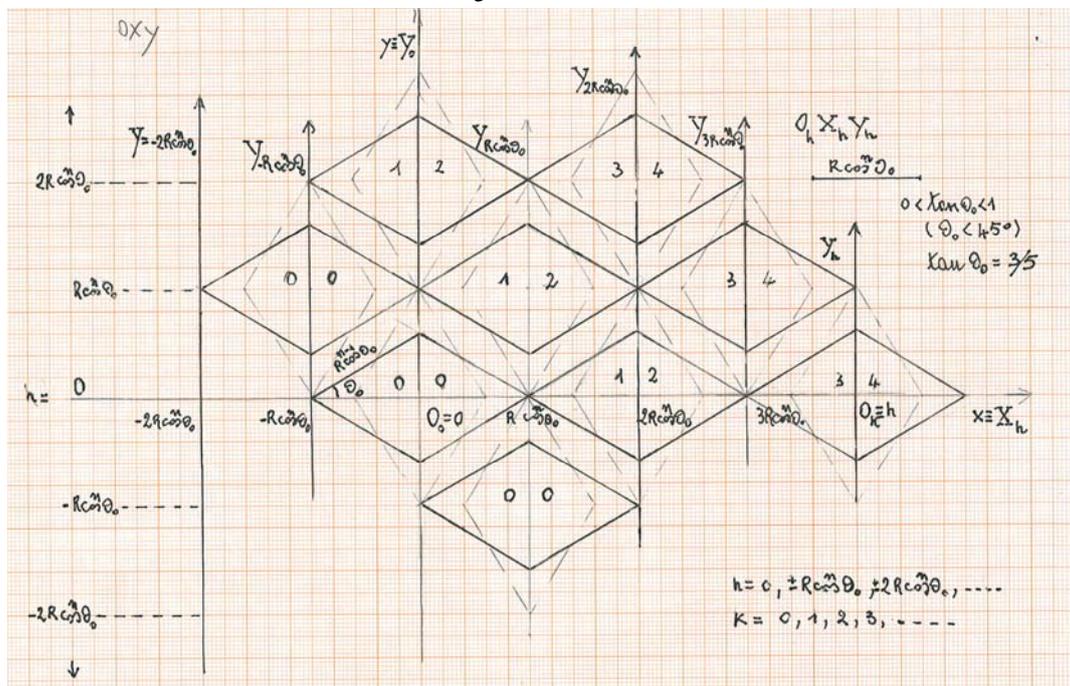
$$k_1 = k, \text{ se } k \text{ è dispari e } k_2 = k, \text{ se } k \text{ è pari.}$$

Nel sistema, può capitare che l'intervallo dei valori di x appartenente ad un rigo, debba essere associato all'equazione dell'altro rigo. Un caso particolare! Se nella funzione del centrino poniamo: $\theta_0 = 45^\circ$ ed $R \cos^n \theta_0 = 1$, si avrà l'equazione del "reticolo della dama" (il contorno di 8×8 quadrati di lato $\sqrt{2}$).

Infine, un'ultima considerazione sulle curve intrecciate. Se nelle equazioni della rete o del centrino si attribuiscono a θ_0 valori minori di 45° , ciascun diagramma sarà dato dal contorno delle tante file di rombi, distanziate una dall'altra, in modo da determinare una porzione di piano in cui il diagramma della rete o del centrino non è presente.

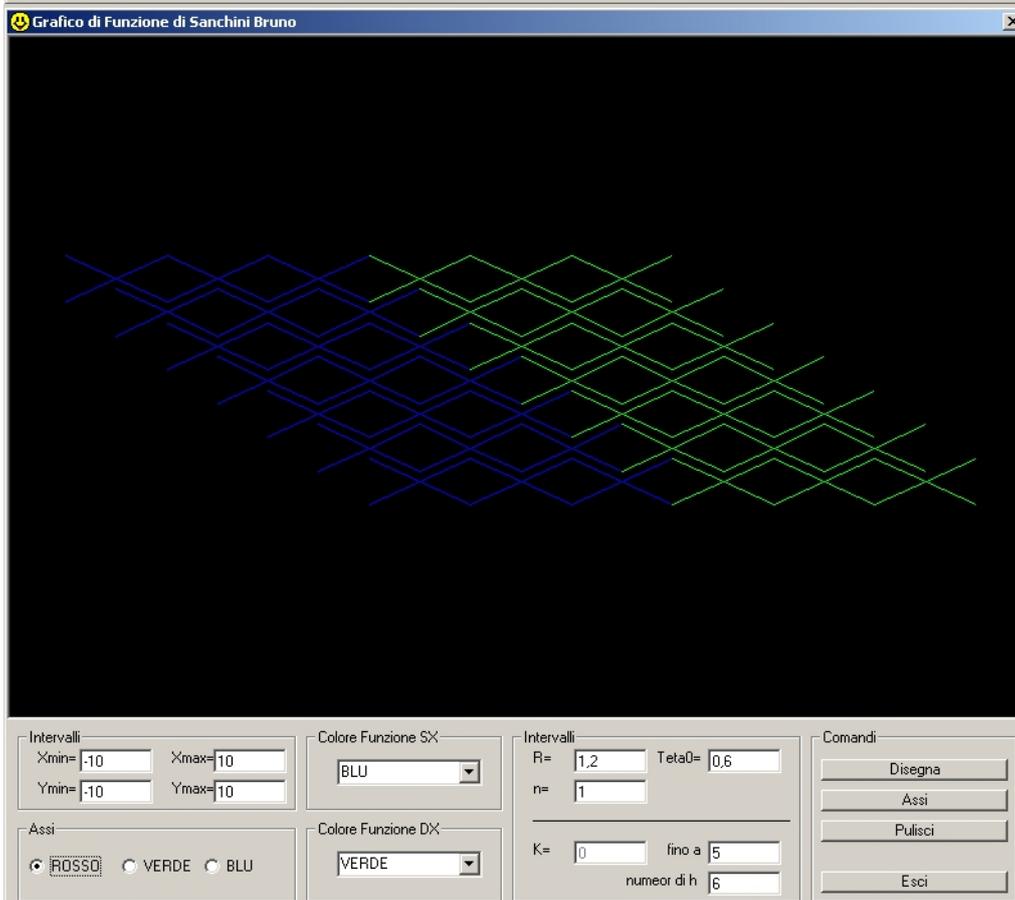
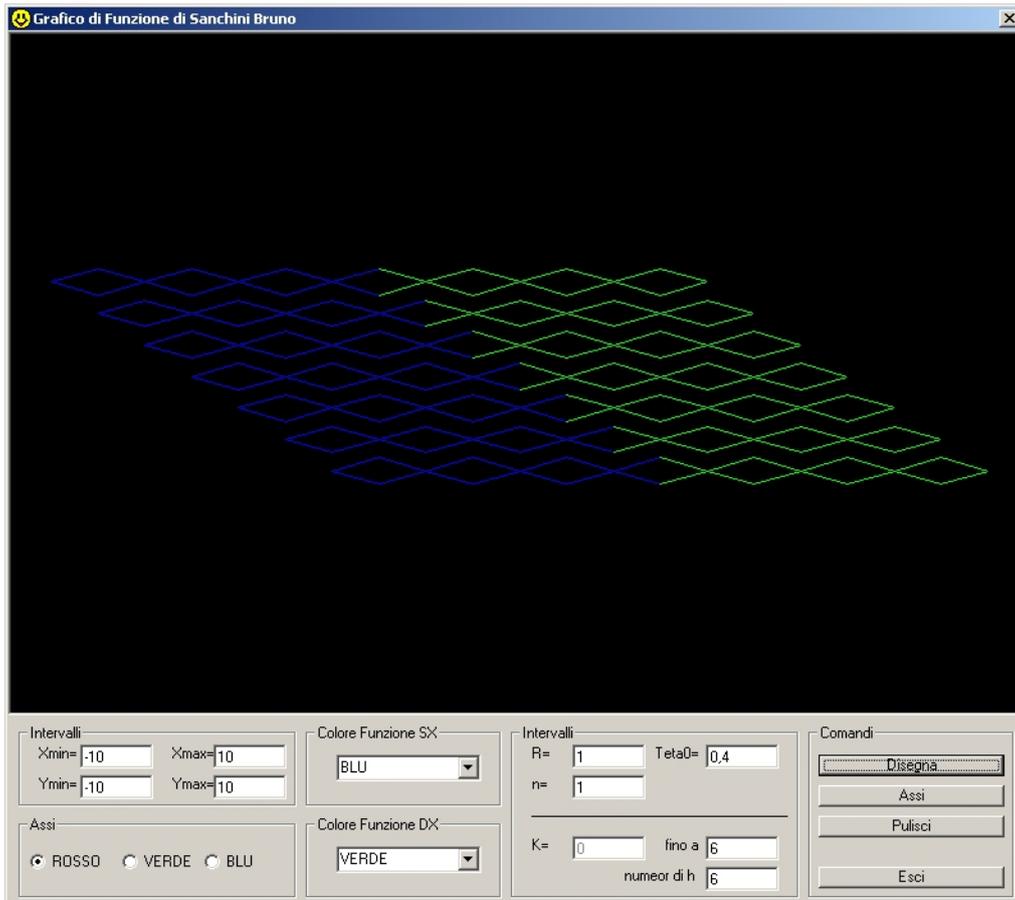
Queste porzioni di piano saranno tanto più grandi quanto più piccoli saranno i valori di θ_0 .

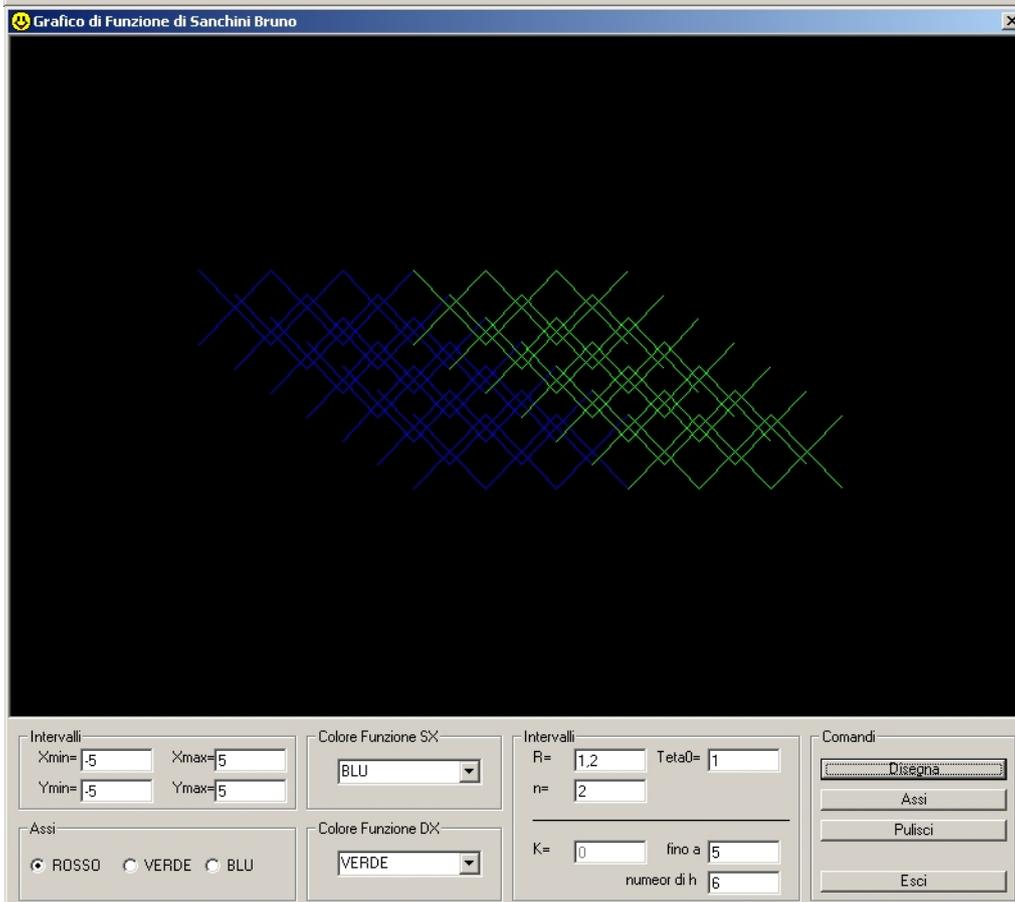
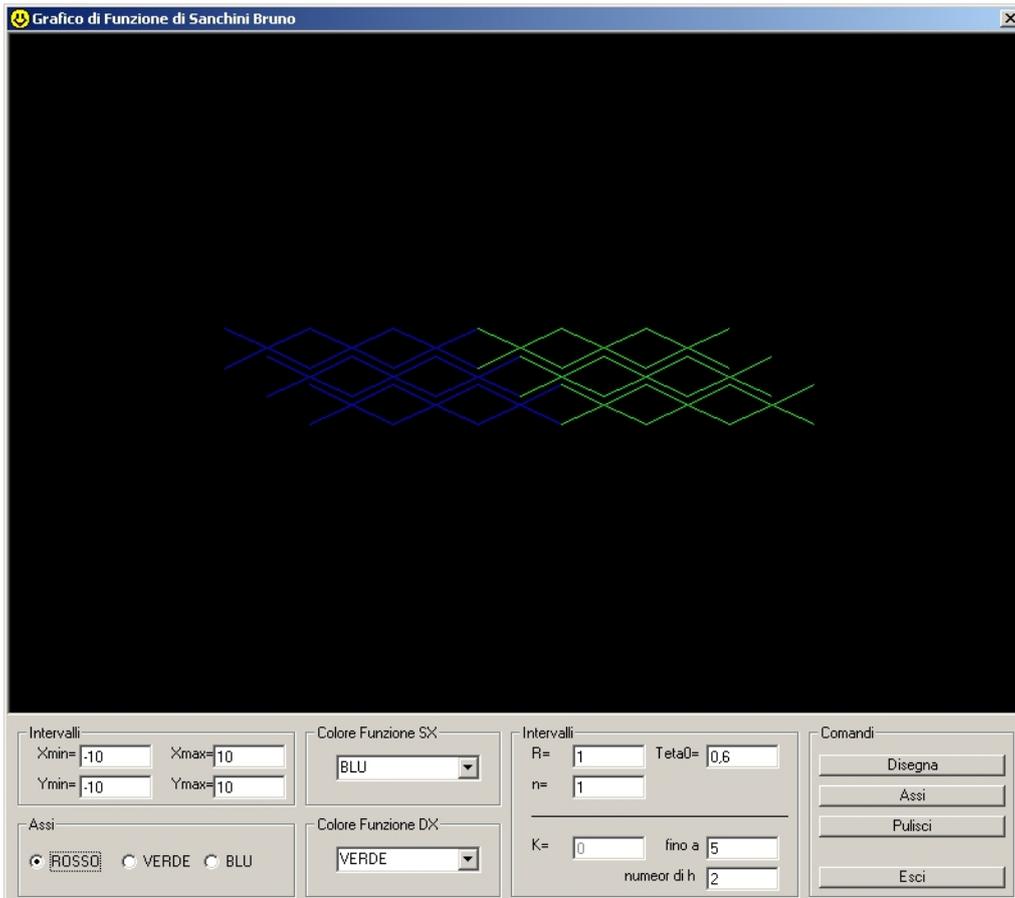
Segue il diagramma della rete con $\theta_0 = \arctan \frac{3}{5}$.



E' al contorno dei rombi, presenti sull'asse delle x , che si sono applicate le stesse operazioni eseguite sulla curva γ per trovare la curva C_1 .

Ad illustrazione della ricerca si mostrano alcuni "frammenti della rete", ricavati da un programma informatico di "verifica grafica della rete".





117. Lo studio dei poliedri col software libero Cartesio

di Rosa Marincola¹

Sunto

Cartesio è un software libero che, permettendo la costruzione e la manipolazione di poliedri, favorisce l'esplorazione e la comprensione degli effetti prodotti dalle trasformazioni geometriche sulle figure solide. Il programma è essenzialmente rivolto agli studenti degli ultimi anni della scuola superiore e dei primi anni dell'università, ma può essere utilizzato anche nella scuola del primo ciclo e nel biennio della secondaria per attività didattiche coinvolgenti.

1. Introduzione all'uso del software

È noto che nella prassi didattica il tempo dedicato allo studio della geometria è sempre più esiguo; in particolare, alla geometria solida vengono dedicati tempi veramente trascurabili; eppure le tecnologie oggi disponibili consentono di lavorare agevolmente con oggetti che, come i poliedri, rappresentano da sempre uno dei temi più affascinanti della geometria. È pur vero che lo spazio può essere esplorato anche attraverso proiezioni 2D, ma limitarsi allo studio della geometria piana, è a mio avviso troppo riduttivo e non aiuta gli studenti a sviluppare la visione spaziale o a prevedere gli effetti di una trasformazione geometrica in diversi contesti.

Un valido strumento per affrontare lo studio di questi argomenti può venire dal software Cartesio, liberamente scaricabile dal sito <http://www.camillotrevisan.it/intern01.htm> (nella medesima pagina è disponibile un dettagliato manuale d'uso).

In questo lavoro offrirò alcuni spunti per attività didattiche rivolte a studenti del primo e del secondo ciclo. Il software è particolarmente indicato per lo studio dei solidi platonici (si possono realizzare anche poliedri vuoti e stellati) e solidi archimedeei. Esso consente di manipolarli con molti tipi di trasformazioni e proiezioni, il che costituisce un valido strumento per realizzare percorsi interdisciplinari tra matematica, disegno, storia dell'arte e filosofia. Interessanti attività sono reperibili in rete sul sito dell'Unione Matematica Italiana (vedi [1]): "Solidi noti e solidi misteriosi" e "La rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva" (in Matematica 2001), "Simmetrie nei poliedri" e "Equivalenza nello spazio" (in Matematica 2003), "Da Platone a Escher: simmetrie e regolarità nello spazio" (in Matematica 2004).

2. Creazione di poliedri

All'apertura del programma occorre scegliere un'opzione dal menù "Proiezioni" (figura 1), sarà poi possibile selezionare dal menù "Solidi" una grande varietà di poliedri (vedi figure 2, 3 e 4). In ogni finestra si possono inserire fino a sei solidi e si possono applicare fino a sei diverse proiezioni; si otterranno altrettante finestre disposte a cascata, visibili se si riduce a icona la prima finestra grafica.

¹ Docente presso l'I.I.S.S. "A. Guarasci" sez. I.T.C. Rogliano (Cs).

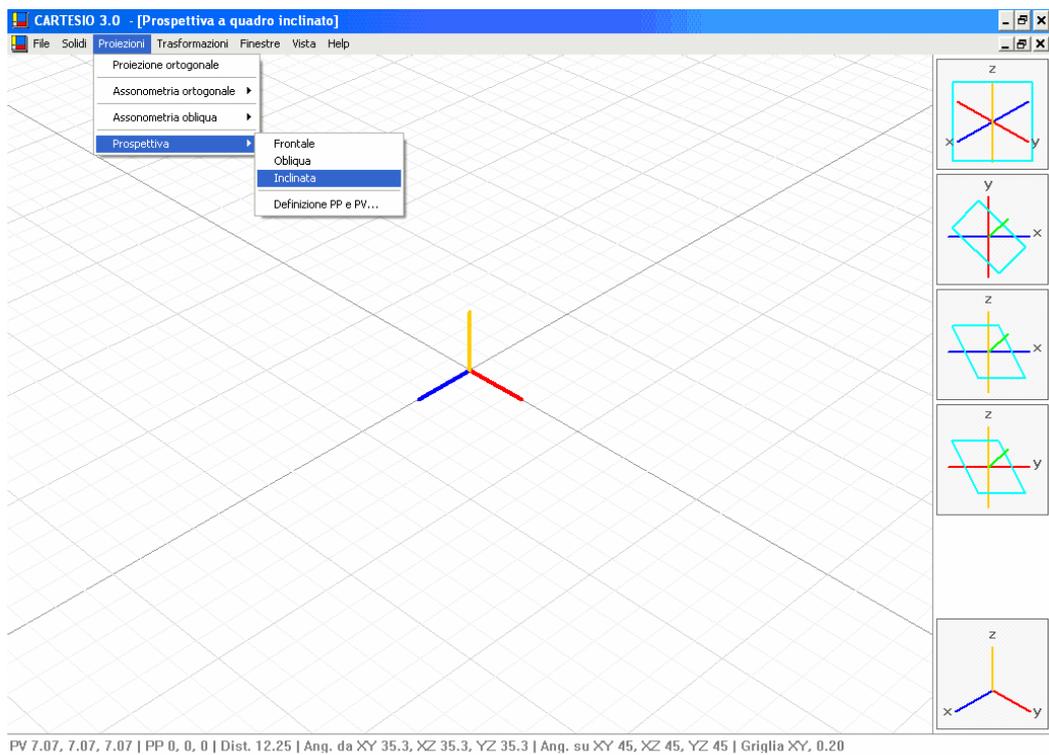


Figura 1. Prospettiva a quadro inclinato

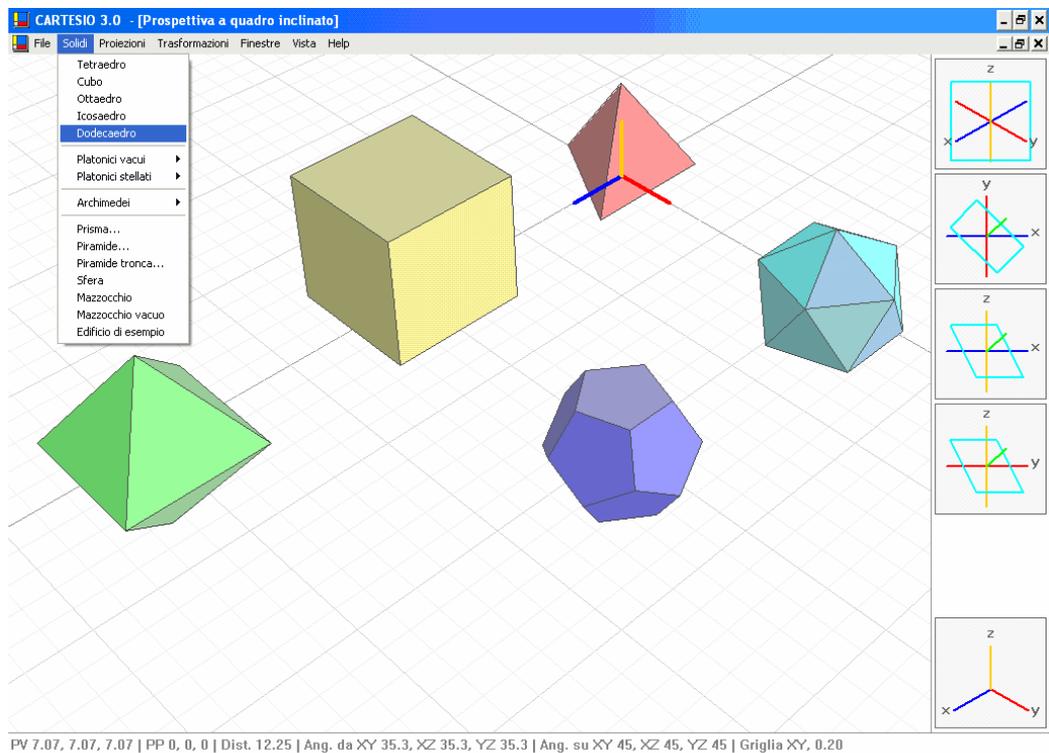


Figura 2. Tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro e dodecaedro

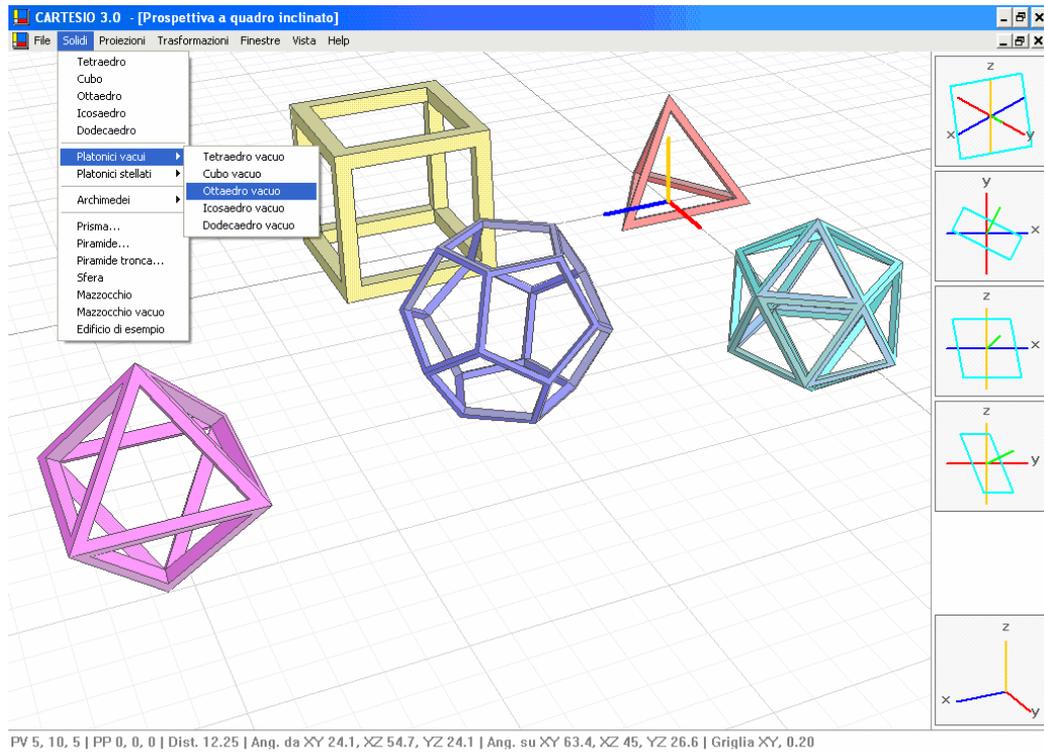


Figura 3. Solidi vacui

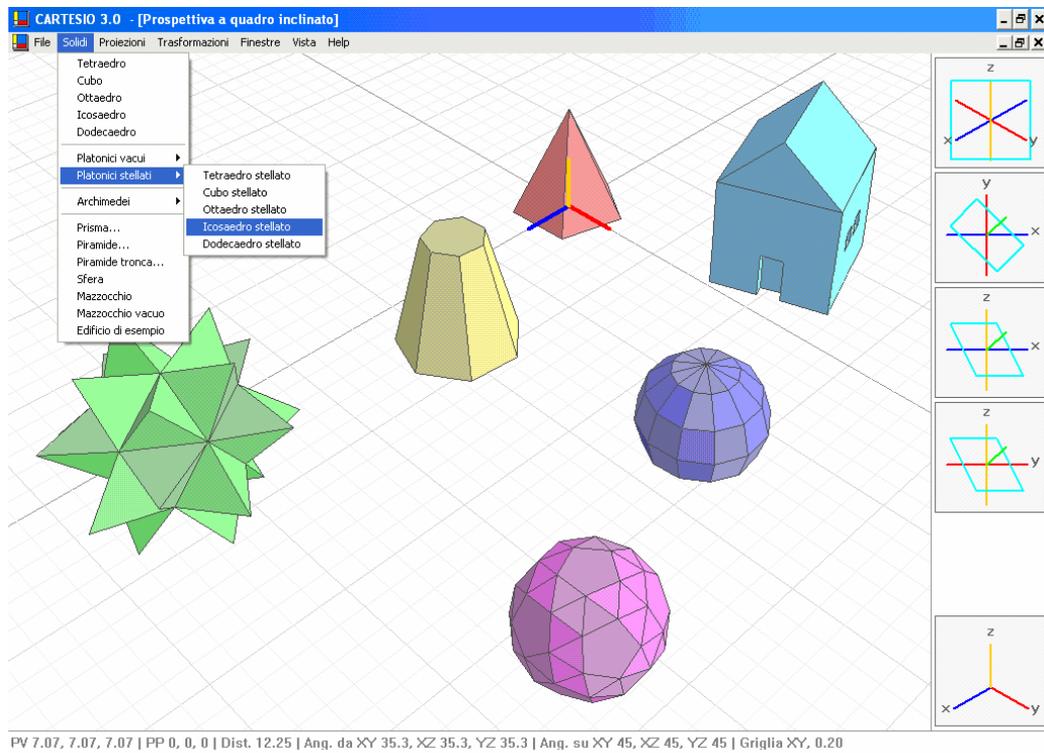


Figura 4. Un icosaedro stellato, un dodecaedro, una sfera, un tronco di piramide, una piramide e un edificio di esempio.

Dopo aver inserito i solidi, è possibile modificare il tipo di proiezione cliccando sul menù “Proiezioni” e selezionare l’opzione desiderata (figure 5, 6, 7); in particolare per la “Prospettiva” si può selezionare “Definizione PP e PV...” per definire il Punto di Vista e il Punto Principale. Se si desidera selezionare uno o più solidi, è sufficiente, dal menù “Trasformazioni”, scegliere “Crea gruppo di selezione...”, spuntare i solidi in base al colore e quindi modificarli, cancellarli ecc.

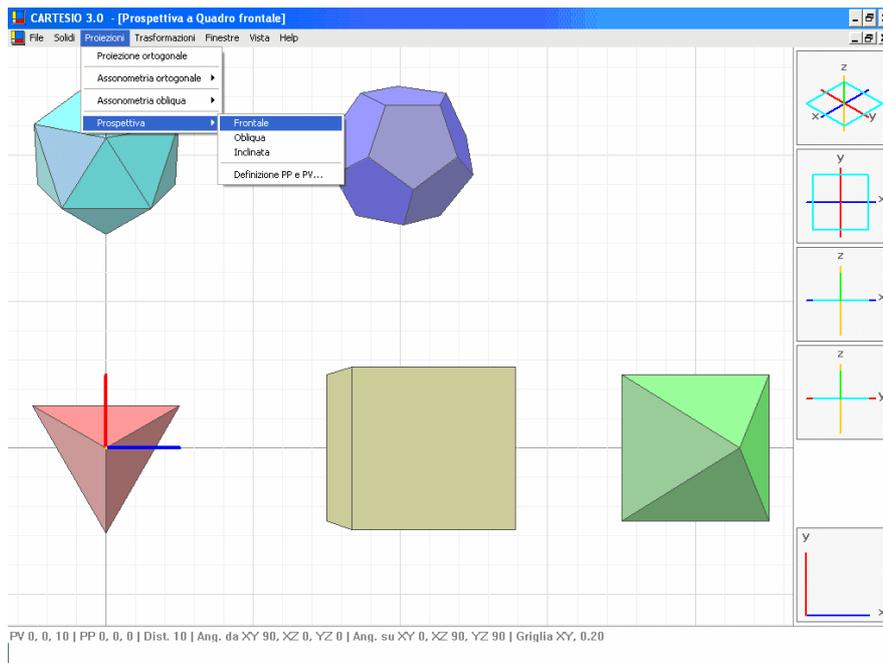


Figura 5. Solidi in Prospettiva a quadro frontale

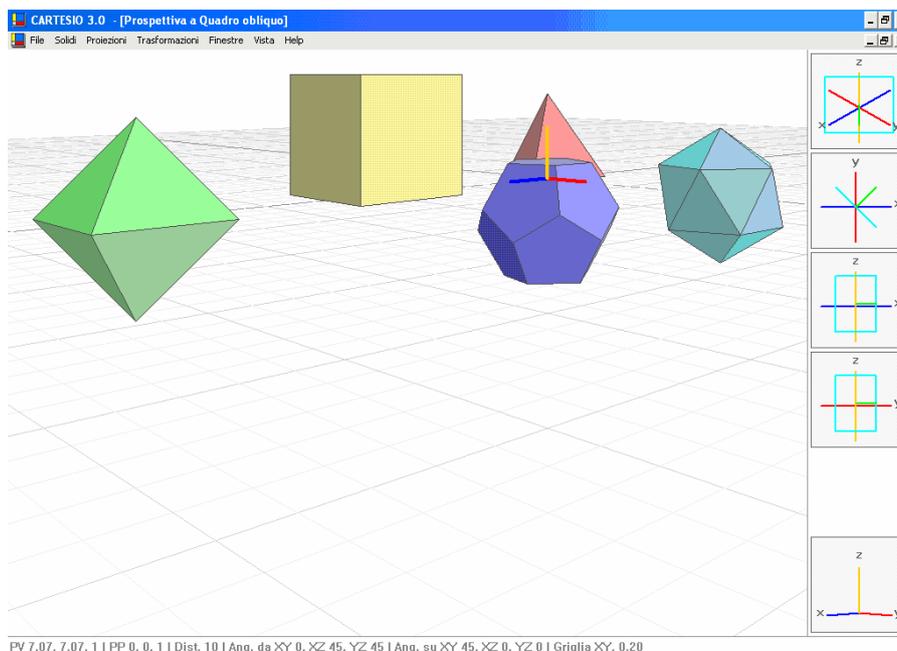


Figura 6. Solidi in Prospettiva a quadro obliquo

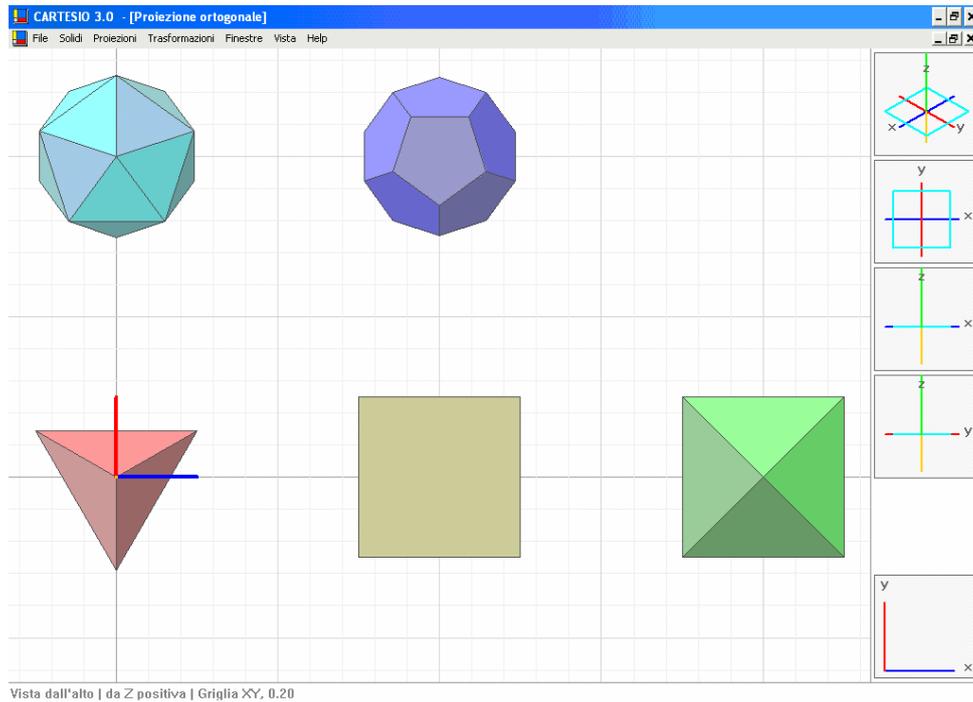


Figura 7. Proiezione ortogonale

3. Trasformazioni

Dopo aver creato un poliedro, ad esempio il cubo di figura 8, è possibile manipolarlo con le trasformazioni presenti nell'omonimo menù a discesa. Ad esempio selezionando “Traslazione” si possono inserire le tre componenti del vettore e far osservare agli studenti i diversi effetti prodotti sulla figura, al loro variare.

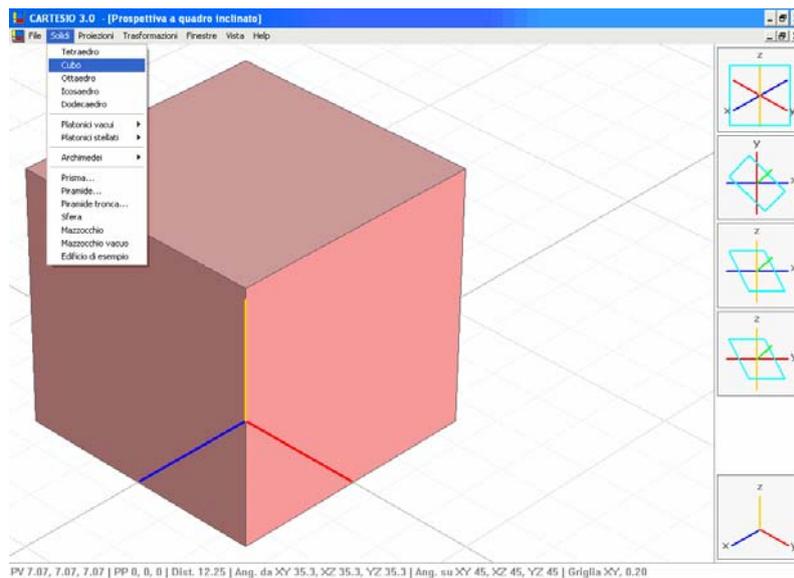


Figura 8. Cubo in prospettiva a quadro inclinato

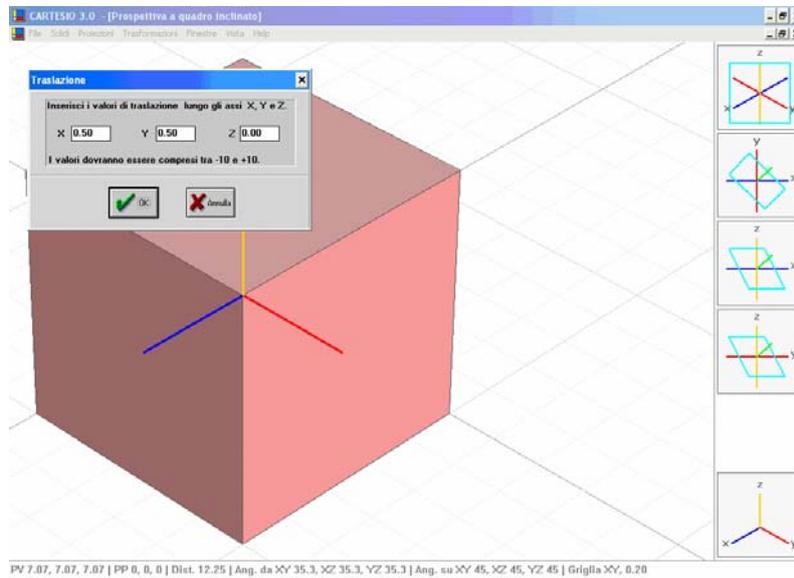


Figura 9. Cubo traslato

Per esplorare e meglio descrivere le proprietà dei solidi, è possibile renderne trasparenti le superfici delle facce, selezionando “Wire frame” dal menù “Vista” (selezionando “Shading” invece la superficie apparirà colorata).

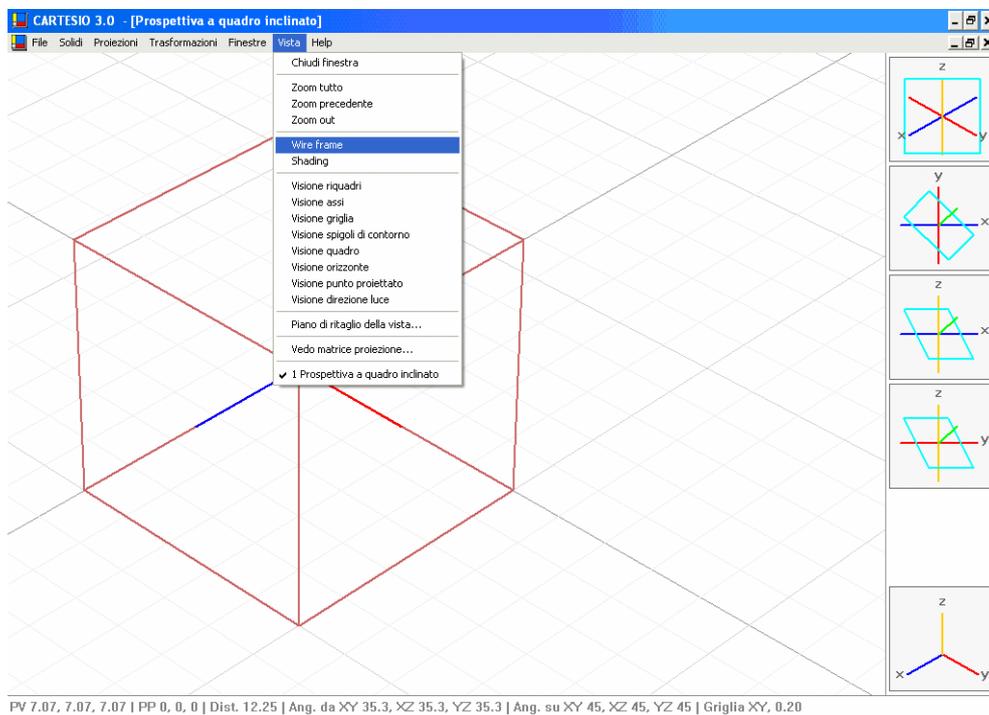


Figura 10. Cubo trasparente

Un'altra importante trasformazione è la “Rotazione” che può essere effettuata attorno ad uno dei tre assi, in figura 11 è stata applicata una rotazione di 20° attorno all'asse z. Ogni trasformazione può essere annullata o ripetuta.

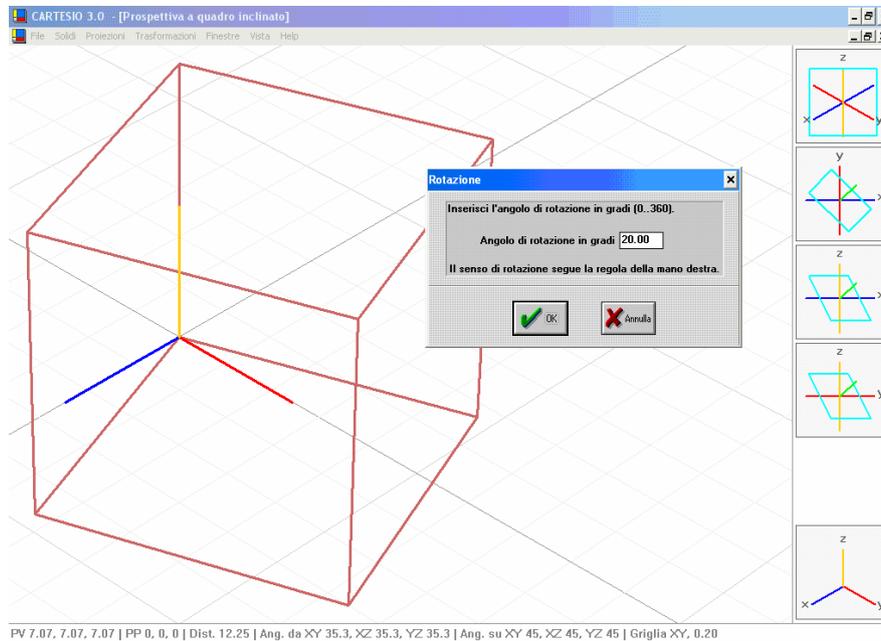


Figura 11. Rotazione di 20° attorno all'asse z

Si può anche effettuare la modifica del fattore di scala, mediante la “Scalatura” (sempre dal menù “Trasformazioni”), in figura 12 è stata applicata quella “Omogenea in x,y, z”.

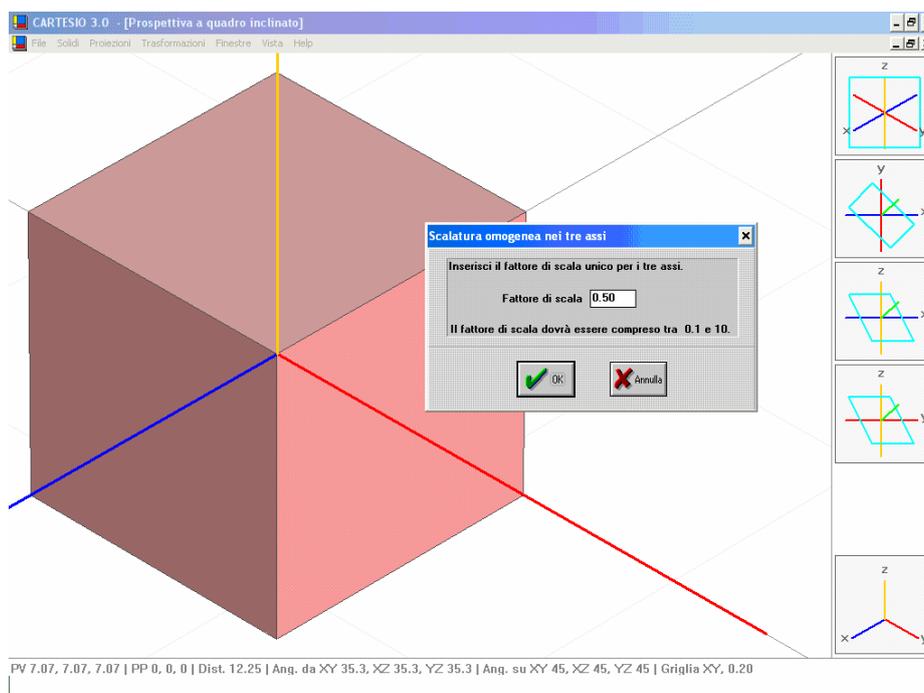


Figura 12. Scalatura di 0.50 per i tre assi

4. Sezioni e principio di Cavalieri

In figura 13 è visibile il risultato della “Sezione” del cubo, secondo le impostazioni di default, con un piano parallelo al piano xy, di equazione $z=0,25$.

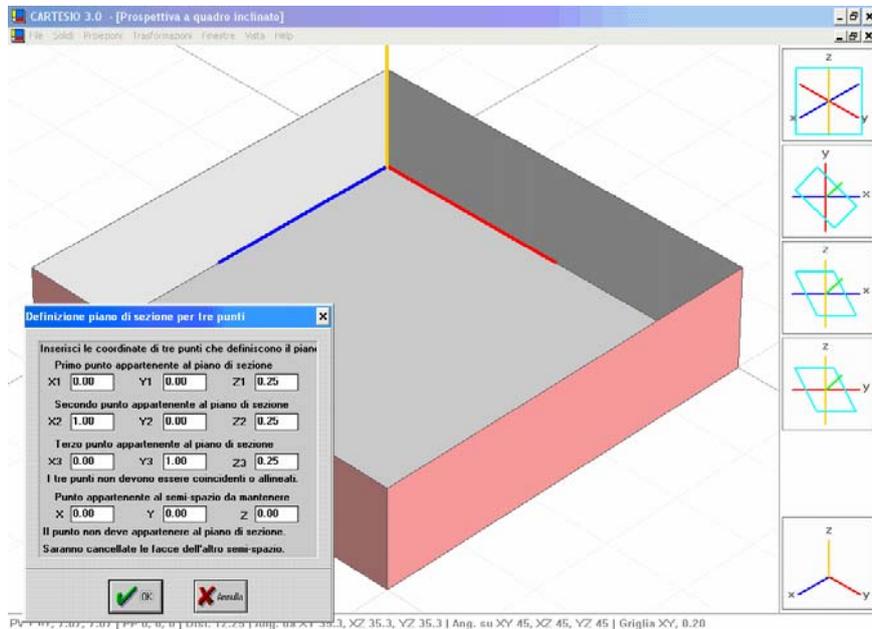


Figura 13. Sezione del cubo col piano $z=0.5$

Nelle figure 14 e 15 sono riportati altri esempi di sezioni di un cubo, realizzabili anche con la sola conoscenza delle coordinate nello spazio e degli assiomi della geometria euclidea.

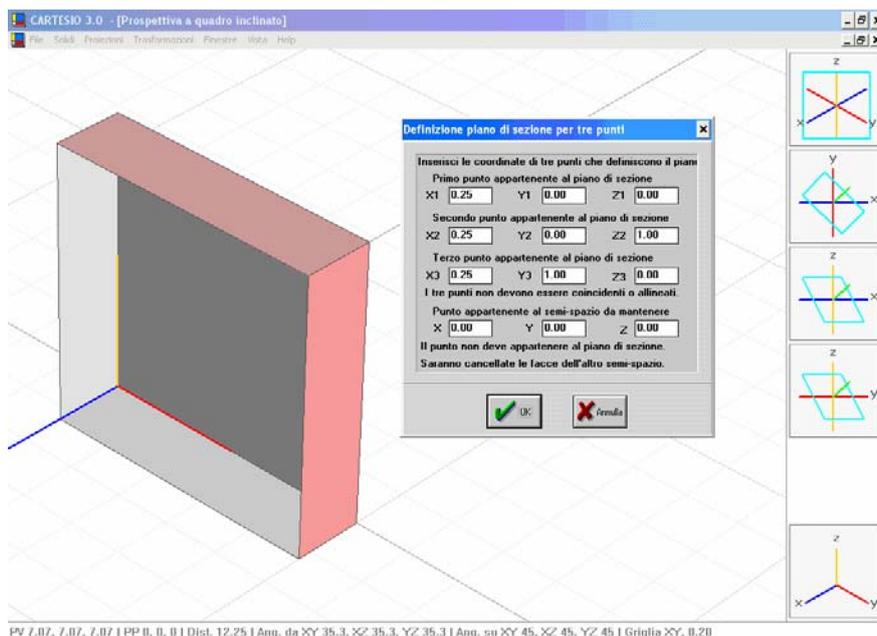


Figura 14. Sezione del cubo col piano $x=0.5$

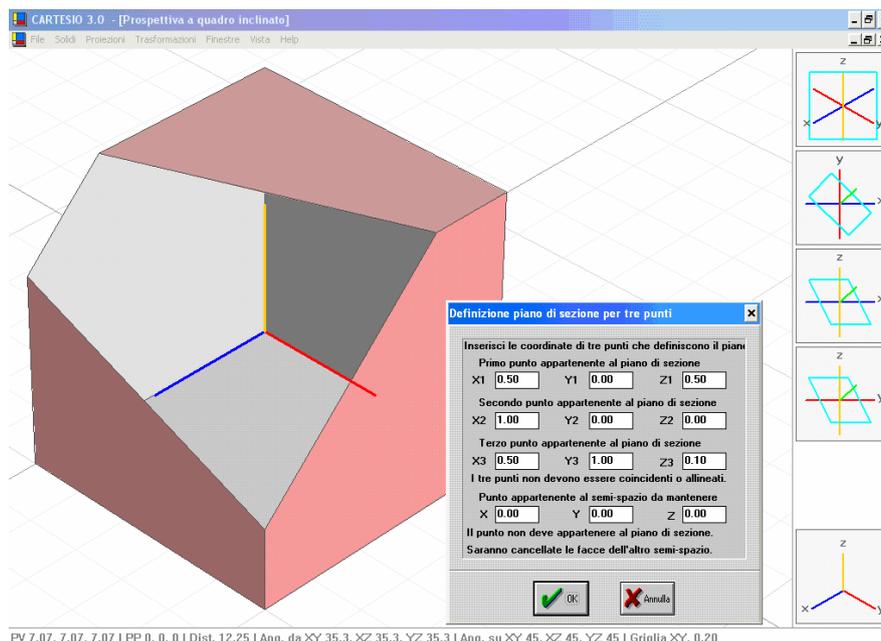


Figura 15. Sezione del cubo con un piano obliquo

Altra attività interessante, facilmente realizzabile in alcuni casi, è lo studio del Principio di Cavalieri. In figura 16 sono state disegnate due piramidi a base esagonale, di altezza 1. Alla prima piramide è stata applicata, la “deformazione” che muta il vertice di coordinate $(0, 0, 1)$ nel punto di coordinate $(0, 0.5, 1)$, essa pur presente nel menù delle "Trasformazioni", non è una trasformazione geometrica lineare il che può essere un'occasione per richiamare e meglio chiarirne la definizione matematica. La deformazione, in Cartesio, è un metodo per ottenere l'effetto di un campo di forze applicato a un solido (cfr. [2], p.67).

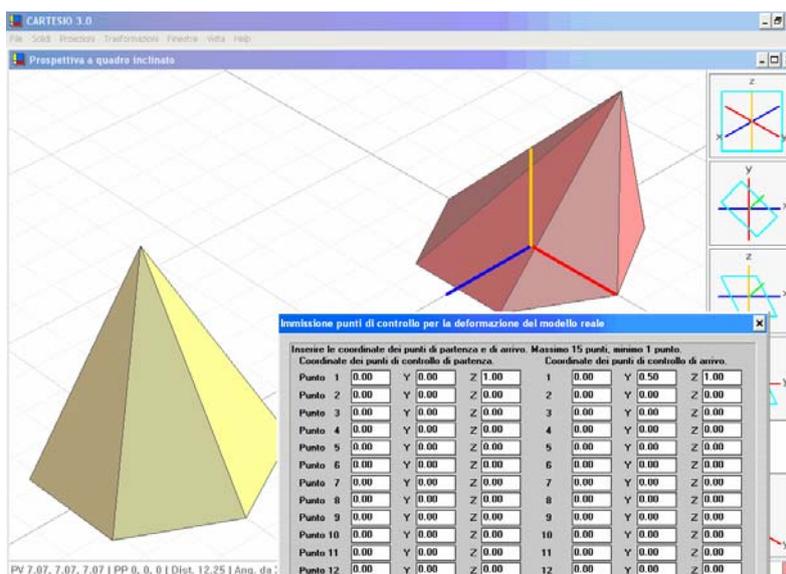


Figura 16. Deformazione applicata al vertice di una piramide

Il software consente molte altre applicazioni, ben più complesse, in questo lavoro si è solo voluto darne un saggio, per realizzare delle sperimentazioni in classe.

Sitografia

[1] Dal sito dell'UMI <http://umi.dm.unibo.it/> si possono scaricare liberamente i seguenti materiali:

[1a] "Matematica2001", *Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)* <http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/mat2001.zip>

[1b] "Matematica2003" *Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica - Ciclo secondario.* <http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>

[1c] "Matematica2004" *La Matematica per il Cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica (Quinta classe del ciclo secondario di secondo grado)*
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2004/UMI_2004.zip

[2] Il software libero Cartesio e il manuale d'uso "Geometrie al Computer" di Camillo Trevisan, sono reperibili all'indirizzo: <http://www.camillotrevisan.it/intern01.htm>.

118. I teoremi di punto fisso e i film d'azione

Dialogo tra due personaggi di un film americano
(ma vanno bene anche certi cartoni animati giapponesi!)

Stefano B.

La colonna sonora potrebbe essere *Sonne*, dei Rammstein. Ma non me non importa niente. Io me ne sto nascosto dietro un bidone di benzina, a temere per la mia vita. Trattengo il respiro e assaporo quelli che potrebbero essere i miei ultimi istanti.

Loro sono in due.

Lei: la pupa con il bazooka. Lui: tipo tranquillo vestito da impiegato che tanto tranquillo non è. (Soprattutto visto che sta con una pazza scatenata! Cos'è, la gemella malvagia di Lara Croft? E l'impiegatino? Il Neo di *Matrix*? *Superfantozzi*?)

Sono finito in un film d'azione del cavolo! Chi ha scelto i personaggi? Chi ha scritto i dialoghi? Quei due stanno parlando di *matematica!!!*

L (*Lei*): "E allora, Hiro, 'azz'è 'sto teorema di punto fesso?!"

R (*Lui*): "Ehi, è difficile spiegarteli senza entrare nei dettagli tecnici e quelli tu non li vuoi conoscere. Sai cos'è... uno spazio di Banach?"

L: "Così c'entrano le astronavi..."

R: "No. Lasciamo perdere..."

L: "Dutch ha detto che io devo sapere qualcosa, e che tu me lo sapevi spiegare meglio di B.B., quindi SPIEGA".

R: "Va bene. Come posso metterlo in modo che tu possa capire? Uhm... Ecco: è l'analogo matematico di quando tu spari a qualcuno".

L (per un attimo è senza parole): "... è così ottutamente semplice?"

R: "No. E più simile al prendere la mira. Il punto fisso è il bersaglio e tu lo devi colpire".

L: "Facile. Punto e sparo! Non servono tutti questo stra'azzo di meccanismi".

R: "Ma pensa di dover mirare al buio! I teoremi di punto fisso intervengono quando non hai una formula che ti dà la soluzione... cioè quando non ci puoi vedere".

L: "Ah. Ecco l'imbroglio. Dimmi, ché qualche nuovo trucco serve sempre..."

R: "Uhm... ci sono vari teoremi di punto fisso, a seconda delle situazioni. Sono teoremi che assicurano l'*esistenza* del punto fisso - cioè che tu centri il bersaglio, anche senza sapere dov'è. Il più noto e più usato è il teorema di Banach-Caccioppoli".

L: "Baccaccio COSA?"

R: "Stephan Banach era un matematico polacco - fu ucciso dai nazisti, Renato Caccioppoli era un matematico italiano-napoletano, ebbe dei problemi con i fascisti che lo internarono in manicomio. Era anche nipote di Bakunin, l'anarchico".

[Colonna musicale: *Fling*, di Michael Nyman, da *The Piano*]

L: "Gente tosta, allora. Sicuro che non sparassero?"

R: "Solo alle equazioni. Con questi teoremi che ti sto spiegando. Il teorema di Banach e di Caccioppoli usa una successione di passi: vuol dire che ogni volta che spari di nuovo sai che ti avvicini sempre di più al bersaglio. Alla fine lo centri".

L: "E come fai a capire che ti stai avvicinando?"

R: "Beh, pensa gli echi... Diciamo che quando finalmente lo colpisci te ne accorgi. Ma quello che importa è che dopo ogni tiro puoi aggiustare la mira, come se avessi un radar".

L: "Va be'. Immagino che a tirare sia una specie di robot con le antenne. I militari le fanno, di queste robe. Non male per un antinazi".

R: "Poi ci sono il teorema di Brouwer e i suoi discendenti. In questo caso non puoi neanche controllare se ti sei avvicinato al bersaglio".

L: "E allora come fai, spari dentro un barile?"

R: "Esatto".

L: "Eehh?"

R: "Se il bersaglio è chiuso dentro una zona limitata, e continua a starci, prima o poi lo

becchi".

L: "Ah, ma così ci arrivo pure io! ... Ci può arrivare anche un cieco".

R: "Esatto".

L: "Ah, la grande matematica..."

R: "In realtà ci sono delle condizioni da rispettare, altrimenti non funziona"

L: "Dai, non scherzare. Una cosa così, che ca*o di problemi puoi avere?"

R: "Una di queste è la continuità. In pratica, il bersaglio deve essere in continuazione dentro il barile, o dentro l'area chiusa. Non deve e non può sparire".

L: "HAHAHAHA! Certo che se scappa non funziona più"

R: "L'altra condizione... la convessità... come posso spiegartelo... Beh, in breve, niente buchi. Se il bersaglio è un oggetto troppo bucherellato, non è più sicuro che lo centri, il bersaglio".

L: "Uhm... in quel caso ci vuole un calibro maggiore".

R: "Mah... Pensa a un bersaglio classico, quello per le freccette. Se seghi via tutto e lasci solo l'anello esterno, ecco, il teorema di Brouwer non funziona più".

L: "Ah - bello scherzone. A quel punto scherzo anch'io e uso il bazooka".

(sorriso non molto rassicurante)

R: "C'è chi si è occupato anche di quello, ma viene un po' dopo".

L: O_O *occhi spalancati* (La tipa fa una faccia strana)

R: "Prima ci sono degli altri teoremi che lo preparano".

L: "Già. Magari una formula che ti dice quando lo colpisci, il bersaglio!"

R: "Per ora, no. Ma in effetti il teorema di Brouwer, a differenza di quello di Banach, non è costruttivo. Non te lo dice, quando hai colpito il bersaglio. Sai solo che prima o poi l'avrai colpito, mentre Banach ti dice che alla fine lo colpisci. Il teorema di Banach ti fornisce un metodo costruttivo, invece il teorema di Brouwer è solo una condizione di esistenza."

L: "Umf! Non mi piace!"

R: "E infatti, alla fine Brouwer ha rifiutato i teoremi di mera esistenza, compreso il suo".

L (sghignazza): "Ah ah ah ah!"

R: "Dal teorema di Brouwer passiamo al teorema di Schauder. Schauder era un ebreo po-

lacco e fu ucciso dai nazisti"

L: "Di nuovo i nazi?"

R: "I matematici polacchi furono sterminati dai nazisti, meno quelli che fuggirono in America".

L: "Ma insomma, questi 'ottuti nazisti! Era Himmler che parlava di mettere mano alla pistola quando sentiva parlare di cultura? Io non mi faccio problemi: ho la mano sulla pistola... sempre. Ma che fa questo Schauder, lui e il suo teorema?"

R: "Il teorema di Schauder estende il teorema di Brouwer in infinite dimensioni".

L: "Eeeeh?"

R: "Vuol dire che funziona con oggetti un po' più complicati. Se i bersagli di prima erano dei punti, questi sono funzioni, come dire... delle collezioni di punti".

L: "Ci credo e non li voglio conoscere. Almeno finché Dutch non mi ci obbliga".

R: "Ma la logica resta la stessa: devono essere sempre compatti e senza buchi, qualunque cosa questo significhi per te. Poi c'è il teorema di Kakutani".

L: "Finalmente un nome giapponese! Arh, arh, arh!"

R: "Shizuo Kakutani era un matematico nippo-americano... "

L: "Amico tuo?"

R: "Ma no! Il suo teorema era del 1941. Per dirla con te... finora i teoremi funzionavano con pistole di precisione. Con Kakutani si passa ai... cannoni".

L: "Urrà!"

R: "Ma il teorema di Kakutani è come i teoremi di Schauder e di Brouwer. Non ci devono essere buchi, e il bersaglio deve essere confinato e non deve sparire".

L: "Questo l'ho capito. Se poi me lo disegni, poi forse lo capisco. Sono sempre tiri al buio... il robotto che tira il botto... Ma non ci son teoremi più... astuti?"

R: "Sì. Negli anni Trenta, Schauder è stato a Parigi dove insieme a un matematico francese, un certo Leray, ha pubblicato un teorema di esistenza con una stima a priori. Stima a priori vuole dire questo: il bersaglio, se c'è, sai che si deve comportare in un certo modo".

L: "E così lo centri".

R: "Poi i due hanno anche elaborato un indice per valutare il numero delle di soluzioni

di un'equazione, ma questa è un'altra storia... "

A questo punto,

[Colonna sonora: Benzin, dei Rammstein]

la conversazione tra i due si è interrotta: è arrivato un elicottero nero e ha cominciato a mitragliarli forsennatamente, e la donna ha replicato con un lanciamissili (quello non l'avevo visto, giuro!). Io me la sono cavata per un pelo, nascosto dietro un pilone di cemento. Sono rimasto lì in silenzio per un'ora, aspettando che non si sentisse più un suono... Dopo un'ora esco. Sono salvo.

Non ci sono più i due pazzi...

Vedo una casa lontana, su una scogliera... Mentre mi avvicino, vengo sorpassato da un'altra coppia, una ragazza in abiti ottocenteschi insieme a un tizio in giacca blu dall'aria seccata e dal profilo affilato, che mormora qualcosa come: "*Tempo e spazio, spazio e tempo*". I due bussano alla casa, una luce si accende e si sente dall'interno una voce infantile che canta: "*Giù per la scale, su per le scale, giù per la scale, su per le scale, giù per la scale, su per le scale...*".

Rabbrividisco. Molto saggiamente, fuggo a gambe levate.

Bibliografia

1. C.D. Pagani, S. Salsa, "Analisi Matematica II", Masson 1991: per iniziare a leggere qualcosa di più tecnico sul teorema di Banach-Caccioppoli.

2. L. V. Kantorovic, G. P. Akilov, "Analisi Funzionale", Editori Riuniti: per i teoremi di Banach, Schauder e Kakutani.

3. E. Zeidler, "Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I Fixed Point Theorems", Springer-Verlag, New York, 1986: per una carrellata sulla storia oltre che su vari teoremi di punto fisso, questi e molti altri non citati in questo dialogo

4. M. Martone, "Morte di un matematico napoletano", film: biografia cinematografica di Renato Caccioppoli.

119. Il Metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua

Lorenzo Peroglio

1 Premessa

La Pasqua è la festività in cui i Cristiani celebrano la crocifissione e resurrezione di Gesù Cristo; essa deriva dalla parola ebraica *Pesah* che, letteralmente, significa “passare oltre” e deriva dal racconto della decima piaga, in cui l’angelo sterminatore vide il sangue dell’agnello del *Pesah* sulle porte delle case d’Israele e “passò oltre”, uccidendo solo i primogeniti maschi degli egiziani.

Benché la parola Pasqua derivi dall’ebraico, il significato dato dai cristiani è completamente differente da quello dato dagli ebrei, per i quali indica la liberazione del popolo Giudeo dalla schiavitù in Egitto.

Per quanto riguarda invece la traduzione inglese *Easter* (in tedesco *Oster*) della parola “Pasqua”, essa deriva dal vecchio nome del Dio della primavera *Eostre* ed ha poco a che fare con il significato tradizionalmente dato alla parola Pasqua stessa, se non per il suo metodo di calcolo.

Nel Concilio di Nicea, indetto dall’imperatore Costantino nel 325 A.D., si stabilì infatti che la Pasqua avrebbe dovuto celebrarsi la prima domenica dopo la prima luna piena che seguiva l’equinozio di primavera. Da questa semplice regola si svilupparono tutti i metodi per il calcolo della data della Domenica di Pasqua compreso quello di Gauss che illustreremo in questo articolo.

2 Le lune ecclesiastiche

Il punto di partenza per illustrare i metodi seguiti per il calcolo della Pasqua è proprio la legge enunciata nel paragrafo precedente. Essa fa riferimento alle “lune piene” ma, evidentemente, se la regola di calcolo deve essere valida per tutte le popolazioni Cristiane della terra non può far riferimento ad una “luna reale”. L’idea per risolvere il problema precedentemente esposto fu proprio quella di usare, invece della “luna reale”, una “luna fittizia” (detta in seguito “luna ecclesiastica”) con un periodo ben definito corrispondente, almeno approssimativamente con il periodo sinodico della Luna reale; questo fu il punto di partenza per costruire tutti i vari metodi che permettevano di calcolare la data della Domenica di Pasqua. Per come sono state introdotte, il periodo con cui si succedono le “Lune ecclesiastiche” nuove o piene deve essere necessariamente legato a quello delle “lune reali” ma in ogni caso la loro predizione non richiede particolari osservazioni o calcoli astronomici.

3 I numeri d’oro

Di fondamentale importanza per lo studio delle lune, sono le osservazioni dell’astronomo greco Metone che scoprì un ciclo di 19 anni, durante il quale avvengono 235 lunazioni (intervallo di tempo tra due eclissi o lune nuove consecutive), dopo il quale le eclissi si ripetono nel medesimo ordine.

A queste osservazioni è legato il concetto di numero d’oro che sostanzialmente rappresenta la posizione nel ciclo Metonico di un determinato anno.

Il calcolo del numero d’oro di un determinato anno richiede la specificazione del primo anno di un ciclo; questo fu selezionato da Dionisio il Piccolo che fissò nel 1 A.C. (anno della natività) il primo anno del ciclo.

Segue che il numero d’oro G di un qualunque anno N A.D. è dato da:

$$(3.1) \quad G = 1 + \text{mod}(N, 19)$$

Per esempio, il numero d’oro dell’anno 2009 è $1 + \text{mod}(2009, 19) = 15$

4 L’almanacco lunare e le tabelle Pasquali

Il primo passo fatto per calcolare la data di Pasqua fu quello di distribuire le 235 lune nuove ecclesiastiche durante tutto l’arco del ciclo Metodico (secondo il calendario Giuliano). A questo riguardo, i 19 anni di tale ciclo si dividevano a seconda del numero di lune ecclesiastiche che vi cadevano; essi contenevano 12 anni comuni consistenti di 12 lunazioni e 7 anni embolismici contenenti

13 lunazioni. Gli anni comuni contenevano 6 lunazioni di 29 giorni (lunazioni vuote) e 6 di 30 giorni (lunazioni piene). Sei degli anni embolismici contenevano in maniera simile lunazioni di 29 e 30 giorni con una lunazione in più di 30 giorni; nel settimo anno embolismico la lunazione extra era vuota con 29 giorni. Quest'ultima eccezione era conosciuta come *saltus lunae* (il salto della Luna).

Ricapitolando, i dodici anni lunari comuni contenevano 354 giorni e i 7 anni embolismici 384 giorni eccetto l'ultimo che ne conteneva 383; le 235 lunazioni contenevano 6935 giorni infatti:

$$6935 = 12 \times (6 \times 29 + 6 \times 30) + 6 \times (6 \times 29 + 7 \times 30) + (7 \times 29 + 6 \times 30)$$

I 19 anni giuliani avevano $6939.75 = 19 \times (365 + 1/4)$ giorni in media. I 4,75 giorni in più furono inseriti aggiungendo un giorno in più ad una lunazione ogni 4 anni; essa conteneva 31 o 30 giorni (nell'anno bisestile) a seconda se aveva 30 o 29 giorni in un anno normale. Le 235 lunazioni venivano evidenziate attraverso delle tabelle conosciute come "Almanacchi lunari". Nelle colonne degli Almanacchi c'erano i mesi e nelle righe i giorni del mese; questo permetteva di individuare una data dell'anno in corrispondenza della quale si inseriva un anno del ciclo di Metone. Così ad esempio l'anno XIX nel 5 Gennaio indicava che una "luna nuova" cadeva in tale giorno in ogni anno il cui numero d'oro era XIX.

Uno di tali almanacchi è stato costruito dal matematico Clavio al servizio di Gregorio XIII:

Giorni	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
	C G	C G	C G	C G	C G	C G	C G	C G	C G	C G	C G	C G
1	A III	D	D III	G	B XI	E	G IX	C VIII	F XVI	A XVI	D	F XIII
2	B	E XI	E	A XI	C	F XIX	A VIII	D XVI	G V	B V	E XIII	G II
3	C XI	F XIX	F XI	B	D XIX	G VIII	B	E V	A	C XIII	F II	A
4	D	G VIII	G	C XIX	E VIII	A XVI	C XVI	F	B XIII	D II	G	B X
5	E XIX	A	A XIX	D VIII	F	B V	D V	G XIII	C II	E	A X	C
6	F VIII	B XVI	B VIII	E XVI	G XVI	C	E	A II	D	F X	B	D XVIII
7	G	C V	C	F V	A V	D XIII	F XIII	B	E X	G	C XVIII	E VII
8	A XVI	D	D XVI	G	B	E II	G II	C X	F	A XVIII	D VII	F
9	B V	E XIII	E V	A XIII	C XIII	F	A	D	G XVIII	B VII	E	G XV
10	C	F II	F	B II	D II	G X	B X	E XVIII	A VII	C	F XV	A IV
11	D XIII	G	G XIII	C	E	A	C	F VII	B	D XV	G IV	B
12	E II	A X	A II	D X	F X	B XVIII	D XVIII	G	C XV	E IV	A	C XII
13	F	B	B	E	G	C VII	E VII	A XV	D IV	F	B XII	D I
14	G X	C XVIII	C X	F XVIII	A XVIII	D	F	B IV	E	G XII	C I	E
15	A	D VII	D	G VII	B VII	E XV	G XV	C	F XII	A I	D	F IX
16	B XVIII	E	E XVIII	A	C	F IV	A IV	D XII	G I	B	E IX	G
17	C VII	F XV	F VII	B XV	D XV	G	B	E I	A	C IX	F	A XVII
18	D	G IV	G	C IV	E IV	A XII	C XII	F	B IX	D	G XVII	B VI
19	E XV	A	A XV	D	F	B	D I	G IX	C	E XVII	A VI	C
20	F IV	B XII	B IV	E XII	G XII	C	E	A	D XVII	F VI	B	D XIV
21	G	C I	C	F I	A I	D IX	F IX	B XVII	E VI	G	C XIV	E III
22	A XII	D	D XII	G	B	E	G	C VI	F	A XIV	D III	F
23	B I	E IX	E I	A IX	C IX	F XVII	A XVII	D	G XIV	B III	E	G XI
24	C	F	F	B	D	G VI	B VI	E XIV	A III	C	F XI	A XIX
25	D IX	G XVII	G IX	C XVII	E XVII	A	C	F III	B	D XI	G XIX	B
26	E	A VI	A	D VI	F VI	B XIV	D XIV	G	C XI	E XIX	A	C VIII
27	F XVII	B	B XVII	E	G	C III	E III	A XI	D XIX	F	B VIII	D
28	G VI	C XIV	C VI	F XIV	A XIV	D	F	B XIX	E	G VIII	C	E XVI
29	A		D	G III	B III	E XI	G XI	C	F VIII	A	D XVI	F V
30	B XIV		E XIV	A	C	F	A XIX	D VIII	G	B XVI	E V	G
31	C III		F III		D XI		B	E		C V		A XIII

Possiamo notare come in ogni riquadro comparivano delle "lettere del calendario" prima dei numeri d'oro che permettevano, insieme alle "lettere domenicali" associate ad un anno, di determinare la

prima domenica che cadeva dopo questo giorno nell'anno dato. Non specifichiamo il significato delle "lettere del calendario" e delle "lettere domenicali" ma facciamo un esempio del loro utilizzo. Consideriamo la seguente tabella che assegna ad ogni lettera il numero di un giorno

Giorno	Numero	Lettera
Domenica	1	A
Lunedì	2	B
Martedì	3	C
Mercoledì	4	D
Giovedì	5	E
Venerdì	6	F
Sabato	7	G

e la formula che permette di calcolare la lettera domenicale L per un anno N in un anno Giuliano:

$$(4.3) \quad L = 7 - \text{mod} \left(N + \left[\frac{N}{4} \right] + 4, 7 \right)$$

Dove il simbolo $[\dots]$ indica la parte intera di un numero.

Se $N=1066$ il numero d'oro $G = 1 + \text{mod}(1066, 19) = 3 = III$ da cui:

$$L = 7 - \text{mod} \left(1066 + \left[\frac{1066}{4} \right] + 4, 7 \right) = 7 - 6 = 1 = A$$

In base all'almanacco Lunare si ha una luna nuova il 31 marzo e la lettera del calendario è F corrispondente al numero 6.

Allora la prima domenica dopo tale data cade $\text{mod}(1 - 6, 7) = 2$ giorni dopo, cioè il 2 Aprile.

Osservando che, si conveniva aggiungere 13 per ottenere una luna piena ecclesiastica da una luna nuova ecclesiastica si otteneva la seguente tabella pasquale che permetteva di calcolare la data della domenica di Pasqua in maniera molto simile a prima.

R (Giorni di marzo)	Data	C (lettera del calendario)	G (Numero d'oro)	E(Epatta)	Somma
21	21-mar	C	XVI	23	44
22	22	D	V	22	44
23	23	E		(21)	(44)
24	24	F	XIII	20	44
25	25	G	II	19	44
26	26	A		(18)	(44)
27	27	B	X	17	44
28	28	C		(16)	(44)
29	29	D	XVIII	15	44
30	30	E	VII	14	44
31	31	F		(13)	(44)
32	01-apr	G	XV	12	44
33	2	A	IV	11	44
34	3	B		(10)	(44)
35	4	C	XII	9	44
36	5	D	I	8	44
37	6	E		(7)	(44)
38	7	F	IX	6	44
39	8	G		(5)	(44)
40	9	A	XVII	4	44
41	10	B	VI	3	44
42	11	C		(2)	(44)
43	12	D	XIV	1	44
44	13	E	III	0	44
45	14	F		(29)	(74)
46	15	G	XI	28	74
47	16	A		(27)	(74)
48	17	B	XIX	26	74
49	18	C	VIII	25	74

Per esempio nell'anno 1066, il cui numero d'oro è III, La luna Pasquale cadeva il 13 di Aprile e la sua lettera del Calendario è $E=5$.

Allora, come prima, la Lettera Domenicale dell'anno III è uguale ad $A=1$ e quindi la prima Domenica (Pasqua) dopo tale data cade $\text{mod}(1-5, 7) = 3$ giorni dopo cioè il 16 aprile.

5 L'Epatta

Il metodo precedente richiedeva l'uso di almanacchi e tabelle pasquali, ma l'obbiettivo di determinare la luna piena pasquale e le lettere del calendario per poter calcolare la domenica di Pasqua si sarebbe potuto raggiungere utilizzando un algoritmo di calcolo simile a quello utilizzato per determinare le lettere domenicali. A questo proposito di fondamentale importanza è il concetto di Epatta di un anno, definita come l'età della luna il primo giorno dell'anno (1 gennaio). Ad esempio, nel calendario giuliano, l'epatta dell'anno 1066, il cui numero d'oro è III, è 0 in quanto si ha una luna nuova proprio il 1° gennaio mentre l'epatta dell'anno 1000, il cui numero d'oro è XII è 9, in quanto per l'anno precedente si ha una luna nuova il 23 Dicembre. Osserviamo che l'Epatta aumenta di 11 giorni per ogni anno successivo, ma quando supera 30 si sottrae 30. C'è una eccezione quando passiamo dall'anno XIX all'anno I, poiché allora l'epatta aumenta di 12 da 26 a 38 o 8 dopo aver sottratto 30.

E' chiaro che da questa definizione l'Epatta E può essere calcolata dal numero G con la formula :

$$(4.5) \quad E = \text{mod}(11 \times (G - 3), 30)$$

Le epatte di tutti i numeri sono mostrate nella colonna E della tabella precedente. Un'analisi della tabella mostra come la colonna R indichi i Giorni di Marzo (in pratica si considera Marzo come composto da 61 giorni, così il 3 di Aprile diventa il 34 di Marzo ad esempio) e la colonna S la somma tra l'Epatta e i Giorni di Marzo. Si verifica che questa somma è 44 o 74 (quando i numeri d'oro sono uguali a VIII, XI e XIX). E' chiaro allora che la data della luna piena pasquale può essere dedotta (per il calendario Giuliano) facilmente dalle epatte (basta fare una differenza), che possono essere calcolate dal numero d'oro. Abbiamo che il giorno di Marzo $R+1$ del giorno seguente la luna piena di Pasqua in funzione dell'epatta E è uguale a :

$$\begin{cases} 44 + 1 - E & \text{se } E < 24 \\ 74 + 1 - E & \text{se } E \geq 24 \end{cases}$$

tenendo conto del fatto che i numeri d'oro VIII, XI e XIX hanno rispettivamente valori dell'Epatta E uguali a 25,28,26 abbiamo allora:

$$R+1 = \begin{cases} 51 - (E + 6) & \text{se } E + 6 < 30 \\ 81 - (E + 6) & \text{se } E + 6 \geq 30 \end{cases}$$

cioè

$$R+1 = \begin{cases} 51 - (E + 6) & \text{se } E + 6 < 30 \\ 51 - (E + 6) + 30 & \text{se } E + 6 \geq 30 \end{cases}$$

e in ogni caso

$$R+1 = \text{mod}(51 - (E + 6), 30) = \text{mod}(45 - E, 30) = 22 + \text{mod}(23 - E, 30) = 22 + \text{mod}(30 + 23 - E, 30)$$

e infine

$$(4.6) \quad \boxed{R+1 = 22 + \text{mod}(53 - E, 30)}$$

La lettera del calendario sarà data invece dalla formula

$$(4.7) \quad C = 1 + \text{mod}((R+1) + 2, 7)$$

Si è in grado ora di calcolare la domenica di Pasqua, supponendo che essa cada d giorni dopo $R+1$ e quindi il giorno $R+1+d$ si ha:

$$\begin{cases} d = 0 & \text{se } L = C \\ d = L - C & \text{se } L > C \\ d = 7 + L - C & \text{se } L < C \end{cases}$$

o più in generale

$$d = \text{mod}(7 + L - C, 7)$$

giungendo così alla formula che permette di esprimere la data di marzo S della domenica di Pasqua in funzione dell'anno N in questione:

$$(4.8) \quad \boxed{S = R + 1 + \text{mod}(7 + L - C, 7)}$$

Tornando all'esempio di prima, calcoliamo il giorno di marzo della domenica di Pasqua dell'anno 1066 secondo il calendario Giuliano.

$G = III$, $E = \text{mod}(11 \times (3 - 3), 30) = 0$, $R + 1 = 22 + \text{mod}(53 - 0, 30) = 45$, $C = 1 + \text{mod}(45 + 2, 7) = 6$ e $d = \text{mod}(7 + 1 - 6, 7) = 2$, quindi $S = 45 + 2 = 47$, pertanto la domenica di Pasqua dell'anno 1066 è il 47 di Marzo, ovvero il 16 di Aprile.

6 Il Calendario Gregoriano e le equazioni solari e lunari

Il calcolo della Pasqua nel calendario Giuliano è relativamente semplice più complicata è la situazione nel calendario Gregoriano.

Nel 1582 Papa Gregorio XIII modifica il calendario Giuliano, tenendo conto del fatto che si erano compiuti degli errori nel calcolo dell'anno solare e lunare.

Osserviamo che mentre la lunghezza dell'anno medio Giuliano è 365.25 giorni la lunghezza vera dell'anno è circa 365.2422 giorni; l'anno giuliano è di circa 11 minuti più lungo.

Questo significa che l'equinozio di primavera cadeva sempre prima nella data del calendario; nel 1582 si era osservato che esso doveva occorrere l'11 di Marzo cioè 10 giorni prima.

$$((1582 - 225) \times (365.25 - 365.2422) \cong 10).$$

Similmente, in un ciclo Metonico, ci sono 235 lunazioni che contengono $19 \times (365 + 0.25) = 6939.75$

giorni. Così nel calendario giuliano il periodo medio di una lunazione era $29.53085 \left(= \frac{6939.75}{235} \right)$

giorni, mentre il valore medio della rivoluzione sinodica della Luna è all'incirca 29.53059 giorni; la Luna ecclesiastica nel calendario giuliano è in media 22 secondi troppo lunga. Questo significa che, nel calendario giuliano le lune nuove cadevano sempre prima; nel 1582, le lune piene reali cadevano 4 giorni prima rispetto alle lune piene ecclesiastiche.

$$\left(\left(\frac{1582 - 225}{19} \right) \times 235 \times (29.53085 - 29.53059) \cong 4 \right)$$

La prima modifica fatta fu quella di portare l'anno indietro di 10 giorni, e quindi fu deciso di far succedere il 15 Ottobre 1582 al 4 Ottobre 1582. La seconda modifica fu quella di correggere le discrepanze nella lunghezza dell'anno Giuliano togliendo 3 anni bisestili ogni 400 anni (osserviamo che in 400 anni il calendario Giuliano considerava circa 3 giorni in più). La regola in pratica era quella di togliere gli anni bisestili secolari (divisibili per 100) ma non quelli divisibili per 400. Per esempio il 1700, 1800 e il 1900 non sono bisestili mentre il 1600 e il 2000 sono anni bisestili. In un periodo di 400 anni, secondo questa regola, ci sono 146097 giorni $(= (365 \times 400) + 100 - 3)$ così che la media della lunghezza dell'anno gregoriano è di $146097/400 = 365.2425$ giorni. Questo periodo è ancora di 25 secondi troppo lungo e l'equinozio primaverile dovrebbe essere portato indietro di un giorno ogni 3000 anni.

Entrambi i cambiamenti alterarono evidentemente le date di tutte le lune ecclesiastiche; dopo che erano stati tolti 10 giorni, le nuove lune astronomiche sarebbero dovute occorrere 6 giorni dopo le date delle lune ecclesiastiche anziché 4 giorni prima. Ad ogni modo Clavio decise di spostare le lune 7 giorni dopo garantendo in tal modo che la Domenica di Pasqua non cadesse prima o nel giorno della Pasqua ebraica. Il cambiamento fu effettuato spostando tutti i valori nell'almanacco Lunare in una posizione 7 giorni dopo. Inoltre era necessario compensare la diminuzione degli anni bisestili; ogni qualvolta un anno bisestile veniva soppresso la data di un dato evento astronomico avrebbe dovuto essere aumentata di un giorno. In particolare, le lune nuove astronomiche sarebbero dovute occorrere un giorno dopo nel calendario. Era quindi essenziale aumentare la data dopo ogni luna nuova ecclesiastica di un giorno. Questo aggiustamento è conosciuto come equazione solare.

Un altro problema era che il periodo medio delle lunazioni ecclesiastiche che era troppo lungo ed era necessario ridurlo di un giorno ogni 311 anni. Infatti, dopo $X = \frac{1}{0.00026} = 3846.153846$ lunazioni si

ha un giorno di scarto e quindi dopo $\frac{X \cdot 19}{235} = 310.9656301 \cong 311$ anni si ha un giorno di scarto.

Si ovviò al problema, scalando in alto i numeri d'oro nell'almanacco lunare di 8 giorni ogni 2500 anni. Il primo spostamento occorreva nel 1800, e poi un giorno ogni 3 secoli avendo l'accortezza che, dopo aver ripetuto l'operazione 7 volte, per compierla l'ottava volta, si doveva attendere un secolo in più cioè 400 anni. Il motivo di tutto questo è che, se in 2400 anni le date della lune ecclesiastiche si spostano 8 giorni indietro, in media, ogni 311 anni, tali date si spostano 1.037 giorni indietro compiendo un errore di 0.037 giorni. Viceversa, se in 2500 anni le date della lune ecclesiastiche si spostano 8 giorni indietro, in media, ogni 311 anni, tali date si spostano 0.9952 giorni indietro compiendo un errore di 0.0048 giorni molto minore rispetto a prima. Questo aggiustamento è conosciuto come equazione lunare.

I due aggiustamenti compaiono in tutti gli algoritmi per il calcolo della pasqua secondo i canoni gregoriani e in particolar modo nel metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua.

7 Metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua

Basato sui principi prima illustrati, Gauss pubblicò nel 1800 nella rivista "Monatliche Correspondence" un metodo generale per calcolare la Pasqua.

Il suo unico difetto era quello di ignorare che l'equazione lunare doveva essere applicata ogni 2500 anni anziché 2400 che comportava errori sul calcolo della domenica di Pasqua a partire dal 4200.

Illustriamo l'algoritmo:

Si indichi con N l'anno in cui vogliamo sapere la data di Pasqua e si considerino dalla seguente tabella i numeri m ed n corrispondenti ad N:

Date	m	n
Prima del 1582	15	6
1583-1699	22	2
1700-1799	23	3
1800-1899	23	4
1900-1999	24	5
2000-2100	24	5
2100-2199	24	6
2200-2299	25	0
2300-2399	26	1
2400-2499	25	1

Si calcolino i seguenti parametri:

$$a = \text{mod}(N, 19) \text{ (Numero d'oro -1)}$$

$$b = \text{mod}(N, 4)$$

$$c = \text{mod}(N, 7) \quad d = \text{mod}(19a + m, 30)$$

$$e = \text{mod}(2b + 4c + 6d + n, 7)$$

Allora la data della domenica di Pasqua è:

$$\begin{cases} 22+d+e & \text{Marzo se } d+e \leq 9 \\ 22+d+e-31 & \text{Aprile se } d+e > 9 \end{cases}$$

Osserviamo che vi sono due eccezioni:

Se $22+d+e \geq 31$ e $22+d+e-31=26$ allora la data di Pasqua è il 19 Aprile.

Se $22+d+e \geq 31$, $22+d+e-31=25$, $d=28$ e $a > 10$ allora la data di Pasqua è il 18 Aprile.

Esempio 1: calcoliamo la Pasqua del 1066.

$$N = 1066, m = 15, n = 6 \qquad a = \text{mod}(1066, 19) = 2 \qquad b = \text{mod}(1066, 4) = 2$$

$$c = \text{mod}(1066, 7) = 2 \qquad d = \text{mod}(38+15, 30) = 23$$

$$e = \text{mod}(4+8+138+6, 7) = \text{mod}(156, 7) = 2$$

Ora $22+23+2=47$ e $23+2 > 9$ quindi la data della domenica di Pasqua è il 16 aprile.

Esempio 2: calcoliamo la Pasqua del 1492.

$$N = 1492, m = 15, n = 6 \qquad a = \text{mod}(1492, 19) = 10 \qquad b = \text{mod}(1492, 4) = 0$$

$$c = \text{mod}(1492, 7) = 1 \qquad d = \text{mod}(190+15, 30) = 25$$

$$e = \text{mod}(4+150+6, 7) = \text{mod}(160, 7) = 6$$

Ora $22+25+6=53$ e $25+6 > 9$, quindi la domenica di Pasqua è il 22 di Aprile.

Esempio 3: calcoliamo la Pasqua del 2010.

$$N = 2010, m = 24, n = 5 \qquad a = \text{mod}(2010, 19) = 15 \qquad b = \text{mod}(2010, 4) = 2$$

$$c = \text{mod}(2010, 7) = 1 \qquad d = \text{mod}(285+24, 30) = 9$$

$$e = \text{mod}(4+4+54+5, 7) = \text{mod}(67, 7) = 4$$

Ora $22+9+4=35$ e $9+4 > 9$ quindi la Pasqua cade il 4 di Aprile.

8 Dimostrazione del metodo di Gauss per il calcolo della Pasqua

Gauss ha fatto uso della tabella pasquale del XVIII secolo:

Numero d'oro	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Data	13 Aprile	2 Aprile	22 Marzo	10 Aprile	30 Marzo	18 aprile	7 Aprile	27 Marzo	15 Aprile	4 Aprile
Giorno di Marzo	44 Marzo	33 Marzo	22 Marzo	41 Marzo	30 Marzo	49 Marzo	38 Marzo	27 Marzo	46 Marzo	35 Marzo
Numero d'oro	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	
Data	24 Marzo	12 Aprile	1 Aprile	21 Marzo	9 Aprile	29 Marzo	17 Aprile	6 Aprile	26 Marzo	
Giorno di Marzo	24 Marzo	43 Marzo	32 Marzo	21 Marzo	40 Marzo	29 Marzo	48 Marzo	37 Marzo	26 Marzo	

Questa tabella è ottenibile semplicemente dall'almanacco lunare di Clavio, convenendo di spostare i numeri d'oro in basso di 9 giorni (tenendo conto degli aggiustamenti delle equazioni solari e lunari) e quindi di 13 per ottenere l'almanacco delle lune piene ecclesiastiche per poi arrivare alla tabella soprastante. Dalla tabella di plenilunio si vede che le lune cadono tra il 21 Marzo e il 18 Aprile

8.1 Determinazione della luna di Pasqua per il secolo XVIII

Gauss indica con D i giorni che devono passare fino al primo plenilunio dopo il 21 Marzo ($0 \leq D < 29$) e mette in relazione i valori di $a = \text{Numero d'oro}-1 = \text{mod}(N, 19)$, dove N è l'anno in questione, con i valori che assume D e osserva che:

Verifica infine che per tutti e 19 i casi vale la relazione: $D = 23 - 11p + 19q$ dove $p + q = a$.

Quindi:

$$D = 23 - 11p + 19q = 23 + 30p - 11p + 19q - 30p = 23 + 19p + 19q - 30p = 23 + 19(p + q) - 30p$$

Allora $D = 23 + 19a - 30p$ cioè $23 + 19a = 30p + D$ e quindi D è il resto della divisione di $23 + 19a$ con 30.

Concludendo

$$D = \text{mod}(23 + 19a, 30)$$

8.2 Determinazione della luna di Pasqua per un secolo qualunque

In questo caso più generale indichiamo i giorni che devono passare fino al primo plenilunio dopo il 21 Marzo con " d " dove ($0 \leq d \leq 29$).

1. $1800 \leq N \leq 1899$

Nel 1800 si applicano sia l'equazione solare che lunare e quindi rimangono invariate le posizioni dei numeri d'oro nell'almanacco lunare in questo caso si ha ancora:

$$d = \text{mod}(23 + 19a, 30)$$

2. $1900 \leq N \leq 1999$

Nel 1900 si applica l'equazione solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in basso e in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \text{mod}(23 + 19a, 30) + 1 = \text{mod}(24 + 19a, 30)$$

Se $\text{mod}(23 + 19a, 30) + 1$ è 30 sicuramente il numero d'oro di "a", per come è costruito l'almanacco lunare, cadrà il 21 di Marzo e d sarà uguale a 0 ovvero

$$d = \text{mod}(24 + 19a, 30)$$

3. $2000 \leq N \leq 2100$

Nel 2000 non si applicano né l'equazione solare né quella lunare e quindi rimangono invariate le posizioni dei numeri d'oro nell'almanacco lunare in questo caso si ha ancora:

$$d = \text{mod}(24 + 19a, 30)$$

4. $2100 \leq N \leq 2199$

Nel 2100 si applicano sia l'equazione solare che lunare e quindi rimangono invariate le posizioni dei numeri d'oro nell'almanacco lunare in questo caso si ha ancora:

$$d = \text{mod}(24 + 19a, 30)$$

5. $2200 \leq N \leq 2299$:

Nel 2200 si applica l'equazione solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in basso; in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \text{mod}(24 + 19a, 30) + 1 = \text{mod}(25 + 19a, 30)$$

Quando $\text{mod}(24 + 19a, 30) + 1$ è 30 si ragiona come nel caso 3 e quindi

$$d = \text{mod}(25 + 19a, 30)$$

6. $2300 \leq N \leq 2399$:

Nel 2300 si applica ancora l'equazione solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in basso; in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \text{mod}(25 + 19a, 30) + 1 = \text{mod}(26 + 19a, 30)$$

Quando $\text{mod}(25 + 19a, 30) + 1$ è 30 si ragiona come nel caso 3 e quindi

$$d = \text{mod}(26 + 19a, 30)$$

7. $2400 \leq N \leq 2499$

Nel 2400 si applica l'equazione lunare ma non quella solare e quindi la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in alto; in questo caso si ha evidentemente:

$$d = \text{mod}(26+19a, 30) - 1 = \text{mod}(25+19a, 30)$$

Quando $\text{mod}(26+19a, 30) - 1 = -1$ sicuramente il numero d'oro di "a", per come è costruito l'almanacco lunare, cadrà il 50 di Marzo (19 di Aprile) ricadendo così nel caso in cui d è uguale a 29 ovvero

$$d = \text{mod}(25+19a, 30)$$

8. $1583 \leq N \leq 1699$

Si osserva che nel 1700 si era applicata l'equazione solare e quindi, andando dietro nel tempo, la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare si spostano in alto cioè:

$$d = \text{mod}(23+19a, 30) - 1 = \text{mod}(22+19a, 30)$$

Quando $\text{mod}(23+19a, 30) - 1 = -1$ si ragiona come nel caso 7 e quindi

$$d = \text{mod}(22+19a, 30)$$

9. Prima del 1582

Osserviamo che tanto nel 1600 quanto prima del 1582, con il calendario Giuliano, non si applicano né l'equazione solare né quella lunare; bisogna solo tener presente che all'epoca della riforma del calendario la posizione dei numeri d'oro nell'almanacco lunare è stata spostata in basso di 7 posizioni.

Evidentemente andando dietro nel tempo si ha:

$$d = \text{mod}(22+19a, 30) - 7 = \text{mod}(15+19a, 30)$$

Tutti i casi speciali sono trattati come nei punti precedenti e quindi $d = \text{mod}(15+19a, 30)$

In maniera più compatta possiamo scrivere:

$$d = \text{mod}(m+19a, 30)$$

dove m è preso dall'ultima tabella.

8.3 La Domenica di Pasqua nel secolo XVIII

Gauss indica con E il numero di giorni che intercorrono tra il primo giorno dopo il primo plenilunio di primavera e la Domenica di Pasqua ($0 \leq E \leq 6$). Inizialmente il problema si risolve per gli anni N compresi tra il 1700 e il 1799. Ponendo:

i = numero di anni bisestili tra il 1700 e l'anno N (incluso)

g = il numero di giorni tra la domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N

avremo che $g = 365(N - 1700) + 22 + d + E - 21 + i = 1 + d + E + 365(N - 1700) + i$

Il valore $4 \lfloor N/4 \rfloor = N - \text{mod}(N, 4)$ fornisce N o il primo anno bisestile prima di N; quindi se N è compreso tra il 1700 e il 1799 abbiamo che $N - \text{mod}(N, 4) - 1700$ fornisce il numero di anni compresi tra il 1700 e l'ultimo anno bisestile che non segue l'anno N.

Avremo allora che:

$$i = \frac{1}{4}(N - \text{mod}(N, 4) - 1700) = \frac{1}{4}(N - b - 1700) \quad \text{ricordando che } b = \text{mod}(N, 4)$$

Sostituendo i nella prima espressione, otteniamo che

$$g = 1 + d + E + 365(N - 1700) + \frac{1}{4}(N - b - 1700)$$

Chiaramente per definizione il numero di giorni tra due domeniche nel calendario deve essere necessariamente divisibile per 7 e quindi g è divisibile per 7.

Consideriamo ora una serie di espressioni, partendo dalla precedente, tutte divisibili per 7.

Osservando che $\frac{1}{4}(N-b-1700)$ è un intero, allora $\frac{7}{4}(N-b-1700)$ sarà un numero divisibile per 7 e quindi:

$$1+d+E+365(N-1700)+\frac{1}{4}(N-b-1700)+\frac{7}{4}(N-b-1700)=1+d+E+365(N-1700)+2(N-b-1700)$$

è divisibile per 7.

Semplificando si vede che: $1+d+E+367(N-1700)-2b$ è divisibile per 7.

Osservando ora che il numero $364(N-1700)$ è divisibile per 7 possiamo togliere tale quantità dalla precedente espressione ottenendo che $1+d+E+3(N-1700)-2b$ è divisibile per 7.

Semplificando $1+d+E+3N-5100-2b$ è divisibile per 7. Semplificando ancora $d+E+3N-5099-2b$ è divisibile per 7. Aggiungendo 5096, che è un numero divisibile per 7, otteniamo che $d+E+3N-3-2b$ è ancora divisibile per 7. Ricordando che $c = \text{mod}(N, 7)$ abbiamo

che $3N-3c=3N-3\left(N-7\left[\frac{N}{7}\right]\right)=21\left[\frac{N}{7}\right]$ è divisibile per 7 e quindi sottraendo $3N-3c$ all'espressione del passo precedente otteniamo che $d+E+3c-3-2b$ è ancora divisibile per 7. Sottraendo l'espressione precedente a $7c+7d$ otteniamo che $4c+6d-E+3+2b$ è ancora divisibile per 7. Ancora, scambiando i termini, si ha che $3+2b+4c+6d-E$ è divisibile per 7.

Ricordando che $0 \leq E \leq 6$, dividendo $3+2b+4c+6d=(3+2b+4c+6d-E)+E$ per 7 vediamo subito che il resto deve essere necessariamente uguale ad E. Ricordando che, se $1700 \leq N < 1799$ $n=3$ allora $E=e=\text{mod}(3+2b+4c+6d, 7)$, allora la domenica di Pasqua cadrà il $22+d+e$ di marzo; chiaramente se $22+d+e \geq 31$ la Pasqua cadrà il $22+d+e-31$ di aprile.

8.4 La domenica di Pasqua in un secolo qualunque.

Anche questa volta dobbiamo distinguere diversi casi.

1. $1800 \leq N \leq 1899$

Il 1800 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-1$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \text{mod}(1+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(4+2b+4c+6d, 7)$$

2. $1900 \leq N \leq 1999$

Il 1900 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-2$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \text{mod}(2+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(5+2b+4c+6d, 7)$$

3. $2000 \leq N \leq 2099$

Il 2000 non è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è ancora

$$E = \text{mod}(2+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(5+2b+4c+6d, 7)$$

4. $2100 \leq N \leq 2199$

Il 2100 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la domenica 21 marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-3$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \text{mod}(3+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(6+2b+4c+6d, 7)$$

5. $2200 \leq N \leq 2299$

Il 2220 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la Domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-4$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \text{mod}(4+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(7+2b+4c+6d, 7)$$

6. $2300 \leq N \leq 2399$

Il 2300 è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la Domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è uguale a $1+d+E+365(N-1700)+i-5$ e ripetendo lo stesso identico calcolo di prima ci accorgiamo che

$$E = \text{mod}(5+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(8+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(1+2b+4c+6d, 7)$$

7. $2400 \leq N \leq 2499$

Il 2400 non è un anno bisestile soppresso e quindi il numero di giorni tra la Domenica 21 Marzo 1700 e la domenica di Pasqua dell'anno N è ancora

$$E = \text{mod}(5+3+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(8+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(1+2b+4c+6d, 7)$$

8. $1583 \leq N \leq 1699$

In questo caso l'anno N precede il 1700 e in maniera simile a prima calcoliamo il numero di giorni che intercorrono tra la Domenica di Pasqua dell'anno N e la Domenica 21 Marzo del 1700.

In maniera simile a prima poniamo:

\bar{i} = Numero di anni bisestili tra il primo anno bisestile dopo N e il 1700

\bar{g} = il numero di giorni tra la domenica di Pasqua dell'anno N e domenica 21 marzo 1700.

Avremo allora che $\bar{g} = 365(1700-(N+1)) + (365-(22+d+E)) + 21 + \bar{i}$ e semplificando:

$$\bar{g} = 365(1700-N) - d - E + \bar{i} = \bar{i} - (365(N-1700) + 1 + d + E)$$

D'altra parte $N - \text{mod}(N, 4)$ è il primo anno bisestile prima di N e quindi $N - \text{mod}(N, 4) + 4$ è il primo anno bisestile dopo N.

Allora otteniamo $\bar{i} = \frac{1}{4}(1700 - N + b) - 1$, ricordando che $b = \text{mod}(N, 4)$.

$$\text{Quindi } \bar{g} = \frac{1}{4}(1700 - N + b) - 1 - (365(N-1700) + 1 + d + E)$$

$$\text{cioè } = -1 - \left(365(N-1700) + 1 + d + E + \frac{1}{4}(N - b - 1700) \right)$$

e ragionando in maniera simile a prima otteniamo che

$$E = \text{mod}(2+2b+4c+6d, 7)$$

9. $N \leq 1582$

In questo caso possiamo fare un ragionamento del tutto simile a prima, tenendo conto del fatto che nel 1582 con la riforma Gregoriana si erano tolti dieci giorni.

Allora in questo caso $\bar{g} = -11 - \left(365(N-1700) + 1 + d + E + \frac{1}{4}(N - b - 1700) \right)$ e quindi

$$E = \text{mod}(-8+2b+4c+6d, 7) = \text{mod}(6+2b+4c+6d, 7)$$

Per concludere riepilogando tutti i casi possiamo scrivere in maniera più compatta

$$E = \text{mod}(n+2b+4c+6d, 7).$$

8.5 I casi speciali della formula di Gauss

La prima eccezione

Quando $22 + d + e - 31 = 26$ abbiamo che $d + e = 35$ e quindi sia d che e devono assumere il loro valore massimo cioè $d = 29$ ed $e = 6$ e quindi la prima Luna piena ecclesiastica di primavera deve cadere domenica 19 aprile fuori dell'intervallo di 29 giorni in cui cadono le lune pasquali.

Questa situazione deriva dal fatto che, per effetto degli spostamenti dei numeri d'oro sugli almanacchi, può capitare che qualche numero d'oro non occorra nell'intervallo dei 29 giorni. In questo caso il canone gregoriano prevede uno spostamento indietro di un giorno del numero d'oro sull'almanacco o meglio uno spostamento della Luna piena ecclesiastica che cade il 19 Aprile al 18 Aprile. Spostando la Luna ecclesiastica di primavera dal 19 aprile al 18 aprile, il primo giorno dopo la Luna piena ecclesiastica è domenica 19 aprile cioè la domenica di Pasqua.

Ad esempio cerchiamo di calcolare la Pasqua dell'anno 2201.

Il suo numero d'oro è $G = 1 + \text{mod}(2201, 19) = 17$ e

$$a = \text{mod}(2201, 19) = 16$$

$$b = \text{mod}(2201, 4) = 1$$

$$c = \text{mod}(2201, 7) = 3$$

$$d = \text{mod}(329, 30) = 29$$

$$e = \text{mod}(2 + 12 + 174, 7) = \text{mod}(188, 7) = 6$$

$$22 + d + e - 31 = 26$$

Stiamo evidentemente nel caso descritto sopra come si può verificare da un controllo della tabella pasquale a fianco del secolo *XXIII*.

Quindi dobbiamo spostare di una posizione indietro nell'almanacco il numero d'oro XVII cioè da Domenica 19 Aprile 2201 a Sabato 18 Aprile 2201; evidentemente Pasqua è domenica 19 aprile.

Giorni	Marzo	Aprile
1	XVI	V
2	V	
3		XIII
4	XIII	II
5	II	
6		X
7	X	
8		XVIII
9	XVIII	VII
10	VII	
11		XV
12	XV	IV
13	IV	
14		XII
15	XII	I
16	I	
17		IX
18	IX	
19		XVII
20	XVII	VI
21	VI	
22		XIV
23	XIV	III
24	III	
25		XI
26	XI	
27		XIX
28	XIX	VIII
29	VIII	XVI
30	C	V
31	D XVI	

La seconda eccezione

Quando $22 + d + e - 31 = 25$ abbiamo che $d + e = 34$ e quindi, tenendo sempre conto del fatto che $0 \leq e \leq 6$, $0 \leq d \leq 29$, può accadere che a) $d = 29$ ed $e = 5$ oppure che b) $d = 28$ ed $e = 6$.

Nel primo caso ci troviamo di fronte ad una situazione molto simile a prima: infatti la Luna piena ecclesiastica nell'anno in esame cade lunedì 19 aprile, non comparendo nell'arco del periodo pasquale. Allora la luna piena di Pasqua si sposterà ancora a domenica 18 aprile e Pasqua cadrà necessariamente il domenica 25 aprile.

Nel secondo caso la situazione cambia leggermente; il fatto che ed $e = 6$ implica che la luna piena pasquale cade domenica 18 aprile.

Quando, in questo caso, il numero d'oro assume valori tra 12 e 19 e quindi, quando $a > 10$, siamo nella situazione in cui un numero d'oro non occorre nell'intervallo dei 29 giorni e la posizione precedente nell'almanacco è a sua volta occupata da un altro numero d'oro che è quello in questione.

Il canone gregoriano prevede che in questa situazione entrambi i numeri si debbano spostare indietro nel calendario e quindi, nel nostro caso, la luna piena pasquale si sposta a sabato 17 aprile; in questo caso Pasqua cadrà domenica 18 aprile.

120. Lo scaffale dei libri

Arrigo Amadori, Luca Lussardi, *Un'introduzione alla Teoria della Relatività*, Aracne editrice, 2009.

Luca Francesca ha intervistato Luca Lussardi a proposito del libro che ha scritto con Arrigo Amadori sulla teoria della relatività; un libro divulgativo pensato per studenti universitari.

Domanda: Relatività, un tema molto interessante e molto attuale. Di solito spiegata alla spicciola e semplificata. Come è nata l'idea di un libro proprio su questo argomento? Qual è lo scopo?

Risposta: Indubbiamente la teoria della relatività è una teoria che viene spesso spiegata in modo troppo semplicistico e a volte fuorviante. Il nostro obiettivo, con questo libro, è proprio quello di presentare una possibile semplice introduzione alla teoria della relatività che non fosse troppo pesante dal punto di vista tecnico ma che allo stesso tempo fornisse un valido fondamento di pensiero a tutti coloro che vogliono conoscere le basi di questa importantissima parte della fisica moderna. L'idea di scrivere un testo di introduzione alla teoria della relatività è nata dagli interessi comuni tra Arrigo e me, lui per la teoria della relatività, io per la geometria differenziale, la quale fornisce il linguaggio geometrico naturale della fisica. Speriamo di dare un valido supporto a tutti coloro che si aspettano una lettura scorrevole, semplice ma ricca di spunti notevoli di approfondimento.

Domanda: Il lettore tipo a cui consigliereste il libro.

Risposta: Il nostro testo potrebbe essere utilizzato come supporto ad un corso universitario di relatività per studenti di matematica o fisica. Il lettore tipo è quindi uno studente universitario, ma non solo: chiunque abbia una buona conoscenza dell'analisi può leggere il nostro lavoro.

Domanda: Tu sei un matematico e Arrigo Amadori un fisico. Quanto di matematico è suo e quanto di fisico tuo... insomma come vi siete spartiti i compiti?

Risposta: La matematica e la fisica sono intimamente collegate tra loro, nessuna delle due potrebbe esistere senza l'altra, almeno nella forma in cui le conosciamo oggi. Scrivere un libro di fisica vuol quindi dire anche scrivere un libro di matematica. La stesura del testo è stata interamente un lavoro di collaborazione; va da sé che il formalismo matematico è stato più curato da me mentre la parte fisico-concettuale è stata più curata da Arrigo, ma in generale si può parlare di contributo diviso esattamente in parti uguali in ogni parte del testo.

Domanda: I requisiti che ritieni fondamentali per la corretta comprensione del libro quali sono? E quali altre letture consiglieresti per completare?

Risposta: Una buona conoscenza dell'analisi matematica in dimensione finita e possibilmente una discreta conoscenza dei fondamenti della meccanica analitica. Per completare il lavoro uno può approfondire come vuole; potrebbe approfondire la parte di relatività continuando su testi moderni e molto più specialistici di fisica teorica, oppure potrebbe anche studiarsi la geometria differenziale nella veste in cui oggi viene



classicamente presentata, ovvero con uno stile molto più moderno e astratto rispetto a quello utilizzato nel nostro testo.

Domanda: E ora una domanda tecnica. L'introduzione dei tensori secondo la loro formulazione originale e non quella "moderna". Quali sono le motivazioni dietro a una tale scelta?

Risposta: Questa domanda me l'aspettavo, e credo che sia uno dei "punti di forza" del nostro trattato. Il calcolo tensoriale è nato ai primi del Novecento, per opera di matematici italiani come Ricci Curbastro e Levi Civita, ed è nato in un contesto puramente geometrico-differenziale. E' affascinante e stupefacente come poi tale teoria sia diventata il fondamento matematico su cui Einstein appoggiò poi la teoria della relatività generale. Il calcolo tensoriale si è poi evoluto durante gli anni e oggi viene presentato, in genere, sotto un aspetto molto più algebrico e astratto. Quello che secondo noi però viene a mancare oggi è il giusto raccordo tra l'astrazione matematica della geometria riemanniana e il vecchio calcolo tensoriale "alla Levi-Civita", fatto sporcandosi le mani con le coordinate locali. Soprattutto in vista della teoria della relatività sarebbe necessario riprendere sempre in mano i conti "dei vecchi" (leggi dei saggi) i quali alla fin fine aiutano davvero a capire dove sta l'idea e il concetto fondamentale. Per tutto questo devo ringraziare Bruno Bigolin, professore ordinario di Geometria presso l'Università Cattolica di Brescia, mio maestro di Geometria.

Domanda: Da quali fonti avete attinto per la stesura?

Risposta: Per quanto riguarda la parte di relatività ristretta e generale la fonte principale è stata "Lev Davidovic Landau e Evgenij Mihajlovic Lifsic, Teoria dei campi, Editori riuniti, Roma 1999", mentre per quanto riguarda la parte più teorico-matematica il riferimento essenziale è stato "Tullio Levi Civita, Lezioni di Calcolo Differenziale assoluto, trad. di E. Persico, Stock editore, Roma 1925". Vari altri testi possono essere utilizzati allo scopo nostro, altri riferimenti si trovano nella Bibliografia.

Domanda: Che tipo di apprezzamento vi aspettate e quale invece è la critica più temuta?

Risposta: Partiamo dal fondo: la critica che temo di più è quella di essere stato troppo carente, riduttivo e semplicistico nella parte del formalismo matematico, sia nella parte di calcolo tensoriale sia lungo la parte "fisica" del trattato. Forse questa critica mi potrebbe essere mossa da un matematico che si aspetta un testo di teoria della relatività che contenga il calcolo tensoriale come oggi viene presentato, e in questo punto la nostra scelta è stata invece di altro tipo. L'apprezzamento che più ci farebbe piacere avere sarebbe quello di persone che capiscono e diventano padroni dei fondamenti concettuali della teoria stessa: non ha importanza che uno con il nostro libro capisca alla perfezione la teoria della relatività, anche perché forniamo solo un'introduzione alla teoria stessa; quello che vorremmo è invece che le persone che leggono con cura il nostro testo possano comprendere la base concettuale su cui eventualmente poi sviluppare lo studio e l'approfondimento di parti e sottoparti della teoria stessa più moderne.

Domanda: I punti forti del vostro libro sono chiarezza di esposizione e semplicità. Non temete di semplificare troppo?

Risposta: E' una paura fondata per quanto riguarda l'apparato matematico dato al testo, però in matematica si fa sempre a tempo a rendere rigorose le cose. La cosa importante è che uno capisca il concetto, l'idea che sta dietro ad una teoria, perché funziona un approccio invece di un altro. Questo aspetto della teoria della relatività noi lo abbiamo curato nel dettaglio. Se poi uno è desideroso di ampliare e approfondire astraendo anche la conoscenza matematica necessaria lo può fare avendo una solida base concettuale di partenza.

Domanda: Molto interessanti i codici Php in coda. Di chi è stata l'idea?

Risposta: L'idea qui è completamente unilaterale, ed è di Arrigo. Ho trovato anche io molto interessante la cosa, soprattutto perché molto spesso cimentarsi nei conti di calcolo tensoriale "a mano" può essere davvero noioso e potrebbe far perdere il filo del ragionamento.

Ancora un ringraziamento a Luca (e anche ad Arrigo) per il suo tempo e per l'interessantissimo libro che mi sento di consigliare e che ho inserito nella mia libreria personale.

Luca Francesca

Beppe Scienza, *Il Risparmio Tradito, Come difendersi da bancari, assicuratori... e giornalisti*, Prefazione di Beppe Grillo, Edizioni Libreria Cortina, Torino, 2009.

La prima edizione de "Il risparmio tradito" risale al 2001; Matematicamente.it ne ha già parlato. Beppe Scienza, occasionale collaboratore del nostro sito web, è un matematico (insegna all'Università di Torino) che ama dire quanto la nuda matematica sostiene. Per il mondo del giornalismo economico, e ancor più quello di bancari, assicuratori e consulenti finanziari la matematica è considerata una delle tante opinioni possibili, la realtà e la verità sembrano non esistere, esistono soltanto libere interpretazioni di grafici, percentuali e rendimenti. Beppe Scienza è matematico coraggioso, anche il suo editore, non tanto perché spara a zero sugli imbrogli dei praticoni del risparmio – troppo facile, è come sparare sul pianista - quanto perché inchioda alla nuda realtà dei numeri i cosiddetti giornalisti economici delle principali testate italiane. Incastrare il modo della carta stampata di settore, con le potenze economiche che lo sostengono, con la impenetrabile e incomprensibile commistione tra editoria, banche e politica, è impresa non da poco.

Il libro riprende il tema delle bugie sui fondi comuni italiani, tema abbondantemente sviluppato anche nelle precedenti edizioni. Mettendo a confronto i dati reali, invece di quelli dei depliant delle stesse banche proponenti, i risultati sono un vero e proprio disastro.

Il prof. Scienza denuncia il fatto che la banca è in realtà 'il peggior nemico del risparmiatore italiano', in quanto essa si presenta come consulente quando invece è proprio il suo principale concorrente. Il risparmiatore rimane intrappolato tra le argomentazioni di chi crede lo stia consigliando bene (il banchiere di turno) il quale si avvale a volte di articoli della carta stampata che spesso si limitano a ricopiare i depliant pubblicitari dei prodotti bancari dei grossi gruppi, al punto che il disarmato risparmiatore non ha nessun rife-



rimento oggettivo, è vittima di una sistematica opera di disinformazione, di un fuoco incrociato di banche, assicurazioni, reti porta a porta... e giornalisti. “E’ logico che le banche cerchino il profitto: non sono mica istituzioni benefiche”, sembra essere questa l’affermazione di fondo dei soliti furbi ma anche la rassegnazione del risparmiatore ‘tradito’. Beppe Scienza denuncia: “Pure un industriale o un negoziante puntano al profitto, ma di regola lo conseguono senza danneggiare i loro clienti. La differenza è che al risparmiatore la banca non mira a offrire una merce o servizio in cambio di denaro, come fa una casa automobilistica, una pettinatrice ecc. Il suo primo obiettivo è impedirgli di investire da solo. Ammettiamo infatti che la banca gli lasci comprare un titolo di stato: in una certa situazione dei tassi il risparmiatore otterrà per es. un 4% annuo e la banca solo una commissione di vendita o collocamento dell’ordine dello 0,50% *una tantum*. Ecco allora che essa ricorre a ogni mezzo per appioppargli invece una obbligazione scadente, un fondo, una polizza ecc. Così incamererà magari un 3% ogni anno, direttamente o tramite società a essa collegate, e al cliente resterà solo un 1%.”

Ciò che c’è di nuovo nel libro di Scienza rispetto all’edizione precedente è l’attenzione a un vero e proprio imbroglio fatto ai danni dei lavoratori italiani che sono stati convinti, per fortuna solo in parte, ad abbandonare il Trattamento di fine rapporto (TFR) o di fine servizio (TFS) per avventurarsi verso pseudo polizze vita e fondi pensione altamente pericolosi. “Una delle tante frottole sulla previdenza integrativa è che sarebbe più sicura delle pensioni dell’Inps e dello Stato. E’ vero esattamente il contrario” afferma Beppe Scienza. “Le tanto denigrate pensioni pubbliche incorporano garanzie che il privato non offre. Fare affidamento su di esso per la propria vecchiaia è un bell’azzardo. [...] non c’è solo il rischio di un crac della compagnia di assicurazione e l’assenza di un fondo di garanzia che invece esiste per conti correnti e libretti bancari.”

La nuova edizione de “Il Risparmio Tradito” contiene una guida di 35 pagine circa su un tema particolarmente delicato in un periodo di grave crisi economica: “Come salvare i propri soldi”. La guida si articola su tre temi principali: l’obiettivo della massima sicurezza, la diversificazione degli investimenti, le forme di previdenza TFR, TFS, fondi pensione e polizza vita. Il mondo della finanza, avverte Beppe Scienza, è infestato da farabutti, per questo, anche contro voglia è meglio occuparsi in prima persona dei propri soldi. La diffidenza in questo campo è d’obbligo. La prima regola è quella di diffidare delle affermazioni, dei dati, dei consigli contenuti negli articoli e nelle interviste sul risparmio come questo libro documenta con oltre 370 citazioni prese da giornali e riviste specializzate. Per sopravvivere è necessario imparare a filtrare le notizie.

La guida di Beppe Scienza è abbastanza dettagliata e passa in rassegna le numerose forme di investimento trasparenti che pure esistono. Chi si è già reso conto che i propri soldi vanno salvaguardati dai tanti ‘ladri’, anche in giacca e cravatta dall’apparente onestà e operosità, è bene che si metta a leggere con calma questa guida, magari attrezzato di carta, matita e calcolatrice.

<http://www.dm.unito.it/personalpages/scienza/>

Antonio Bernardo

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 3 Numero 10 – Luglio 2009

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it