MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito

• Numero 6 – Maggio 2008 •

Matematicamente

Mathesis Nazionale

Società Italiana di
Scienze Matematiche e Fisiche
fondata nel 1895

Fascicolo speciale dedicato a Bollettino Mathesis
Rivista on line della Mathesis Numero 0

ENNIO DE GIORGI - PARADISO E PURGATORIO - DELUSIONI D'AMORE - LABIRINTI DELLA MENTE - LOGICA FUZZY - MONTESSORI E PIAGET - GEOMETRIA DESCRITTIVA - RAGIOCANDO - LA BOTTEGA DEL MATEMATICO

Come proporre un contributo
Istruzioni per gli autori

I contributi da proporre devono riguardare: storia della matematica e della fisica, didattica della matematica e della fisica, novità dal mondo della ricerca matematica, curiosità matematiche, matematica e cultura.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato Word, carattere Arial, 12 pt, formato della pagina A4, interlinea 1. Le formule possono essere in Microsoft equation editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati. Le immagini devono essere sia nel file Word sia fornite a parte come singoli file. Eventuale materiale scannerizzato deve essere salvato in formato TIF alla risoluzione di 300 dpi.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale, istituzione o ambiente professionale di appartenenza.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (3-6 righe), e dovrà terminare con una bibliografia ed, eventualmente, una sitografia finale. Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia. In ogni caso, i contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. All'autore non saranno inviate bozze di alcun tipo.

La responsabilità del contenuto scientifico degli articoli pubblicati è esclusivamente degli autori.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE
Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006
al n.953 del Tribunale di Lecce

Direttore responsabile
Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore
Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione
Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto
Luca Barletta
Michele Mazzucato

Hanno collaborato a questo numero
Antonio Bernardo, Ester Bonetti, Anna Cerasoli, Giuseppe De Cecco, Ilaria Di Russo, Domenico Lenzi, Domenico Licchelli, Paolo Lorenzi, Rosa Marincola, Antonio Maturo, Elena Rizzo, Alessio Russo.

Progetto grafico
Anna Gangale

SOMMARIO

EDITORIALE

Questo numero esce un po' in ritardo, ci scusiamo con i nostri lettori abituali. C'è voluto un po' più del previsto anche perché nel frattempo Dario, il neonato di Anna, che cura il progetto grafico della rivista, ha deciso di nascere proprio quando ormai stavamo per ultimare i lavori. Mi sento di dare a nome di tutti un caloroso benvenuto a Dario e di fare i complimenti ad Anna per questo impegnativo lavoro 'creativo'.
In questo fascicolo vede anche la luce il ***Bollettino della Mathesis****, figlio del prestigioso* ***Periodico di Matematiche****, nato nel 1886, che dal 1899 è l'organo ufficiale della* ***Mathesis,*** *"Società italiana di scienze matematiche e fisiche".*
In questo numero si raccoglie una selezione degli articoli presentati per la pubblicazione sul Magazine di Matematicamente.it e di quelli presentati per la pubblicazione sul Periodico della Mathesis. È venuto fuori un ***numero speciale di Matematicamente.it Magazine*** *che ospita al suo interno il* ***Numero 0 del Bollettino della Mathesis****.*
Ai responsabili della Mathesis Nazionale un ringraziamento per averci voluto onorare di questo 'battesimo' e per il gradito apprezzamento del modesto ruolo che ***Matematicamente.it*** *cerca di svolgere nella cultura matematica italiana. A loro esprimiamo un augurio di buon lavoro sia in campo editoriale sia sul campo organizzativo e di ricerca, con l'obiettivo di far uscire l'insegnamento della matematica dal pantano in cui ora si trova.*

Il direttore di Matematicamente
Antonio Bernardo

EDITORIALE

In questo fascicolo del Magazine di ***Matematicamente*** *vede la luce il n. 0 del* ***Bollettino Mathesis*** *online. La società Mathesis è grata a* ***Matematicamente*** *e al suo direttore, il professor Antonio Bernardo – socio della sezione Mathesis di Lecce – per l'ospitalità che le viene offerta.*
È altresì un onore per la Mathesis che un sito prestigioso quale Matematicamente.it, che quest'anno è risultato vincitore del premio WWW del quotidiano ***Il Sole 24 Ore*** *per la categoria Istruzione e lavoro, abbia accettato questa collaborazione che è auspicabile si possa rinnovare in altre occasioni.*
Il ***Bollettino Mathesis****, che vede nello stesso tempo una riduzione del* ***Periodico di Matematiche*** *a tre fascicoli annui, nasce non solo per esigenze di risparmio, ma soprattutto con l'intento di offrire un prodotto che non risenta delle lungaggini che tradizionalmente affliggono la stampa cartacea. Ogni anno ai soci della Mathesis – con l'ultimo numero del Periodico – sarà inviata una copertina in cui raccogliere i numeri della nuova pubblicazione.*
Attualmente abbiamo materiale a disposizione per pubblicare al più presto anche il n.1 del Bollettino. In esso saranno riportate le indicazioni per gli autori che in seguito vorranno dare un loro contributo con i loro articoli.
All'inizio di quest'avventura editoriale vogliamo ringraziare Domenico Lenzi, vice-presidente nazionale della Mathesis, che – per conto della Mathesis, insieme ad Antonio Bernardo – si è assunto il faticoso compito della redazione di questo fascicolo.

Il direttore del Bollettino Mathesis
Antonio Maturo

Il presidente nazionale della Mathesis
Andrea Laforgia

I giovani e la Matematica[1]

di Ennio De Giorgi[2]

A differenza del ragazzo inclinato verso gli studi di fisica, ingegneria, biologia, economia, filosofia, lo studente portato alla Matematica non trova nei giornali, nella televisione, nell'opinione pubblica molto incoraggiamento a proseguire nello studio della Matematica, che sembra un po' lontana dallo sviluppo della cultura e della vita contemporanea. Qualche incoraggiamento può venirgli dalla pratica acquisita nel campo dei calcolatori che per lo più i giovani imparano a maneggiare molto più rapidamente degli adulti. Ma anche in questo campo resta un po' un equivoco di fondo sui rapporti tra matematica e informatica, la cui definizione è abbastanza difficile così come è difficile definire con chiarezza i rapporti tra la "Matematica pura" e la "Matematica applicata" o meglio ancora tra Matematica e altri rami del sapere.

Penso che tutte queste difficoltà derivino in parte dallo scarso interesse dei mass-media per la matematica, in parte da una certa sfiducia dei matematici nel valore della loro scienza, nella possibilità di comunicarla, nell'arricchimento umano che potrebbe venire a tutta la società da questa comunicazione.

Gli stessi matematici in fondo sono spesso rassegnati all'idea che la loro disciplina sia troppo formale ed astratta per suscitare un vero entusiasmo paragonabile a quello che possono suscitare la musica, la pittura, quel vero interesse per la vita e i problemi quotidiani degli individui, delle famiglie, dei popoli che è all'origine del lavoro di un economista, un giurista, o uno storico.

Per questo cercherò di segnalare alcuni aspetti di quello che io chiamo il valore sapienziale della Matematica, intendendo la parola sapienza nel suo significato più ampio, che comprende scienza e arte, immaginazione e ragionamento, giustizia e misericordia, prudenza e generosità, desiderio di comunicare le proprie idee e di comprendere le idee altrui in una atmosfera di fraterna fiducia.

Da questo punto di vista mi sembra importante il fatto che i matematici siano riusciti a sviluppare un linguaggio e un sistema di idee facilmente comunicabili tra persone di diverse nazioni, religioni, culture, che forse i matematici, quasi senza accorgersene, siano a riusciti a superare tante barriere che ancora dividono gli uomini. Si può aggiungere che in fondo ogni persona naturalmente dotata di attitudine alla matematica può abbastanza rapidamente raggiungere degli ottimi risultati anche se parte da basi culturali molto limitate, che degli studi matematici di ottimo livello possono essere condotti anche in paesi economicamente poveri e tecnicamente arretrati, che la matematica meglio di altre discipline può essere per così dire "innestata" su tutte le culture, può attrarre sia persone con mentalità più pratica e più attiva che trovano nella matematica un potente strumento di lavoro, una potente forza di progresso, sia persone con mentalità più teorica e contemplativa che in fondo trovano nella matematica le occasioni più ricche di riflessione e di contemplazione del tutto disinteressate.

[1] Questo articolo è stato scritto da E. De Giorgi per la rivista "Angolo acuto, Palestra per i Giovani appassionati di Matematica" che cessò le pubblicazioni nel 1979, anno al quale risale probabilmente questo scritto. Il prof. G. De Cecco ne ha curato la pubblicazione sul libro AA.VV., *Ennio De Giorgi tra Scienza e Fede*, EdiPan, 2007 (vedi recensione alla fine della rivista) e ha dato questo titolo all'articolo.

[2] Ennio De Giorgi nacque a Lecce l'8 febbraio 1928. Conseguì la maturità presso il Liceo "Palmieri" di Lecce e si laureò in matematica nel 1950 a Roma. Dopo un breve periodo all'Università di Messina si trasferì alla Scuola Normale di Pisa dove occupò la cattedra di analisi matematica. Nel 1957 risolse uno dei 23 problemi proposti da Hilbert nel Congresso di Parigi del 1900: il diciannovesimo relativo all'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Diede contributi fondamentali nel campo delle equazioni alle derivate parziali, nella teoria geometrica della misura e nel calcolo della variazioni. Per le sue ricerche ricevette numerosi riconoscimenti nazionali e internazionali. Morì a Pisa il 25 ottobre 1996. Per una particolareggiata biografia http://cvgmt.sns.it/people/degiorgi/biografia/degiorgi.pdf.

Si potrebbe dire qualcosa di più: per esempio che tutta la matematica pura ed applicata è un continuo passaggio dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto, che le teorie rimandano agli esempi e gli esempi rimandano alle teorie.
Potremmo dire che, pur rispettando la varietà dei caratteri e delle doti naturali delle diverse persone, una meditazione sulla matematica ci dice che il mondo concreto e il mondo dei principi astratti non possono essere separati, che la saggezza è soprattutto armonica intesa tra persone più o meno portate all'azione o alla contemplazione, alla concretezza o alla astrazione, ma ugualmente convinte della necessità di capirsi e di collaborare.
Oltre ad una reale possibilità di comprensione tra uomini dello stesso tempo penso che la matematica offra singolari possibilità di comprensione tra uomini di epoche diverse, che l'innovazione matematica è forse la meno "distruttiva" tra le diverse forme di innovazione proprie di altre discipline e di altre attività umane.
Dopo millenni, i teoremi di Pitagora, Talete, Euclide, Archimede sono ancora pienamente validi, anche se con il progresso della Matematica è cambiato il linguaggio in cui vengono esposti e si è molto allargato il quadro generale in cui vengono presentati. Egualmente la scoperta delle geometrie non euclidee nulla ha tolto all'importanza della geometria euclidea, anche se ha molto allargato il campo delle realtà che la matematica cerca di esplorare.
Avendo usato la parola "realtà" si può aggiungere che gli enti considerati in matematica, la loro natura, reale o ideale, convenzionale, attuale o potenziale etc., sono sempre stati tra gli oggetti più interessanti della riflessione filosofica e mi dispiace solo di non avere le cognizioni necessarie per dare un'idea sintetica di tutto ciò che i maggiori filosofi hanno detto su questo argomento. Mi mancano pure le cognizioni necessarie per parlare della storia della matematica e di tutto ciò che essa ci può insegnare. Mi limiterò solo ad osservare che talvolta anche grandi matematici hanno commesso qualche errore nella dimostrazione di un teorema o per lo meno hanno fornito dimostrazioni incomplete e poco soddisfacenti, anche rispetto alle esigenze dell'epoca in cui sono state scritte. E' invece assai difficile che un grande matematico enunci teoremi complicati, oscuri, poco interessanti, che in ultima analisi non meritano nemmeno lo sforzo di affaticarsi a stabilire se le dimostrazioni proposte siano corrette o no. Direi che in fondo l'arte del matematico è in primo luogo l'arte del buon testimone che cerca di esporre con chiarezza le cose che sa e che ritiene importanti e solo in un secondo momento è l'arte del buon avvocato capace di convincere chi lo ascolta della verità di ciò che afferma. Con questo non voglio sottovalutare l'interesse delle dimostrazioni matematiche; con esse il matematico collega tra loro affermazioni apparentemente lontane, arrivando ad una più profonda comprensione delle idee fondamentali di una teoria, si accorge che un gruppo di assiomi apparentemente abbastanza povero può rivelarsi molto più ricco di conseguenze interessanti di quanto non appaia da una prima affrettata valutazione. Naturalmente il discorso può anche essere rovesciato, da parte di chi tenta di introdurre nuovi concetti matematici. La valutazione delle conseguenze di un determinato gruppo di assiomi può anche indurre ad abbandonare una impostazione che si riveli meno interessante del previsto e scegliere nuove vie che si spera portino più lontano e raggiungano mete più interessanti.
Uno degli insegnamenti della ricerca matematica che credo abbia un valore umano oltre che tecnico è la disponibilità che il ricercatore deve mantenere di fronte agli sviluppi più impensati del suo lavoro, la disponibilità a quello che in altre occasioni ho chiamato "lo sfruttamento dell'insuccesso". Accorgersi che una congettura la cui dimostrazione è stata tentata con molti sforzi e con grande fatica è falsa non è una tragedia, ma può essere anzi una buona occasione per scoprire nuove direzioni di lavoro a priori impensate. Accorgersi dell'errore e riconoscerlo è un atto di onestà intellettuale senz'altro apprezzabile. Partire da questo riconoscimento per riprendere con maggiore slancio nella propria ricerca muovendosi verso direzioni nuove e più promettenti è un atto di intelligenza attraverso cui in fondo il ricercatore più moderno si ricollega alla sapienza più antica, a Socrate che diceva di sapere di non sapere, a re Salomone che chiedeva al Signore la saggezza necessaria a dirigere un regno per il cui governo non si sentiva abbastanza esperto.

Dovendo dare un consiglio ad un giovane a cui piace la ricerca matematica, gli raccomanderei di mantenere sempre una grande disponibilità ad uno sbocco inatteso del suo lavoro, a pensare che una vera ricerca è sempre quella di cui a priori non si può prevedere la conclusione.
Nello studio dei problemi più difficili consiglierei sempre la tattica del lavorare su due fronti: cercare da una parte la dimostrazione che un certo teorema ritenuto interessante è vero, cercare di trovare controesempi i quali provino che l'enunciato di cui si è cercata la dimostrazione è falso; le difficoltà incontrate in una direzione si trasformano allora in aiuti per procedere nella direzione opposta.
Naturalmente non è da escludere che vi siano teoremi interessanti apparentemente refrattari sia alla dimostrazione che alla confutazione, per esempio vi è il classico "ultimo teorema di Fermat"[3] il quale afferma che se n è un intero maggiore di 2 non esistono tre interi positivi a, b, c tali che $a^n = b^n + c^n$. In questo caso occorre che il matematico non si disperi di fronte ai ripetuti insuccessi ma sappia godere accorgendosi di aver trovato un "bel problema" dove nel termine "bel problema" includiamo due aspetti: un enunciato semplice, chiaro, elegante ed una grande difficoltà nello smentire o confermare l'enunciato stesso. Alla contemplazione del bel problema il matematico può unire sia la ricerca intorno ad argomenti diversi abbastanza interessanti e meno difficili, sia le possibili variazioni sullo stesso tema, che possono consistere tanto nella considerazione di qualche caso particolare significativo che in quella di una classe più generale in cui rientra il problema precedente considerato. Non si può in genere dare una regola assoluta per stabilire a quale livello di generalità il matematico debba fermarsi, in questo entra in modo determinante quella dote indefinibile che è il gusto matematico, e che rende il lavoro del matematico partecipe un po' del lavoro dell'artista e di quello dello scienziato sperimentale.
Al pari dell'artista il matematico cerca le soluzioni ed i problemi "più belli" ed armoniosi, al pari dello scienziato sperimentale il matematico deve essere pronto a modificare le proprie ipotesi di lavoro sulla base dei risultati via via ottenuti.
Queste attitudini sono importanti sia per il matematico che ha poca familiarità con i moderni calcolatori sia per il matematico che invece ha imparato a usare il suo calcolatore con la maestria con cui un musicista suona il suo strumento preferito. Per questo matematico il calcolatore non sarà mai un surrogato della immaginazione e della fantasia, ma potrà essere nello stesso tempo quello che per un musicista è un violino o un pianoforte e per uno scienziato sperimentale un qualsiasi moderno apparecchio scientifico.
Naturalmente, se i calcolatori non sostituiscono ma accompagnano l'immaginazione matematica, essi possono costituire a loro volta oggetto di riflessione o di idealizzazione matematica. L'esempio più classico di idealizzazione delle macchine calcolatrici, noto anche ai matematici che come me hanno assai scarse informazioni nel campo della logica e dell'informatica, è la cosiddetta macchina di Turing. In sostanza si tratta di una macchina ideale a prima vista molto più semplice e meno potente delle macchine reali, ma dotata della proprietà preziosa di poter lavorare per tempi comunque lunghi. In termini un po' grossolani potremmo immaginare che una macchina di Turing possa lavorare per miliardi di miliardi di secoli e che noi abbiamo la possibilità di considerare i risultati che la macchina conseguirà dopo un lavoro così lungo.
Questa ipotesi informale fantascientifica può essere trasformata in assiomi matematici perfettamente formalizzabili e da essi seguono molti teoremi interessanti riguardanti la vera macchina di Turing che è un ente matematico ideale caratterizzato come tutti gli enti matematici da alcuni postulati da cui a loro volta seguono vari teoremi.
Il discorso fatto sui rapporti tra matematica e informatica può in parte ripetersi studiando le relazioni tra informatica, scienze sperimentali, tecnica, arti, filosofia etc: il matematico può trarre molte ispirazioni da tutti questi rami del sapere, ma deve avere piena libertà di svilupparle secon-

[3] L'ultimo teorema di Fermat è stato dimostrato alcuni anni dopo la redazione del presente articolo da Andrew Wiles, vedi: A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. 141 (1995), 443-551, e R. Taylor, A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. Ann. of Math. 141 (1995), 553-572.

do la propria sensibilità, la logica interna e la tradizione di questa scienza, senza sentirsi vincolato a introdurre soltanto gli oggetti che hanno "significato" fisico, economico, biologico, etc.

Per esempio, nel calcolo delle variazioni hanno un notevole interesse i problemi del tipo ricerche di superfici minime liberamente "ispirati" allo studio della forma delle bolle di sapone. Alcuni dei risultati più recenti ed interessanti sulle superfici minime riguardano le superfici immerse in spazi ad otto dimensioni o un numero di dimensioni più grande di otto. Evidentemente si tratta di risultati che non hanno una immediata interpretazione fisica, almeno nell'ambito delle bolle di sapone, che sono evidentemente realizzabili solo nello spazio fisico usuale a tre dimensioni.

Tuttavia non si può mai escludere che oggetti matematici di cui inizialmente non si conoscevano interpretazioni fisiche possano successivamente avere interpretazioni fisiche del tutto inattese.

Per esempio quando Apollonio studiò le sezioni coniche (comprendenti ellissi, iperboli e parabole), nessuno poteva immaginare che molti secoli dopo Keplero avrebbe mostrato che i pianeti si muovevano su orbite ellittiche. Se è importante per il progresso della scienza che il matematico possa sviluppare liberamente le suggestioni che provengono da altre discipline, è ugualmente importante che lo studioso di discipline sperimentali o il tecnico possano liberamente scegliere il modello matematico più adatto alla descrizione matematica dell'oggetto da essi studiato, cambiare i modelli di cui le esperienze mostrano l'inadeguatezza, modificare ove occorre i modelli proposti dalla letteratura matematica.

Il fisico, il biologo, l'economista debbono sapere che la letteratura matematica descrive ciò che si sa oggi degli enti matematici ma non ciò che si potrebbe sapere e forse si saprà domani, e che la realizzazione di queste possibilità può anche essere favorita dalle domande degli scienziati sperimentali, i quali chiedono se si possono immaginare oggetti dotati di certe proprietà.

In altri termini le relazioni più fruttuose tra matematica ed altri rami del sapere si possono avere quando da tutte le parti vi sia l'amore per la propria disciplina, la coscienza delle sue caratteristiche e della sua logica interna, della sua autonomia, la coscienza che nell'ambito di ogni disciplina ciò che conosciamo è una parte piccolissima di ciò che esiste e di ciò che potremmo sapere, la coscienza che tutte le forme del sapere umano sono rami dell'unico albero della sapienza e conservano la loro bellezza e fecondità se non vengono separati dal tronco comune.

Questa coscienza mi sembra opposta a ogni forma di riduzionismo antico e moderno che in forme diverse pretende di imporre l'egemonia di una disciplina su tutte le altre, per esempio lo scientismo, che tendeva a imporre l'egemonia delle scienze matematiche, fisiche e naturali oppure lo storicismo, che tende ad imporre una analoga egemonia delle scienze storiche.

Ovviamente questa affermazione, come tutte le altre contenute in questo articolo, non pretende di costituire delle "dimostrazioni" nel senso matematico della parola, ma di indicare alcune tra le tante considerazioni umanamente importanti che a mio avviso sono suggerite dalla esperienza matematica.

Del resto gli stessi matematici che sono d'accordo sull'enunciato e sulla dimostrazione di un dato teorema, ritenuto da tutti molto importante, possono avere idee diverse sulle ragioni di tale importanza. Per esempio il classico teorema di Gödel sull'esistenza di proposizioni indecidibili in aritmetica può essere letto per così dire sia in chiave pessimistica che in chiave ottimistica. Il pessimista dirà che il teorema di Gödel prova la debolezza della ragione umana, la sua incapacità di conoscere perfettamente perfino un oggetto familiare da millenni come l'insieme dei numeri naturali; l'ottimista si rallegrerà constatando che questo teorema prova le infinite potenzialità della matematica, dimostra che sarà sempre possibile senza distruggere le teorie tradizionali proporre nuovi assiomi o nuovi teorie originali molto ricche e interessanti.

La meditazione su questo teorema e più in generale su tutta la storia passata della matematica e le sue potenzialità ancora inesplorate può alla fine portarci a conclusioni abbastanza simili a quelle cui era giunto Pascal che parlava insieme della grandezza e della miseria dell'uomo, della forza e della debolezza della ragione, raccomandava nello stesso tempo le virtù dell'umiltà e della speranza. Non pretendo che le mie opinioni sul significato "sapienziale", sul "valore umano" della "matematica pura" siano condivise da tutti i matematici, molti dei quali preferiranno mettere l'accento sul valore delle applicazioni della matematica o della didattica della matematica; nelle prime si può riconoscere più facilmente il contributo che il matematico può dare alla soluzione di problemi umani urgenti, malattie, povertà, inquinamento etc., nella seconda si potrà vedere il difficile impegno necessario per evitare che lo studio sia per molti ragione di delusione, fastidio, sfiducia in sé stessi e diventi invece per tutti, sia per i più dotati che per i meno dotati, fattore importante di crescita umana così che tutti arrivino a comprendere e amare questa disciplina nella massima misura consentita dalle loro naturali inclinazioni. D'altra parte può accadere che un ragazzo dotato di spiccate attitudini matematiche, ma poco favorito da altri punti di vista (per esempio a causa di condizioni sociali ed economiche sfavorevoli, difficili situazioni familiari, cattiva salute, carattere timido e introverso, ambiente ostile o poco accogliente etc.) raggiunga nella matematica un successo che difficilmente otterrebbe in altri campi. Tra l'altro, pur sapendo che i matematici non sono privi di umane debolezze e possono, come tutti gli altri uomini sbagliare più o meno in buona fede nei loro giudizi, è indubbiamente possibile nel giudizio sui meriti di un matematico una obiettività maggiore di quella che si può avere in altri campi, e anche una persona a priori poco nota può ottenere rapidamente la stima e l'ammirazione della comunità matematica se dimostra un teorema molto bello. Ciò che vale per gli individui vale del resto anche per i popoli; nazioni la cui storia è stata assai tragica possono in breve tempo raggiungere nella matematica il livello delle nazioni che la storia ha più favorito, e questo successo può essere un importante fattore di prestigio, fiducia in se stessi, progresso tecnico e umano. Egualmente si può notare che l'insegnamento della matematica non è facile neanche nel proprio paese, nella propria città, nel proprio ambiente culturale: esso richiede sempre intelligenza, sensibilità, cultura, ma che d'altra parte le difficoltà crescono meno che per altre discipline quando si passa a un paese lontano per lingue, tradizioni, mentalità e cultura.

Probabilmente la matematica è uno dei settori in cui la cooperazione internazionale può avere maggiore successo o per lo meno incontrare difficoltà minori di quelle che si incontrano in altri campi.
Del resto è sempre vivo in Cina il ricordo di un famoso missionario cattolico, Matteo Ricci, che portò ai cinesi la scienza europea e raggiunse una profonda comprensione della cultura cinese attraverso un dialogo con i dotti cinesi che ebbe come punto di partenza il comune interesse per le applicazioni della matematica alla astronomia e alla geografia.

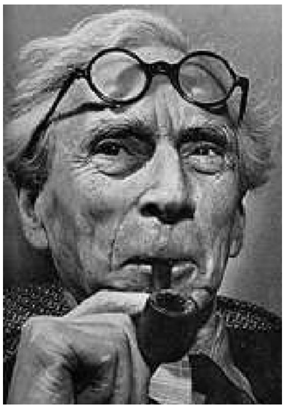
Naturalmente mi auguro che anche altri, matematici e non matematici, vogliano su questa stessa rivista esporre altre idee sul senso di questa esperienza e altre interpretazioni, in modo che attraverso un confronto su idee diverse possa meglio emergere il significato umano della matematica, che a mio avviso è più ricco di quanto comunemente si crede. Per esempio penso che un confronto con le idee di persone più lontane dalla matematica aiuterebbe a superare il pregiudizio per cui questa disciplina studia soltanto gli aspetti quantitativi della realtà e non quelli qualitativi. Chi ha una famigliarità sia pur modesta con la matematica moderna sa che ormai i risultati di carattere qualitativo sono assai più numerosi di quelli di carattere quantitativo, che nello studio di molti fenomeni è già importante poter disporre di un modello matematico avente proprietà qualitative simili a quelle del fenomeno considerato, anche in casi i cui non è possibile disporre di dati abbastanza precisi e di metodi di calcolo abbastanza potenti per arrivare a delle previsioni quantitative soddisfacenti.

Se nella ricerca scientifica non va troppo lontano chi rinuncia allo "sfruttamento dell'insuccesso", si arresta ancora prima chi rinuncia allo sfruttamento del successo e si propone solo problemi difficilissimi che non possono essere affrontati con i metodi conosciuti e richiedono invenzioni di metodi del tutto nuovi. Occorre anche saper adoperare con intelligenza i metodi conosciuti nello studio di problemi abbastanza belli di media difficoltà. L'unica cosa da evitare sono i problemi "brutti", inventati solo perché si possiede un metodo atto a risolverli.

Dal paradiso di Cantor al purgatorio di Russell

di Domenico Lenzi

Georg Cantor



Bertrand Russell

• Cantor e Russell: cenni biografici

Georg Cantor nacque il 3 marzo 1845 a San Pietroburgo. Suo padre Waldemar era un affermato commerciante di origine danese, che a San Pietroburgo svolse anche l'attività di mediatore presso la borsa valori; sua madre, Maria Anna Böhm, era una valente musicista russa che trasmise al figlio la passione per la musica.
Quando il ragazzo aveva circa 11 anni il padre – per problemi di salute, dovuti ai freddi inverni russi – si trasferì con tutta la famiglia in Germania, vivendo prima a Wiesbaden, dove Georg frequentò gli studi classici, quindi a Francoforte.
Cantor padre avrebbe voluto che il figlio diventasse ingegnere e solo nel 1862 acconsentì a che il giovane si dedicasse completamente agli studi di matematica. Tuttavia l'anno successivo Georg dovette lasciare l'università di Zurigo a causa della morte del genitore. Trasferitosi presso l'università di Berlino, nel 1867 egli conseguì il dottorato e nel 1869 divenne libero docente con lavori sulla teoria dei numeri. Nel 1872 ottenne il primo incarico come professore universitario.
Georg Cantor morì nel 1918 in un ospedale psichiatrico di Halle (Germania), città presso la cui università era stato professore ordinario a partire dal 1879. Le sue facoltà mentali erano state intaccate sia a causa dalle perplessità che i suoi risultati avevano suscitato nel mondo matematico, sia per la scoperta dell'Antinomia di Russell (di cui ci occuperemo più in là) e di altre ancora, che sembravano compromettere irrimediabilmente molti dei risultati da lui conseguiti.
Certamente anche i suoi inutili tentativi di dimostrare l'ipotesi del continuo – secondo cui non esistono cardinalità intermedie tra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali (in proposito si veda [5]) – contribuirono a fiaccarne lo spirito. Ma – forse ancor più delle motivazioni già ricordate – un tarlo ben più pernicioso era penetrato a poco a poco nella sua mente, favorito dalla scoperta che Cantor stesso aveva fatto di un'antinomia che aggrediva direttamente al "cuore" la sua teoria: la cosiddetta *Antinomie der Allmenge* (*l'antinomia della classe totale*, o *dell'insieme di tutti gli insiemi*). Una contraddizione che Cantor non divulgò, forse nella speranza di trovare egli stesso un "antidoto".

Bertrand Russell – molto più giovane di Cantor – nacque il 18 maggio 1872 a Ravenscroft, nel Galles (Gran Bretagna). Egli morì il 2 febbraio 1970 a Penrhyndeudraeth, nel Galles.
In una prima fase dei suoi studi di matematica Russell cercò di ricondurre questa disciplina alla logica, e nella sua "Introduzione alla Filosofia della Matematica" (si veda [10]) scrisse: "*La matematica e la logica dal punto di vista storico sono state due discipline completamente distinte. Comunque tutte e due si sono sviluppate nell'età moderna: la logica diventando sempre più matematica e la matematica sempre più logica. La conseguenza è che ora è completamente impossibile tracciare tra le due discipline una linea di demarcazione; sostanzial-*

mente le due sono in realtà una disciplina sola. La differenza che intercorre tra esse è simile alla differenza che intercorre tra un uomo e un ragazzo: la logica è la gioventù della matematica come la matematica è la maturità della logica".
Per quel che riguarda gli aspetti filosofici Russell partì da posizioni idealistiche, ma a poco a poco andò assumendo posizioni pragmatistiche. Nell'evoluzione del suo pensiero ebbe notevole influsso il filosofo Georges E. Moore, suo compagno di studi; come fu riconosciuto dallo stesso Russell, che nella prima edizione (1903) dei suoi The Principles of Mathematics scrisse (si veda [8]): "*La mia posizione sulle questioni fondamentali della filosofia deriva in tutti i suoi aspetti essenziali da G. E. Moore*".

• Nuova linfa vitale per la matematica

In un lavoro del dicembre del 1873, ma l'articolo fu pubblicato l'anno successivo, Georg Cantor evidenziò l'esistenza di diversi tipi di infinito. Infatti egli provò che, considerato un insieme S, nell'insieme $\wp(S)$ dei suoi sottinsiemi ci sono più elementi che in S stesso (in un senso noto a molti, ma che richiameremo più in là); ritrovando così una proprietà che per gli insiemi finiti è ovvia, poiché è facile verificare che se un insieme finito possiede n elementi, allora l'insieme dei suoi sottinsiemi possiede 2^n elementi.
Col suo risultato Cantor mostrava un'analogia tra insiemi finiti e insiemi infiniti che appariva sorprendente a causa di varie situazioni paradossali riguardanti gli insiemi infiniti, che evidenziavano come questi ultimi avessero comportamenti difformi rispetto agli insiemi finiti. Infatti già nel 1638 Galileo Galilei – nei suoi "Discorsi e dimostrazioni matematiche" intorno a due nuove scienze, (Giornata Prima) – scriveva in relazione ai numeri naturali: [...] *ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.* [...] *Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire* [...] *gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti* [...].
Tuttavia – come Lucio Lombardo-Radice [6, p. 52] scrive – « [...] *Georg Cantor, invece, dimostra che la contraddizione è solo apparente, distinguendo tra il concetto di "incluso in ..." e quello di "avente potenza* [quantità di elementi; n.d.r.] *minore di...", che siamo* ***abituati*** *(e solo abituati,* ***non obbligati!****) a identificare, perché essi significano la stessa cosa nel caso finito. Perciò il risultato fondamentale: "una parte di un insieme infinito può avere lo stesso numero cardinale di elementi dell'intero insieme* [...] *non è in alcun modo* ***antinomica*** *(contraddittoria), ma soltanto* ***paradossale****, cioè "non credibile", perché in contrasto con inveterate abitudini di pensiero* [...]».
Però va sottolineato che il risultato conseguito da Cantor nascondeva in sé un virus mortale: la matematica, sbocciando a nuova vita, con la "magica pozione" che il grande matematico le aveva propinata aveva ingerito un virus pernicioso. Anche in questo caso, come in molti altri, si potrebbe parlare di *Eros e Tanatos, amore e morte*: l'amore, inteso come nuova linfa vitale per la matematica, pareva indissolubilmente avvinto – come direbbe Freud – a un destino che poteva risultare mortale.
Infatti, l'antinomia evidenziata da Cantor risiedeva nel fatto che, considerata *la classe totale* Θ – cioè *l'insieme di tutti gli insiemi* (cosa del tutto naturale per quei tempi) – si aveva che $\wp\Theta)$ era un sottinsieme di Θ, onde $\wp\Theta)$ non poteva avere più elementi di Θ. Nel contempo – secondo il risultato che Cantor aveva conseguito nel 1873 – $\wp\Theta)$ doveva avere più elementi di Θ; donde l'assurdo.
Come si è detto in precedenza, Cantor non divulgò la contraddizione da lui trovata, ma si limitò a segnalarla a David Hilbert in una lettera del 1896.
Anche l'antinomia di Russell, di cui parleremo fra poco, è intimamente legata alla scoperta di Cantor del 1873. Ciò in forza di un teorema della teoria dei grafi che presenteremo in Appendice.
In seguito alla rivelazione di quest'altra antinomia Gottlob Frege – fondatore della moderna logica matematica, che con i suoi *Grundgesetze der Arithmetik* stava cercando di derivare logicamente le leggi dell'aritmetica a partire da un sistema di assiomi – cadde nello sconforto più cupo. Egli si apprestava a pubblicare il secondo volume della sua opera, quando ricevette una lettera da parte di Bertrand Russell, in cui si evidenziava che la

quinta legge enunciata da Frege nel volume I (del 1893) conduceva a una contraddizione.
Era il 1902, e i matematici dell'epoca intravvidero l'*inferno*; anche se David Hilbert ebbe a dire: *Nessuno potrà cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato.* Tuttavia, niente sarebbe stato più come prima. Di fronte alla matematica – caduta dal suo piedistallo di dea delle scienze – si apriva il purgatorio della quotidianità umana, che però essa ha affrontato con estrema dignità, lungo un percorso denso di accidenti e pericoli vari, ma anche di risultati significativi ed entusiasmanti.

• L'antinomia di Russell

Anche l'antinomia di Russell derivò da un uso troppo disinvolto dei concetti insiemistici, che un po' ingenuamente aveva portato a considerare l'insieme $\boldsymbol{K}$ costituito dagli insiemi A individuati dalla proprietà di non appartenersi ($A \notin A$). Orbene, dovendo valere per lo stesso $\boldsymbol{K}$ una e una sola delle seguenti eventualità:

1) $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{K}$, 2) $\boldsymbol{K} \notin \boldsymbol{K}$,

nell'eventualità $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{K}$ – appartenendo $\boldsymbol{K}$ a se stesso – esso godrebbe della proprietà tipica dei suoi elementi; cioè: $\boldsymbol{K} \notin \boldsymbol{K}$. Il che è in contraddizione con la premessa $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{K}$, che perciò è assurda.
Esclusa l'eventualità 1), resta in piedi l'altra: $\boldsymbol{K} \notin \boldsymbol{K}$; che perciò risulta essere un teorema. Tuttavia $\boldsymbol{K} \notin \boldsymbol{K}$ esprime per $\boldsymbol{K}$ il verificarsi della proprietà di cui godono gli elementi di $\boldsymbol{K}$, il che assicura l'ulteriore teorema $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{K}$. Perciò l'antinomia è data dai due teoremi – entrambi dimostrati! – $\boldsymbol{K} \notin \boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{K}$.

Ma ecco come Frege descrisse l'antinomia che Russell gli aveva segnalato (si veda [2], *Nota finale*, p. 58 [1]): «[...] *A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo aver completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione. Sono stato messo in questa situazione da una lettera del signor Bertrand Russell.* [...] *Il signor Russell ha scoperto una contraddizione che ora esporrò. Nessuno vorrà asserire, della classe degli uomini, che essa è un uomo. Abbiamo qui una classe che non appartiene a se stessa. Dico infatti che qualcosa appartiene a una classe se questo qualcosa cade sotto un concetto, la cui estensione* [2] *è proprio la classe stessa. Fissiamo ora il concetto: classe che non appartiene a se stessa!* ***L'estensione di questo concetto, ammesso che se ne possa parlare,*** *è, per quanto detto, la classe delle classi che non appartengono a se stesse. Vogliamo chiamarla brevemente la classe K. Chiediamoci ora se questa classe K appartenga a se stessa! Supponiamo in primo luogo che essa appartenga a se stessa. Se qualcosa appartiene a una classe, cade sotto il concetto la cui estensione è la classe in esame, di conseguenza, se la nostra classe appartiene a se stessa, allora è una classe che non appartiene a se stessa. La nostra prima supposizione conduce quindi a una contraddizione. Supponiamo, in secondo luogo, che la nostra classe K non appartenga a se stessa: in questo caso essa cade sotto il concetto di cui essa stessa rappresenta l'estensione, quindi appartiene a se stessa: qui abbiamo di nuovo una contraddizione*! [...]».

Però a nostro avviso quella contraddizione fu sopravvalutata. E forse lo stesso Frege, se non fosse stato colto dal "panico", avrebbe potuto tamponare almeno in parte la falla che si era aperta nella teoria degli insiemi. Infatti si può presumere che il dubbio di Frege (espresso dalla locuzione ***ammesso che se ne possa parlare***) si riferisse non tanto al concetto considerato, quanto alla sua estensione, e quindi alla classe K che avrebbe potuto far parte di quell'estensione. Perciò, non essendo perfettamente individuabile quel K, perdeva senso la possibilità che esso – come disse Frege – cadesse sotto il concetto di appartenere (oppure no) a se stesso.
A conforto della nostra posizione citiamo quanto L. Lombardo-Radice scrive in [6] (nota a pie' di pag. 55): [...] *le antinomie che si presentano in matematica debbono essere considerate dimostrazioni*

[1] Il passo che segue è originariamente contenuto in un'appendice al testo di G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II (1902).
[2] Per *estensione* di un concetto riferito a individui (concreti o astratti), presi singolarmente, si intende la "collezione" degli oggetti per i quali quel concetto risulta verificato.

per assurdo, e precisamente dimostrazioni dell'assurdità di una delle ipotesi costituenti la premessa del ragionamento che conduce all'antinomia [...]
Più in là daremo qualche cenno su come si cercò di ovviare all'inconveniente determinato dalla scoperta dell'antinomia di Russell.

• Qualche utile richiamo

Ricordiamo che due insiemi non vuoti A e B si dicono *equipotenti* [3] – e si scrive $|A| = |B|$ – quando esiste una funzione biiettiva $\boldsymbol{f}: A \to B$.
È chiaro che la nozione di equipotenza trova la sua giustificazione nel fatto che quando A e B sono infiniti – per cui non c'è la possibilità di effettuare un confronto "quantitativo" tra i due attraverso un conteggio – allora si ricorre a quello che nel caso finito è un surrogato del contare da parte di chi contare non sa (o non vuole) che cerca di decidere se A e B hanno la stessa quantità di elementi, tentando di realizzare dei collegamenti "a uno a uno" tra gli elementi di A e quelli di B, in modo da impegnare gli elementi di entrambi gli insiemi; cioè, cercando di realizzare una funzione biiettiva di A su B. Tuttavia, qualora non si possa dire che due insiemi A e B sono equipotenti, è lecito domandarsi se ci sia una modalità che traduca l'idea intuitiva per la quale A abbia un numero di elementi minore o eguale a quello di B.
Quando A e B sono finiti, si può ottenere la risposta ancora contando i loro elementi. Ma una risposta la si può dare anche nel caso in cui non si sappia o non si voglia contare. Infatti basta che A sia equipotente a un sottinsieme A' di B. In tal caso si scrive $|A| \leq |B|$. Se $A' \neq B$, poiché si è nel caso di insiemi finiti, allora risulta che A possiede meno elementi di B, e si scrive $|A| < |B$.
Questa modalità la si può trasportare soltanto in parte agli insiemi infiniti. Infatti è bene tener presente che nel caso infinito il problema sta nel fatto che, come è già stato osservato, l'essere A equipotente a un sottinsieme proprio di B non esclude che contemporaneamente A possa essere equipotente anche a B. Perciò in quest'altro caso si dice che A ha meno elementi di B non solo quando A è equipotente a un sottinsieme A' di B, onde si scrive ancora $|A| \leq |B|$, ma in aggiunta si richiede che A e B non siano equipotenti. E solo in tal caso si scrive $|A| < |B$.
Sulla base di quanto detto si ritrovano per gli insiemi infiniti varie proprietà già note per gli insiemi finiti.
Come è già stato anticipato, Cantor provò che per ogni insieme S si ha $|S| < |\wp(S)|$. Ma come si dimostra ciò? Escluso il caso banale $S = \varnothing$, si consideri la funzione $\boldsymbol{f}: S \to \wp(S)$ che associa a ogni elemento $x \in S$ il *singoletto* $\{x\}$. Chiaramente $\boldsymbol{f}$ associa a elementi diversi di S singoletti diversi, onde essa è iniettiva; tuttavia ci sono elementi di $\wp(S)$, come l'insieme vuoto, che $\boldsymbol{f}$ non riesce a "raggiungere"; cioè, $\boldsymbol{f}$ non è suriettiva e quindi non è nemmeno biiettiva.
Ma può riuscirci un'altra funzione? La risposta è **NO**! Poiché una funzione $\boldsymbol{g}$ di S in $\wp(S)$ non è mai suriettiva. Infatti consideriamo l'insieme $K \in \wp(S)$ costituito dagli elementi $x \in S$ per i quali risulta $x \notin \boldsymbol{g}(x)$. Ebbene, se $\boldsymbol{g}$ fosse suriettiva, allora dovrebbe esserci un elemento $k \in S$ tale che $\boldsymbol{g}(k) = K$, onde dovrebbe verificarsi una e una sola delle seguenti eventualità: i) $k \in \boldsymbol{g}(k) = K$, ii) $k \notin \boldsymbol{g}(k) = K$.
L'eventualità i), poiché $k \in K$, impone che k goda della proprietà di cui godono gli elementi di K, onde $k \notin \boldsymbol{g}(k) = K$; il che è assurdo. D'altro canto l'eventualità ii), poiché $k \notin \boldsymbol{g}(k)$, ci dice che k gode della proprietà di cui godono gli elementi di K, onde $k \in K = \boldsymbol{g}(k)$; il che è ancora assurdo. Perciò $\boldsymbol{g}$ non può essere suriettiva.
Si noti la somiglianza che c'è tra questa dimostrazione e il ragionamento che condusse all'Antinomia di Russell. Per chi volesse approfondire il discorso, in Appendice vedremo che c'è più che una somiglianza tra i due fatti, dato che – come abbiamo già anticipato – entrambi discendono da uno stesso teorema di teoria dei grafi.

[3] Per convenzione, l'insieme vuoto è considerato equipotente solo a se stesso.

• Alcuni tentativi per superare l'Antinomia di Russell

Come si è visto, nello svolgere il ragionamento che conduce all'Antinomia di Russell si parte proprio dall'insieme $\boldsymbol{K}$ di tutti gli insiemi che non si appartengono. Perciò come conclusione si ha che non si può parlare di $\boldsymbol{K}$ come insieme; onde non si può parlare nemmeno dell'insieme Θ di tutti gli insiemi, poiché in tal caso $\boldsymbol{K}$ rientrerebbe in gioco come sottoinsieme di Θ. Tuttavia ciò non garantisce che così si escludano altre contraddizioni; perciò è necessario porre una limitazione nell'attribuire "l'etichetta blu" di insieme, precisando in quale contesto e sotto quali condizioni una "collezione di cose", concrete o astratte, possa essere considerata un insieme. Per esempio, si dovrebbe evitare di parlare di insiemi "in evoluzione", i cui elementi non siano "perfettamente esistenti" nel momento in cui li si considera. In definitiva, non si deve confondere un concetto – "aperto" a inserimenti concreti futuri, come il concetto di uomo – con quella che è la sua "estensione" attuale; cioè, le "cose", gli oggetti, le persone che a un certo istante soddisfano a quel concetto. Perciò, ad esempio, si può parlare dell'insieme dei numeri primi, anche se non li si conosce tutti. Infatti per la "collezione" dei numeri naturali, che si considera prefissata, abbiamo un criterio per decidere se un suo qualsiasi elemento sia primo oppure no.
Inoltre non può "preesistere" a se stesso un insieme $\boldsymbol{C}_i$ che "nasca" a un certo istante i poiché esso è costituito da elementi già "nati" in precedenza. In definitiva $\boldsymbol{C}_i$, proprio perché nasce all'istante i, non può appartenersi, poiché a esso appartengono esclusivamente insiemi "nati prima" di lui [4].
Ed è in questo senso – a nostro avviso – che lo stesso Russell (insieme ad A. N. Whitehead (si veda [9], pag. 37) tentò di superare la sua antinomia attraverso la *teoria dei tipi*, dove il termine "tipo" si riferisce a un livello di aggregazione di elementi, ma potrebbe anche riferirsi ad un certo istante *zero*. Infatti si parte da una collezione assegnata di "individui", di "oggetti" che non abbiano la caratteristica di essere delle collezioni (o per i quali si prescinda da tale qualità). C'è poi un primo tipo di *insiemi* – diremmo noi, quelli di un fissato istante i successivo all'istante *zero* – che sono collezioni costituite da quegli individui; quindi c'è un secondo tipo di *insiemi*, costituiti da almeno un insieme del primo tipo ed eventualmente da individui; e così via. Tuttavia l'impostazione Russelliana, anche se significativa e corretta, fu considerata piuttosto limitativa.
Un'altra sistemazione fu elaborata successivamente da J. Von Neumann con la *teoria delle classi*. Qui ne parliamo fugacemente, cercando di darne un'idea.
In un primo approccio intuitivo, in questa teoria si considera una specie di *contenitore* ideale $\boldsymbol{T}$ al cui interno ci sono delle *collezioni* chiamate ***classi***. In particolare, una certa classe è detta ***insieme*** quando essa appartiene a una di quelle classi.
Ci sono poi assiomi limitativi, il cui scopo è quello di evitare dei "virus" che possano determinare delle antinomie.
Ma c'è anche un modo più astratto di parlare di questa teoria, e quindi meno legato a considerazioni di carattere intuitivo, che potrebbero risultare ingannevoli. Infatti quel contenitore $\boldsymbol{T}$ lo si può intendere come la collezione dei vertici di un grafo orientato; il che equivale a considerare su $\boldsymbol{T}$ una relazione binaria [5]. Quei vertici sono detti *classi*; mentre sono detti *insiemi* – ma noi per ragioni evocative li chiameremo *vertici-insiemi* – quei vertici da cui partano collegamenti orientati: gli *archi*, secondo la terminologia della teoria dei grafi.
È chiaro che gli archi del grafo considerato debbono determinare dei collegamenti che ricordino la relazione di appartenenza, una volta che un vertice $\boldsymbol{v}$ lo si sia "identificato" con la collezione dei vertici che lo "raggiungono" (diremo anche "che gli appartengono").
Naturalmente, occorre che siano soddisfatte certe condizioni (assiomi). Qui ne presentiamo soltanto alcune, che mostrano come l'Antinomia di

[4] Anche se è forse impossibile "fissare" un istante di tempo "globale", non c'è dubbio che il concetto di contemporaneità sia del tutto valido, nonostante la mancanza di un "orologio universale" a cui riferirlo.

[5] Si noti l'analogia con l'impostazione per la geometria che Hilbert propose in chiave esclusivamente deduttiva, prescindendo dal significato intuitivo dei termini usati. *E allora quei termini potrebbero anche essere interpretati* – diceva Hilbert – *come tavoli, sedie, boccali di birra.*

Russell venga superata.

a) Non ci sono vertici distinti che siano raggiunti esattamente dagli stessi vertici-insiemi (Assioma di Estensionalità).

b) per ogni collezione ***c*** di vertici-insiemi esiste un vertice (classe) ***w*** "raggiunto" esclusivamente dai vertici-insiemi che compongono (formano) ***c*** [6].

c) In particolare, se la predetta collezione ***c*** è formata da vertici che raggiungono (non necessariamente da soli) uno stesso vertice-insieme ***w'***, anche il vertice ***w*** che corrisponde a ***c*** deve essere un vertice-insieme.

Tra l'altro l'assioma b) assicura che dato un vertice (classe) ***v*** e una collezione ***c*** costituita da alcuni vertici-insiemi che "raggiungono" ***v*** (che "appartengono" a ***v***), allora esiste una classe ***w*** raggiunta esattamente dai vertici che appartengono a ***c***. Perciò si dice che ***w*** è una *sottoclasse* di ***v*** (o che ***v*** è una *sovraclasse* di ***w***).

NOTA BENE. Grazie all'assioma b) possiamo considerare la classe ***k*** costituita dai vertici-insiemi di ***T*** che non si appartengono. Allora la precedente argomentazione che porta all'Antinomia di Russell diventa una dimostrazione per assurdo del fatto che ***k*** non è un vertice-insieme. Ne consegue, per l'assioma c), che nemmeno *la classe totale* ***t*** di tutti i vertici-insiemi può essere un vertice-insieme.
Facciamo notare che, qualora si aggiunga l'ulteriore condizione/assioma che un vertice-insieme non possa appartenersi, allora ***k*** risulta coincidente con *la classe totale* ***t***.

Per maggiori dettagli sulla teoria delle classi si rinvia a [6], pagg. 55-64, dove si trovano anche varie interessanti indicazioni bibliografiche. Per altri aspetti e considerazioni sul tema degli insiemi infiniti si possono consultare [3] e [4] (oltre al già citato [5]).

La successiva Appendice è dedicata a un approfondimento sul legame, in termini di teoria dei grafi, tra il teorema di Cantor di cui ci siamo occupati e l'Antinomia di Russell.

APPENDICE: il paradiso di Cantor e il purgatorio di Russell in un risultato di teoria dei grafi

Sia $S^{\{\}}$ l'insieme dei singoletti $\{x\}$ degli elementi di un insieme non vuoto S. Poiché S e $S^{\{\}}$ sono equipotenti, ovviamente il fatto che non ci sia alcuna funzione suriettiva di S in $\wp(S)$ può essere provato anche mostrando che non c'è alcuna funzione suriettiva di $S^{\{\}}$ su $\wp(S)$. Noi vedremo che ciò segue dal successivo Teorema 1, che in un caso particolare ci dà anche l'Antinomia di Russell.
A tal fine, sia $\boldsymbol{K}$ l'insieme dei vertici di un grafo orientato. Quindi conveniamo di scrivere $u \rightarrow w$ quando c'è un arco che va dal vertice u al vertice w (u raggiunge w); in caso contrario scriviamo $u \not\rightarrow w$.
Ora, fissato un elemento $\underline{w} \in \boldsymbol{K}$, ci ripromettiamo di considerare una funzione $\boldsymbol{g}$ di un sottoinsieme $\boldsymbol{K_0}$ *di* $\boldsymbol{K}$ *in* $\boldsymbol{K}$, tale che si verifichino entrambe le seguenti condizioni:

i) per qualche elemento $x_0 \in \boldsymbol{K}_0$ risulti $\underline{w} = \boldsymbol{g}(x_0)$;

ii) un elemento $x \in \boldsymbol{K_0}$ raggiunge $\underline{w}$ ($x \rightarrow \underline{w}$) se e solo se x non raggiunge $\boldsymbol{g}(x)$ ($x \not\rightarrow \boldsymbol{g}(x)$) .

Ebbene, una tale funzione non può esistere, per il semplice fatto che la i) e la ii) – come vedremo – sono in contrasto tra loro. Un lettore poco convinto di quest'affermazione potrebbe tentare di iniziare a costruirsela "artigianalmente" quella funzione, anche per assimilare meglio il senso del discorso. Perciò in qualche modo dovrebbe trovare un elemento x_0 a cui attribuire $\underline{w}$ come immagine tramite la costruenda funzione $\boldsymbol{g}$.
Ma un elemento del genere non esiste. Infatti, x_0 non può trovarsi tra gli elementi che raggiungono $\underline{w}$ ($x_0 \rightarrow \underline{w}$) dato che in tal caso la ii) impone che sia $x_0 \not\rightarrow \boldsymbol{g}(x_0) = \underline{w}$; il che è assurdo. D'altro canto, x_0 non può trovarsi nemmeno tra gli elementi che non raggiungono $\underline{w}$ ($x_0 \not\rightarrow \underline{w}$), dato che in

[6] Per il precedente Assioma di Estensionalità, questo ***w*** è unico.

tal caso la ii) impone che sia $x_0 \to \boldsymbol{g}(x_0) = \underline{w}$; il che è assurdo.
Quanto è stato detto assicura il seguente

TEOREMA 1. *Data una funzione* $\boldsymbol{g}$ *di un sottoinsieme* $\boldsymbol{K_0}$ *di* $\boldsymbol{K}$ *in* $\boldsymbol{K}$*, sia* $\underline{w}$ *un vertice tale che risulti:*

(j) *per ogni* $x \in \boldsymbol{K_0}$: $x \to \underline{w} \leftrightarrow x \neg\!\to \boldsymbol{g}(x)$.

Allora $\underline{w}$ *non può appartenere a* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{K_0})$. ■

NOTA BENE. Nel teorema precedente poniamo $\boldsymbol{K} = \wp(S)$ e $\boldsymbol{K_0} = S^{\{\}}$; inoltre "$u \to w$" significhi "$u$ è incluso in w". Allora quel teorema ci dice che l'insieme $\underline{w}$ che include tutti e soli i singoletti $\{x\}$ che non sono inclusi nella loro immagine $\boldsymbol{g}\{x\}$ non può appartenere a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{K_0})$ (cioè, essere immagine di un singoletto); onde $\boldsymbol{g}$ non è una funzione suriettiva (il che fa ritrovare la dimostrazione della seconda parte del terorema di Cantor). ■

Quando $\boldsymbol{K_0} = \boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{g}$ è la funzione identica su $\boldsymbol{K}$, la proprietà (j) diventa la seguente:

(j') *per ogni* $x \in \boldsymbol{K}$: $x \to \underline{w} \leftrightarrow x \neg\!\to x$.

Perciò dal Teorema 1 si ricava immediatamente che il predetto elemento $\underline{w}$ – dovendo essere $\underline{w} \in \boldsymbol{K} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{K})$ – non può esistere. Quindi si ha il seguente

COROLLARIO 2. *Non c'è alcun vertice* $\underline{w}$ *che sia raggiunto da tutti e soli i vertici x che non raggiungano se stessi.* ■

NOTA BENE. In particolare, $\boldsymbol{K}$ sia l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi; inoltre "$u \to w$" significhi "$u \in w$". Perciò nessun insieme $\underline{w}$ che sta in $\boldsymbol{K}$ ($\underline{w} \in \boldsymbol{K}$) ha come elementi (è raggiunto da) tutti e soli gli elementi di $\boldsymbol{K}$ che non si appartengono; onde, proprio per come $\boldsymbol{K}$ è definito, si ha $\boldsymbol{K} \notin \boldsymbol{K}$. Ma per quest'ultima ragione deve aversi $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{K}$. Il che ci dà l'Antinomia di Russell. ■

A questo punto si potrebbe sospettare che sia la teoria dei grafi che porta a quell'antinomia. Ma ciò è "altamente improbabile", poiché le considerazioni svolte hanno carattere astratto, onde eventuali contraddizioni dovrebbero derivare da errori di tipo *logico* (termine che qui usiamo in senso lato). Però il precedente Corollario 2 è "vero in sé". Infatti, chi abbia dimestichezza col calcolo dei predicati può rendersi conto che in un linguaggio del primo ordine quel corollario si esprime con la seguente formula logicamente valida (cioè vera in ogni interpretazione, secondo la teoria della quantificazione), essendo ε una lettera predicativa binaria: $(\forall x_2)(\mathrm{E}x_1) \sim((x_1\ \varepsilon\ x_2) \equiv \sim(x_1\ \varepsilon\ x_1))$.

Bibliografia

[1] Beth E.W., *I fondamenti logici della matematica*, Feltrinelli, Milano (1963).
[2] Frege G. *I principi dell'aritmetica*. Inserito in *Letture di Logica* (a cura di C. Mangione ed M. Franchella), Ambrosiana-Zanichelli (1993).
[3] Leonesi S., Toffalori C., Tordini S., *Matematica, miracoli e paradossi,* Lettera Matematica Pristem, n. 46 (2002).
[4] Leonesi S., Toffalori C., Tordini S., *La matematica dell'infinito,* Lettera Matematica Pristem, n. 48 (2003).
[5] Leonesi S., Toffalori C., *Il problema del continuo*, Archimede, **2**, (2003).
[6] Lombardo-Radice L. *Istituzioni di algebra astratta*, Feltrinelli, Milano (1973).
[7] Mendelson E. *Introduzione alla logica matematica*. Boringhieri, Torino (1972).
[8] Russell B., *The principles of mathematics*. http://fair-use.org/bertrand-russell/the-principles-of-mathematics/preface.
[9] Russell B., Whitehead A. N., *Principia Mathematica*. Cambridge Univ. Press, London (1980; 1ª ediz. 1910).
[10] Russell B., *Introduzione alla Filosofia della Matematica*. Longanesi (2004).

Metallica 5

Delusioni e pasticcini[1]

di Anna Cerasoli

Visto che lei non aveva tempo, ho pensato di cominciare da solo il ripasso del calcolo combinatorio. Le avrei fatto senza dubbio un favore nel ripeterglielo, l'indomani, in pochi minuti. Perché, non c'è dubbio, oltre a pensarla spesso mi piace fare qualcosa per lei. Sarà questo l'amore? Non so, è la prima volta che mi capita.

Mi sono messo di buona lena, in camera mia, programmando un'oretta di lavoro; poi sarei andato al corso per la patente europea del computer.

Gli appunti del prof cominciano con un esempio simpatico, intitolato 'alcuni pasticcini': un vassoio contiene 5 pasticcini tutti diversi tra loro.

Ne voglio mangiare solo alcuni, per esempio 3. La domanda è: in quanti modi posso sceglierli?

Questo è uno dei possibili modo di servirmi, ma quanti sono in tutto? Insomma: si ha un insieme di 5 elementi e si vuole un suo sottoinsieme di 3 elementi. In quanti modi lo si può formare?

Durante la spiegazione il prof ci ha messo in guardia: "Il problema potrebbe sembrarvi simile a quello in cui si hanno 5 quadri e se ne vogliono scegliere 3, per appenderli allineati su una parete. Ma, state attenti, non è così. Infatti nel caso dei quadri, oltre a scegliere un sottoinsieme di 3, da quello da 5, si vogliono anche permutare i tre elementi e conoscere in quanti modi allinearli. Nel caso dei pasticcini, invece, non è richiesto l'ordine con cui si mangiano. Per questo motivo, possiamo partire dalla soluzione del problema dei quadri

$$(5)_3$$

ma, proprio perché nel nostro caso l'ordine non conta, dobbiamo dividere per 3!, cioè per tutte le permutazioni che forniscono i diversi allineamenti dei 3 quadri. In questo modo otteniamo il numero dei sottoinsiemi composti da 3 elementi, e non, anche, le loro permutazioni. Ecco, quindi, il numero di modi in cui posso scegliere i 3 pasticcini.

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$$

[1] Continua dai numeri precedenti di "Matematicamente.it magazine". Al termine dell'articolo si può trovare un riassunto delle altre puntate.

Questa frazione si indica con un nuovo simbolo, chiamato *coefficiente binomiale*

$$\binom{5}{3}$$

E, in generale, se dato un insieme di n elementi, voglio conoscere il numero dei possibili sottoinsiemi aventi k elementi, il simbolo è

$$\binom{n}{k}$$

che si legge *n sopra k*. Esso rappresenta una frazione che ha k fattori al numeratore e altrettanti fattori al denominatore; i fattori si ottengono sempre scalando di una unità, ma al numeratore si parte da n mentre al denominatore si parte da k."

Il prof ci ha poi detto che $\binom{n}{0}$, per definizione, si pone uguale a 1. Però ci ha anche assicurato che ne avremmo facilmente capito il motivo in seguito. Cosa che si è puntualmente verificata.

A quel punto, come sempre, ha fatto inventare a noi dei problemi su questo modello. Io, per stare in tema di dolci, ho inventato questo. Nella vetrina del mio gelataio sono esposi 12 gusti di gelato alla frutta. Se ogni giorno mangio un gelato con 2 gusti, in quanti giorni esaurirò tutti i possibili abbinamenti di sapori? Ho calcolato che con un paio di mesi me la cavo…

$$\frac{12\times 11}{2\times 1}=66$$

Dopo un po' di esercizi il prof è andato alla lavagna e ha cominciato a scrivere, in silenzio, dei numeri disposti a triangolo. Noi, lì a guardare, senza capire.
"Questo triangolo di numeri è molto famoso." ha detto infine "Noi Italiani lo chiamiamo Triangolo di Tartaglia, in onore del matematico Tartaglia, ma altri lo chiamano diversamente. State a vedere e scoprirete che ha a che fare con i coefficienti binomiali."
Non vorrei diventare fissato per la matematica, però mentre scriveva ho pensato che quel triangolo aveva qualcosa di gradevole. Chissà, forse è l'influenza di Metallica…

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

* * *

"Beh?.. Riuscite a trovare la regola con cui scrivo questi numeri? Non li conosco certo a memoria eppure posso andare avanti all'infinito! Chi vuole continuare?" Ci ha sfidato tornandosene alla cattedra.
Nessuno si muoveva, io ci stavo riflettendo ma non mi veniva in mente niente. Dopo un po' Metallica si è alzata dal banco "Ci provo io prof." È andata alla lavagna e ha aggiunto una riga di numeri, spiegando: "all'inizio e alla fine di ogni riga c'è un 1, gli altri numeri si ottengono sommando i due che gli stanno immediatamente sopra nella riga precedente."

Mentre, insieme agli altri, copiavo la riga di numeri sul quaderno, provando la solita ammirazione per il suo intuito, lei candidamente ha aggiunto “ Me l’ha insegnato la prof delle medie…”
“E cosa hanno a che fare i coefficienti binomiali con questi numeri?” ha continuato il prof “Ve lo spiego partendo dal nostro esempio. Consideriamo l’insieme dei 5 pasticcini e calcoliamo il numero dei suoi sottoinsiemi da 0, da 1, da 2,…da 5 elementi.

$$\binom{5}{0}=1 \quad \binom{5}{1}=5 \quad \binom{5}{2}=10 \quad \binom{5}{3}=10 \quad \binom{5}{4}=5 \quad \binom{5}{5}=1$$

Vedete? Abbiamo ottenuto i numeri della sesta riga del triangolo. E, in generale, la riga che dopo il numero 1 presenta il numero n si può ottenere calcolando i vari coefficienti binomiali, facendo variare k da 0 a n. Esattamente come ho fatto nell’esempio, facendo variare k da 0 a 5.”
Così abbiamo anche capito il motivo per cui

$$\binom{n}{0}=1$$

Si tratta del numero di sottoinsiemi contenenti zero elementi che si possono avere da un insieme di n elementi: essendoci un solo sottoinsieme nullo, questo numero è 1.
Ritornando all’esempio dei pasticcini

$$\binom{5}{0}=1$$

sta a dire che c’è un solo modo di servirmi di zero pasticcini: non prendere nulla. Così come

$$\binom{5}{5}=1$$

sta a dire che c’è un solo modo per prenderli tutti.
A quel punto, a via di immaginare gelati e pasticcini m’era venuta fame. Ho fatto merenda e poi sono andato al corso di computer.
Ogni volta che torno a casa dal centro passo in piazzetta Rocca di Corno, ma non avevo mai dato peso ad una piccola insegna, posta su un portone: ‘Centro di Servizi per il Volontariato’.
Oggi, avendola notata, mi stavo giusto chiedendo cosa volesse dire, quando dal portone vedo uscire Metallica in compagnia di un ragazzo. Ho sentito il cuore battermi all’impazzata. Anche lei mi ha visto e si è diretta sorridente verso di me, seguita dal ragazzo. “Ciao, sei stato al corso per il computer? Io ho deciso di rinviarlo all’anno prossimo. Ti presento Andrea, lo conosci?” Intanto lui mi tendeva la mano ed io, di riflesso, allungavo la mia. Ma la cosa che attirava la mia attenzione era il modo disinvolto con cui lui contemporaneamente stava muovendo l’altro braccio per cingerle le spalle e stringerla a sé.
Il mio viso deve aver tradito tutta la mia angoscia perché Metallica si è subito svincolata continuando a sorridermi. Ma ormai un dolore quasi fisico aveva cambiato il mio umore.
Ho balbettato qualche parola: “Sì, sono andato al corso, e tu cosa ci fai qui?”
“C’è una Banca del Tempo ed io do un’ora al giorno, quando posso.”
Più per cortesia che per reale interesse ho chiesto spiegazioni.
“In quell’ora mi metto a disposizione per fare cose che servono agli altri e che io sono in grado di fare. Quasi sempre sono spiegazioni di matematica a ragazzi che si trovano ricoverati in ospedale e non possono frequentare la scuola. Se vuoi dare anche tu un po’ del tuo tempo…”
“Sì, ci penso. Ora vi saluto. Devo andare.”
È sempre così. Lei è in grado di spiazzarmi, è in grado di capovolgere in un attimo il mio stato d’animo: in pochi secondi ero passato dalla serenità all’angoscia e subito dopo dall’angoscia all’ammirazione.

1. Cerca esempi di problemi sul modello “alcuni pasticcini” illustrato nel racconto.
2. Calcola $\binom{9}{4}$ e $\binom{9}{5}$
3. Su un foglio di carta sono disegnati 8 punti, di cui mai 3 allineati. Quanti possibili triangoli aventi quei punti come vertici posso disegnare?
4. Quante strette di mano ci sono tra 6 amici che si incontrano?
5. In una classe devono essere eletti due genitori e due studenti come rappresentanti di classe. Se la classe è composta da 25 allievi quante sono le possibili quaterne di rappresentanti?
6. Perché il Triangolo di Tartaglia è simmetrico?
7. Trova in Internet i vari nomi del Triangolo di Tartaglia.
8. Ecco la definizione formale del coefficiente binomiale. Leggila e giustificala.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Risposte agli esercizi del racconto precedente:

1. Perché in quel caso non conta l’ordine.
2. $(4)_2 = 12$.
3. Dato il dominio di *n* elementi, considero un suo elemento. Ho *m* modi per scegliere la sua immagine nel codominio avente *m* elementi. Considero un secondo elemento del dominio ed ho *m-1* modi per scegliere la sua immagine (trattandosi di una funzione iniettiva non può avere la stessa immagine del primo elemento). Vado avanti così per tutti gli *n* elementi del dominio. Pertanto ho $(m)_n$ modi per definire una funzione iniettiva.

RIASSUNTO DELLE PUNTATE PRECEDENTI

Metallica è il soprannome della mia amica Lucia, che a chiamarla col nome della santa va su tutte le furie: “perché è una ingiustizia che uno il proprio nome non se lo possa scegliere da sé!” È una ribelle in tutto Metallica, e lo si capisce già da come ti lancia il primo sguardo. E lei con le regole proprio non va d’accordo; “le uniche buone” aggiunge “sono quelle matematiche”. Sì, perché a Metallica la matematica piace, anzi, è l’unica materia a piacerle! […] oggi il prof ha fatto i gruppi di studio ed io sono capitato con lei: dobbiamo ripassare il calcolo combinatorio, perché lunedì prossimo ci darà la verifica scritta. È venuta da me già nel primo pomeriggio perché poi, verso le sei, aveva un impegno.
“Dunque”, ha cominciato senza tanti complimenti “io direi di seguire gli appunti perché, con questa storia dei modelli, il prof la fa molto semplice, senza tante complicazioni di nomi difficili, come qui sul libro.” […] “Lui dice che, in tutto, ci sono solo sei tipi di problemi e la cosa importante, quando ci si trova di fronte ad un quesito di calcolo combinatorio, è saper riconoscere a quale di questi tipi appartiene. Poi è facile applicare la formula per avere il risultato. Insomma, i sei tipi di problemi sono come sei modelli a cui tutti gli altri assomigliano.
Il primo modello, che lui chiama modello ‘*cosa mi metto?*’, si presenta così:
Devo scegliere cosa indossare tra 3 t-shirt e 2 jeans. In quanti differenti modi posso vestirmi? “Beh!” sono intervenuto “Mi sembra un problema facile, basta moltiplicare 3×2, il numero delle t-shirt per il numero dei jeans. E se poi volessi abbinare anche 2 paia di scarpe dovrei moltiplicare $3 \times 2 \times 2$ e così avrei tutti i diversi modi di vestirmi!”
Metallica per la prima volta mi ha guardato con un certo interesse e ha aggiunto: “Sì, hai ragione. […] Insomma, riassumendo, mi pare che il modello di questo tipo di problema consista nell’avere alcuni insiemi e nello scegliere un solo elemento da ciascuno. Il numero di tutti gli abbinamenti possibili si trova moltiplicando il numero di elementi del primo insieme per quello del secondo insieme, per quello del terzo… e così via se gli insiemi sono più di tre.”

* * *

"Il secondo modello è quello delle parole" ha continuato, seguendo i suoi appunti in cui ci capisce solo lei. "Il problema tipo è: ho un *alfabeto*, cioè un insieme di simboli, per esempio (A, B, C); con questi simboli compongo delle sequenze che chiamo *parole*, anche se sono prive di significato. Voglio sapere quante diverse parole di una certa lunghezza, per esempio lunghe 2 caratteri, posso formare. Dunque sono $3 \times 3 = 9$ parole".
"Sì, mi sembra facile." ho commentato con una sicurezza che ha stupito pure me. "La prima lettera della parola la posso scegliere in 3 modi diversi e per ciascuno di essi ho 3 modi per scegliere la seconda lettera. Dunque 3^2."

AA AB AC BA BB BC CA CB CC

"Se, invece, la lunghezza della parola dovesse essere di 3 caratteri, allora tutte le parole sarebbero 3^3, se dovesse essere di 4 caratteri, le parole sarebbero 3^4, e così via …"
Metallica mi ha guardato fisso negli occhi e, imitando la mia erre alla francese, ha continuato: "Se la lunghezza fosse di n caratteri, le parole sarebbero 3^n. E se abbiamo un alfabeto di m caratteri, l numero di parole lunghe n sono m alla n: m^n.
"Guarda!" ha poi esclamato. "Questo modello delle parole è proprio simpatico. Ci sono una infinità di problemi che sembrano di tutt'altro tipo e invece, a rifletterci su, si riducono a questioni di parole e alfabeti, quindi al calcolo di una semplice potenza. Qui c'è addirittura la schedina del totocalcio. Quante sono le schedine che bisogna giocare per esser certi di vincere al totocalcio?"
"Non capisco." ho ammesso con sincerità. "Cosa c'entra la schedina con una parola?"
"Il prof ha detto che un alfabeto è un qualsiasi insieme di simboli e quindi anche l'insieme (1, 2, X) è un alfabeto; una parola, poi, è una sequenza di questi simboli. Nel caso della schedina, ogni colonna di risultati che noi assegniamo, altro non è se non una sequenza di 13 simboli dell'alfabeto (1, 2, X), quindi è una parola, poco importa se scritta in verticale e non in orizzontale come siamo abituati a fare con le parole comuni."
"Allora è facile. Si tratta di calcolare 3^{13}. Cioè, *il numero dei simboli dell'alfabeto elevato al numero di caratteri della parola, insomma alla lunghezza della parola*".
Lei ha fatto cantare la sua calcolatrice che in una frazione di secondo ha fornito il risultato: 1.594.323.
"Accidenti, che numero!" ha esclamato sgranando gli occhi. Certo che questa storia dei modelli semplifica tutto!" ha proseguito "Pensa che persino il lancio di monete può essere interpretato come scrittura di parole. Ascolta questo esempio del prof: quanti sono i possibili risultati del lancio di 3 monete? Ebbene, si tratta di tutte le parole lunghe 3, composte dai simboli T (testa) e C (croce) come, per esempio TTT, TTC, TCT …
"Perciò sono due alla terza, cioè 8." l'ho interrotta dimostrandomi all'altezza.

* * *

"[…] riprendiamo gli appunti del prof. Oggi ci tocca il *fattoriale.* Lui fa l'esempio dei quadri su una parete, e suppone che siano 3, un Modigliani, un Van Gogh e uno Chagal. In quanti diversi modi si possono allineare? Si hanno tre possibilità per scegliere il primo quadro, due per scegliere il secondo perché, ovviamente, sono rimasti da appendere solo due quadri, e una sola possibilità per il terzo. Quindi tutti i possibili allineamenti dei 3 quadri sono 6, cioè $3 \times 2 \times 1$."
"Sì, e questo prodotto $3 \times 2 \times 1$ viene indicato con il simbolo 3! Cioè il 3 seguito dal punto esclamativo, che si legge *3 fattoriale.* " ho continuato, e poi ancora "Se di quadri ne avessi 4, allora avrei 4! Modi di allinearli, cioè $4 \times 3 \times 2 \times 1$, quindi 24 possibili *permutazioni,* così si chiamano i diversi ordinamenti.
E, per parlare in generale, se abbiamo n oggetti, possiamo permutarli in $n!$ modi, con $n!$ che si ottiene facendo il prodotto di tutti i numeri da 1 a n."

* * *

[…] il prof di matematica ci chiede "Ditemi un po': se volete scegliere due tra tutti voi quante possibili coppie potete scegliere?"
Metallica ci ha pensato una frazione di secondo e poi ha scritto *22 x 21.*
"Ho immaginato un diagramma ad albero e ho ragionato così" ha spiegato. "Siamo in 22, perciò ho 22 rami per scegliere la prima persona; poi da ciascuno di questi rami partono altri 21 rami per scegliere la seconda persona. Perciò le possibili coppie sono… sono 462." ha concluso calcolando a mente, com'è suo stile.
E allora il prof, rivolto a me: " Sai inquadrare il problema in generale?"
Mi sono fatto coraggio e ho cominciato: "La situazione dovrebbe essere così: si ha un insieme di elementi; da questo se ne prendono alcuni, diciamo n, e si allineano in ordine. Quante sono le possibili ennuple di elementi?
La risposta è: se gli elementi dell'insieme di partenza sono m, allora bisogna moltiplicare n fattori, a partire da m, e scalando sempre di una unità." Ho concluso sollevato. Metallica mi ha sorriso come per dire 'Niente male!'
"Bene. Bravo." ha commentato il prof "E, in simboli, questo prodotto si scrive così $(m)_n$ e si legge 'm con n'. Insomma, per dirla in parole povere, è come fare il fattoriale di m, interrompendolo dopo n termini. A scriverlo sembra complicato, ma se ci riflettete un po', lo potete capite facilmente: $(m)_n = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)$.

Le avventure del dottor G nei labirinti della mente

di Alessio Russo

SUNTO: In quest'articolo vengono proposti alcuni problemi di logica attraverso un breve racconto.

ABSTRACT: It this article, through a short narration, some problems of logic are proposed.

PAROLE CHIAVE: verità, dimostrabilità, tautologia.

1 Introduzione

La matematica ha spesso attirato l'attenzione di scrittori e, più in generale, d'artisti che hanno creato le loro "finzioni" traendo spunto dall'incredibile ventaglio di mondi possibili che i matematici hanno percorso da quando, nella seconda metà dell'Ottocento, cominciarono ad affrancarsi dalle "catene" del reale. Chi non ricorda, per citarne solo alcuni, i racconti di J. L. Borges, di I. Asimov, di S. Lem, di D. R. Hofstadter, di L. Carroll o di J. Cortàraz? In tale ordine d'idee, si legga, ad esempio, l'interessante raccolta di racconti matematici di C. Bartocci [1] o il libro di Hofstadter [2]. In questo lavoro si è, in un certo senso, seguito un cammino inverso. Precisamente, è stato utilizzato lo strumento letterario del racconto breve per introdurre questioni classiche di logica cercando di attirare l'attenzione del lettore attraverso il dispiegarsi della vicenda immaginaria del protagonista, il dottor G (si tratta di Gödel?). Come l'autore ha avuto modo di constatare, proponendo il racconto qui riportato a studenti di scuola superiore e del primo anno del Corso di Laurea in Matematica, questo tipo d'approccio ha suscitato in loro molta curiosità che ha consentito di introdurre con una certa facilità delicate questioni sui fondamenti della matematica, sul rapporto fra verità e dimostrabilità, sulla completezza e così via. Non solo, ma queste "carezze furtive", come le chiamava A. Weil, fra ambiti diversi, ha spianato facilmente la strada ad un discorso interdisciplinare. Anche per questo, oltre l'indubbio fascino, si è scelto come libro letto dal dottor G una delle opere più importanti di L. Wittgenstein, il *Tractatus* [3], di cui si riporta il celebre aforisma 6.52. Per finire, qualche parola sulla scelta dei nomi dei vari personaggi del racconto. Sono stati utilizzati nomi o parti di nomi di persone che ebbero un ruolo importante in questo capitolo affascinante della storia della matematica.

2 Il Racconto

Quella sera il dottor G, tremante per la febbre che gli era sopraggiunta nel pomeriggio, decise di andare a dormire molto presto. L'indomani aveva un importante appuntamento cui non voleva mancare. Messosi a letto, si ricordò di un libro che aveva finito di leggere qualche giorno prima. Ripensò alle tante difficoltà che il protagonista aveva dovuto superare per uscire da quello strano castello in cui era rinchiuso. Gli tornarono alla mente le parole che Ludwig aveva pronunciato mentre cominciava ad assaporare la libertà: «Noi sentiamo che, persino nell'ipotesi che tutte le domande scientifiche abbiano avuto risposta, i nostri problemi vitali non sono ancora neppure sfiorati. Certo, allora non resta più domanda alcuna; e appunto questa è la risposta. La risoluzione del problema della vita si scorge allo sparire di esso...». Le armi mentali, che aveva utilizzato per uscire da quella prigione in cui aveva scelto di stare da sempre, gli erano servite per arrivare a contemplare un mondo nuovo in cui quelle stesse armi non avevano alcun senso.
Riflettendo su tutto ciò, ebbe l'impressione che probabilmente l'autore avesse voluto mostrarci che nel momento in cui entriamo in confidenza con la vita dobbiamo disfarci della scala che ci ha permesso di approdare ad essa. Gli strumenti del-

la ragione non ci fanno afferrare la vita nella sua essenza. Possono solo servire ad evitare di coglierla come un problema. Mentre questi pensieri affioravano numerosi nella sua mente, quasi azzuffandosi tra loro, si addormentò.
Dopo qualche ora di sonno sereno, cominciò a sognare, e… di colpo, si ritrovò in quel castello che già prima di addormentarsi l'aveva fatto pensare tanto. Gli sembrò subito un luogo familiare. Davanti a sé vi erano numerose porte però tutte chiuse, ed una scala, con molti gradini. Essa conduceva ad un corridoio che era così lungo da non permettere che se ne scorgesse il fondo. Incuriosito, cominciò a camminare. Man mano che procedeva notò sui muri delle scritte che, lette alternativamente prima sulla parete di destra e poi su quella di sinistra, formavano un messaggio che sembrava scritto apposta per lui. Le parole erano più o meno queste: «Procedi tranquillo fino alla fine. Troverai una porta attraverso cui entrerai in una stanza. Lì ti aspettano due persone, Dave e Bert, nell'aspetto identici come gocce d'acqua. Anche il tono della loro voce è lo stesso. Tuttavia, Dave è uno che mente sempre qualunque cosa dica. Bert, invece, quando parla dice sempre la verità. Inoltre, essi si conoscono molto bene. Tu, caro dottor G, puoi rivolgere a loro una sola domanda… ». Quella che prima era in lui soltanto curiosità si trasformò in impazienza mista ad angoscia. «Perché mai dovrò fare una domanda a queste persone?», si chiedeva tra sé.
Quando finalmente ebbe varcato la soglia di quella stanza che ormai occupava ogni suo pensiero, si rese conto di trovarsi in un luogo veramente inquietante. Non vi erano finestre, le pareti erano dipinte di un colore grigio scurissimo. Soltanto due piccole candele, accese chissà da quando, facevano un poco di luce in quella fitta oscurità. Guardandosi intorno scorse due porte identiche. «Chissà quale delle due porte mi conviene aprire? » si chiese ansioso. Fu in quel momento che nella penombra presero forma due volti perfettamente somiglianti. «Saranno Dave e Bert!» esclamò tra sé. Questi lo guardarono abbozzando un sorriso enigmatico. Subito dopo, parlando simultaneamente, lo invitarono a chiedere qualunque cosa. Ovviamente, il dottor G voleva sapere quale di quelle due porte era quella giusta, sicché, ripensando al messaggio che aveva in precedenza letto sui muri del corridoio, cominciò a riflettere sulla domanda che avrebbe dovuto fare a Dave e a Bert. Purtroppo, essi non erano distinguibili l'uno dall'altro, e pertanto se avesse semplicemente chiesto quale era la porta giusta, dalla risposta di uno dei due non sarebbe stato in grado di capire se fosse quella che gli serviva. Così s'interrogava e al tempo stesso si angosciava senza riuscire a capire cosa fare. Dopo un po' di tempo, ebbe un'illuminazione, e pensò tra sé: «La domanda da porre deve essere, come dicono i logici, di tipo tautologico, cioè deve essere tale che Dave e Bert devono dare ad essa la stessa risposta». Si convinse di essersi indirizzato verso la soluzione del problema, e ciò gli diede molto coraggio. Bisognava solo trovare la domanda giusta. Continuò a pensare, finché, ecco… una nuova illuminazione. Aveva capito quale era il giusto quesito da porre…
Ascoltata la risposta, aprì la porta giusta ed uscì in un ampio giardino. «Come è strano questo giardino!» esclamò. Infatti, sulla sua destra poteva vedere alberi verdeggianti circondati da aiuole fiorite. Inoltre, tra i rami, giochi di luce prodotti dai raggi del sole rendevano il tutto piacevole da guardare. Invece, alla sua sinistra vi erano soltanto pochi alberi con rami quasi spogli, le cui foglie erano ormai secche e pronte a cadere. Non vi erano giochi di luce. Il cielo sopra quest'angolo di giardino era grigio e minaccioso, foriero di chissà quali sinistri presagi. Istintivamente, s'incamminò sul lato destro. L'aria che finalmente respirava, il colore dei fiori e quel leggero fruscio del vento tra le foglie degli alberi lo misero di buon umore. Pensava che forse fra non molto sarebbe stato libero. Distratto da questi pensieri, non si accorse di un pendio davanti a sé. Scivolò e perse i sensi.
Al risveglio si trovò su una piccola barca insieme con un vecchio dal cui volto traspariva affetto e compassione per lui. Sembrava che questi lo stesse conducendo ad un'isola attraverso un fiume. Il vecchio spiegò al nostro eroe che quel luogo era abitato da persone tutte somiglianti a Dave o a Bert, i simildave ed i similbert, che lo avrebbero sottoposto ad una nuova prova. Solo dopo averla superata, egli avrebbe potuto ricondurlo nel giardino fiorito in cui era stato così bene. Il dottor G non aveva altra scelta.
Scese dalla barca, salutò il vecchio e si mise alla ricerca dei simildave e dei similbert. Finalmente ne

incontrò uno il cui nome era Bertrand. Questi appena lo vide, con aria di sfida gli pose quest'enigma: «Kurt, Rudolf e Adele sono altri abitanti di quest'isola. Kurt afferma che Rudolf è un simildave, ma Rudolf afferma che Adele è una simildave e Adele afferma che Kurt è un simildave. Che cosa ne deduci?». Questa volta il dottor G fece abbastanza presto a trovare la risposta… Superata anche questa prova, ritornò dal vecchio che lo accolse con un sorriso quasi paterno e lo riportò nel giardino fiorito. Un altro passo verso la libertà era stato compiuto. Prima di congedarlo, il vecchio gli disse che ormai doveva superare un'ultima prova, la più difficile. Avrebbe percorso, a partire dal giardino, una lunga strada alla fine della quale avrebbe trovato un volto scolpito su una pietra. All'altezza di una delle orecchie vi sarebbe stato un foro. Attraverso di esso egli avrebbe dovuto pronunciare una frase che se fosse stata quella giusta l'avrebbe condotto direttamente alla libertà. Inoltre, lungo il cammino egli avrebbe nuovamente incontrato Dave e Bert, però questa volta non insieme.

Il dottor G, preoccupato, ma al tempo stesso fiducioso, s'incamminò nella direzione che gli sembrò ad intuito la più conveniente.

Dopo un tempo abbastanza lungo, vide da lontano una persona sola che gli veniva incontro. Ricordando le ultime parole del vecchio, si chiese tra sé: «Chissà se questo è Dave o Bert?». Quando questi fu davanti al dottor G disse: «Per essere libero devi pronunciare una frase vera». Detto ciò si allontanò. Allora il dottor G pensò che quest'indicazione non gli era di grande aiuto. Infatti, non essendo in grado di sapere se quello era Dave o Bert, non poteva capire se la frase da pronunciare all'orecchio del volto di pietra doveva essere vera o falsa. Mentre era intento a pensare a ciò, gli si parò davanti l'altro (Dave o Bert?) che gli disse: «Per essere libero devi pronunciare una frase falsa». Povero dottor G! Gli sembrava di impazzire, aveva la sensazione che Dave e Bert fossero degli spiriti diabolici che erano stati mandati lungo la sua strada per prendersi gioco di lui. Dopo un po', quando la disperazione si andò via via stemperando, cedendo il posto al naturale istinto di sopravvivenza che in lui era più che mai presente, si mise a pensare. «Dal momento che non c'è nessun modo per capire se ha parlato prima Dave e poi Bert o viceversa, non devo tener conto di nessuno dei due suggerimenti poiché... sì certo, è così!». Il problema era allora cosa dire in quel maledetto orecchio di pietra che lo stava aspettando in fondo alla strada chissà da quanto tempo. Man mano che si avvicinava alla fine della strada, le pulsazioni del suo cuore aumentavano a dismisura; si sentiva mancare e cominciò a sudare. Gli sembrò che era ormai finita per lui… Si svegliò di soprassalto. Però dopo qualche minuto di confusione, si rese conto che la febbre non c'era più. Era l'alba, poteva finalmente alzarsi ed andare a quell'appuntamento cui tanto teneva. Strada facendo ripensò a quello strano sogno e a come era riuscito a pronunciare la frase giusta che gli aveva permesso di venir fuori da… quel labirinto della mente.

Riferimenti bibliografici

[1] Bartocci C., *Racconti matematici*, Torino, Einaudi, 2007.

[2] Hofstadter D. R., *Gödel, Escher, Bach*, Milano, Adelphi, 2001.

[3] Wittgenstein L., *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914-1916*, Torino, Einaudi, 1968.

Alessio Russo
Dipartimento di Matematica,
Seconda Università di Napoli,
Via Vivaldi 43, I-81100 Caserta
e-mail: alessio.russo@unina2.it

La Logica Fuzzy per la Ricerca Sociale

di Ilaria Di Russo[1], Antonio Maturo[1]

ABSTRACT In this paper we show the utility and the added value of using *fuzzy logic* in Social Research. In the first section we describe the motivations that induce us to prefer *fuzzy logic* to *crisp logic* because of its better flexibility and closeness to the human language. In Sec. 2 we emphasize the effectiveness of fuzzy logic in Social Research as useful tool in its applications to surpass the limits of traditional Statistics. Finally we present some applications of *fuzzy sets* to analyse complex social patterns.

SUNTO Scopo del presente articolo è mostrare l'utilità ed il valore aggiunto che apporta l'utilizzo della *logica fuzzy* nella Ricerca Sociale. Nel primo paragrafo si descrivono le motivazioni che ci inducono a preferire la *logica fuzzy* alla *logica crisp* per la sua maggiore flessibilità e vicinanza al linguaggio umano. Nel secondo paragrafo si mette in evidenza l'efficacia della *logica fuzzy* nella Ricerca Sociale come strumento utile nelle sue applicazioni al superamento dei limiti della Statistica tradizionale. Infine presentiamo alcune applicazioni degli *insiemi fuzzy* per analizzare sistemi sociali complessi.

PAROLE CHIAVE Insiemi fuzzy, logica fuzzy, sistemi sociali.

1 Dalla logica aristotelica alla logica fuzzy

La logica sillogistica classica o logica binaria, sistematizzata inizialmente da Aristotele [AR] e rinnovata profondamente (pur nel rispetto del suo assetto originario) da Leibniz e da Boole, è basata sulle *proposizioni* o *enunciati*.

Un *enunciato* o *proposizione* è descritto, nella famosa Enciclopedia Feltrinelli Fischer, Matematica 1, come un "complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è vero o falso". [BRST]

Nel testo di B. Russell [RU], *Introduzione alla filosofia matematica*, un enunciato è "una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o vero o falso".

Qualunque sia la definizione o descrizione del concetto di enunciato, la sua caratteristica è la validità del *principio di bivalenza*, secondo il quale "un enunciato è o vero o falso" (Russell, op. cit.) e non può essere contemporaneamente vero e falso.

Una *funzione enunciativa* o *proprietà* è, secondo Russell, "un'espressione P(x) contenente una componente indeterminata x tale che, quando si assegna un valore a x, l'espressione diviene un enunciato".

Il concetto di *insieme* è legato a quello di funzione enunciativa. "Un insieme o classe è definito da una funzione enunciativa vera per tutti gli elementi dell'insieme e falsa per tutto il resto" (Russell, op. cit., p. 293).

Russell enuncia anche varie condizioni che ritiene "necessarie e sufficienti affinché un simbolo possa servire come insieme". Di seguito supponiamo che siano verificate tali condizioni.

Se P(x) è una funzione enunciativa denotiamo con V_P l'insieme da essa definito, ossia

$$V_P = \{x: P(x) \text{ è vera}\}.$$

[1] Dipartimento di Scienze Sociali, Università di Chieti-Pescara. Lavoro condotto nell'ambito della Ricerca scientifica dal titolo "Decisioni e Giochi Fuzzy ed Applicazioni per le Azioni Sociali", Facoltà di Scienze Sociali, Dipartimento di Scienze Sociali, Università di Chieti-Pescara.

In alternativa alla logica binaria molti autori hanno proposto la *logica polivalente*. Ossia, invece di considerare solo i due valori di verità F = "falso" e V = "vero", si considera un insieme S totalmente ordinato, detto insieme dei *valori di verità*, che contiene i simboli F e V rispettivamente come minimo e massimo[2].

Generalizzando la definizione di B. Russell, chiamiamo *enunciato a valori in* S o S-*enunciato* "una disposizione di parole e/o simboli a cui, in base a criteri fissati dal ricercatore, viene attribuito un solo valore di S".

Chiamiamo S-*funzione enunciativa* (o S-*proprietà*) P(x) "ogni espressione con una indeterminata x tale che, quando si assegna un valore ad x, l'espressione diviene un S-enunciato".

In generale gli S-enunciati sono definiti su un insieme assegnato U detto *insieme universo*, che in ambito sociologico può essere l'insieme dei casi considerati nella ricerca.

Per ogni S-funzione enunciativa P(x) su un universo U la *funzione di appartenenza associata* a P(x) è la funzione φ: $U \rightarrow S$, definita in U ed a valori in S che ad ogni elemento $c \in U$ associa il valore di verità di P(c), appartenente a S.

Soprattutto per merito di Zadeh [ZA1] si è diffusa l'idea di assumere S = [0, 1], con F = 0, V = 1. La corrispondente logica polivalente, detta *logica fuzzy* (o *sfocata*), ha un insieme continuo di valori di verità, che tiene conto anche delle piccole differenze fra i valori di verità assegnati agli elementi dell'insieme universo.

Assegnare una funzione di appartenenza φ su un universo U significa determinare, per ogni $\alpha \in [0, 1]$, un sottoinsieme U_α di U formato dagli elementi c di U per i quali il valore di verità dell'affermazione "$c \in U$" è uguale ad α. La funzione di appartenenza φ si dice *insieme fuzzy*. Nel caso in cui i valori assunti da φ sono solo "0" e "1" essa si dice *insieme crisp* (o *nitido*) ed in tal caso per ogni elemento di U l'affermazione "$c \in U$" è o "vera" o "falsa".

È opportuno osservare che, nonostante il nome possa trarre in inganno, nella logica fuzzy nulla è incerto né tanto meno aleatorio, anzi, in un ragionamento fuzzy è tutto deterministico e riproducibile.

Una peculiare caratteristica della logica fuzzy è che essa fornisce la possibilità di operare sulla base di variabili linguistiche [ZA3], [ZA4], [ZA5]. Una *variabile linguistica* è caratterizzata da un *nome* e da un *insieme totalmente ordinato di aggettivi* (o *etichette*) che si riferiscono a tale nome. Ogni aggettivo A definisce un sottoinsieme fuzzy di U, in quanto per ogni elemento c di U un esperto può determinare il grado $\varphi_A(c)$ in cui c soddisfa l'aggettivo A.

Si può ampliare l'insieme totalmente ordinato di aggettivi attraverso l'utilizzo di *operatori logici* applicati a tali etichette detti *hedges* o *linguistic modifiers* (come "molto", "quasi", "abbastanza", "all'incirca", "alquanto", "in un certo qual senso", "in linea di massima", "più o meno", "altamente", ecc.) [ZA3], [ZA4], [ZA5].

Secondo la logica fuzzy di Zadeh è quindi possibile passare da un valore ad un altro di una variabile linguistica in maniera graduale, senza essere vincolati dalla necessità che un individuo soddisfi completamente o non soddisfi affatto al concetto espresso da ciascuno di tali valori, come accade nella logica booleana, in cui il fatto che un elemento soddisfi ad una proprietà è o completamente vero (grado di appartenenza "1") o completamente falso (grado di appartenenza "0").

L'uso delle variabili linguistiche permette di utilizzare una logica più vicina a quella umana. Infatti nella comunicazione fra esseri umani si usano generalmente asserzioni, che riguardano il fatto che per un individuo vale il concetto espresso da un aggettivo, a cui non si può attribuire con precisione il valore "vero" o "falso". Ne deriva che gli enunciati della logica classica sono molto pochi rispetto a quelli usati nel linguaggio umano nella vita reale: gli uomini non usano enunciati *crisp* ma valori di variabili linguistiche, detti anche enunciati di tipo *fuzzy*. Gli uomini, nonostante conducano discorsi che appaiono imprecisi dal punto di vista della logica crisp, ottengono

[2] Già i fisici quantistici con *Reichenbach* [RE] avevano introdotto il terzo valore di verità I = "indeterminato". Anche nella *Teoria delle Probabilità* di *de Finetti* ([DF], 641), per l'evento condizionato A/B si considerano tre valori di verità, "vero" se AB è vero, "falso" se A è falso e B è vero, "vuoto" se B è falso. Per approfondimenti si veda anche [MA3]. Molti altri autori si sono interessati della logica a tre valori, fra cui ad esempio Fadini in [FA1] e [FA2].

un forte guadagno in termini di minore dispendio energetico e maggiore velocità nella percezione e nel trasferimento delle conoscenze.
Il ragionamento fuzzy è quindi la metodologia ideale per valorizzare il ragionamento umano ed adattarsi ad esso, in quanto recupera tutti gli elementi del linguaggio usuale nella comunicazione sociale.
La singolare sinergia fra sfocatura e determinismo rende i sistemi basati su logica fuzzy adatti per applicazioni caratterizzate da:

– complessità del problema;
– difficoltà nell'individuazione di un modello matematico con dati e relazioni crisp;
– esigenza di una soluzione deterministica ma elastica;
– esistenza di ricercatori esperti aventi una comprensione appropriata ma soggettiva.

Questi aspetti sono tutti presenti nei Sistemi Sociali. Per approfondimenti si vedano [BO1], [BO2], [SC], [KO], [FM1], [FM2], [MAR]. La compresenza di questi fattori rende poco conveniente cercare rappresentazioni e soluzioni mediante modelli matematici classici, che porterebbero allo sviluppo di algoritmi e formule molto complessi senza tener conto dell'incertezza semantica (cfr. [FA1], [FM2], [RA2]) e rende impercorribile una soluzione per mezzo della logica classica binaria (che vuole una eccessiva categorizzazione e schematizzazione del problema).
La logica fuzzy permette anche la realizzazione di un nuovo paradigma di calcolo, definito da Lotfi Zadeh come *computing with words* (calcolare con le parole).
Black [BL], ritenendo che la vaghezza vulneri senz'altro il principio del terzo escluso della logica aristotelica, individuava tre tipologie di imprecisione riscontrabili nel linguaggio naturale:

– imprecisione derivante dalla generalità;
– imprecisione derivante dall'ambiguità;
– imprecisione derivante dalla vaghezza.

La logica fuzzy ha come dominio di applicazione la vaghezza, quindi gestisce un tipo di incertezza dovuta non all'incompletezza dell'informazione di cui si dispone ma all'impossibilità di attribuire ad un enunciato un giudizio netto e assoluto poiché, pur in presenza di un'informazione non incompleta, gli enunciati vaghi non sono né del tutto veri né del tutto falsi [BL], [FA1], [KO].
Si può affermare (vedi ad es. [KY], [BM]) che la logica fuzzy presenta tre caratteristiche fondamentali:

1. l'utilizzo di variabili linguistiche i cui valori non sono numeri ma parole in linguaggio naturale o artificiale, al posto o in aggiunta alle variabili numeriche;
2. l'individuazione di semplici relazioni tra variabili per mezzo di affermazioni condizionali fuzzy;
3. la caratterizzazione di relazioni complesse tra variabili tramite algoritmi fuzzy.

Un esempio di applicazione della fuzzyness nel pensiero umano è la capacità di *sintetizzare informazioni*. Ciò vuol dire estrarre da gruppi di grandi masse di dati solo quei sottogruppi che sono rilevanti per un determinato fine. Ma per definizione un riassunto è un'approssimazione di ciò che viene sintetizzato, e il cervello umano trae vantaggio dalla accondiscendenza a questa approssimazione, tramite la codificazione delle informazioni più importanti, raggruppandole in insiemi fuzzy che vengono etichettati.
La logica fuzzy è divenuta il nucleo di sistemi di supporto alla decisione ed ai sistemi di controllo [MM], sia a partire da informazioni qualitative, sia a partire da dati. Il valore aggiunto di un sistema fuzzy sta proprio nella sua flessibilità: con i fuzzy set si elimina la necessità di una determinazione precisa del passaggio da uno stato all'altro, in quanto il sistema è in grado di valutare e preferire quali sono le regole più appropriate da usare, imitando il modo di agire dell'operatore umano.
A tal proposito, di grande rilievo teorico, oltre che applicativo, è l'utilizzo della logica sfumata nei sistemi esperti: la teoria fuzzy consente risultati uguali o migliori rispetto alle tradizionali metodologie dell'Intelligenza Artificiale, permettendo una notevole riduzione dei costi globali [SA].
L'incertezza fuzzy risulta essere di natura diversa da quella probabilistica, essendo la prima di tipo semantico e la seconda di tipo previsionale basato sulla logica binaria. Un primo lavoro in cui si tiene conto di entrambi gli aspetti è dovuto a Zadeh [ZA2]. Altri studi in cui si considerano contemporaneamente i due tipi di incertezza sono in [MA1], [MA2], [MA3], [MTV].

2 La Logica Fuzzy come strumento essenziale della Ricerca Sociale

Le tradizionali strategie di ricerca sociale pongono l'attenzione su due livelli, quello *case-oriented* (orientato ai casi) e quello *variable-oriented* (orientato alle variabili) (cfr. [BO1], [BO2], [SC], [RA1], [RA2]).
Nel primo si studiano i singoli casi sottolineandone uguaglianze, differenze e interconnessioni nei loro vari aspetti; nel secondo si esaminano le correlazioni tra campioni di casi attraverso analisi statistiche quantitative.
Il vantaggio dello studio dei singoli casi risiede nella perfetta conoscenza di essi, ma presenta lo svantaggio di non restituire una conoscenza scientifica sociale più generale. Si tratta di un approccio descrittivo, che non valuta cause e motivazioni al di fuori del singolo caso studiato.
Il ricercatore variable-oriented invece studia un piccolo numero di variabili dipendenti attraverso un vasto numero di casi al fine di identificare un insieme di variabili causali che determinino le variazioni di quelle dipendenti: il prodotto finale sarà la costruzione di un modello generale basato sull'osservazione di molti casi (per esempio, usando le correlazioni fra le variabili).
La modellizzazione riesce spesso a spiegare in gran parte il perchè del verificarsi degli eventi, ma ha lo svantaggio di non comprendere il fenomeno nella sua interezza, dato che le variabili nella realtà dei fatti sono molto più numerose di quelle prese in esame.
Tuttavia i metodi della Statistica classica non tengono conto delle varie caratteristiche degli individui, poichè in presenza di molti casi, volendoli classificare, si verrà a perdere la loro individualità a causa del procedimento di astrazione che considera le unità statistiche semplicemente come vettori di valori assunti da poche variabili.
È come dire che tutte gli individui appartenenti alla classe delle donne sono uguali e tutti gli individui classificati come uomini sono perfettamente uguali tra loro.
Questa divisione di metodologia di ricerca all'interno delle Scienze Sociali riproduce la distanza creatasi fra studi umanistici e scientifici [RA2]: coloro che studiano la complessità e la specificità dei fenomeni sociali tendono ad essere scettici riguardo la possibilità di conoscenza scientifica sociale generale, mentre coloro che ottengono modelli di studio attraverso l'analisi di molti casi fanno fatica a costruire tale conoscenza solo con l'ausilio dei propri mezzi.
L'uso dei fuzzy set e delle variabili linguistiche propone una mediazione fra i due approcci, tramite un nuovo punto di vista volto non solo a costruire una popolazione di studio ed a dividerla in classi, come nella Statistica tradizionalmente intesa, ma anche a valutare le diversità sia fra classi, sia all'interno di ogni classe [RA1], [RA2], sostituendo al concetto di classe crisp quello di classe fuzzy.
In altre parole, con la logica fuzzy si recupera gran parte dell'individualità che si perde nella classificazione statistica crisp. I confini troppo nitidi tra due classi diverse nelle ricerche di tipo quantitativo vengono sostituiti dai gradi di appartenenza dei vari individui alle classi fuzzy individuate da attributi di variabili linguistiche.
Oltretutto, attraverso la logica fuzzy, contrariamente a quanto avvenuto finora nelle Scienze Sociali, è possibile studiare un numero di casi che non sarebbe contemplabile né dalla restrizione dell'approccio qualitativo, per il quale si studiano i singoli casi, né dalla modellizzazione di quello quantitativo, che ne esamina una grande quantità. In altre parole, la logica fuzzy è utile ad analizzare con più facilità tutti quei fenomeni sociali complessi che con un modello statistico classico sarebbe impossibile trattare, restituendo loro la loro dimensione reale e cogliendo nuove sfumature mai prese in esame [RA1], [RA2].
Zadeh propone l'esempio della classe degli animali [ZA1]. Secondo la classificazione convenzionale cani, cavalli, uccelli vi appartengono, mentre chiaramente non vi appartengono le rocce o le piante. Come classificare allora le stelle marine o le spugne?
Nel mondo ideale della matematica binaria le cose sono certe e precise; ma nel mondo reale la precisione e la certezza assoluta sono dati molto rari, senza contare l'insieme di problemi che l'incontro fra matematica e computer produce nella società moderna [SA].
Ragin [RA2] ha evidenziato l'importanza del quesito della ricerca, la definizione delle variabili e delle ipotesi, la selezione dei casi e le tecniche

centrali dell'analisi attraverso i fuzzy set. In particolare, Ragin sostiene che gli insiemi fuzzy permettono un dialogo ben più ricco ed articolato fra le idee e i dati nella Ricerca Sociale.
Gli insiemi fuzzy permettono ai ricercatori quantitativi di abbandonare i presupposti dell'omogeneizzazione dei casi e delle loro cause, estendendo le strategie orientate alla diversità (*diversity-oriented*) che forniscono un collegamento robusto fra la teoria e l'analisi di dati [RA2].
Questo approccio rivoluzionerà i metodi di ricerca non solo in sociologia, nella scienza politica e nell'antropologia, ma in tutto il campo dell'inchiesta riguardo ai modelli complessi di causa.
Nell'applicare la metodologia fuzzy a casi reali, Ragin ha posto l'attenzione su due eventi significativi: il primo è la mobilitazione contro il Fondo Monetario e la Banca Mondiale occorsa nel 2000, l'altro è la ricchezza dello Stato Sociale nei Paesi industrializzati avanzati.
Nel condurre la ricerca, le tradizionali variabili dell'analisi comparativa vengono trasformate da Ragin in insiemi fuzzy, per i quali sono stabilite funzioni di appartenenza discrete o continue sulla base del modello di partenza del fenomeno sociale.
Nel caso della protesta contro il Fondo Monetario, lo studioso definisce un insieme *fuzzy*: "paesi con importanti manifestazioni contro il FMI"; e costituisce sette distinti livelli di appartenenza: questo insieme rappresenta la variabile dipendente.
L'urbanizzazione, la pressione del Fondo Monetario, le ristrettezze economiche, la subordinazione dagli investimenti, il liberalismo politico e l'interventismo statale sono trasformate in altrettanti insiemi *fuzzy*, sempre con una assegnazione discreta a sette valori del grado di appartenenza. Questi ulteriori insiemi *fuzzy* fungono da variabili indipendenti.
Ragin si trova successivamente ad esaminare quali cause siano necessarie e quali condizioni siano sufficienti attraverso dei test (*necessity and sufficiency test*) verificando se esibiscono lo stesso esito.
Da questi test per ogni Paese si ottiene: un grado di appartenenza all'insieme "paesi con importanti manifestazioni contro il FMI", un punteggio di sufficienza e un punteggio di necessità.
Da questo tipo di prospetto è possibile accertare la correttezza del modello di partenza e la veridicità delle informazioni trovate rispetto alla situazione reale.
Una seconda applicazione della classificazione fuzzy in ambito sociale è in [DM], in cui si mostra come lo strumento più idoneo per la distribuzione nel territorio delle risorse per l'assistenza agli anziani e ad altre categorie bisognose si ottiene considerando una classificazione fuzzy del territorio.
Prendendo spunto da queste analisi condotte attraverso gli strumenti che mette a disposizione la logica fuzzy, appare evidente che si possa riproporre il modello di ricerca basato sulla classificazione fuzzy a qualsiasi evento o accadimento sociale.

3 Modellizzazione matematica delle variabili linguistiche

Per la modellizzazione dei fenomeni sociali risulta fondamentale il concetto di numero fuzzy. Si dice *numero fuzzy* una funzione φ con dominio l'insieme dei numeri reali e con codominio l'intervallo $[0, 1]$ soddisfacente alle seguenti proprietà:

1. l'insieme degli $x \in R$ tali che $\varphi(x) > 0$ è limitato;
2. per ogni $\alpha \in (0, 1]$ l'insieme degli $x \in R$ tali che $\varphi(x) \geq \alpha$ è un intervallo chiuso $\alpha_\varphi = [a_{\varphi,\alpha}, b_{\varphi,\alpha}]$;
3. esiste almeno un $x \in R$ tale che $\varphi(x) = 1$.

L'insieme degli $x \in R$ tali che $\varphi(x) > 0$ si dice *supporto* di φ e si indica con $S(\varphi)$. Il minimo intervallo chiuso contenente $S(\varphi)$ si indica con $\varphi_0 = [a_{\varphi,0}, b_{\varphi,0}]$. L'intervallo chiuso $\varphi_1 = [a_{\varphi,1}, b_{\varphi,1}]$ formato dagli $x \in R$ tali che $\varphi(x) = 1$ si dice *cuore* di φ e si indica con $C(\varphi)$.
Se φ e ψ sono due numeri fuzzy diciamo che $\varphi \leq \psi$ se

$$\forall \alpha \in (0, 1],\ a_{\varphi,\alpha} \leq a_{\psi,\alpha},\ b_{\varphi,\alpha} \leq b_{\psi,\alpha}. \quad (3.1)$$

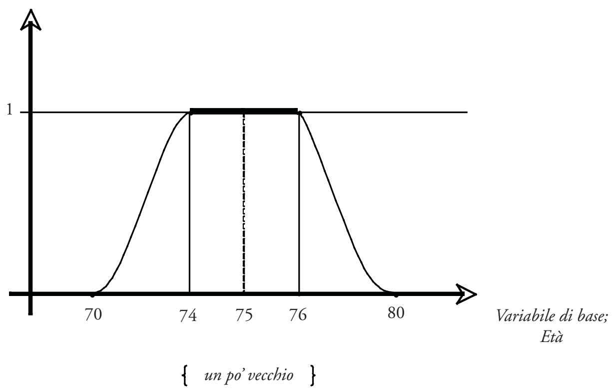
Diciamo inoltre che $\varphi < \psi$ se risulta $\varphi \leq \psi$ e $\varphi \neq \psi$.
Per un approfondimento del concetto di numero fuzzy e delle sue applicazioni si vedano: [KY], [MA2], [YA], [MTV].

Una variabile linguistica L, formata da un *nome*, un insieme totalmente ordinato A di *attributi* ed una *variabile numerica* X_L, detta *variabile di base*, viene descritta numericamente da un insieme totalmente ordinato di numeri fuzzy Φ aventi supporto contenuto nell'intervallo [a, b] dei valori che possono essere assunti da X_L [ZA3], [ZA4], [ZA5].

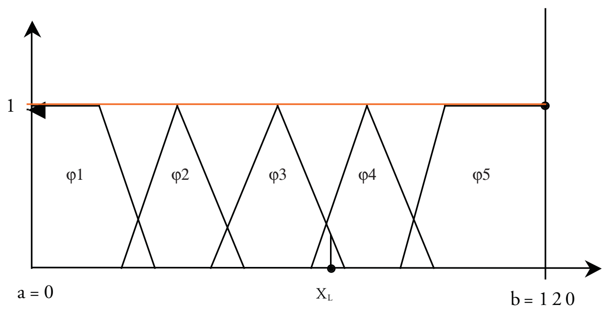
Precisamente, le condizioni affinché un insieme Φ di numeri fuzzy possano rappresentare adeguatamente la variabile linguistica L sono:

1. ogni elemento di Φ ha supporto contenuto in [a, b];
2. esiste una funzione biiettiva f: $A \rightarrow \Phi$ che ad ogni valore della variabile linguistica L associa un numero fuzzy appartenente a Φ tale che:
   $\forall a, b \in A,\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. (3.2)
3. per ogni $x \in [a, b]$ esiste almeno un elemento $\varphi \in \Phi$ tale che $\varphi(x) > 0$;
4. esistono $\varphi_a, \varphi_b \in \Phi$ tali che $\varphi_a(a) = 1$, $\varphi_b(b) = 1$;

Nel grafico che segue l'attributo "un po' vecchio" della variabile linguistica "età" è rappresentato da un numero fuzzy con cuore l'intervallo [74, 76] e supporto l'intervallo [70, 80].



Invece la rappresentazione della variabile linguistica "età" per mezzo di un insieme Φ di numeri fuzzy soddisfacenti le condizioni 1, 2, 3, 4 con [a, b] = [0, 120] è data nella figura seguente:



Bibliografia

[AR] ARISTOTELE, *Metafisica,* a cura di VIANO C.A., U.T.E.T., Torino, ed.it. 1974.

[BL] BLACK M., *Vagueness. An Exercise in Logical Analysis* in Philosophy of Science, Vol. 4, 1937, riedito da: KEEFE R., SMITH P., *Vagueness: A Reader*, MIT Press, Cambridge, 1997.

[BM] BOUCHON-MEUNIER B., *La logique flou*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

[BO1] BOUDON R., *L'analyse mathématique des fait socials*, Paris, Plon, 1967.

[BO2] BOUDON R., *Les methods in Sociologie,* Paris, P.U.F, 1969.

[BRST] BEHNKE H., REMMERT R., STEINER H.-G., TIETZ H., *Matematica 1, Enciclopedia Feltrinelli Fischer*, 227, Feltrinelli, Milano, 1967.

[DF] DE FINETTI B., *Teoria delle Probabilità*, vol. 1 and 2, Einaudi, Torino, 1970. Published in English as "Theory of Probability", J. Wiley, New York, 1974.

[DM] DI RUSSO I., MATURO A., *Fuzzy Points for a Territorial Organization of Social Services*, International Conference on Fuzzy Sets, Multi-Valued Operations and Applications to Social Sciences, Chieti, 22-24 Novembre 2007.

[FA1] FADINI A., *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati,* Liguori, Napoli, 1979.

[FA2] FADINI A., *Il calcolo delle classi in una logica a tre valori di verità*, Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. XC, 1962.

[FM1] FERRI B, MATURO A, *An application of the fuzzy set theory to evaluation of urban project,* in New Trends in Fuzzy Systems, Word Scientific, 82-91, 1998.

[FM2] FERRI B., MATURO A., *Un modello matematico decisionale fuzzy per la valutazione di fattibilità nel recupero del patrimonio storico-architettonico*, in Strategie, processi e modelli decisionali per la gestione dell'ambiente, Edizioni Goliardiche, Trieste, 2004.

[KO] KOSKO B., *Fuzzy thinking: the new science of fuzzy logic*, Hyperion Books, New York, 1993, tra. it. *Il fuzzy-pensiero*, Baldini&Castoldi, Milano, 1997.

[KY] KLIR G, YUAN B., *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1995

[MM] MAMDANI E.H., ASSILIAN S., *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller* in International Journal of Man-machine Studies, Vol. 7, 1975.
[MAR] MARK J. G., *A primer on Decision Making. How decision Happen*, New York, The Free Press, 1994.
[MA1] MATURO A., *Fuzzy events and their probability assessments*, Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography, Vol. 3, Nos 1-3, 83-94, 2000.
[MA2] MATURO A., *Grandezze aleatorie fuzzy e loro previsioni per le decisioni in condizione di informazione parziale*, in Current Topics in Computer Sciences, Cortellini and Luchian Ed., Panfilus, Iasi, pp. 15-24, 2004.
[MA3] MATURO A., *Fuzzy Conditional probabilities by the Subjective Point of View*, in Advances in Mathematics of Uncertainty, Tofan Ed., Performantica, Iasi, pp. 99-108, 2006.
[MTV] MATURO A., TOFAN I., VENTRE, A., *Fuzzy Games and Coherent Fuzzy Previsions*, in Fuzzy Systems & A. I., 10, No 3, pp. 109-116, 2004.
[RA1] RAGIN C., *The Comparative Method: Moving Beyond Qualitative and Quantitative Strategies*, University of California Press, Berkeley/Los Angeles/London, 1987.
[RA2] RAGIN C., *Fuzzy-Set Social Science*, Chicago University Press, Chicago, 2000.
[RE] REICHENBACH H., *I fondamenti filosofici nella meccanica quantistica*, 1942, tr.it. Einaudi, Torino, 1954.
[RU] RUSSELL B., *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano,1962.
[SC] SCIARRA E., *Raymon Boudon e l'epistemologia dell'azione sociale*, Edizioni Scientifiche Sigraf, Chieti, 2004.
[SA] SANGALLI A., *L'importanza di essere fuzzy. Matematica e computer*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
[YA] YAGER R., *A characterization of the extension principle*, Fuzzy Sets Systems, 18, 3, 205-217, 1986
[ZA1] ZADEH L. A., *Fuzzy sets*, Information and Control, Vol. 8, 338-353, 1965.
[ZA2] ZADEH L., *Probability measures of fuzzy events*, J. Math. Anal. Appl. 23, 421-427, 1968.
[ZA3] ZADEH L., *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I*, Information Sciences, 8, 199-249, 1975
[ZA4] ZADEH L., *The concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate reasoning II*, Information Sciences 8, 301-357, 1975.
[ZA5] ZADEH L., *The concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate reasoning III*, Information Sciences 9, 43-80, 1975.

Maria Montessori e Jean Piaget

I loro contributi in didattica della matematica nella scuola per l'infanzia

di Elena Rizzo

Senza lo sviluppo matematico non è possibile comprendere il progresso della nostra epoca, né parteciparvi.
M. MONTESSORI

SUNTO In questo articolo vengono presentati alcuni aspetti degli studi di Maria Montessori e Jean Piaget nell'ambito della didattica della matematica nella scuola per l'infanzia.

ABSTRACT In this article we present some aspects of studies of Maria Montessori and Jean Piaget on mathematical teaching in the infancy school.

PAROLE CHIAVE Matematica, didattica, infanzia.

1 Introduzione

Molti matematici e psicologi hanno cercato in passato e cercano tuttora di comprendere "come" i bambini apprendano la matematica e quali siano i meccanismi che determinano l'apprendimento di questa disciplina. Tra loro, la nostra Maria Montessori e lo svizzero Jean Piaget hanno dato notevoli contributi; anche se la Montessori ha rivolto la sua attenzione soprattutto allo sviluppo complessivo del bambino, nel quale – tuttavia – la matematica ha un ruolo centrale, che non sempre viene riconosciuto.
Molti studiosi sostengono che i bambini sin dalla più tenera età – molto prima di saper contare – posseggono la nozione di numero, anche se in forma vaga e imprecisa. In proposito sono da segnalare gli studi di Stanislas Dehaene, che sostiene che i piccoli già nel loro primo anno di vita possegono sensazioni di tipo aritmetico (si veda [D], pag. 45). Ma anche altri studiosi affermano che bambini di pochi mesi sono in grado di distinguere quantità diverse (si veda [B]).

Ormai è certo che intorno ai tre anni essi sono in grado di valutare approssimativamente le quantità, sia continue che discrete, inoltre, servendosi delle loro prime intuizioni numeriche; addirittura, addirittura sono in grado di stabilire semplici confronti quantitativi. Perciò già a partire dalla scuola dell'infanzia bisognerebbe fornire al bambino strumenti adeguati e occasioni per esperienze matematiche che dovrebbero contribuire a rendere più precisi i suoi concetti numerici.
In proposito è degno d'attenzione il ruolo assegnato alla matematica nelle Indicazioni ministeriali del 2007 per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo dell'istruzione primaria: «…*la matematica ha uno specifico ruolo nello sviluppo della capacità generale di operare e comunicare significati con linguaggi formalizzati e di utilizzare tali linguaggi per rappresentare e costruire modelli di relazioni fra oggetti ed eventi. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; inoltre contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri* […]. *Di estrema importanza è lo sviluppo di un atteggiamento corretto verso la matematica, inteso anche come una adeguata visione della disciplina, non ridotta ad un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affron-*

tare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire affascinanti relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo [...] *si favorirà così la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà sia come affascinante attività del pensiero umano*».

2 Jean Piaget

Jean Piaget, biologo, psicologo ed epistemologo svizzero, nacque a Neuchâtel in Svizzera nel 1896. È noto soprattutto per le sue ricerche sullo sviluppo dell'intelligenza nei bambini, che esercitarono un profondo influsso sia sulla psicologia dell'età evolutiva, sia sulle scienze dell'educazione[1].
La sua lunga carriera scientifica prese avvio dagli studi universitari in scienze naturali, terminati i quali – a ventuno anni – si dedicò allo studio della psicologia, in particolare dello sviluppo delle capacità cognitive della psiche infantile, sotto la guida di Edouard Claparède.
In seguito insegnò all'*Istitut Jean-Jacques Rousseau* di Ginevra, di cui divenne direttore nel 1932, e all'Università di Losanna. Direttore del Laboratorio di psicologia dell'Università di Ginevra dal 1940, nel 1955 fondò il Centro internazionale e interdisciplinare di epistemologia genetica di Ginevra. Jean Piaget morì a Ginevra nel 1980.

In controtendenza rispetto a molti altri studiosi, per Jean Piaget il bambino nei suoi primi anni di vita non possiede cognizioni aritmetiche; e anche il fatto molto frequente che i bimbi durante il periodo della scuola primaria imparino a recitare la cantilena dei numeri non vuol dire che essi posseggano il concetto di numero. Tra l'altro, il Piaget – a proposito di questo concetto – in [P_1] (pag. 92) esordisce così: "*non bisogna credere che un bambino piccolo possegga il numero per il solo fatto di avere appreso a contare verbalmente*".
Secondo il noto studioso svizzero, all'incirca fino ai due anni il bimbo si troverebbe in una fase – che Piaget chiama ***senso-motoria*** – in cui il piccolo esplora il mondo che lo circonda mediante i sensi e impara a controllarlo con i gesti. È una fase, quella precedente, in cui si realizza il primo dei quattro stadi piagettiani, che caratterizzano il suo sviluppo psichico, che terminerà con l'età adulta. Ma su questo torneremo più in là.
Per il Piaget il concetto di numero, inteso sia come un modo per misurare quantità di oggetti sia per individuare la posizione di un oggetto in una sequenza ordinata, viene acquisito solo verso i sei o sette anni; perciò prima dell'età della ragione i bambini mostrerebbero – ma, come si diceva, non tutti gli studiosi sono d'accordo con lui – una completa ignoranza delle regole elementari che sono alla base dell'aritmetica; quindi prima dei sei/sette anni, il bambino non sarebbe pronto ad apprendere l'aritmetica.
Anzi, secondo il Piaget, l'insegnare la matematica anzitempo potrebbe rivelarsi dannoso, poiché essa verrebbe imparata a memoria, senza comprenderne il significato; il che provocherebbe nel bimbo ansia e paura nei riguardi della disciplina. Perciò l'insegnante dovrà evitare di presentare il numero come concetto astratto e sterile; e dovrà opportunamente servirsi di strategie didattiche capaci di favorire i processi cognitivi che sono alla base della conoscenza aritmetica. Anche l'insegnamento precoce di simboli numerici, che potrebbe in apparenza ottenere dei risultati, rischia di trasformarsi in un inutile esercizio meccanico, dietro al quale non c'è l'associazione tra il simbolo e la percezione di una precisa quantità numerica. Questa difficoltà di simbolizzare è possibile che pregiudichi, anche in età più avanzata, la consapevolezza del numero.

Per Piaget lo sviluppo mentale dell'individuo avviene secondo quattro stadi fondamentali, ognuno dei quali è caratterizzato da una modalità di pensiero qualitativamente diversa rispetto agli altri. E negli stadi successivi al primo emerge un nuovo schema di pensiero, che si costruisce sulla base delle esperienze del bambino durante lo stadio precedente.

[1] È significativo il fatto che J.Piaget abbia seguito, nella seconda metà del secolo passato, un corso di Maria Montessori a Roma.

Il completamento di uno stadio è una condizione imprescindibile perché possa evolversi lo stadio successivo; ne segue che l'ordine dei quattro stadi è invariabile. Gli stadi possono così essere distinti:

- **Stadio senso – motorio** (dalla nascita ai due anni circa): il bambino, oltre a organizzare i propri spostamenti nello spazio che lo circonda, acquisisce la funzione simbolica che è alla base del gioco, del disegno e soprattutto del linguaggio;
- **Stadio pre–operatorio** (dai due ai sette anni): nel bambino si sviluppano gradatamente le strutture mentali di classificazione e ordinamento, in modo da operare coerentemente col mondo circostante;
- **Stadio operatorio concreto** (dai sette ai dodici anni circa): tutte le azioni che il bambino è capace di effettuare sulla realtà fisica diventano sempre più generalizzabili e a poco a poco vengono interiorizzate;
- **Stadio operatorio formale** (dai dodici anni in poi): i progressi fatti precedentemente si organizzano in una struttura mentale caratteristica che permette all'adolescente di operare non solo esternamente a contatto diretto col mondo che lo circonda, ma anche interiormente, riuscendo gradualmente a ragionare anche in termini astratti.

Per Jean Piaget (cfr. [P-S], pag. 4) la nozione di conservazione della quantità degli oggetti di un insieme è condizione necessaria per qualsiasi attività di tipo aritmetico. In altri termini, il numero che esprime la quantità di quegli oggetti resta invariato qualunque sia la dislocazione, l'ordine degli oggetti di cui è composto l'insieme. Invece – secondo gli esperimenti del Piaget – bambini che si trovino nel secondo stadio sono portati a pensare che, avendo disposto degli oggetti in fila, la quantità di questi cambia se in un secondo momento essi vengono distanziati o accorpati.
Inoltre, in questo stadio difficilmente si ha coscienza del fatto che se si hanno cinque oggetti il numero cinque non esprime un attributo dell'ultimo oggetto: gli oggetti sono cinque indipendentemente dal fatto che essi vengano spostati o venga cambiato l'ordine in cui essi vengono contati.
Come è stato detto in precedenza, Piaget individua intorno ai sei-sette anni quello che egli denomina **terzo stadio**, durante il quale si rileva l'acquisizione del concetto di conservazione. Prima di questo stadio gli esperimenti che egli ha condotto hanno rivelato errori di vario tipo da parte dei bambini, sia nell'ambito della conservazione delle quantità continue[2] sia in quello delle quantità discrete. Nel terzo capitolo di [P-S] si può trovare la descrizione di molti esperimenti che lo studioso ha effettuato su bambini situati nel sercondo stadio.

L'influsso del pensiero piagettiano è stato ed è tuttora notevole quasi ovunque, ma soprattutto in Italia. Ed è anche per questo che nel nostro paese l'inizio della scuola primaria è inchiodato all'età di 6 anni, periodo in cui si affaccia lo stadio operatorio concreto. Però – proprio per il fatto che questo stadio va preparandosi durante lo stadio precedente – forse l'anticipazione della scuola elementare a 5 anni potrebbe servire a favorire quelle attività che facilitino il transito al terzo stadio.
Molte sono state le critiche rivolte alla teoria del Piaget e al modo in cui egli ha condotto i suoi esperimenti sulla conservazione delle quantità. Infatti, gli esperimenti consistono nel formulare due volte la stessa domanda, prima e dopo l'intervento che altera la dislocazione degli oggetti osservati; onde i bambini potrebbero pensare che la quantità degli oggetti sia cambiata a causa degli interventi dello sperimentatore.
Ma allora forse, come dice Domenico Lenzi in [L], bisognerebbe dire subito al bambino che per quantità degli oggetti di un raggruppamento si intende in maniera "esclusiva" il numero su cui si ferma il conteggio (con tutto ciò che è legato all'attività del contare). E l'operare su una quantità finita di oggetti (ad esempio, tre o quattro), controllabili visivamente, dovrebbe favorire l'accettazione di questa "convenzione".

[2] Si tratta di quantità per le quali non si riesce a individuare delle entità componenti, al contrario di quel che avviene per le cosiddette quantità discrete (costituite da palline, conchiglie e altre cose per le quali abbia senso effettuare un conteggio).

Nel concludere questo paragrafo avvertiamo la responsabilità di far presente che, pur non essendo d'accordo con il pensiero del Piaget, reputiamo doveroso prestare la giusta attenzione ai risultati delle sue ricerche, per i molteplici e interessanti spunti che li caratterizzano.

3 Maria Montessori

La Montessori, nata a Chiaravalle (Ancona) nel 1870, è una delle figure più rappresentative del movimento pedagogico contemporaneo. Ella fu la prima donna dell'Italia unita a laurearsi in Medicina all'Università di Roma (1896) e ad esercitare la professione di medico. Specializzatasi poi in neuropsichiatria infantile, si impegnò nella ricerca di una "via pedagogica" e non solo clinica per il recupero dei bambini *subnormali*, fondando le "Case dei bambini", tuttora attive in tutto il mondo.
Maria Montessori – una persona straordinaria, che ha sfidato l'ortodossia del suo tempo proponendo un metodo educativo radicalmente diverso da quelli tradizionali, rifacendosi alla *pedagogia scientifica* – mise a punto un metodo didattico incentrato sulla libertà di iniziativa del bambino che apprende in maniera autonoma, sotto l'occhio vigile dell'insegnante, che provvede anche a fornire gli opportuni stimolati didattici. Per la Montessori la libertà individuale dell'alunno è fondamentale: egli è incoraggiato a esprimere la sua creatività e a scegliere le attività che più lo interessano. Tuttavia, da questa libertà individuale dovrà a poco a poco scaturire una forma di autodisciplina.
Maria Montessori morì nel 1952 a Noordwijk, in Olanda, dopo essere stata in Spagna, in Inghilterra ed in India.

Secondo Maria Montessori non ci sono esseri umani che non abbiano possibilità di apprendere: il grado di crescita dei bambini è quasi sempre in relazione all'ambiente nel quale essi vivono e alla qualità degli insegnamenti che essi ricevono.
È per questo che 1907 ella fonda nel quartiere San Lorenzo a Roma la prima "casa dei bambini": una struttura costruita in maniera che i piccoli si sentano completamente a loro agio, che interagiscano con l'ambiente spontaneamente ed apprendano a poco a poco, senza vincoli oppressivi, le regole della vita in comunità.
Tutto il pensiero della Montessori si fonda sull' idea del bambino come individuo completo, in grado di mostrare una grande creatività ed una prima traccia di regole morali.
Per Maria Montessori il bambino è *il costruttore dell'uomo*; e ciò è alla base del sistema educativo dalla studiosa marchigiana. Ella afferma che è necessario aiutare l'individuo *in embrione* a diventare uomo; perciò il suo metodo si caratterizza soprattutto come *un aiuto affinché la personalità umana possa conquistare la sua indipendenza*.
Per la Montessori lo sviluppo della mente avviene attraverso fasi successive, che essa chiama "periodi sensitivi". Le prime due sono in parte sovrapponibili – anche dal punto delle loro caratteristiche – a quelle del Piaget, di cui ci siamo occupati precedentemente.
Nella prima fase dello sviluppo – da 0 a 3 anni – per la Montessori la mente del bambino si configura come *mente assorbente*, come intelligenza che opera inconsciamente in risposta agli stimoli dell'ambiente. È in questa fase che si costruiscono le strutture fondamentali della personalità.
La seconda fase, che va dai tre ai sei anni circa, è un periodo di perfezionamento: continua l'assorbimento dell'ambiente, ma esso è accompagnato da forme di esperienza volontaria e diretta.
Altro aspetto interessante del pensiero di Maria Montessori è la sua convinzione che in ogni bambino ci sia un *maestro interiore* che lo indirizza "*infaticabilmente, in gioia e felicità, secondo un preciso programma, allo scopo di costruire l'uomo adulto*" (si veda [M], pag. 47); egli "*porta con sé il suo disegno psichico e le direttive di sviluppo connesse*" (si veda [M_2], pag. 39).

Per la Montessori anche l'insegnamento della matematica – che non può essere procrastinato fino all'inizio della scuola elementare – deve rispettare le fasi a cui si è accennato precedentemente. Infatti uno stesso argomento, presentato in momenti diversi e con modalità diverse, può suscitare reazioni molto diverse. Inoltre, a suo giudizio, bisogna predisporre per il bambino opportuni materiali strutturati[3], che lo accompagneranno durante il suo sviluppo e gli forniranno le occasioni per fare esperienze di tipo matematico, dato che (*La mente del bambino*, pag. 185): «*Gli oggetti matematici non sono sparsi nell'ambiente come gli alberi, i fiori e gli animali. Sono mancate così le occasioni per sviluppare spontaneamente la mente matematica nell'età infantile, il che venne a determinare un ostacolo al successivo sviluppo mentale. Noi perciò chiamiamo i materiali sensoriali astrazioni materializzate o materiale matematico basico.*»

Prima nella scuola dell'infanzia e poi nella scuola elementare, i bambini lavorano con il materiale

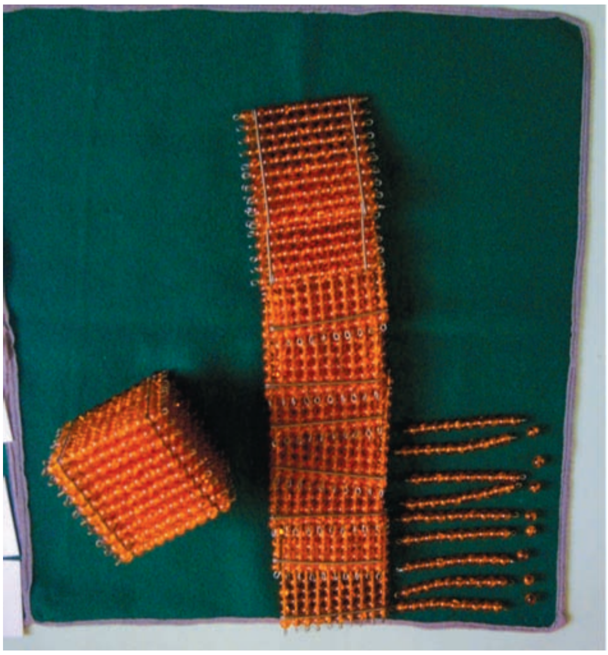
organizzato per l'attività matematica, in modo da consentire l'utilizzo del movimento e della manipolazione di oggetti concreti al fine di favorire processi di interiorizzazione, organizzazione e astrazione. Durante il lavoro, da svolgersi individualmente, l'insegnante si limita a mostrare come il materiale deve essere utilizzato. Saranno poi i bambini a operare, ognuno impegnando i tempi che gli sono necessari. Il materiale strutturato approntato da Maria Montessori è stato predisposto in modo tale che sia possibile accorgersi di eventuali errori, autocorreggendosi senza che l'insegnante sia costretto ad intervenire; così che il bambino a poco a poco acquisti fiducia in se stesso, procedendo autonomamente e indipendentemente dai tempi dei suoi compagni, senza timori nei confronti della matematica.

La Montessori ha dedicato all'educazione matematica due opere: *Psicoaritmetica* e *Psicogeometria*, entrambe pubblicate nel 1934. La prima è quella che ha avuto più fortuna; a essa si ispira tuttora – anche se solo in parte – la scuola attuale.

Il libro è inizialmente dedicato all'Aritmetica nel periodo che precede l'inizio della scuola elementare. In esso traspare la consapevolezza che l'insegnamento dell'"aritmetica" è importante sia come "mezzo per lo sviluppo della mente", sia per una "cultura necessaria e di base". È importante rilevare come, per la Montessori, alla "formazione della mente matematica", non contribuiscono solo l'aritmetica, la geometria o l'algebra, ma anche la lingua, le scienze naturali, la biologia, la geografia, ecc., le quali contribuiscono alla formazione delle strutture logiche.

[3] Si tratta di materiali di tipo non occasionale, opportunamente organizzati per conseguire finalità specifiche.

Concludiamo sottolineando il fatto che, come dice D. Lenzi [L]: «pur nel rispetto dell'opera dalla Montessori, forse sarebbe il caso di procedere a un revisione di alcuni aspetti metodologici che risentono del tempo in cui la studiosa anconetana ha operato. Infatti nuove metodologie, nuove tecniche didattiche e nuovi argomenti utili nella scuola dell'infanzia sono emersi. Sarebbe il caso che ne tenessero conto anche coloro che si ispirano ai fondamentali insegnamenti di Maria Montessori».



Nella precedente foto si notano quattro colonne di oggetti riferite alla rappresentazione decimale dei numeri. Le colonne sono costituite da perline o da aggregati di perline. Precisamente, partendo da destra: 1) nella prima colonna ci sono nove perline, che esprimono il massimo numero di unità che figurano nella rappresentazione decimale; 2) nella seconda colonna ci sono nove aggregati costituiti da dieci perline, che esprimono il massimo numero di decine ..., e così via. In tal modo risulta rappresentato il numero 1999.

Riferimenti bibliografici

[B] B. BUTTERWORTH, *Intelligenza matematica*; Rizzoli, Milano (1999).

[D] S. DEHAENE, *Il pallino della matematica*; Mondadori, Milano (2000).

[L] D. LENZI, *Povera e nuda vai matematica*; appunti per un corso PON per la scuola primaria.

[M] M. MONTESSORI, *La mente del bambino*; Garzanti, Milano, (1952).

[M_1] M. MONTESSORI, *Formazione dell'uomo (Pregiudizi e nebule. Analfabetismo mondiale)*; Garzanti, Milano, (1955).

[M_2] M. MONTESSORI, *Il segreto dell'infanzia*; Garzanti, Milano, (1986).

[M_3] M. MONTESSORI, *La scoperta del bambino*; Garzanti, Milano (1991).

[M_4] M. MONTESSORI, *Psicoaritmetica*; Garzanti, Milano (1971).

[M_5] M. MONTESSORI, *Dall'infanzia all'adolescenza*; Garzanti, Milano (1952)

[P] J. PIAGET *Lo sviluppo mentale del bambino*; Einaudi, Torino (2000).

[P_1] J. PIAGET- B.Inhelder *La psicologia del bambino*, Einaudi, Torino (1966)

[P-S] J. PIAGET, A. SZEMINSKA *La genesi del numero nel bambino*; La Nuova Italia, Firenze (1968).

[P-B-C] J.PIAGET, B. BOSCHER, A. CHATELET, *Avviamento al calcolo*, La Nuova Italia, Firenze (1970)

Elementi di geometria descrittiva in natura e in architettura

di Rosa Marincola[1]

SUNTO L'obiettivo di questo lavoro è di offrire degli spunti ai docenti, per percorsi didattici sullo studio di curve e superfici rigate, nella scuola secondaria superiore. I modelli di riferimento sono tratti dalla natura e dall'architettura.

ABSTRACT The aim of this work is to give some ideas to the teachers, in order to offer didactic paths about the study of curves and ruled surfaces, in the high school. The reference models are taken from the nature and architecture.

PAROLE CHIAVE catenaria, superfici rigate, paraboloide iperbolico.

1. Introduzione

Sin dall'antichità lo studio delle coniche ha condotto a importanti scoperte sia in matematica pura che in quella applicata. Varie situazioni, in ambito economico, tecnico e scientifico, possono essere affrontate e descritte utilizzando le coniche come modello. Per questi motivi, oltre che per il valore formativo che può avere un qualunque argomento di matematica, in particolare se ha una lunga tradizione, esse occupano un posto di primo piano nell'insegnamento della matematica sia nell'ambito della scuola secondaria superiore che in quello universitario.
Altrettanto non avviene per quanto riguarda lo studio di curve e superfici rigate che, a mio avviso, meriterebbero uno spazio nei curricoli di tutti gli studenti, a partire dalla scuola secondaria di secondo grado. Esse, infatti, presentate come particolari applicazioni e come naturale estensione del concetto di conica, non comportano particolari difficoltà d'apprendimento e forniscono modelli che consentono di descrivere forme presenti in natura e in capolavori architettonici[2]. Un'intelligente introduzione di questi argomenti potrebbe consentire di stimolare la curiosità degli studenti, motivarli a ulteriori approfondimenti e, più in generale, a significative attività matematiche.
Nei paragrafi 2 e 3 di questo articolo propongo alcune idee per un possibile percorso didattico che parta dall'osservazione di forme naturali o architettoniche. In particolare, nel paragrafo 2 si individuano alcuni modelli geometrici presenti nel Parco Nazionale del Pollino, in provincia di Cosenza, nel paragrafo 3 si invita a osservare gli stessi modelli nelle opere del grande artista catalano Antoni Gaudì (1852-1926) detto "L'architetto di Dio". Seguono, infine, due brevi paragrafi sulla catenaria e sul paraboloide iperbolico, per un approccio basato sulla costruzione e la manipolazione di modelli geometrici, con l'ausilio di software per la matematica.

2. Il Monte Sellaro: una superficie rigata da schiere di escursionisti e pellegrini

Provenendo da Sud lungo l'autostrada Salerno-Reggio Calabria, il Massiccio del Pollino[3] [2] appare disposto trasversalmente rispetto alla catena appenninica. Addentrandosi in questo luogo di straordinaria bellezza, la realtà diventa fiabesca. In uno scenario multiforme e selvaggio si trovano

[1] I.I.S.S. "A. Guarasci" sez. I.T.C. - Rogliano (Cs), e-mail rosamarincola@virgilio.it
[2] www.nexusjournal.com
[3] www.parcopollino.it

esemplari di pino loricato, la cui corteccia evidenzia una crescita secondo curve elicoidali, mentre ginepri emisferici ricoprono il terreno.
Il carsismo superficiale, dovuto all'azione erosiva delle acque ricche di CO_2, su rocce di natura calcareo-dolomitica, ha determinato un mosaico di doline a scodella (caratteristica quella detta "del compasso") e inghiottitoi a imbuto. Lo stesso fenomeno, nel sottosuolo ha formato grotte, pozzi, voragini e caverne. Una grande varietà di forme che merita di essere descritta anche dal punto di vista geometrico: sembra che la natura modelli piante, animali, paesaggi secondo forme funzionali all'ambiente. Questi aspetti possono essere analizzati in classe: sono noti vari problemi di massimo e minimo che possono essere costruiti per descrivere le "scelte" della natura [1].

M. Sellaro (foto dell'autore)

Ultimo contrafforte orientale dei monti del Pollino è il Monte Sellaro (1439 m.). Staccato dagli altri rilievi della catena (risalenti all'era mesozoica e terziaria) per effetto della tettonica distensiva a fosse e rilievi, la sua cima appare spaccata e modellata nel tempo come una sella: un paraboloide iperbolico! Esso degrada sulla piana di Sibari che si estende fino al mar Ionio. Dalla cima, è possibile vedere il Parco del Pollino, la marina di Sibari e in condizioni atmosferiche particolari, il Golfo di Taranto.
Questo monte ha sempre avuto un particolare fascino: qui storia, miti e leggende si intrecciano. Alcuni studiosi identificano il sito archeologico di Timpone la Motta con l'antica città di Lagaria. Questa città, secondo la leggenda, fu fondata da Epeo che avrebbe costruito il mitico cavallo di Troia col legname proveniente dalle pendici del Sellaro. Sul suo versante meridionale a 1015m., nel Parco della Cessuta (comune di Cerchiara di Calabria), nel XV secolo venne edificato il Santuario della Madonna Delle Armi (τῶν 'Αρμῶν = delle rocce). La leggenda vuole che alcuni cacciatori, nell'inseguire un cervo in una grotta, ebbero la visione miracolosa della Madonna. Sul luogo venne costruito il suggestivo Santuario, meta di pellegrinaggi.
Foto di queste bellezze naturali possono essere utilizzate per insegnare ai giovani a osservare e scoprire nella realtà forme geometriche. L'insegnante, in questo caso, svolge un ruolo non solo motivante, di chi crea "l'occasione", ma anche il più delicato e significativo ruolo dell'esperto che presta ai principianti le lenti della teoria, in questo caso della geometria descrittiva. Diceva il grande filosofo Arthur Schopenhauer: *"I pensieri messi per iscritto non sono nulla di più che la traccia di un viandante nella sabbia: si vede bene che strada ha preso, ma per sapere che cosa ha visto durante il cammino bisogna far uso dei suoi occhi"*.

3. Gaudì e le forme della geometria

"Io ho immaginazione, non fantasia", questo diceva Gaudì di se stesso [5]. L'immaginazione permette di vedere la realtà delle cose, la fantasia le rielabora. Egli fu un sottile osservatore della natura. In natura tutto è funzionale. Gli architetti hanno sempre usato la geometria euclidea, eseguendo costruzioni con riga e compasso. La natura in molti casi segue un'altra geometria, Gaudì fu un appassionato studioso di geometria descrittiva durante tutta la sua vita. Era affascinato dalle superfici rigate, soleva dire: "El paraboloide es el padre de toda la Geometria". La sua architettura si basa concretamente sul paraboloide, sull'iperboloide a una falda, sul paraboloide iperbolico e sull'elicoide. Riproduceva forme della zoologia, della geologia e della botanica che arricchiva con elementi decorativi. Un tronco d'albero, spesso ha la forma di un iperboloide a una falda; e così il femore, che, per Gaudì, è una magnifica colonna fatta da Dio per camminare, che funziona meglio di una colonna cilindrica. Proprio questa è la forma con cui il maestro ha costruito al-

cune colonne nella Sagrada Familia, una sorta di foresta pietrificata. Esempi magistrali di volte e superfici a forma di paraboloide iperbolico si trovano nella cripta della chiesa nel Parco Güell e nelle Scuole Temporanee della Sagrada Familia [2]. Come architetto, Gaudì è stato un grande innovatore, ma, nei suoi progetti, così originali, ha sempre usato la geometria più classica: quella delle curve e superfici di facile descrizione analitica. Non usò, però, l'arco classico nella costruzione di modelli di volte, bensì archi di catenaria. Questa curva, irrigidita e rovesciata, è autoportante: in scienza delle costruzioni si insegna che la catenaria è la forma migliore che può assumere un arco per sostenere il proprio peso perché è soggetto solo a sforzi di compressione. Invece, nelle cattedrali gotiche (XII-XIII sec.), di cui Gaudì fu un appassionato studioso, fu necessario costruire archi rampanti e contrafforti laterali, perchè l'arco a sesto acuto causava spinte laterali e quindi richiedeva un ispessimento nel punto d'incontro tra la parete verticale e la caduta dell'arco. Occorre precisare che i modelli a catenaria non furono una soluzione del tutto innovativa, perché già Brunelleschi (1377-1446), aveva costruito i cosiddetti modelli "a corda blanda" della cupola di S. Maria in Fiore.
Gaudì dedicò gli ultimi quindici anni della sua vita per cercare di precisare tutte le regole geometriche che avrebbero permesso ai posteri di proseguire il cantiere della Sagrada Familia, opera incompiuta.

4. La catenaria

Se si regge una catena o una corda, fissandola per gli estremi, essa assume, per effetto della forza di gravità, la forma della catenaria.
Galileo, pur essendo riuscito a dimostrare che la traiettoria di un proiettile è una parabola, studiando la curva di sospensione di una catena, erroneamente, identificò la catenaria con la parabola. Nel 1669, il matematico tedesco, Jungius, dimostrò che quella curva non era una parabola.
La catenaria ha equazione y = cosh(x), ossia è il coseno iperbolico, ma da che cosa deriva l'aggettivo iperbolico?
Generalmente, nei libri di testo per le scuole superiori [4], le funzioni iperboliche sono trattate sommariamente. Esse sono così definite:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Il loro grafico si può ottenere per composizione elementare di grafici. Per il coseno iperbolico, si ha la costruzione rappresentata nella seguente figura 1.

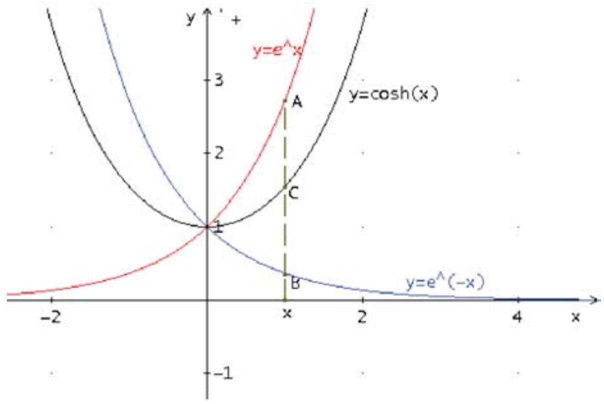


Figura 1

Si osserva che il coseno iperbolico è crescente per x>0, decrescente per x<0, ha un minimo assoluto di valore 1 per x=0.
Tuttavia, dalle (1) è immediata la verifica della relazione:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (2)$$

per cui, le funzioni iperboliche esprimono, parametricamente, le coordinate dei punti della iperbole equilatera di equazione $X^2 - Y^2 = 1$, in modo analogo a come le funzioni circolari parametrizzano la circonferenza [4].
Sia P un punto appartenente all'iperbole (figura 2), sia P' il suo simmetrico rispetto all'asse X; indicando con α l'area del settore iperbolico P'OP si possono definire le coordinate di P(X;Y) come

[4] http://it.wikipedia.org/wiki

funzioni del settore iperbolico di area $^1/_2\ \alpha$, definiamo quindi seno iperbolico l'ordinata del punto P e coseno iperbolico la sua ascissa.

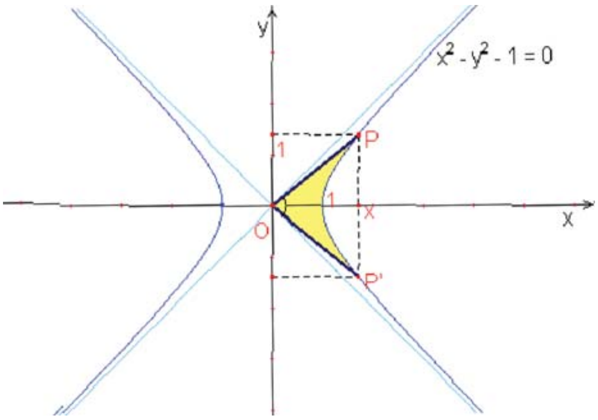


Figura 2

Attribuendo un segno positivo alle aree corrispondenti a un punto P del primo quadrante e negativo per P appartenente al secondo quadrante, si avrà che il dominio delle tre funzioni iperboliche è l'insieme dei numeri reali. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \cosh(-\beta) &= \cosh\beta \\ \sinh(-\beta) &= -\sinh\beta \\ \mathrm{tgh}(-\beta) &= -\mathrm{tgh}\,\beta \end{aligned} \qquad (3)$$

come le funzioni circolari, il coseno iperbolico è una funzione pari, seno e tangente iperbolici sono dispari (gli studenti possono dedurre le proprietà delle funzioni iperboliche considerando le (1)).
Altre relazioni sono facilmente individuabili per analogia con le funzioni circolari.
Questa attività (lo stesso dicasi per quella che segue), può essere un'occasione per colmare eventuali lacune, chiarire dubbi e consolidare le conoscenze pregresse. Come in ogni azione didattica, è necessario che il docente guidi la discussione, affinché gli studenti possano acquisire nuove conoscenze, ma, attraverso continui richiami e rimandi, possano ripercorrere a ritroso l'iter didattico per un attento riesame di quanto è stato già appreso.

5. Il paraboloide iperbolico

Le quadriche sono presenti solo in alcuni libri di testo in uso nei licei scientifici e negli istituti tecnici industriali, ma di esse vengono riportate solo le equazioni e i grafici. È pur vero che i tempi ristretti e la complessità dell'argomento non consentono di trattarlo in modo esaustivo, ma può essere opportuno fornire in modo semplice e intuitivo alcune conoscenze di base che possono stimolare nei giovani l'interesse per la matematica.
Le quadriche, come modelli di forme presenti in natura, dovrebbero far parte del bagaglio culturale di ogni studente alla pari delle figure geometriche piane e solide, mentre la stragrande maggioranza delle persone ignora che queste sono oggetto di studio in campo matematico. Mi limiterò a proporre un possibile approccio a un esempio notevole di paraboloide iperbolico, partendo dall'iperbole.
Molte leggi della matematica e della fisica hanno un'equazione del tipo:

$$xy = k, \qquad (4)$$

dove $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ è una costante.
Tali leggi esprimono la relazione di proporzionalità inversa tra le variabili x e y. Assumendo x come variabile indipendente e y come variabile dipendente, il grafico della funzione $y = k/x$ è quello di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti.
Applicando alla (4) una rotazione di $\pi/4$ di equazioni:

$$\begin{aligned} x &= X\cos(\pi/4) - Y\sin(\pi/4) \qquad (5) \\ y &= X\sin(\pi/4) + Y\cos(\pi/4) \end{aligned}$$

si ottiene, dopo semplici calcoli, un'equazione del tipo $x^2 - y^2 = a^2$, ossia un'iperbole equilatera di centro l'origine e avente per asintoti le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano.
Se al posto della costante k consideriamo la variabile z, l'equazione

$$z = xy \qquad (6)$$

rappresenta un paraboloide iperbolico [3]. Il grafico 3D (figura 3) può essere costruito con un software per la matematica (come ad esempio Derive 6) e può essere esplorato, semplicemente, determinando le sezioni con dei piani. In particolare, si osserva (graficamente e analiticamente), che intersecando la superficie, con piani paralleli al piano yz (di equazione $x = t$, $t \in \mathbf{R}$) si ottengono rette e, analogamente, se si considerano le sezioni con piani paralleli al piano xz (di equazione $y = m$, $m \in \mathbf{R}$) si ha un'altra famiglia di rette.

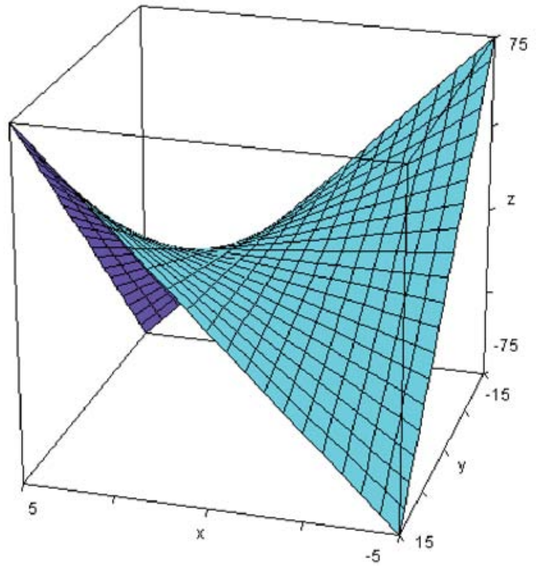


Figura 3

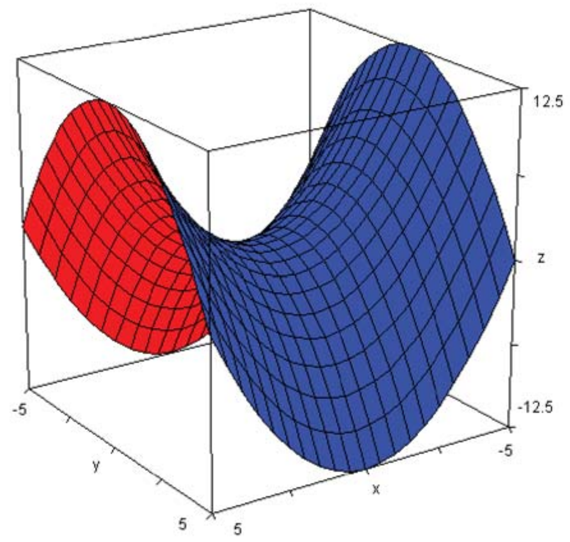


Figura 4

Questi due insiemi costituiti da infinite rette, giacciono interamente sulla superficie e vengono chiamate schiere o regoli. Per questo motivo, si dice che il paraboloide iperbolico è una superficie doppiamente rigata. Per ogni punto della superficie passano due rette incidenti appartenenti alle due schiere, mentre due rette della stessa schiera sono sghembe. Interessante è anche lo studio della proiezione della superficie sul piano *xy*.
Analogamente a quanto è stato fatto con l'iperbole, applicando al paraboloide iperbolico $z = xy$, una rotazione di $\pi/4$ nel piano xy (equazioni (5)), la sua equazione diventa: $x^2 - y^2 = 2z$ (figura 4). Essa, poiché è stata ottenuta mediante una trasformazione isometrica, presenterà le stesse caratteristiche della (6).
A questo punto si può anche considerare il caso più generale di paraboloide iperbolico, ma ciò che ho voluto evidenziare è che utilizzando metodi d'indagine di geometria descrittiva, è possibile studiare in tutti gli istituti secondari superiori, superfici apparentemente molto complesse. Esse, presentate come modelli di forme reali, possono coinvolgere e appassionare i giovani allo studio della matematica.

Ringraziamenti

Ringrazio l'amico Luigi Gabriele per il materiale sul Parco del Pollino, le colleghe del Liceo Scientifico "V. Bachelet" di Spezzano Albanese: prof.ssa Teresina Ciliberti e prof.ssa Giuliana Chiappetta per i preziosi consigli.
Ringraziamenti particolari al prof. Domingo Paola e alla prof.ssa Margherita D'Aprile per il sostegno e la collaborazione alla stesura di questo articolo.

Bibliografia

[1] Barra M. & Castelnuovo E.: 2000, Matematica e realtà, Bollati Boringhieri,Torino(1976). Da pag. 140 a pag. 161

[2] Ceccarelli N., Antoni Gaudì: alla ricerca della forma
www.mediadigitali.polimi.it/ddd/ddd_004/art_pdf/ceccarelli.pdf

[3] CARMO M. P. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.Pag 193

[4] LAMBERTI L., MEREU L., NANNI A, *Corso di matematica,* Vol 2, ETAS LIBRI per le scuole superiori, 2000.Pag. 253

[5] Ricciardi G., "Io ho immaginazione, non fantasia"
www. 30giorni.it/it/articolo_stampa.asp?id=183

Ra-giocando

Mostra interattiva, itinerante di giochi matematici

a cura di Ester Bonetti
[N.R.D. - Università di Pavia - Sezione di Rozzano]

SOMMARIO Ognuno di noi è orgoglioso di essere **homo sapiens**
la vita ci costringe ad essere **homo faber**
l'attualità ci fa essere **homo videns**
per vivere in modo umano occorre essere **homo ludens**
e la matematica ci dà una mano…
In questa mostra di "giochi matematici" trovano spazio giochi classici e giochi inventati, realizzati artigianalmente dai membri del Nucleo di Rozzano e sperimentati nelle varie classi.

Il nostro N.R.D. da diversi anni ha concentrato le energie verso la produzione di materiale con l'obiettivo di motivare all'apprendimento. Si sa che alunni motivati apprendono dovunque e comunque. Dato che la risposta alla domanda "Come suscitare la motivazione?" tardava a venire… abbiamo preferito seguire l'indicazione di Ausubel quando dice: «Spesso il modo migliore di insegnare ad un bambino non motivato è di ignorare per il momento questo fatto e di concentrarsi sull'insegnamento più efficace possibile: si può sperare che dalla soddisfazione iniziale dell'apprendimento possa sviluppare la motivazione ed apprendere ancora…»
In questi anni, forse, nel quotidiano "far scuola", il gioco non ha trovato una corretta collocazione ed applicazione. Continua ad essere considerato un'esperienza qualitativamente diversa dall'apprendimento e relegato, nella migliore delle ipotesi, ad attività secondaria. Tuttavia non va dimenticato che il gioco per le Scuole dell'Infanzia e Primaria rimane il catalizzatore dell'attività didattica.
Uno dei primi a rilevare il significato cognitivo del gioco infantile fu, oltre duemila anni fa, Platone, che può essere a buon diritto considerato il fondatore della moderna didattica dell'imparare giocando e dell'insegnare con piacere.
Tutta la storia della pedagogia e dell'educazione occidentale ha dato ampio spazio alle tematiche legate al gioco infantile: Vittorino da Feltre fondò una "Casa giocosa" nella quale i bambini potessero apprendere liberamente vivendo a contatto con la natura. Fu però F. Froebel il primo a considerare il gioco non solo in direzione ludica, ma in quanto attività già seria e compiuta in se stessa: egli sosteneva infatti che il gioco serve a far conoscere l'alunno, a far intravedere le vie personali di soluzione dei problemi avviando il bambino all'autoapprendimento e all'autoeducazione. Nei suoi "Giardini d'infanzia", Froebel diffuse l'uso dei "doni", giochi il cui utilizzo doveva servire soprattutto a sviluppare il sentimento religioso dei bambini e, in seguito, la loro capacità di apprendere e riapprendere per tutta la vita. In questo senso, alcune visioni pedagogiche froebeliane possono essere considerate pienamente attuali.
Ben diversa era invece la natura del sistema di giochi strutturati predisposto da Maria Montessori: mentre, nella visione di Froebel, preminente era la necessità di sviluppare il sentimento e la fantasia, in quella della pedagogista italiana assumeva una posizione centrale lo sviluppo dei sensi ed il gioco, da attività astratta, si trasformava in attività psico-fisica e psico-motoria.
Nella scuola italiana, come dicevo, al gioco è riservato spesso uno spazio ridotto e comunque non strutturato, nonostante i programmi ministeriali del 1985 siano stati molto espliciti nel riconoscere non solo la valenza pedagogica di questa particolare attività, ma la sua necessità per la crescita armoniosa e lo sviluppo affettivo e cognitivo del bambino.
Richiamo un passo, molto spesso dimenticato:

> «Il passaggio dall'esperienza alla rappresentazione e quindi alla formalizzazione può avvenire muovendo dalle situazioni più varie; fra di esse un ruolo importante hanno le più naturali e spontanee: quelle di gioco. Ogni attività di

gioco e di lavoro, ben impostata e condotta, favorisce una attività intellettuale controllata ed educa al confronto di idee, comportamenti, soluzioni alternative, in un clima positivo di socializzazione. Fra i giochi si possono comprendere sia quelli spontanei o appresi dal fanciullo nel suo ambiente culturale, sia quelli più specificamente indirizzati al conseguimento di particolari abilità matematiche...»

Il gioco, infatti, dal punto di vista motorio offre al bambino la possibilità di verificare le proprie competenze nel movimento, nella prensione, nella motricità fine (che prelude, in termini scolastici, all'apprendimento della scrittura); dal punto di vista cognitivo, affina le capacità logiche e il pensiero astratto e simbolico; infine, sotto l'aspetto affettivo ed emotivo, mette i bambini in condizione di interagire su un piano paritetico, apprendendo il rispetto delle regole (che, come nella vita, sono diverse da gioco a gioco) e dei ruoli, come introduzione ai principi del vivere sociale.
Dall'*Elogio del gioco* di Lucio Lombardo Radice si legge:

> «…una delle minacce più gravi che incombe sulla nostra "civiltà occidentale", anzi uno dei fenomeni che già la corrode e la guasta, è il consumismo, è la passività, è la non partecipazione. Viviamo in una società che non ci chiede di inventare, che non ci stimola a creare.
> Viviamo in una società nella quale c'è ben poco spazio per "giocare". Imparare a giocare, stabilendo e rispettando regole oneste, crea l'abitudine ad una convivenza civile molto di più che non lunghe prediche di "educazione civica».

Il gioco a squadre "socializza", insegna ad aiutare e a rispettare i più piccoli e i più deboli, a bilanciare equamente le forze.
I giochi sono anche un mezzo, non facilmente sostituibile, per il "recupero" dello stare insieme gioioso tra grandi e piccoli, tra genitori e figli, tra maestri e allievi.
Giocare bene significa avere gusto per la precisione: amore per la lingua, capacità di esprimersi con linguaggi non verbali; significa acquisire insieme intuizione e razionalità, abitudine alla lealtà e alla collaborazione.
…e l'elogio del gioco potrebbe continuare…

• Che cos'è il gioco matematico?

Se c'è un campo in cui la creatività sembrerebbe del tutto bandita e fuori luogo, questo è il campo della matematica. Dalle proprie passate esperienze scolastiche, la maggior parte di noi ha tratto l'intima convinzione che la matematica sia una zona del pensiero arida, noiosa e pragmatica, zeppa di regole e di formule da mandare a memoria. Questo in quanto ci si dimentica (e l'istituzione scolastica ha un'importante responsabilità in tale direzione) che la matematica richiede invece fantasia ed immaginazione: innanzitutto perché il pensiero ad essa sotteso è di tipo prevalentemente astratto.
Il metodo matematico è un processo di astrazione privo di un'utilità immediata (così come il gioco, che si appaga nel suo farsi ed ha significato solo per chi vi è coinvolto): parlare di gioco matematico nella scuola significa riuscire ad evidenziare la scoperta, l' immaginazione e l' invenzione che si scatenano nel matematico teorico. Scoperta, immaginazione ed invenzione identiche a quelle presenti nell'individuo che gioca.
Il gioco, inoltre, inizia sempre con un problema, ossia con una situazione complessa alla quale l'individuo deve trovare una soluzione: lo stesso, è evidente, avviene in matematica, dove alla richiesta iniziale è necessario rispondere con una serie di passaggi logici, condotti in maniera sequenziale all'interno di un insieme di regole, per giungere ad un risultato accettabile sul piano razionale.
Il gioco matematico è come un problema:

- richiede molto ragionamento
- necessita di poche conoscenze matematiche specifiche
- mantiene in forma la mente
- coinvolge la dimensione affettiva ed emozionale
- diverte.

Il gioco matematico lancia una sfida alla mente del bambino che la raccoglie proprio perché nel gioco il coinvolgimento della dimensione emozionale è forte. È altresì il mezzo più adeguato per sviluppare il pensiero astratto. Molti giochi costituiscono "zone potenziali di sviluppo" cioè delle palestre in cui alcune abilità vengono esercitate, padroneggiate, consolidate.

In situazioni di gioco matematico, dopo aver analizzato, confrontato, scelto, deciso, sintetizzato, dedotto… spesso si deve lasciare spazio all'intuizione, all'immaginazione.
G. Arrigo ci dice: «Quando ci si diletta con un gioco matematico, si è subito costretti a produrre prestazioni cognitive superiori, anche di livello divergente».

- Come si prestano i giochi all'apprendimento della matematica?

Alcuni ricercatori in didattica della matematica hanno evidenziato come vi sia apprendimento profondo quando l'alunno è condotto, dalla situazione che affronta, a costruire da solo il sapere matematico.
Richiamo molto brevemente, la teoria di Brousseau.
In questa teoria si differenziano le diverse situazioni in cui si crea il rapporto insegnante-allievo-sapere.

- **Situazione non-didattica:** i bambini giocano liberamente, possono mettere in atto strategie, risolvere problemi vari ma la situazione non è organizzata per l'apprendimento; es. gioco a dama, a carte, a dadi, a filetto…

- **Situazione didattica**: le intenzioni di insegnare e di apprendere sono esplicite: il contratto didattico regola il tutto. Il sapere passa attraverso l'approvazione dell'insegnante. Molte volte la risposta dell'alunno è tesa ad accontentare l'insegnante.

- **Situazione a-didattica**: la conoscenza nuova che l'allievo si appresta a costruire è interamente giustificata dalla situazione, da solo decide del suo operato senza la valutazione dell'insegnante. Il fine per l'allievo è di riuscire a risolvere la situazione che ha intrapreso, perché è diventata un suo problema.

Noi pensiamo che la situazione a-didattica sia l'ambito ideale per proporre i "giochi matemagici".
Recenti ricerche hanno messo in luce come un insuccesso in matematica sia vissuto dal ragazzo in modo più definitivo che in altre materie, generando noia, frustrazione, demotivazione fino ad intaccare la propria autostima; al contrario il cosiddetto "buon solutore" prova piacere, divertimento, emozioni positive che lo motivano all'apprendimento.
Se all'interno della scuola si riesce ad organizzare un ambiente, ad esempio un laboratorio di giochi, e se il momento del gioco non resta sporadico, è pensabile che si possa riuscire:

- a motivare l'allievo che è convinto che la matematica sia una disciplina noiosa e troppo impegnativa
- a offrire opportunità all'insegnante per rilevare le strategie, i ragionamenti, i percorsi mentali degli alunni in una situazione nuova

Gli obiettivi che hanno dato vita alla mostra "RAGIOCANDO" e che continuano ad esserne gli ispiratori:

- Individuare precocemente il disagio degli alunni nell'apprendimento della matematica.
- Rendere più adeguato, più efficace l'intervento didattico degli insegnanti.
- Promuovere l'apprendimento della matematica come fatto culturale, come scoperta, come strumento di organizzazione del sapere, di lettura e di comprensione del mondo.
- Scoprire la matematica come avventura intellettuale gioiosa e giocosa.

Alcune delle sezioni espositive della mostra riguardano:

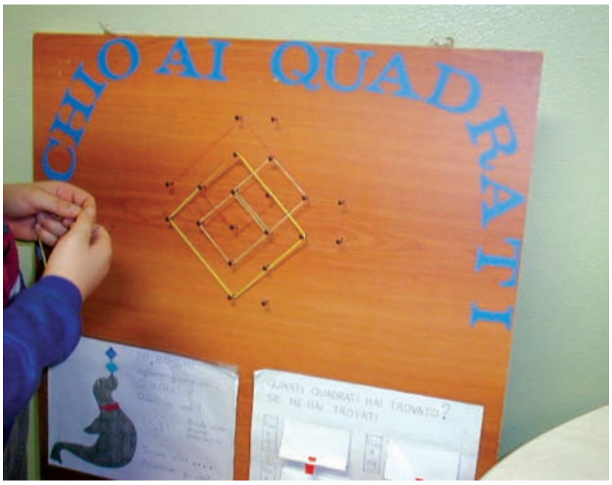
- giochi con le figure geometriche
- simmetrie
- giochi con i percorsi
- giochi con i numeri interi, razionali, frazioni
- giochi con la probabilità - combinazioni
- giochi di strategia

Questo raggruppamento è alquanto arbitrario, in realtà nello stesso gioco si possono trovare concetti di aritmetica, di geometria, di probabilità e la ricerca di strategie è alla base di molti giochi.
Quasi tutte le proposte presentano almeno 2-3 livelli, per offrire varie opportunità a tutti gli alunni: a chi presenta difficoltà di apprendimento e a

chi, se non opportunamente stimolato, potrebbe perdere la motivazione.
I ragazzi non devono essere preparati, è una mostra per giocare, ma mentre gli alunni giocano mettono in atto abilità e competenze che spesso in una situazione didattica non evidenziano.
La presenza dell'insegnante è fondamentale proprio perché dall'osservazione dei propri alunni, che si attivano senza timore di un giudizio, può rilevare strategie e soluzioni inaspettate.
Nelle numerose mostre allestite su tutto il territorio nazionale ed estero è capitato, e capita, molto spesso che le insegnanti si stupiscano delle risposte, dell'impegno e della passione di molti alunni che accettano la sfida che il gioco pone o che cercano una collaborazione di un compagno per poter risolvere la situazione.
Principalmente i nostri giochi tendono a mostrare una matematica piacevole, dilettevole e curiosa, divertono, anche se molti sottendono veri e propri problemi, rompicapo.

Per conoscere dove è stata allestita la mostra e gli aspetti organizzativi, consultare il sito www.ragiocando.net

Alcune immagini dei giochi della mostra Ragiocando:



(Di fronte, da destra a sinistra)
Prof. Mario Ferrari e Ester Bonetti.

La bottega del Matematico

di Paolo Lorenzi

[Ispettore scolastico per il settore matematico, scientifico e tecnologico
Scuola italiana, provincia di Bolzano]

"Fare matematica" sembra una frase grammaticalmente poco corretta, semanticamente di difficile comprensione e, nella rappresentazione comune, praticamente poco realizzabile.
Proprio "fare matematica" è invece il nodo intorno al quale si sviluppa l'esperienza della "Bottega del Matematico": una iniziativa della Sovrintendenza scolastica di Bolzano per gli alunni eccellenti (con ottimi risultati scolastici) che frequentano l'ultima classe della scuola secondaria di secondo grado, realizzata in collaborazione con il dipartimento di Matematica dell'Università di Trento e, dal 2006, con il centro "Matematita[1]" di Milano.
A onor del vero sono state le persone che credono alle iniziative, ai rischi ed alle innovazioni, come i docenti universitari e di scuola superiore che hanno partecipato alle giornate di "Bottega", che hanno determinato, assieme agli studenti, le condizioni favorevoli per la realizzazione e lo sviluppo della proposta. In teoria, per la poco diffusa simpatia che circonda la nostra disciplina, quattro o cinque giornate dovrebbero essere difficili da sopportare anche per 27 ragazzi con profitto scolastico ottimo, divisi in tre gruppi, ciascuno dei quali coordinato da un responsabile scientifico, un docente universitario di matematica e un docente di matematica della scuola superiore. Ma i commenti dei ragazzi, dei docenti e di qualche curioso e attento visitatore sono stati su un'altra lunghezza d'onda. Leila I. T., una studentessa, scrive nel diario di bordo: *"la cosa strana quando si torna al tran tran quotidiano dopo un'esperienza del genere è che inizialmente mai avresti pensato di divertirti così tanto…"* e riprende un docente universitario: "*…all'inizio ero un po' preoccupato sulla struttura da dare al laboratorio, a quali argomenti tirare fuori e quando. In realtà il lavoro si è rivelato meno difficile del previsto (anche se non meno faticoso) proprio per la partecipazione dei ragazzi. In qualche senso erano loro a guidare la lezione. È stato molto gratificante e, se posso dirlo, anche divertente.*"
Il perché, penso stia nella formula di compresenza, o meglio 'convivenza' a tempo pieno, tra studenti, docenti di scuola superiore e di Università, ciascuno inserito con compiti precisi in un tessuto relazionale fatto da una trama personale e da un ordito concettuale e disciplinare. Una situazione di laboratorio che abbiamo chiamato di "bottega" per evocare l'ambiente cinquecentesco dove si "imparava facendo". Oltre ai concetti sulla matematica ed alle nozioni che vengono utilizzate, la maggior parte nuove per gli studenti, sono determinanti, come nella bottega artigiana, le metainformazioni ed i contesti, che il maestro, non avaro della propria esperienza, fa trasparire e costruisce per risolvere un problema. La maniera con la quale il matematico si pone di fronte ad un problema, ad una questione, è importante e, spesso, determinante per la comprensione e la risoluzione. Come è consolante riconoscere e partecipare la comune difficoltà di risolvere un problema, così è gratificante condividere con il gruppo la soddisfazione per il buon esito di una intuizione o di una alternativa proposta. Di questi momenti, la matematica ha bisogno e, soprattutto, hanno bisogno i ragazzi per fare matematica. Momenti che, spesso a scuola, non si possono realizzare o apprezzare se non in situazioni molto limitate e, purtroppo, sempre meno frequenti al crescere del livello scolare.

La "Bottega del Matematico", così come viene realizzata a Salorno, un paese dell'Alto Adige, è una proposta di quattro giornate intensive che intende offrire, ad un gruppo di ragazzi con ottimo profitto scolastico delle occasioni per imparare matematica "facendola" e l'opportunità di "confrontarsi"

[1] http://www.matematita.it/

con il matematico nell'affrontare alcuni problemi e alcune questioni. L'attività si svolge prevalentemente in gruppo. I tre gruppi sono costituiti da sei o sette studenti; ad ogni gruppo sono affiancati un docente universitario ed un docente di matematica di scuola superiore in servizio. Il compito del primo è quello di proporre le questioni in forma problematica, invitando e stimolando gli studenti a trovare le possibili soluzioni; il secondo, invece, riveste una funzione di tutor di processo, per regolare e favorire la comunicazione nel gruppo e tra i gruppi ed ha responsabilità diretta sugli studenti. Il nucleo dell'attività delle giornate di bottega è lo studio, il confronto, la manipolazione di materiale, la costruzione di ipotesi e di prototipi concreti

per la soluzione di problemi che spaziano dalla statistica alla geometria, dall'analisi all'algebra, dalla topologia alla probabilità.

La caratteristica comune a tutti i gruppi è sempre il clima di laboratorio che si può apprezzare nella combinazione tra la "confusione creativa", presente sui tavoli da lavoro, e la disponibilità di ciascuno a partecipare ad una comune ricerca ed a contribuire, con i propri tempi ed i propri stili, alla soluzione di un problema. Tavoli ingombri di disegni, prove, materiale per costruire figure solide, soluzione saponosa e telai per le bolle, elaborate costruzioni di carrucole, il modello in legno della brachistocrona sono stati parte dell'ambiente nel quale hanno lavorato i gruppi. Ambiente che è diventato contesto e laboratorio vivo di bottega.

I problemi e le questioni proposte in "Bottega" vanno dallo studio delle bolle di sapone con la loro proprietà di area minima, ai sistemi dinamici connessi alla biologia di popolazione, dallo studio del comportamento di automi cellulari alla modellizzazione di alcuni fenomeni fisici e socio-economici. O ancora, dalla teoria dei grafi, alla scoperta delle mosse di Reidemeister nella teoria dei nodi, senza dimenticare accattivanti problemi con i triangoli su una superficie sferica o fantastiche passeggiate di ipotetici insetti, che tracciano percorsi minimi sulle facce di un ipercubo.

Da poco si è conclusa la sesta edizione della "Bottega del Matematico" e quest'anno gli argomenti sui quali hanno lavorato i gruppi sono stati: la geometria sulla sfera, la topologia e i cubi e ipercubi.

Il lavoro fatto sulla geometria della sfera con Italo Tamanini[2], ha portato i ragazzi a provare e confrontare il loro concetto di misura sul piano con quello sulla sfera e a risolvere problemi su triangoli disegnati su una superficie sferica.

Un altro gruppo, con Domenico Luminati[3], partendo dal problema dei ponti di Koenigsberg e passando dalla costruzione e dall'analisi del nastro di Möbius e della bottiglia di Klein, è giunto ad affrontare curiose questioni di topologia. Un terzo gruppo, dimenticando pause e intervalli, si è cimentato, con l'aiuto di Maria Dedò[4], a comprendere e costruire i cubi, gli ipercubi ed i loro sviluppi figurandosi iper-passeggiate di iper-insetti sulle facce delle iper-figure.

[2] Italo Tamanini è docente universitario al Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento e membro del comitato scientifico del centro Matematita

[3] Domenico Luminati è ricercatore universitario al dipartimento di Matematica dell'Università di Trento e membro del comitato scientifico del centro Matematita.

[4] Maria Dedò è docente di Geometria al Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università di Milano e direttore del centro Matematita

Un altro dei momenti caratterizzanti la "Bottega del Matematico" è la presentazione del lavoro di ciascun gruppo al termine delle quattro giornate: un momento non trascurabile di socializzazione, tra tutti i partecipanti, delle ricerche e delle scoperte fatte, ma anche uno spazio di rigore e di sintesi nel quale esprimere le soluzioni ed i concetti elaborati nei gruppi.
La presenza di alcune autorità scolastiche tra le quali l'Assessora provinciale alla scuola, la Sovrintendente scolastica, il preside della Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Università di Trento, il sindaco del paese ed alcuni insegnanti dà, alla comunicazione dei lavori di ciascun gruppo, una veste di ufficialità che stimola i gruppi a trovare le migliori soluzioni comunicative.
La presentazione finale è anche incentivo a ricercare la chiarezza nell'esposizione e, quindi, a mettere alla prova la competenza di comunicare in ragazzi che si accingono ad affrontare prima un esame di stato e poi diversi percorsi di studio o di lavoro. Alcuni esempi di presentazione si possono trovare in [2]. http://www.emscuola.org/news/news_i.asp?art=161614&HLM=1

Benché il ricorso a situazioni concrete sia stato sempre un obiettivo ed un monito rivolto prevalentemente ai docenti universitari nel confezionare le proposte di laboratorio, si è potuto constatare che anche questioni piuttosto teoriche ed apparentemente astratte, se mediate da una situazione di laboratorio, diventano accessibili per gli studenti e anzi, quasi familiari. Così che l'astratto di ieri può benissimo essere trattato come il concreto di oggi.

Una riflessione che ci fa sostenere l'attività di laboratorio anche a livello curricolare, non come strumento per banalizzare la matematica, ma come ambiente sociale aperto ai contributi di tutti, ciascuno con le proprie qualità, e banco di prova concreto per intuizioni e congetture anche estremamente astratte.

La "Bottega" si è rivelata non solo ambiente di apprendimento efficace per i ragazzi ma anche uno spazio privilegiato di formazione per i docenti di matematica.
La presenza di docenti universitari, in qualità di cultori della disciplina scientifica, degli studenti che realizzano di fatto le situazioni di apprendimento e dei docenti di scuola superiore ha permesso di sperimentare modalità inconsuete per proporre contenuti matematici e per verificare la loro efficacia in termini di reale apprendimento. La buona ricaduta sulla pratica didattica è anche testimoniata da alcuni insegnanti che hanno proposto alle loro classi alcuni problemi visti in "Bottega" ed hanno suscitato l'entusiasmo dei loro studenti. Si realizza così un altro obiettivo che ci si era posti con "la Bottega del Matematico": di trasferire l'esperienza realizzata per i ragazzi con profitto scolastico eccellente anche alla didattica quotidiana e, con i dovuti adattamenti, a tutti ragazzi.

Le prospettive sono di mantenere questo appuntamento annuale per gli studenti con profitto scolastico ottimo della provincia di Bolzano e di realizzare, anche con l'aiuto di una docente con compiti di documentazione, una raccolta di problemi affrontati alla Bottega, commentata con riguardo alla loro possibile introduzione nella didattica ordinaria in classe.
Si sta anche valutando la possibilità di realizzare un'edizione nazionale della "Bottega del Matematico" che mantenga le caratteristiche descritte e si rivolga ad una rappresentanza di ragazzi con profitto scolastico eccellente per ogni regione.

Sitografia

[1] Matematita - http://www.matematita.it/
[2] EmScuola - http://www.emscuola.org/news/news_i.asp?art=161614&HLM=1

Intervista al planetologo Zappalà

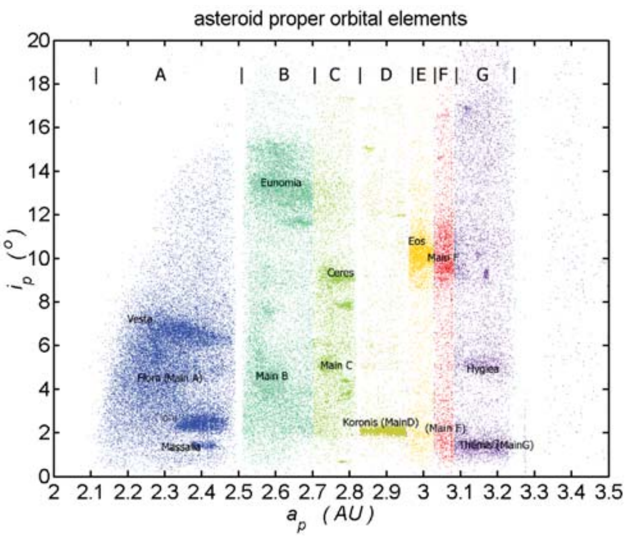
di Domenico Licchelli

Intervista al Prof. Vincenzo Zappalà, planetologo di fama mondiale, autore di lavori fondamentali nella comprensione della fisica dei Corpi minori del Sistema Solare[1].

L. *Prof. Zappalà lei è famoso, soprattutto nell'ambiente dei planetologi, per i suoi studi sui Corpi minori del Sistema Solare, ma si è laureato in Matematica. Come è finito all'Osservatorio Astronomico di Torino?*

Z. La mia storia per arrivare alla laurea e poi all'astronomia è piuttosto lunga… Finito il Liceo Scientifico a Savona ero davanti ad una difficile domanda, che condividevo con molti altri compagni di scuola: che università fare? La mia vera passione sarebbe stata architettura. Mi era sempre piaciuto il disegno ed ero piuttosto bravo (almeno così dicevano i miei insegnanti…). Inoltre fin da piccolo ero attratto dalla storia dell'arte, soprattutto quella medioevale e rinascimentale. Spesso i regali di Natale e di Compleanno erano libri di architettura antica o di pittori rinascimentali (il mio preferito è sempre stato Masaccio). Insomma sembrava ovvio che scegliessi Architettura. Tuttavia avevo 17 anni e nel 1962 le occasioni per uscire di casa erano ben più limitate di oggi. Non vedevamo l'ora di essere più liberi e di fare "baldoria" tra amici (e possibilmente amiche). Io vivevo a Savona e la facoltà di Architettura era a Genova, ad un'ora di treno. Per cui non c'era problema a fare il pendolare. D'altra parte, in quel periodo, il Politecnico di Torino era famoso nel mondo e chi usciva da quell'istituto trovava immediatamente lavoro. Era un'ottima "scusa" per chiedere di frequentarlo. Ma la vera motivazione era un'altra: da Savona a Torino non si poteva fare il pendolare giornaliero. Bisognava "vivere" a Torino, lontano da casa… Non fu difficile allora rinunciare al sogno e puntare verso una vita libera e spericolata. Mi iscrissi al politecnico e trovai alloggio presso una famiglia di origine toscana che abitava nei pressi. Il biennio fu veramente interessante e arduo. Erano obbligatori i due esami di Analisi, Geometria, Fisica e quello di Meccanica Razionale, Chimica e Disegno. E che professori! Il Buzzano di Analisi ed il Perucca di Fisica. Allora prendere un 24 era già una conquista che ti lasciava veramente soddisfatto. Riuscii a finire gli esami nel tempo giusto ed iniziai il triennio. A quel punto le cose cambiarono molto. Mi ricordo soprattutto l'esame di Scienze delle Costruzioni. Lo scritto era sulla teoria dei tensori e presi un bel 30. Ma l'orale era invece molto più pratico. Coefficienti di resistenza, composizione del calcestruzzo e cose del genere, tutte essenzialmente mnemoniche. No, non era per me. Rifiutai il 20 che mi era stato proposto e decisi di cambiare Università, ben contento però di avere nel carniere gli esami fatti fino ad allora. Mi iscrissi a matematica, perché la sentivo più teorica e vicina al mio modo di ragionare: che begli esami Algebra, Geometria superiore, Calcoli numerici, … Poi scelsi come esame complementare Astronomia: il professore (Fracastoro) era un simpaticissimo toscanaccio e

[1] L'intervista integrale è pubblicata all'indirizzo http://www.dlcosmos.eu/pagine/curriculum_e_ricerca/Interviste_con_la_Scienza.htm



Fonte:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/AsteroidIncAu.png

presi anche un bel 29. Mi mancavano pochi esami e chiesi la tesi in Astronomia, sulle caratteristiche ottiche dei telescopi a specchio. Il giorno dopo la laurea, Fracastoro mi telefonò a casa e mi disse: "*so che devi fare il militare tra pochi mesi e quindi nessuno ti darebbe un lavoro prima del servizio militare. Perché non vieni all'osservatorio* (lui era anche il Direttore) *ed elabori un po' la tesi per farne una pubblicazione? Avresti anche un po' di soldini…*" Accettai immediatamente e poi partii per la… guerra. Quando tornai, ebbi la fortuna che il mese dopo c'era il concorso per Tecnico Laureato all'Osservatorio di Torino. Lo feci e lo vinsi. Da allora non mi sono più mosso. E cominciai subito a fare fisica dei corpi minori. Ma senza rincrescimenti, perché penso che la matematica sia il linguaggio della fisica e quindi era molto importante che l'avessi digerita bene. E poi via via arrivai fino all'ordinariato.

L. *Lei ha all'attivo centinaia di pubblicazioni scientifiche, ma la sua fama deriva principalmente dagli studi sulle famiglie dinamiche. Ci vuole spiegare cos'è una famiglia dinamica?*

Z. Il modo migliore per individuare una famiglia dinamica nella fascia asteroidale è quella di "*plottare*" in un grafico l'eccentricità oppure l'inclinazione verso il semiasse maggiore dell'orbita. Si vedranno subito che esistono gruppi di oggetti estremamente densi, che non possono certo essere dovuti al caso. Scoperte fin dall'inizio del 900 dal giapponese Hirayama, quando di asteroidi se ne conoscevano poche centinaia, queste "nuvole" di oggetti furono studiate con particolare attenzione. I singoli asteroidi che le compongono devono per forza avere qualcosa in comune e questo qualcosa è la loro origine. Essi non sono altro che frammenti di un antico asteroide venuto in collisione con un fratello più piccolo e ridottosi in tanti pezzetti. Ogni singolo frammento ha poi iniziato a vivere la sua vita da "*single*", mantenendo però caratteristiche orbitali molto simili a quelle dell'asteroide originale. A questa interpretazione si è arrivati lentamente, in quanto all'inizio non vi erano prove fisiche della comune origine.

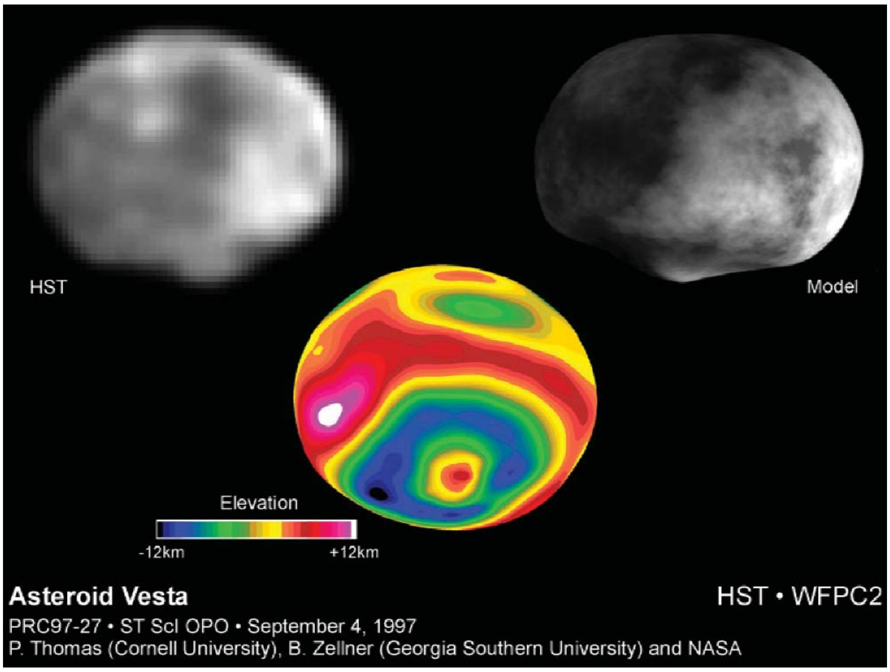
Vi sono state molte classificazioni, basate su vari approcci statistici, che però avevano un carattere molto soggettivo. Si doveva trovare un metodo oggettivo al massimo per evidenziarle rispetto allo sfondo. Nel 1990 applicai il metodo della minima distanza tra oggetti, in cui sostituii la distanza con una metrica basata sulle celebri equazioni di Gauss che danno le velocità relative in funzione delle differenze orbitali. La distanza diventava quindi la velocità relativa tra oggetti, prendendo un valor medio per gli angoli che comparivano nelle equazioni. Ottenni dei diagrammi a "stalattite", ossia diagrammi che a seconda della velocità scelta mi dicevano quanti oggetti avevano distanze minori di quel valore.

A quel punto potevo descrivere le famiglie come quei gruppi che possedevano un certo numero di oggetti più vicini di quanto ci si aspettasse in una distribuzione casuale. Volendo potevo essere più restrittivo (abbassando il livello di velocità) o più ottimista (alzandolo). Il sistema era veramente oggettivo. Le osservazioni spettroscopiche eseguite in seguito confermarono la validità dell'approccio statistico: le famiglie dinamiche erano anche delle vere famiglie fisiche. La composizione era identica o al limite era compatibile con un oggetto differenziato. La più bella conferma fu quella della famiglia di Vesta (feci anche una scommessa con un collega americano che aveva accesso ad un grande telescopio, Richard Binzel). Vesta aveva un tipo tassonomico unico nella fascia asteroidale, il tipo V, simile a quello delle meteoriti dette "eucriti". Io avevo trovato una numerosa famiglia collegata a Vesta, composta da oggetti molto piccoli, inferiori ai 10 km, e scommisi con Binzel che sarebbero stati tutti di tipo V anche loro, in quanto frammenti originatisi da una collisione semi-catastrofica su Vesta. E questo fu verificato in pieno dalle osservazioni spettroscopiche: erano tutti V ed erano i soli conosciuti oltre al loro grosso compagno di viaggio. Inoltre, furono anche scoperti poco dopo alcuni NEA (Near Earth Asteroids) di tipo V. Conclusi con il primo legame asteroide-Terra provato dalle osservazioni. Vesta era stato urtato e dal cratere erano scappati frammenti (la famiglia), alcuni erano stati immessi nelle risonanze vicine ed avevano raggiunto il Sistema Solare Interno (i NEA di tipo V). Qualche pezzo era caduto sulla Terra e lo potevamo prendere in mano (le eucriti). Insomma avevamo pezzi di asteroide e sapevamo perfettamente da dove venivano! In seguito il telescopio Hubble identificò anche l'antico cratere su Vesta. Una bella soddisfazione, non c'è che dire…

L. *A suo parere perché gli italiani sono così allergici alla matematica, tanto da farne addirittura un vanto del non capirci niente?*

Z. Il primo motivo è forse legato allo stereotipo del "matematico", soprattutto se giovane: magro, con gli occhiali e sempre chino sui libri. E facile allora, in gioventù, cercare di prendere le distanze da questo classico "secchione", poco ben visto dalle ragazze. Poi è stato facile allargare la descrizione a tutte le età. Sicuramente la logica matematica necessita di grande concentrazione e lucidità. È quindi facile vedere matematici immersi nei propri pensieri, proprio mentre stanno magari mettendo qualche idea sotto un ben preciso profilo logico. In quei momenti non ci si può distrarre, se no salta tutto per aria. Io mi ricordo quando studiavo Geometria Superiore. Era tutta basata su chilometriche dimostrazioni astratte, del tipo:"se un filtro compatto è anche connesso, allora esiste sempre un sottoinsieme che….ecc., ecc." Non era facile raffigurare nella propria mente i Filtri, i Gruppi, gli Ideali e concetti del genere. Io ad esempio li rappresentavo graficamente, anche se non avevano nessuna corrispondenza con la realtà astratta della loro definizione. Ma a me serviva molto per procedere nella dimostrazione senza perdere di vista il filo logico. All'esame utilizzai lo stesso metodo ed il professore (Conte, oggi Preside di facoltà e parente stretto del grande cantautore Paolo) ne fu anche sorpreso, ma lo considerò una tecnica efficace e mi diede un gran bel voto. Penso che ogni matematico debba avere una sua filosofia di ragionamento, per mantenere la calma e la tranquillità necessaria per descrivere la logica profonda e per non tralasciare nemmeno il più piccolo dei particolari.

Il secondo motivo è forse legato alla mentalità italiana, più abituata agli studi classici e umanistici piuttosto che scientifici (matematici in particolare). Siamo un popolo di poeti, ma non di matematici, si dice. Anche se poi in realtà i matematici italiani sono sempre stati tra i più validi al mondo.



Fonte: http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/1997/27/image/a/format/web_print/

Vorrei aggiungere qualcosa in merito alle capacità dei grandi matematici. Mi ricordo le prime lezioni di Analisi 1 al Politecnico di Torino tenute dal grandissimo prof. Buzzano. Seguii le prime 5 o 6 senza capire dove voleva andare a parare. Io pensavo allo studio di funzioni fatte in quinta liceo, ma qui invece si parlava di costruzione della frase, di posizione delle congiunzioni e cose del genere. Avevo forse sbagliato facoltà? Poi finalmente capii. Bisognava prima preparare la struttura del linguaggio per potere affrontare anche le più semplici dimostrazioni.

Niente doveva essere ovvio e tutto andava detto nel modo e nel tempo giusto. Capii anche perché un solo minuscolo errore di posizione durante l'esame avrebbe abbassato immediatamente il voto di 4 o 5 punti. Non era una ricerca maniacale di perfezione, ma l'essenza pura della matematica: o entri in quella logica oppure cambi mestiere! Del Buzzano mi ricordo anche le stupende lezioni con più di 500 allievi in silenzio assoluto. Le sue non erano dimostrazioni, ma risoluzioni di un giallo di Agatha Christie. Una volta suonò la fine dell'ora prima che potesse dire: "*come dovevasi dimostrare*". Ci fu una vera ribellione. Non lo lasciammo uscire senza che ci avesse svelato il finale. Fu un momento esaltante per tutti noi e penso anche per lui. Questa è la vera matematica: una forma di arte intrisa di genio e perfezione stilistica. D'altra parte non potrebbe essere altrimenti, dovendo descrivere con il migliore linguaggio la meravigliosa fisica della Natura che ci circonda.

L. *So che le era stata offerta la direzione del mitico Lowell Observatory, in Arizona, ma preferì rimanere in Italia. Pentito?*
Z. Certamente no. Non mi sono mai pentito di niente. Da buon matematico ho sempre preso le decisioni dopo un'attenta lettura logica dei pro e dei contro. Sono stato onorato dell'offerta e forse questo mi è bastato. Ma avevo un gruppo da mandare avanti all'Osservatorio e ho preferito restare al mio posto. Anche se oggi posso dire di aver completamente sbagliato, vedendo i risultati complessivi e la freddezza ottenuta in cambio, penso che rifarei la stessa cosa. Bisognava tentare e non accettare un facile successo. E poi in Italia si mangia e si beve sicuramente molto meglio!!

L. *Lei è anche un abilissimo divulgatore. Contrariamente a quanto avviene altrove, penso per esempio agli USA, ancora oggi qualche suo collega italiano ritiene che la divulgazione sia roba per ricercatori falliti. Mi pare che, quantomeno nel suo caso, questa teoria fallisca clamorosamente*
Z. Io tengo moltissimo alla "vera" divulgazione. Anzi la trovo essenziale. Ma quella vera. Spesso si fa divulgazione cercando di dimostrare quanto si è bravi e preparati. La conclusione è che gli uditori finiscono col dire: "*che grande scienziato! Non ho capito niente, ma deve essere molto bravo*". E poi si guarda bene dal tornare ad assistere ad un'altra conferenza astronomica… La divulgazione deve invece stimolare chi ascolta a sentirsi all'altezza e di conseguenza a cercare di approfondire da solo gli argomenti sentiti. Il miglior complimento per un buon divulgatore dovrebbe essere:"*accidenti, ho capito tutto. Ma allora non sono così ignorante…* ". Eppure pochi conferenzieri lo fanno, temendo di sentirsi sminuiti.

L. *Cosa pensa dell'attuale sistema formativo italiano? Ritiene sia adeguato alle esigenze della moderna società tecnologica?*
Z. Una volta lo era sicuramente. Negli anni '60 penso che i nostri licei e le nostre Università fossero le migliori del mondo. Formavano persone con una vasta cultura generale (fondamentale per capire sempre dove e come inserire la propria specializzazione) e davano lo stimolo a tirare fuori il meglio da noi stessi. Purtroppo non si muoveva parallelamente la ricerca istituzionale. Sembrava un lusso che il paese non poteva permettersi. Molti scappavano all'estero (non è cosa solo di oggi…) o vivacchiavano con misere risorse. Ma comunque era ancora vivo lo spirito italiano più vero, quello che ci ha dato Leonardo, Galileo, Fermi. Bastava una matita o un gesso sulla lavagna. Mi ricordo quando le prime foto del Voyager 2 sono arrivate in Europa. I colleghi americani temevano di darci i dati, perché sapevano che gli italiani avrebbero fornito spiegazioni immediate basate su una visione di ampio respiro, mentre loro avevano bisogno di fare girare i programmi, di riflettere solo dopo che i dati erano stati completamente ridotti e cose del genere. Ero a Pisa con Paolo Farinella, Anna Nobili e, mi sembra, Paolo Paolicchi. Abbiamo proiettato sul muro della vecchia Università una gigantografia della prima immagine di Mimas. Poi abbiamo misurato brutalmente la larghezza e l'altezza e ci siamo accorti che il satellite era schiacciato ai poli. È stato facile con semplici formulette, sapendo il diametro e la distanza da Saturno, fare qualche conto sulle forze mareali ed intuire la composizione interna del satellite e la sua densità. Prima che gli americani cominciassero ad analizzare al computer quei dati, noi avevamo già pronto un lavoro da pubblicare… Ed era anche corretto.

Questa è sempre stata la forza degli italiani. Poi, purtroppo, l'università si è portata verso i modelli americani, guardando soprattutto al ritorno economico. La cultura di base è scemata e l'uso della matita e del gesso è scomparsa. Siamo diventati tutti "amanti" del computer, della pagina scritta perfettamente, delle figure leccate e perfette. Troppo tempo sprecato. Chi vede oggi un giovane ricercatore con una matita ed un foglio? Nessuno. Io mi ricordo che quando andavo a Pisa per collaborare con i colleghi dell'Università, a volte, passavamo due o tre giorni a parlare e fare ipotesi anche assurde. Si chiacchierava a ruota libera davanti ad una lavagna. Ma alla fine qualche idea buona veniva e si poteva allora cominciare ad usare il computer. Oggi si fa il contrario… E poi c'è stato il "boom" del ritorno tecnologico. La ricerca pura non serve più a niente. Bisogna produrre e subito. Ma è assurdo! Senza ricerca di base non si costruisce niente. Ma chi decide l'assegnazione dei fondi non riesce a capirlo sia per incapacità culturale che per interessi economici. E stiamo perdendo il nostro punto di forza che ci faceva un po' speciali. Ci siamo adeguati ai programmi dei paesi più ricchi di fondi per la ricerca e non siamo in grado di competere sulle applicazioni tecnologiche. Ci illudiamo di esserlo ed invece cadiamo nell'anonimato. La nostra grande forza, da tutti invidiata, era la cultura generale e la logica. Oggi purtroppo le stiamo completamente perdendo. E questi ricercatori saranno i professori di domani e temo che si sia entrati in un cerchio senza uscita. Peccato!! Purtroppo però questo è un problema mondiale e non solo italiano. La scienza con la S maiuscola è chiaramente in calo, almeno per quanto riguarda la Fisica e l'Astronomia.

L. *Si dice sempre che nel selezionare i ricercatori bisogna utilizzare criteri meritocratici basati sul numero e la qualità delle pubblicazioni scientifiche. Poi nei concorsi succede, a volte, che un ottimo ricercatore con decine di lavori su riviste internazionali sia superato da un altro che pubblica sul giornale di paese…..*

Z. Anche queste sono parole sante. A volte però si perde il meglio già prima di avere concorsi truccati. Ho avuto con me giovani laureati dalle grandi capacità che non sono riuscito a trattenere perché i concorsi erano bloccati oppure avevano una cadenza da Matusalemme. E non c'era più posto per incarichi seri. Non tutti possono vivere nel precariato per anni. Stiamo arrivando ad una *elite* scientifica basata non sui meriti ma sulla possibilità delle famiglie di mantenere il figlio o la figlia a studiare per pochi euro al mese. Facciamo una selezione sulle possibilità economiche e non sulle capacità intellettuali. Quando poi finalmente arriva un concorso, c'è una caccia terrificante al posto. E questa fame di posti aiuta le azioni truffaldine. Pur di ottenere qualcosa si usano tutti i mezzi. E l'Istituto più potente o con maggiori agganci politici riesce ad avere la meglio. Prima di prendermela con i concorsi "truccati", me la prenderei con la mancanza di concorsi. La fame istiga l'ingegno anche verso le azioni meno limpide. Il problema di fondo rimane sempre lo stesso: in Italia non interessa la ricerca scientifica pura, che è sempre stata il nostro vanto e la nostra forza.

L. *Cosa consiglierebbe ad un ragazzo che volesse diventare un planetologo?*

Z. Di cambiare mestiere… Ovviamente sto scherzando, ma non troppo. Prima di tutto gli consiglierei di diventare un uomo, di vedere il mondo con la giusta umiltà e di non pretendere di ottenere tutto e subito. Poi lo farei studiare e digerire i concetti fondamentali. A volte molti non riescono perché vogliono subito "produrre", anche senza prima studiare a fondo i problemi. Poi tutto verrebbe da solo. Comincerebbero le prime idee intelligenti, le prime critiche basate su dati di fatto e i primi lavori. Nel frattempo però sarebbe molto importante saper scrivere le cose con grande logica (e qui torna in ballo la matematica, il latino, la Divina Commedia, la cultura generale). Sempre però con i piedi per terra. Non sminuire mai le proprie idee ("*gli altri saranno sicuramente già più avanti di me*"… questo è un grande errore da NON fare mai), ma nemmeno sentirsi superiore. Insomma di nuovo la mia fissazione: UMILTA' CULTURALE, che vuol dire non considerarsi inferiore, ma nemmeno cercare di fingere di essere superiore. Bisogna avere una grande sicurezza in se stessi, sia in quello che si sa, sia in quello che non si sa. E non avere paura a chiedere anche le cose più banali. Magari a noi lo sembrano, ma poi ci si accorge che sono difficili anche per gli altri. Ma queste sono belle parole e bei consigli solo se ci fosse la possibilità di avere fondi, di girare il mondo, di avere un posto sicuro che non ti metta addosso la smania di pubblicare subito qualcosa per fare meglio del collega che ti può portare via il posto del prossimo, agognato, concorso. E si ritorna da capo. È difficile spingere qualcuno a fare lo scienziato, planetologo o geologo che sia. Sono sempre stato chiaro con i neo-laureati. Ho sempre fatto presente le difficoltà ed i rischi del mondo della ricerca. E non ho mai cercato di crearmi degli "schiavetti" da utilizzare per qualche anno per poi buttarli al macero. Oggi non saprei che dire, veramente. Forse solo questo: se ci credete veramente andate avanti! Se avete dubbi lasciate perdere… Comunque non sperate mai troppo negli altri, ma soprattutto in voi stessi. E non seguite le mode (la planetologia è sempre stata "snobbata" dagli altri astrofisici). Se ci credete, andate avanti. Prima o poi un po' di onestà viene fuori e nemmeno i più grandi manovratori sotterranei potranno sempre nascondere i meriti altrui. Mai perdere la speranza, anche se le difficoltà sembrano insuperabili. Ma bisogna saperlo bene e non pentirsi o rinunciare al primo intoppo.

Per approfondimenti:

Bendjoya, Philippe; and Zappalà, Vincenzo; "*Asteroid Family Identification*", in Asteroids III, pp. 613-618, University of Arizona Press (2002), ISBN 0-8165-2281-2

V. Zappalà et al. "*Physical and Dynamical Properties of Asteroid Families*", in Asteroids III, pp. 619-631, University of Arizona Press (2002), ISBN 0-8165-2281-2

A. Cellino et al. "*Spectroscopic Properties of Asteroid Families*", in Asteroids III, pp. 633-643, University of Arizona Press (2002), ISBN 0-8165-2281-2

V. Zappalà et al. "*Asteroid Families: Search of a 12,487-Asteroid Sample Using Two Different Clustering Techniques*", Icarus, Vol. 116, p. 291 (1995.)

Zappalà, Vincenzo; Cellino, Alberto; Farinella, Paolo; and Milani, Andrea; "*Asteroid families II - Extension to unnumbered multiopposition asteroids*", Astronomical Journal, Vol. 107, pp. 772-801 (February 1994)

Zappalà, Vincenzo; Cellino, Alberto; Farinella, Paolo; and KneÏviç, Zoran; "*Asteroid families I - Identification by hierarchical clustering and reliability assessment*", Astronomical Journal, Vol. 100, p. 2030 (December 1990).

Hirayama, Kiyotsugu; "*Groups of asteroids probably of common origin*", Astronomical Journal, Vol. 31, No. 743, pp. 185-188 (October 1918).

Lo scaffale dei libri

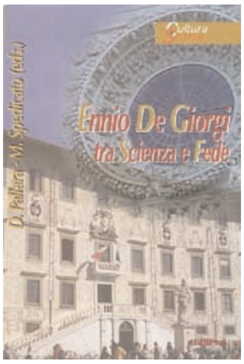
di Antonio Bernardo

Emma Castelnuovo, *L'Officina matematica, ragionare con i materiali*, La Meridiana, 2008, pp. 166

L'*Officina matematica* raccoglie nove lezioni di Emma Castelnuovo e documenta sei anni di esperienza delle attività laboratoriali presso la Casa-laboratorio di Cenci nel comune di Amelia (TR).
"Guardo, osservo e poi passo dal concreto all'astratto, cioè matematizzo il fenomeno osservato", con queste parole Castelnuovo spiega il significato e il ruolo della matematica nel processo di osservazione e di comprensione del mondo. Nelle lezioni presentate in questo libro ci sono diverse attività-problemi che partono dall'osservazione concreta di semplici fatti ottenuti utilizzando i cosiddetti materiali poveri (pezzi di spago, blocchetti di argilla, sbarrette, elastici, ecc.). Rettangoli formati con lo stesso pezzo di spago hanno lo stesso perimetro, la misura della loro area genera una curva, la parabola, che è la stessa curva che descrive una palla da gioco; triangoli formati con lo stesso pezzo di spago formano invece un'ellisse che è la stessa figura che calpestiamo quando camminando per strada mettiamo il piede sull'ombra di un segnale stradale circolare.
Il ruolo del 'materiale' nella scoperta matematica è uno dei temi cari alla ricerca di Castelnuovo: mettere le mani in pasta, sui materiali per andare verso l'astrazione. L'autrice dà un percorso storico a questo modo di procedere (dalla duplicazione del cubo di Menecmo al metodo meccanico di Archimede, a Galileo) per giustificarne l'efficacia come metodo didattico; un metodo che qualche decennio fa appariva non solo povero didatticamente ma anche fuorviante rispetto all'astrattezza dei fondamenti logici e puri della matematica. L'anziana ricercatrice testimonia, con la sua lunghissima attività, che partendo da materiale semplicissimo si possono costruire tutti i capitoli della matematica. Tra i problemi semplici, quelli di massimo e minimo permettono di attraversare tanti livelli di astrattezza della matematica. In una delle lezioni pubblicate in questo libro, ne presenta due che si possono affrontare con ragazzi della secondaria di primo grado: con un filo di ferro si costruiscono dei poligoni, quale di essi ha l'area massima? Con una certa quantità di argilla si possono formare dei solidi (cubo, cilindro, piramide) tutti dello stesso volume, quale di questi ha la superficie minima?
Per quanto attiene più da vicino l'aritmetica, Castelnuovo si sofferma sui problemi di proporzionalità, che nascono nella notte dei tempi, dal famoso Papiro di Rhind, passando per Talete, Archimede, Brahmagupta, e che fino a oggi sono sempre stati incontrati dall'uomo, soprattutto nelle situazioni di lavoro e in generale nell'economia. Sulla proporzionalità inversa, presenta un'esperienza fisica legata alla capillarità, nella quale si utilizzano due vetri uniti da un lato con delle mollette e dall'altro separati da stuzzicadenti; i vetri vengono messi a contatto con dell'acqua colorata posta in una bacinella; l'acqua risale lungo i vetri per capillarità formando un'iperbole. Questa semplice esperienza fa vedere il profondo

legame non solo tra l'aritmetica (proporzionalità inversa) e la geometria (iperbole) ma anche tra la matematica, la fisica, la botanica e le scienze in generale.
La geometria, osserva Castelnuovo, ha subìto negli ultimi anni una caduta di interesse da parte sia degli studenti, sia degli insegnanti, i quali senza particolari direttive da parte di nessuno si sono tacitamente uniti in questo rifiuto, molto spesso per pigrizia di entrambi: difficoltà nell'apprendere e difficoltà nell'insegnare. Occorre evidentemente recuperare questo interesse, perché la geometria ha un ruolo formativo indispensabile. Lo studio attraverso i materiali e l'osservazione del movimento potrebbero, a suo avviso, portare l'apprendimento di questa disciplina su un piano più pratico e osservativo, facilitandone il ritorno nella scuola.
Nella seconda parte del libro sono pubblicate quattro attività laboratoriali dell'Officina matematica: 1. Spago ed elastico; 2. Dal problema dell'ubriaco alla teoria dell'evoluzione di Darwin; 3. Una matematica… a tutto tondo; 4. Angoli e ombre. Conclude il libro una conversazione tra Franco Lorenzoni ed Emma Castelnuovo.

D. Pallara e M. Spedicato, *Ennio De Giorgi tra Scienza e Fede*, EdiPan, 2007, pp. 200



A dieci anni dalla morte di Ennio De Giorgi, il Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento, ha organizzato un seminario per ricordare il ruolo scientifico e umano del noto matematico salentino che ha contribuito in maniera decisiva alla nascita della Facoltà di Scienze a Lecce. Gli atti del seminario sono stati raccolti e curati in un volume da Diego Pallara e Mario Spedicato. Gli interventi si snodano sul doppio ruolo che De Giorgi ha avuto sui suoi allievi e su tutti quelli che si sono ispirati alla sua opera: da una parte la sua attività di ricerca nell'ambito della matematica e dall'altra la sua riflessione sull'uomo.
La storia di De Giorgi matematico viene raccontata da Mario Miranda, suo allievo alla Scuola Normale di Pisa. Nel 1955 De Giorgi risolveva il XIX problema di Hilbert relativo alla regolarità delle soluzioni di equazioni differenziali ellittiche, problema che Hilbert aveva formulato nel 1900, in uno storico congresso internazionale di matematici. Attualmente il risultato è noto come Teorema di De Giorgi-Nash poiché i due matematici arrivarono alla soluzione in modo indipendente e praticamente nello stesso periodo. J. Nash vi giunse dopo De Giorgi, ma al prestigioso Courant Institute of Matematical Sciences di New York, dove Nash aveva intrapreso l'attività di ricercatore, non erano a conoscenza dei risultati ottenuti dal matematico italiano.
Marco Forti presenta alcuni sviluppi delle idee fondazionali di De Giorgi, le cosiddette teorie "alla De Giorgi" che si caratterizzano per non riduzionismo, apertura, autodescrizione, assiomatizzazione semi-formale, e costituiscono un tentativo di svincolare il problema dei fondamenti delle teorie scientifiche dalle sue origini logico-matematiche, un tentativo nella direzione della ricerca delle basi generali interdisciplinari della scienza. Più strettamente connessi agli studi di analisi sono quelli legati alla moderna teoria geometrica della misura, un programma di ricerca avviato dal matematico napoletano Caccioppoli e poi da De Giorgi, del quale Luigi Ambrosio traccia sinteticamente la storia.
L'impegno del matematico salentino nel campo della ricerca più umanistica è stato messo in evidenza da Maria Letizia Rosato che presenta alcuni interventi di De

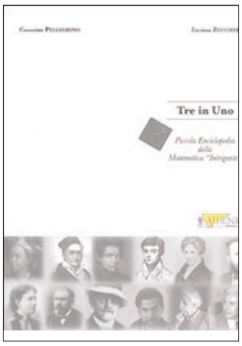
Giorgi alla Pontificia Accademia delle Scienze, dove svolse un ruolo attivo fino agli ultimi anni della sua vita, nell'intento di sostenere un ponte tra la cultura scientifica e la fede cristiana.
Diego Pallara ha raccontato l'impegno civile di De Giorgi, del suo approccio 'fondazionale' alla Dichiarazione Universale dei Diritti Umani, delle sue proposte sui Diritti e Doveri del Ricercatore e sulla Dichiarazione dei Doveri dell'Uomo.
Giuseppe De Cecco ha descritto la visione del mondo di De Giorgi, il suo punto di vista sulla matematica come scoperta e come invenzione, sul significato della conoscenza e della categoria ad essa superiore che è quella della sapienza.
Sul ruolo dell'unità della conoscenza, del legame tra discipline scientifiche come la biologia, la fisica, la matematica e discipline umanistiche come la filosofia, tra la scienza e la fede, ha discusso Ferruccio De Stefano.
Impreziosiscono il volumetto alcuni inediti di De Giorgi: *Ennio De Giorgi a Trento il 6.3.1996*, discorso tenuto nel corso della riunione presieduta da Mario Miranda, direttore del Centro Internazionale per la Ricerca Matematica, con la partecipazione di J. Nash; *I giovani e la matematica*, articolo scritto per la rivista "Angolo acuto" rimasto inedito probabilmente perché la rivista cessò le pubblicazioni proprio nell'anno in cui veniva scritto l'articolo, probabilmente il 1979. *I giovani e la matematica* è riproposto in questo fascicolo.

Roberto Chiappi, *Problem solving nelle organizzazioni: idee, metodi e strumenti da Mosè a Mintzberg*, Springer, 2006, pp. 208

Roberto Chiappi ha operato per tantissimi anni nel gruppo E.N.I. nei settori dell'analisi degli investimenti, nella pianificazione strategica e soprattutto nella formazione, in questo libro raccoglie oltre cento schede di strumenti e metodi utilizzati da matematici e filosofi per risolvere i molteplici problemi delle organizzazioni. Il libro si presenta come una lunga carrellata di casi studio che vuole essere una "mappatura della genealogia filosofica e matematica dei metodi di risoluzione dei problemi organizzativi". L'autore mette in rilievo l'apporto che filosofia e matematica possono dare, anche in termini pratici, al *problem solving* e al *decision making*. L'*Introduzione* del libro costituisce una sintetica e ben strutturata presentazione del cosiddetto *problem solving*.
Per parlare di risoluzione di problemi, occorre prima di tutto intendersi su cos'è un problema. L'autore lo descrive come una discrepanza tra la situazione presente e una situazione ideale desiderata. Il *problem solving* è allora il processo attraverso il quale si copre questa distanza, passando dalla situazione attuale a un'altra il più vicino possibile a quella ideale. La prima riflessione è sui soggetti che devono risolvere un problema, in relazione al loro grado di competenza: gli esperti solitamente impiegano una lunga e articolata fase iniziale per inquadrare il problema all'interno di schemi a loro noti, i naif tendono a saltare questa fase iniziale salvo a perdere poi tempo procedendo per tentativi ed errori. La seconda riflessione è sui processi che gli individui possono mettere in atto. Esperti e gruppi di lavoro specializzati affrontano i problemi attraverso i seguenti passi fondamentali: *problem finding*, in cui ci si rende conto di qual è il problema; *problem setting* in cui si definisce e si delimita il problema; *problem analysis* in cui lo si analizza con strumenti specifici; *problem solving* in cui si cerca di risolverlo; *de-*

cision making in cui si scelgono le linee di azione più adeguate. L'esperto, quindi, dedica particolare attenzione al *problem setting* e cioè all'identificazione del problema vero e proprio, cercando di darne anche una rappresentazione e modellazione. La terza riflessione riguarda il problema di per sé: un problema ben strutturato (sono tipici quelli della matematica) può essere affrontato con adeguati algoritmi, viceversa per un problema mal strutturato l'algoritmo risolutivo può non portare alla soluzione oppure pervenire a una soluzione del tutto errata. Circa le attività cognitive messe in atto dai singoli individui per risolvere i problemi, Chiappi ne dà una classificazione in tredici distinte categorie. Ne riportiamo qualcuna: le attività semiotiche in cui si sostituisce un oggetto o una situazione con un simbolo (un gesto, un segnale) che lo rappresenta; le attività di classificazione, di ordinamento e quantificazione; il procedimento per tentativi ed errori con il quale l'individuo tenta una prima soluzione del problema, individua gli errori che quella soluzione produce e affina la soluzione cercando di eliminare gli errori precedenti, quindi ripete il ciclo con la nuova soluzione. Altri metodi di risoluzione appartengono al gruppo delle inferenze: inferenze per analogia, per deduzione e per induzione. L'elenco si chiude con la verifica e la falsificazione.
Una parte rilevante della capacità di risolvere problemi è legata ai metodi dell'apprendimento, di cui Chiappi riporta alcune regole ormai generalmente condivise. Anche di queste regole riportiamo un assaggio: l'apprendimento risulta più efficace quando il soggetto è motivato ad apprendere, quando ha compiti comprensibili, quando ha una conferma della positività del comportamento adottato in un'esperienza precedente, quando gli allievi partecipano attivamente al processo di apprendimento, quando è di tipo sistemico invece che sequenziale, quando non è affidato esclusivamente sul discorso verbale o scritto.
Tra le tesi presentate in questo libro citiamo la circolarità bidirezionale tra Project Management, Problem *solving*. Cioè significa, secondo l'autore, che si può partire con un problema e sviluppare dei progetti per risolverlo oppure si può partire con un progetto di cambiamento e avere, per realizzarlo, molteplici problemi da risolvere.

Consolato Pellegrino e Luciana Zuccheri, *Tre in uno. Piccola enciclopedia della matematica intrigante*, Ediz. ATHENA, 2008



Tre in uno è il risultato di una lunga esperienza degli autori nel campo della didattica della matematica. In poco più di 130 pagine hanno condensato un approccio didattico strutturato su più livelli. Nella *Parte Prima* fa da sfondo un dialogo tra Andrea, giovane amante del gioco e della matematica, e Sofia, nonna di Andrea. Il dialogo è strutturato in forma 'teatrale', può essere utilizzato per una rappresentazione a scuola, può essere trasposto in un fumetto o in un film. I personaggi sono tipici delle situazioni di apprendimento: un nipote che vuole imparare insegnando e una nonnina che fa finta di non sapere e qualche volta effettivamente non sa. Si sa, i bambini trovano più facile parlare con i nonni che con i genitori, perché sono più pazienti e accettano le lezioni dei nipoti 'io so tutto'; di tanto in tanto, al momento giusto, sanno anche come raddrizzare un percorso che rischia di perdersi nel vuoto. Nonna Sofia parte da quello che sta facendo Andrea:

sta giocando al Tangram, un antico gioco orientale che si fa disponendo opportunamente sette pezzi di legno dalle forme geometriche ben definite. Come un po' tutti i giochi non è un semplice passatempo, Sofia probabilmente lo sa ma provocatoriamente dice: "E' roba da ragazzini!" Da qui la reazione di Andrea che spiega il gioco per far vedere che è tutt'altro che roba da ragazzini. Quanto più nonna Sofia cerca di dire che il Tangram è un inutile perditempo tanto più Andrea cerca di dimostrare il contrario. Il gioco del Tangram ha molte analogie con la ricerca matematica e i problemi studiati dai matematici. Il racconto ha poi un altro livello di lettura, specifico per gli insegnanti, che quasi a ogni frase del dialogo possono trovare, nelle ricche e numerose note al testo, spunti per riflessioni e approfondimenti, riferimenti bibliografici e a siti Internet. Dalle numero note ci si rende conto che le parole del dialogo non sono lasciate a caso, ogni affermazione è frutto di un riferimento a studi sistematici sul tema.
La *Parte Seconda* presenta un percorso più o meno libero sulla matematica e la sua storia. Si parte anche qui dal gioco, si passa per la divulgazione e i premi ai matematici famosi, per approdare alla storia della matematica. Anche nel percorso storico gli autori partono dall'indovinello più vecchio del mondo per passare ai tre famosi problemi dell'antichità e arrivare ai moderni problemi dell'infinito matematico. Altri itinerari lungo la storia della matematica sono il rapporto tra la matematica dilettevole e la ricerca matematica dall'altra. Gli autori danno alcuni esempi di situazioni ludiche dalle quali sono nati significativi problemi e teorie matematiche, dal calcolo delle probabilità nato dal gioco dei dadi alla topologia nata da un popolare rompicapo sui ponti di Koenigsberg. Una ulteriore passeggiata nella storia della matematica è quella fatta attraverso le competizioni e le gare, dai rompicapo dell'età classica, come il 'problema dei buoi' proposto da Archimede, alle disfide di Fibonacci che hanno consentito di affermare la notazione arabo-indiana per i numeri, alle disfide di Tartaglia fino alle attuali olimpiadi e gare matematiche per ragazzi.
La *Parte Terza* del libro è una nutrita e puntuale raccolta di riferimenti bibliografici a libri e articoli in italiano che si conclude con una selezione di riferimenti Web raggruppati per categorie.
Un libro pensato e dedicato agli insegnanti che vogliono interessare e motivare gli alunni allo studio della matematica, dal quale possono trarre spunto per attività laboratoriali e di storia della matematica che non siano un semplice riferimento biografico. Chi è interessato può vedere un video degli stessi autori sul tangram e suoi rapporti con la matematica.

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

Anno 2 Numero 6 – Maggio 2008
Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce
Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it