Matematicamente.it Magazine

Rivista di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it
Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Anno 1 – Numero 4 *Ottobre 2007*

Michael Trott, *Cubes along a 3D Lissajous Curve*
Concessione di Wolfram Research

METALLICA 3 - TEOREMA DEI QUATTRO COLORI - METODI INFINITESIMALI NELL'ANTICHITA' - TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI IMPOSTAZIONE ALGEBRICA DELL'ANALISI MATEMATICA - LA MATERIA OSCURA - INTERVISTE - ODIFREDDI - MARTE 2007

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

I contributi da proporre devono riguardare i seguenti temi: storia della matematica e della fisica, didattica della matematica e della fisica, novità dal mondo della ricerca matematica, curiosità matematiche, matematica e cultura.

I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato Word, carattere Times New Roman, 12 pt, formato della pagina A4, interlinea 1. Le formule possono essere in Microsoft equation editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati. Le immagini devono essere sia nel file Word sia fornite a parte come singoli file. Eventuale materiale scannerizzato deve essere salvato in formato TIF alla risoluzione di 300 dpi.

Nella prima pagina andranno obbligatoriamente indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale, istituzione o ambiente professionale di appartenenza.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (3-6 righe), e dovrà terminare con una bibliografia ed, eventualmente, una sitografia finale. Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia. In ogni caso, i contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. All'autore non saranno inviate bozze di alcun tipo.

La responsabilità del contenuto scientifico degli articoli pubblicati è esclusivamente degli autori.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

www.matematicamente.it

* * *

Sommario

Editoriale

Con il numero 4 si chiude il primo anno di attività di Matematicamente.it Magazine. Dal numero di download la rivista è stata apprezzata, se non altro dai collezionisti di pdf. Ma il vero passo avanti è stato fatto nell'aver acquisito sempre più collaboratori e sempre più autori qualificati che hanno voluto dare slancio a questa iniziativa.

Nel periodo estivo-autunnale avrete notato che non siamo stati con le mani in mano. Grazie al preziosissimo contributo tecnico di Nicola Vitale il sito ha fatto notevoli passi avanti e ora ha un'aspetto più pulito e più presentabile sul web. A Nicola va un mio ringraziamento personale per le nottate che ha dedicato a matematicamente.it.

In questo numero continua la storia di Metallica una ragazzina in gamba di cui il protagonista è irrimediabilmente innamorato. Una semplice presentazione del problema dei quattro colori. La prima puntata di una storia del calcolo infinitesimale. Lorenzo Pantieri ci dà una sintesi del suo libro sulla storia della teoria delle distribuzioni. Mauro Cerasoli ci presenta un modo originale di insegnare l'analisi matematica. A Davide che ha vinto il premio per la migliore tesina abbiamo chiesto di farci una sintesi. Io e Luca siamo stati a settembre al congresso dell'UMI e abbiamo colto l'occasione per intervistare qualche matematico di prestigio. Gabriella Zammillo ha incontrato Odifreddi, matematico simpatico e divulgatore impertinente. Domenico ci indica le stelle da osservare nel cielo di Natale.

Antonio Bernardo

52. Metallica
3. Io buffo e i quadri alla parete

di Anna Cerasoli

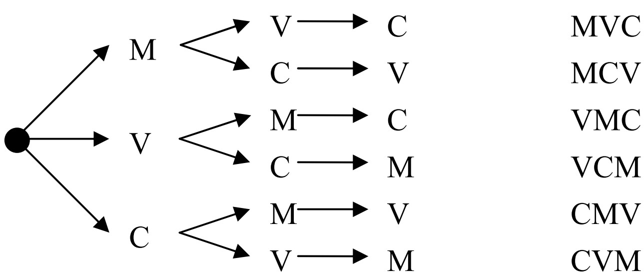
Ho fatto le scale quattro a quattro, la campanella della prima ora era già suonata da un pezzo e non si vedeva più nessuno in giro. Sono sbarcato sul pianerottolo tutto sudato e col fiatone. Alzo gli occhi e chi vedo? Vedo lei che mi viene incontro lungo il corridoio, facendo il solito sorriso di quando scopre una cosa buffa. Accidenti a quell'imbranata di mia sorella che ha sbagliato a mettere la sveglia!

"Fai con calma, non c'è fretta, il prof arriva con un'ora di ritardo" mi ha rassicurato con aria materna. "Il preside ha mandato una supplente che ci lascia studiare quello che vogliamo. Basta che non facciamo casino. Che ne dici se ce ne andiamo in biblioteca e continuiamo a ripassare il calcolo combinatorio?"

Ho accettato e intanto riflettevo che, se mi trova buffo, non ho molte chances di farla innamorare…

Siamo entrati in classe a chiedere il permesso di andare a studiare in biblioteca e così mi sono dovuto sorbire gli sguardi ammiccanti dei miei compagni. Che stupidi! Lei, per fortuna, non si è accorta di nulla.

Una volta in biblioteca ha subito cominciato. "Allora, riprendiamo gli appunti del prof. Oggi ci tocca il *fattoriale.* Lui fa l'esempio dei quadri su una parete, e suppone che siano 3, un Modigliani, un Van Gogh e uno Chagal. In quanti diversi modi si possono allineare? Ancora una volta disegna un diagramma ad albero. Si hanno tre possibilità per scegliere il primo quadro, due per scegliere il secondo perché, ovviamente, sono rimasti da appendere solo due quadri, e una sola possibilità per il terzo. Perciò l'albero ha prima 3 rami, poi 2, e infine 1.



Quindi tutti i possibili allineamenti dei 3 quadri sono 6, cioè 3x2x1."

"Sì, e questo prodotto 3x2x1 viene indicato con il simbolo 3!. Cioè il 3 seguito dal punto esclamativo, che si legge *3 fattoriale.* " ho continuato, e poi ancora "Se di quadri ne avessi 4, allora avrei 4! modi di allinearli, cioè 4x3x2x1, quindi 24 possibili *permutazioni,* così si chiamano i diversi ordinamenti. E, per parlare in generale, se abbiamo *n* oggetti, possiamo permutarli in *n!* modi, con *n!* che si ottiene facendo il prodotto di tutti i numeri da 1 a *n*."

"Mmm, perfetto! Cos'altro c'è da dire? Basta fare degli altri esempi e abbiamo finito…Insomma le permutazioni sono come gli anagrammi, si scambiano tra loro i vari simboli. Per esempio, la parola ROMA si può anagrammare in RAMO, ORMA…"

"…ARMO, OMAR…MORA!" ho proseguito.

"E poi …" ha aggiunto lei guardandomi fisso negli occhi "poi c'è … AMOR." e intanto un sorriso intrigante le affiorava sulle labbra.

Ho avuto un tuffo al cuore e sicuramente sono diventato rosso in viso. Ma non mi ha lasciato il tempo d'imbastire nemmeno una timida risposta perché, lucida, ha continuato "Ma con la differenza che nel gioco degli anagrammi si costruiscono solo le parole che hanno un senso, mentre nelle permutazioni il senso non conta."

Io sono un tipo a cui piace leggere, così ogni tanto riesco a stupirla con qualche citazione, qualche aneddoto o notizia, e non nascondo che quando trovo qualcosa di interessante, di curioso, cerco di tenerla a mente proprio pensando a lei. E' l'unica della mia classe che apprezza più 'conoscere' che 'avere'. Forse la sto mitizzando un po'. Comunque oggi ho fatto colpo. Perché a quel punto le ho riferito una cosa che ha stupito pure me. Immaginiamo che un computer scriva la sequenza delle 21 lettere del nostro alfabeto in un decimo di secondo.

ABCDEFGHILMNOPQRSTUVZ

Immaginiamo ancora di voler permutare le 21 lettere ottenendo tutte le possibili diverse sequenze, come per esempio

BACDEFGHILMNOPQRSTUVZ

Ebbene, occorrerebbero più di 160 miliardi di anni per scriverle tutte. Lei non ci voleva credere, allora sono andato al computer che si trova lì in biblioteca e ho calcolato 21!

$$21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000.$$

Poi ho calcolato il numero di secondi che ci sono in un anno, 31 536 000, ho diviso ed è venuto fuori 162 miliardi, circa.

"Ecco perché si usa il punto esclamativo, perché al crescere di *n,* il valore di *n!* aumenta in maniera sorprendente." ho concluso mentre lei mi guardava incuriosita.

"Sei un tipo buffo tu, però sai un sacco di cose! Non mi annoio mai con te."

Su questa sua frase ho fantasticato tutto il giorno. L'ho scomposta, ricomposta, esaminata, interpretata, me la sono scolpita nella mente. E mi sono convinto che qualche speranza di fare breccia nel suo cuore ce l'ho.

Ma non è finita qui, perché poi abbiamo provato a risolvere due problemi un po' complicati ed io me la sono cavata egregiamente.

Il primo chiedeva di trovare il numero dei modi di sistemare 3 libri di matematica e 2 di fisica su uno scaffale, in maniera che quelli di matematica stiano vicini tra loro come pure quelli di fisica. Ho ragionato così: ci sono 3! permutazioni dei libri di matematica e 2! di quelli di fisica. Ogni permutazione di quelli di matematica può essere abbinata a una qualsiasi di quelle di fisica, perciò, in tutto sono

$$3!2! = 12$$

Nel secondo problema bisognava trovare tutte le permutazioni della parola ANNA. Si presentava la complicazione di lettere non tutte diverse tra loro. Pensa e ripensa alla fine siamo arrivati alla conclusione che sono

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

Infatti, se le lettere fossero tutte diverse tra loro, le permutazioni sarebbero 4!, ma sia la lettera A che la N si ripetono ciascuna due volte. Perciò bisogna dividere il 4! per 2! che sono le permutazioni delle due A, e ancora per 2! che sono le permutazioni delle due N. Per essere sicuri le abbiamo anche scritte. Che soddisfazione! 6 in tutto; né una di più, né una di meno!
Alla fine, visto che il prof si era dimenticato di dare un nome a questo modello di problemi, abbiamo deciso che per noi sarà il modello dei ‘quadri alla parete’.

Il racconto continua nel prossimo numero. Nel frattempo puoi esercitarti a trovare problemi sul modello dei ‘quadri alla parete’ . Tra i 6 problemi che compaiono nel primo racconto ne esiste qualcuno che si risolve con un fattoriale? Prova anche a risolvere i due problemi seguenti che presentano qualche lieve complicazione rispetto al semplice modello dei ‘quadri alla parete’.
1) In quanti modi 5 persone possono sedersi su una panchina, sapendo che due di esse vogliono stare vicine?
2) In quanti modi 5 persone possono accomodarsi attorno a un tavolo rotondo?

53. Il teorema dei quattro colori e la teoria dei grafi

di Anita Pasotti
Assegnista di Ricerca in Geometria Combinatoria, Dip. Mat., Fac. di Ingegneria (Brescia)

Suppose there's a brown calf and a big brown dog, and an artist is making a picture of them… He has got to paint them so you can tell them apart the minute you look at them, hain't he? Of course. Well, then, do you want him to go and paint both of them brown? Certainly you don't. He paint one of them blue, and then you can't make no mistake. It's just the same with maps. That's why they make every state different color…
SAMUEL CLEMENS (MARK TWAIN)

Sunto: *In questo articolo dopo aver introdotto il Teorema dei quattro colori si spiega come esso possa essere formulato in termini di teoria dei grafi. Si raccontano poi i vari contributi che hanno portato alla dimostrazione definitiva del teorema, sottolineando come la dimostrazione finale sia stata possibile grazie ai risultati parziali e alle dimostrazione errate di vari matematici.*

Il più famoso ed affascinante teorema della teoria dei grafi è indubbiamente il *Teorema dei quattro colori* inerente alla colorazione delle carte geografiche.

Abbiamo tutti ben presente cosa sia una carta geopolitica e sappiamo che, per convenzione, si utilizzano colori diversi per stati confinanti al fine di distinguerli. Il Teorema dei quattro colori afferma che data una qualsiasi carta geografica politica è possibile colorare stati adiacenti con colori distinti utilizzando al più quattro colori. Bisogna precisare che per stati adiacenti si intende due stati con almeno un segmento di confine in comune e non solo un punto o più punti isolati. Inoltre gli stati devono essere connessi, cioè ogni stato non può essere formato da due o più parti sconnesse come accade ad esempio per Russia o Stati Uniti d'America.

E' straordinario come un problema apparentemente così semplice sia rimasto in realtà irrisolto per più di un secolo. Della lunga storia di questo risultato ci occuperemo più avanti, vediamo ora, invece, come esso possa essere formulato in termini di teoria dei grafi. Introduciamo alcune nozioni di base [3].

Un *grafo* G è una coppia (V,S) dove V è un insieme di punti detti *vertici* ed S è un insieme di coppie non ordinate di punti detti *spigoli*.
Sia ad esempio G il grafo rappresentato in Figura 1. Si ha V(G)={0, 1, 2, 3, 4} e S(G)={[0,1], [0,2], [0,3], [0,4], [1,2]}.

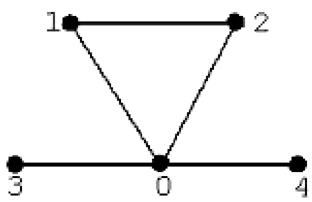


Figura 1

Due vertici si dicono *adiacenti* se c'è lo spigolo che li congiunge. Ad esempio, nel grafo in Figura 1 il vertice 0 è adiacente a tutti gli altri vertici, mentre il vertice 2 è adiacente solo ai vertici 0 ed 1. Una *colorazione* del grafo è una funzione che associa ad ogni vertice un colore in modo che vertici adiacenti abbiano colori distinti. Con *c-colorazione* si intende una colorazione che utilizza *c* colori distinti. Il *numero cromatico* di un grafo è il minimo *c* per cui esiste una *c*-colorazione.

Ad esempio si vede facilmente che il grafo in Figura 2 ha numero cromatico 3, a fianco abbiamo infatti una sua 3-colorazione ed è immediato osservare che una 2-colorazione non esiste.

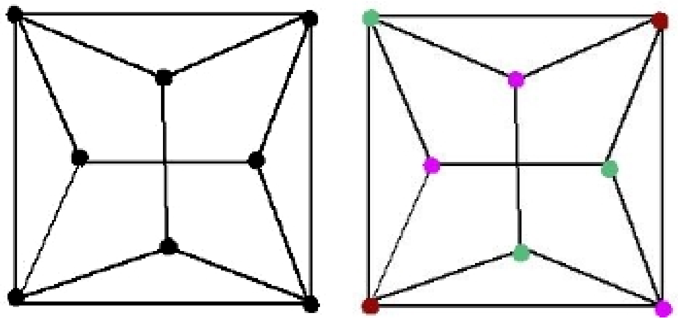


Figura 2

Consideriamo ora una mappa geografica e rappresentiamo ogni suo stato con un punto in corrispondenza della propria capitale e uniamo due punti se e solo se le capitali che essi rappresentano corrispondono a stati adiacenti. In tal modo trasformiamo la carta geografica in un grafo i cui vertici sono le capitali mentre gli spigoli sono i segmenti congiungenti le capitali di stati adiacenti.
Vediamo un esempio concreto. Prendiamo la seguente mappa.

Si vede facilmente che il grafo ad essa associato è il seguente, dove per una sua più facile lettura abbiamo indicato ogni vertice con la prime due lettere dello stato che rappresenta:

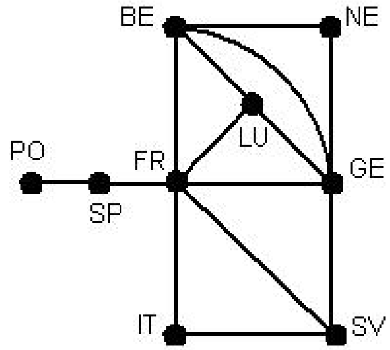


Figura 3

Si può dimostrare che il grafo che si ottiene in tal modo è sempre *planare,* cioè si può disegnare in modo che i suoi spigoli si incontrino solo nei vertici. Allora il Teorema dei quattro colori può essere enunciato nel seguente modo: *ogni grafo planare ammette una 4-colorazione.*

E' immediato trovare un grafo planare che non sia colorabile con solo tre colori, come ad esempio il grafo in Figura 4 che rappresenta una mappa con 4 stati ognuno dei quali confina con gli altri 3.

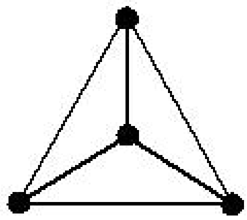


Figura 4

D'altra parte, per induzione sul numero dei vertici, si dimostra che ogni grafo planare ammette una 5-colorazione. Quest'ultimo, come vedremo poi, è un famoso risultato di Heawood del 1890.

Vediamo ora qual è l'origine di questo problema e come è stato affrontato ed infine risolto. Il Teorema dei quattro colori ha una storia molto interessante la cui origine è però vaga. Alcuni sostengono che Möbius conoscesse il problema già nel 1840. In realtà Ball in un articolo del 1892 scrisse che Möbius in una lezione aveva proposto agli studenti la seguente storia chiedendo loro una soluzione: "Un re dell'India con un grande regno aveva cinque figli. Nelle sue volontà decretò che dopo la sua morte il regno dovesse essere diviso in cinque parti in modo che ogni territorio avesse un lato (e non un punto) in comune coi rimanenti. Come venne diviso il regno?"

Möbius sosteneva che il problema non avesse soluzione. E' giusto osservare che affermare che non possono esistere cinque regioni planari ciascuna delle quali confini con tutte e quattro le altre non è del tutto equivalente al Teorema dei quattro colori.

I più sostengono che l'origine del problema risalga al 1852 quando Francis Guthrie, studente di De Morgan, colorando la cartina della contee britanniche si accorse che quattro colori erano sufficienti. Il fatto di non riuscire a trovare una carta che richiedesse più di quattro colori spinse Francis a chiedersi se fosse vero che ogni mappa potesse essere colorata utilizzando solo quattro colori in modo che stati adiacenti avessero colori distinti. De Morgan propose la congettura alla London Mathematical Society chiedendo se qualcuno fosse in grado di risolverla. Moltissimi matematici dedicarono anni della loro vita nel tentativo di dimostrare il teorema. Nonostante nessuno riuscì a provare la congettura, tali tentativi portarono a molti risultati inerenti alle colorazioni di grafi e contribuirono allo sviluppo di altre aree della teoria dei grafi. La prima pubblicazione inerente all'argomento è di Cayley che nell'articolo *On the colouring of maps* (pubblicato nel 1879 dalla Royal Geographical Society) spiega le difficoltà che si incontrano nel cercare di risolvere tale congettura. Nel 1879 Alfred Bray Kempe, un avvocato londinese che studiò matematica a Cambridge sotto la guida di Cayley, pubblicò una dimostrazione della congettura che venne riconosciuta valida per ben undici anni, fino a quando, nel 1890, Percy John Heawood, un docente universitario della Durham England, vi trovò un errore. Nel lavoro *Map colouring theorem,* Heawood afferma che lo scopo di tale articolo era "più distruggere che costruire" poiché avrebbe confutato la dimostrazione di Kempe. In realtà nello stesso lavoro Heawood dimostrò il Teorema dei cinque colori che afferma che ogni mappa ammette una 5-colorazione. L'errata dimostrazione di Kempe ebbe comunque un importante valore poiché per ottenerla introdusse le cosiddette *Catene di Kempe* che verranno poi utilizzate nella dimostrazione definitiva del teorema. Negli anni a seguire sono stati ottenuti vari risultati parziali da molti matematici. Non possiamo non citare Heesch che sviluppò due concetti indispensabili per l'ultima dimostrazione: la *riducibilità* e lo *scaricamento*. Mentre l'idea di riducibilità era già stata studiata da altri ricercatori, quella dello scaricamento è dovuta interamente a Heesch, il quale riteneva che un adeguato sviluppo di questo metodo avrebbe portato alla soluzione del problema. Ciò fu confermato da Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois, nel 1977 quando pubblicarono la loro dimostrazione del Teorema dei quattro colori [1], [2].

Haken cominciò a lavorare al problema nel 1970 e due anni dopo Appel si unì a lui. La loro dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili ad un numero finito, per l'esattezza 1.476, di configurazioni per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso grazie ad un complesso algoritmo informatico che utilizza le catene di Kempe. Fondamentale fu l'aiuto di Koch, un abile studente di informatica, che migliorò man mano il programma. Nel 1976 il teorema era dimostrato. Il programma definitivo aveva avuto ben 500 variazioni da quello originario e fu eseguito su due macchine diverse con algoritmi indipendenti al fine di ridurre al minimo la possibilità di errore. Per analizzare tutti i casi possibili i computer impiegarono circa 1200 ore e servirono più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche che costituivano la dimostrazione.

L'utilizzo di algoritmi informatici nella dimostrazione di Appel e Haken scatenò grandi polemiche nel mondo scientifico, tanto che alcuni matematici ne contestarono la validità non solo per l'impossibilità di verifica manuale, ma anche perché la logica afferma che è impossibile dimostrare la correttezza di un algoritmo. Fino ad oggi nell'algoritmo non è stato trovato alcun errore, ad ogni modo anche se ne viene accettata la validità, la dimostrazione non è certo elegante. Come disse un critico "una buona dimostrazione matematica è come un poema, questa è un elenco telefonico!"

Vogliamo sottolineare che per la dimostrazione finale sono stati fondamentali i contributi parziali di molti matematici che hanno lavorato al problema prima di Appel e Haken, come Heesch e Kempe.
Nel 1997 N. Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour e R. Thomas proposero una dimostrazione [4] al computer che consiste in una riduzione del numero di configurazioni considerate da Appel e Haken a 633. Anche la loro dimostrazione però non è verificabile manualmente.

Infine, nel 2000, Ashay Dharwadker [5] propose una nuova dimostrazione del teorema che richiede l'utilizzo della teoria dei gruppi.

Bibliografia

[1] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable*. Part I. Discharging, Illinois J. Math. 21 (1977), 429-490.
[2] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable.* Part II. Reducibility, Illinois J. Math. 21 (1977), 491-567.
[3] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading MA, 1969.
[4] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, *The four-colour theorem*, J. Combin. Theory Ser. B. 70 (1997), 2-44.
[5] A. Dharwadker, *A New Proof of the Four Colour Theorem*, http://www.geocities.com/dharwadker/, 2000.

54. Metodi infinitesimali nell'antichità

Parte prima: L'infinito negli antichi e il metodo di esaustione

di Luca Lussardi

L'incommensurabilità.

Sebbene il calcolo infinitesimale abbia ufficialmente inizio nel XVII secolo per opere indipendenti di Newton e Leibniz, anche nell'antichità si trovano metodi che possono essere definiti di natura infinitesimale.

Pitagora di Samo nasce nel 571 a.C. e muore nel 496 a.C.; il concetto fondamentale su cui si basa la scuola di Pitagora è il fatto che *tutte le cose sono numeri*. La scuola ionica pitagorica è passata alla storia soprattutto per lo studio teorico della Geometria, anzi dell'Aritmo-Geometria, ovvero dello studio indiviso dell'Aritmetica e della Geometria. Vi è come una specie di culto del concetto di numero (intero) presso i pitagorici, anche se essi non sviluppano una vera e propria aritmetica dei numeri razionali. Non è questa la sede per entrare nei dettagli della scuola pitagorica; vogliamo solo porre l'attenzione sulla crisi che questa scuola ha di fronte alla scoperta di qualcosa che induce a *pensare sull'infinito*: la scoperta delle grandezze *incommensurabili*.

Due grandezze geometriche A e B si dicono *commensurabili* quando esse ammettono un sottomultiplo comune; ovvero se esse risultano essere un numero intero di volte una unità di misura comune. In termini frazionari è suggestiva la notazione $A/B=m/n$, essendo m, n interi.

Il pitagorismo (arcaico) è dell'idea che tutte le grandezze geometriche siano tra loro commensurabili. Tutto quindi, alla fin dei conti, deve essere costruito sui numeri interi; il segmento stesso viene concepito, dai pitagorici, come costituito da un numero finito di punti. La crisi del pitagorismo sta proprio nella scoperta dell'incommensurabilità.

La prova passata alla storia che ha segnato la disfatta del pitagorismo sta nella dimostrazione del fatto che la diagonale del quadrato ed il lato del quadrato stesso sono due segmenti tra loro *incommensurabili*, ovvero non possono avere un sottomultiplo comune. Siano infatti la diagonale ed il lato rappresentati rispettivamente dai due numeri interi n e m (che possono essere supposti anche primi tra loro), rispetto ad una ipotetica unità di misura u. Deve quindi essere $n^2=2m^2$. Il numero n deve essere dunque pari, in quanto n^2 deve contenere il fattore 2; ma allora m deve essere dispari, essendo coprimo con n. Se $n=2p$ allora $4p^2=2m^2$, da cui $2p^2=m^2$, per cui m deve essere pari, che contraddice la coprimalità tra m ed n.

L'incommensurabilità tra due grandezze ha sì provocato una grave crisi nella scuola pitagorica, ma rimane un fatto di natura geometrica: l'incommensurabilità, cioè, deriva da un confronto tra due grandezze, e non da proprietà di certi numeri, per cui per i greci rimane un concetto prettamente geometrico. Ecco che quindi la concezione del segmento costituito da un numero finito di punti deve essere abbandonato, in favore dell'infinità. A questo punto della vicenda si apre la questione su quanto sia lecito suddividere un segmento. Che cosa significa suddividere all'infinito un segmento? L'incommensurabilità va proprio in questa direzione: uno può suddividere il lato del quadrato in un numero arbitrariamente alto di volte, ma senza mai trovare una unità comune alla diagonale, anch'essa divisa un numero arbitrario di volte. Una strada aperta verso l'irrazionalità dei numeri? Oggi si direbbe di sì, ma per i pitagorici non è così: l'Aritmetica dei greci rimane confinata ai numeri interi o frazionari; non vi è quindi una forte connessione tra numeri e Geometria presso i greci. Anche se l'incommensurabilità fornisce un chiaro esempio (a noi) di irrazionalità algebrica, per i greci l'incommensurabilità rimane un fatto esclusivamente di natura geometrica, che non motiva l'esistenza di nuovi numeri che siano in corrispondenza di segmenti tra loro incommensurabili.

L'ingresso dell'infinito in Matematica.

Lo studio della geometria greca induce Zenone di Elea (VI-V sec. a.C.), allievo del filosofo greco Parmenide di Elea (VI sec. a.C.), a mettere in atto una serie di paradossi di natura fisica, che segnano il vero ingresso doloroso dell'infinito in Matematica. Il celebre paradosso di Achille e la tartaruga mette in crisi i matematici del tempo. Supponiamo infatti che la tartaruga ed Achille partano da uno stesso punto, nella stessa direzione, ma Achille con un certo tempo di ritardo, in modo da lasciare alla tartaruga un certo vantaggio, essendo essa più lenta. Ebbene, Zenone si chiede: Achille, essendo anche più veloce dell'animale, lo raggiungerà mai? La domanda è più che sensata, alla luce del seguente ragionamento: nel momento in cui Achille arriva alla posizione che la tartaruga occupava quando Achille è partito, la tartaruga stessa avrà percorso un certo spazio. E quando Achille avrà percorso questo spazio, la tartaruga sarà ancora davanti a lui.... e così via. Stando a questo ragionamento Achille non arriverà mai a raggiungere la lentissima tartaruga. Zenone ribatte che Achille deve raggiungere la tartaruga; sperimentalmente questa è una contraddizione. Ne segue che le ipotesi di partenza sono sbagliate.
E' doveroso sottolineare che Zenone stesso non dà indicazione chiara delle ipotesi che dovrebbero cadere in base a quanto detto. Egli per altro non vuole provare, con ciò, l'impossibilità del moto, come molti sostengono; bensì vuole sottolineare che il moto appare impossibile sotto una certa concezione dello spazio, concezione monadica dei pitagorici. Con la scuola d'Elea si apre l'eterno dibattito sull' *infinito attuale* e *l'infinito potenziale*, accompagnati dal grande problema dell'incommensurabilità. La direzione più comune che si riscontra è quella di bandire l'infinito attuale, ovvero l'infinito visto come ente a se stante (la totalità dei numeri naturali, ad esempio). L'infinito potenziale rimane il vero infinito trattabile (una grandezza è finita, ma può diventare arbitrariamente grande, o arbitrariamente piccola). Questa sarà la chiave concettuale del primo metodo infinitesimale vero e proprio della Matematica greca: il metodo di esaustione.

Il metodo di esaustione.

Il *metodo di esaustione*, ideato dai greci, rappresenta il primo metodo di integrazione. Il rigore assoluto che tale metodo possiede si rivedrà solo nel XIX secolo con l'integrale di Cauchy. Nonostante ciò, il metodo di esaustione è troppo difficile da applicare, e soprattutto possiede un grosso svantaggio, rispetto al moderno calcolo integrale. Il metodo di esaustione infatti non è uno strumento di calcolo, bensì un metodo puramente dimostrativo; esso dimostra in modo rigoroso la validità di certe uguaglianze di aree o volumi, dedotte precedentemente per altra via.
Il metodo di esaustione si fonda su un postulato chiamato *Postulato di Eudosso*, che si trova anche negli *Elementi di Euclide*, dove il metodo viene applicato per la determinazione di aree e volumi. Il Postulato di Eudosso nella sua forma originale dice quanto segue:

Date due grandezze omogenee A e B, con $A<B$, esiste un numero n tale che $nA>B$.

Si avverte in questo postulato la presenza dell'infinito potenziale; infatti esso vuole dire che comunque la grandezza A sia più piccola della grandezza B, ci sarà sempre un multiplo di A che supera B, poichè moltiplicando A per un numero arbitrario di volte è possibile superare qualunque grandezza assegnata (infinito potenziale). Osserviamo che il Postulato di Eudosso è un postulato vero e proprio; infatti esso non vale per ogni coppia di grandezze, ma vale solo per quelle grandezze dette, per definizione, *archimedee*. Non conviene entrare nel dettaglio della presentazione di grandezze non archimedee (e cioè che

non verificano il postulato di Eudosso), ma è doversoso sapere che esse esistono, e questo motiva l'esistenza del Postulato di Eudosso.
La versione euclidea che appare come la definizione IV date nel libro V dice quanto segue:

Si dice che hanno tra loro rapporto le grandezze che possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.

Euclide è quindi pronto per dimostrare il seguente Teorema:

Date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore assunta.

Questo Teorema rappresenta lo strumento fondamentale con cui opera il metodo dimostrativo di esaustione. In astratto il metodo procede nella dimostrazione di una ipotetica uguaglianza A=B dedotta per altra via. Sia B la grandezza incognita, che va provato essere uguale ad A. Si supponga A<B, e si operi su B secondo il Teorema dato da Euclide. Dopo m passi si avrà $A > B / 2^m$ e da qui si cerca di arrivare all'assurdo. Analogamente si procede nel caso di A>B.
Il metodo di esaustione sfrutta quindi l'infinito potenziale, e non l'infinito attuale. E' un rigoroso metodo dimostrativo, ma è versatile? E poi, come intuire la validità di certe uguaglianze che poi andranno dimostrate? L'ingegno di Archimede (287 a.C.-212 a.C.) porta quest'ultimo a deduzioni di formule da dimostrare, facendo uso di metodi meccanici, ovvero da considerazioni di tipo fisico. Archimede quindi deduce la validità di certe formule geometriche, che provvederà a dimostrare con il metodo di esaustione. Nel seguito verrà analizzato un esempio di come Archimede riesce, attraverso il metodo meccanico, a giungere alla formula corretta che fornisce l'area di un segmento parabolico, e quindi di come provvede poi a dimostrare la formula mediante il metodo di esaustione.
Si consideriamo la seguente figura di riferimento per tutto quello che segue:

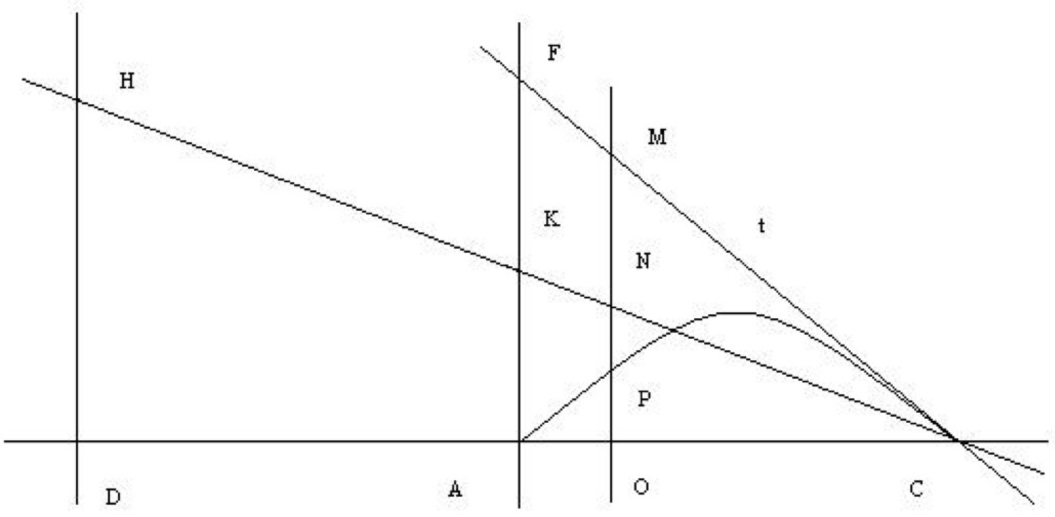


Figura 1

Sia dato quindi l'arco di parabola AC; Archimede intende scoprire la formula che fornisce l'area del segmento parabolico determinato da tale arco (verrà usato un linguaggio matematico moderno, ma le stesse idee e le stesse costruzioni di Archimede).

In riferimento alla figura 1, l'equazione della parabola è data da OP=mAO(a-AO), con m, a >0 e con a=AC. Si dimostra facilmente che vale la seguente relazione:

$$OP \cdot a = OM \cdot AO$$

valevole per ogni punto P dell'arco di parabola. Ecco che in questa relazione Archimede non vede solo una proporzione di natura geometrica, bensì la condizione di equilibrio di una leva. Infatti la proporzione scritta esprime la condizione di equilibrio di una leva con peso OP in un estremo e braccio a, e peso OM nell'altro estremo, con braccio AO. Archimede piazza questa ipotetica leva con appesi due segmenti pesanti materializzati secondo il seguente ragionamento. Sia t la tangente all'arco di parabola in C e sia F il punto di intersezione con la retta ortogonale ad AO. Sia K il punto medio di AF; K è il fulcro della leva che si trova lungo il segmento NH, essendo AD=AC=a. N sarà dunque punto medio di OM, e rappresenta l'estremo della leva dove è applicato il peso materializzato dal segmento OM. Allo stesso modo H è l'altro estremo dell'asta dove viene applicata la materializzazione del segmento OP. Si osservi ora che il segmento OM può essere pensato concentrato in N, suo punto medio. Dunque la totalità dei segmenti OM viene ad essere concentrata lungo la mediana CK. Così facendo la totalità di questi pesi può essere pensata come applicata nel baricentro G del triangolo AFC. Quindi la leva HKG, con la totalità dei segmenti parabolici in H e la totalità dei segmenti OM in G è, in equilibrio. Essendo $AF=a^2$ m, si ha

$$\text{Area}(AFC)=1/2\ a^3m$$

e quindi l'equilibrio della leva dà

$$aS = 1/6\ a^4m$$

avendo denotato con S l'area del segmento parabolico; quindi

$$S = \frac{4}{3}T$$

con T area del triangolo ABC, isoscele sulla base AC.

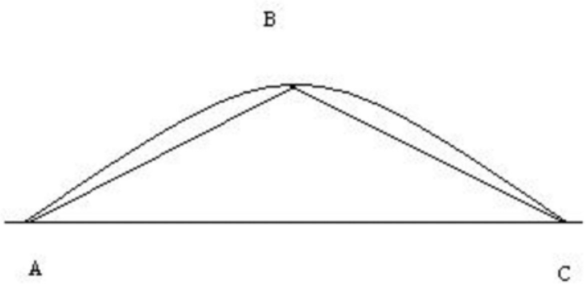


Figura 2

E' stato trovato un candidato per essere l'area del segmento parabolico dato. Archimede ora procederà dimostrando per esaustione il risultato ottenuto per via empirica. Va premesso un Teorema dimostrato dallo stesso Archimede: la formula finale alla quale Archimede arriva, manipolando somme di progressioni geometriche è data da:

$$A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}+\ldots+\frac{A}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{A}{4^n}=\frac{4}{3}A$$

Archimede mette ora in atto la dimostrazione per esaustione; deve quindi dimostrare che vale

$$S=\frac{4}{3}T\ .$$

Siccome T > 1/2 S asportando da S il triangolo T, asportando dalla parte restante i due triangoli costruiti appositamente con area maggiore di metà dell'area rimanente, e di area pari 1/4 T, e così via, si costruisce un poligono di area P_n data da

$$P_n=T+\frac{T}{4}+\frac{T}{16}+\ldots+\frac{T}{4^n}$$

interamente da asportare. Quindi Archimede scrive subito

$$P_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^n}=\frac{4}{3}T$$

da cui

$$P_n=\frac{4}{3}T\ .$$

Si supponga che sia

$$S=\frac{4}{3}T\ ;$$

per n abbastanza grande, in virtù del Postulato di Eudosso, si ha P_n> 4/3 T, che dà subito una contraddizione. Supponendo S< 4/3 T per un certo n risulta S<P_n<4/3 T che conduce ancora ad un assurdo. La formula è quindi rigorosamente dimostrata.
Con Archimede si chiude il periodo glorioso della Matematica greca,e grosso modo si chiude l'evoluzione della Matematica per circa 1700 anni. Va infatti aspettato il tardo medioevo per una rinascita della Matematica, e, nella direzione dell'Analisi, per un'alternativa al metodo di esaustione. Ma il rigore greco sarà perduto, in favore di approcci teoricamente più deboli, ma che per fortuna saranno molto più fecondi.

Bibliografia

Pascal Dupont, *Appunti di Storia dell'Analisi Infintesimale*, Vol. I e II, Libreria scientifica CORTINA, Torino, 1980.

55. Lo sviluppo storico del concetto di funzione e le origini della teoria delle distribuzioni: una sintesi

di Lorenzo Pantieri

Sunto
In questo articolo, che contiene una sintesi del mio libro *Lo sviluppo storico del concetto di funzione e le origini della teoria delle distribuzioni*, mi sono proposto di valutare le motivazioni che determinarono lo sviluppo storico del concetto di funzione e che diedero origine alla teoria delle distribuzioni, evidenziando la differenza che intercorre fra la matematica come sistema organicamente strutturato e come disciplina in fieri: la matematica, nel corso del suo sviluppo storico, sembra infatti molto più simile a una scienza sperimentale, che all'impalcatura ipotetico-deduttiva cui siamo abituati; quest'ultima appartiene alla fase di riorganizzazione logica delle teorie, più che al momento della scoperta vera e propria.

Nel fascicolo dei risultati del primo libro degli Eléments de mathématique di Bourbaki (1939), dedicato alle strutture fondamentali dell'analisi, si legge questa definizione di funzione:

> Siano E e F due insiemi distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta *relazione funzionale in y*, o *relazione funzionale di E verso F*, se qualunque sia $x \in E$, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata con x. Si dà il nome di *funzione* all'operazione che associa così ad ogni elemento $x \in E$, l'elemento y di F che si trova nella relazione data con x; si dice che y è il *valore* della funzione per l'elemento x e che la funzione è *determinata* dalla relazione funzionale considerata. Due relazioni funzionali equivalenti determinano la stessa funzione [Bourbaki, 1939, p. 6].

Il concetto di funzione appare qui definitivamente basato sulla teoria degli insiemi: una relazione funzionale tra due insiemi è definita come un particolare sottoinsieme del prodotto cartesiano $E \times F$.

La definizione in termini insiemistici è l'esito di una discussione che ha accompagnato la storia dell'analisi dalle origini del calcolo infinitesimale nella seconda metà del Seicento. Nella formulazione oggi usuale del concetto di funzione come applicazione fra insiemi astratti va però perduta una delle idee centrali, di natura fisica, che originariamente stavano alla base dell'analisi, l'idea di studiare matematicamente il movimento dei corpi e dunque la "variazione delle grandezze".

1. La nozione euleriana di funzione

I trattati euleriani *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768 – 1770) rappresentano il punto di arrivo della speculazione analitica del periodo, lungo circa un secolo, che va dal 1655, anno al quale risalgono le prime ricerche newtoniane sul metodo delle flussioni, fino alla metà del Settecento. Al contempo, essi rappresentano il punto di partenza dell'analisi matematica moderna che, attraverso i contributi di autori quali Cauchy e Weierstrass, giungerà alla sistemazione concettuale dell'inizio del XX secolo.

Di fatto, l'atteggiamento e il formalismo leibniziano appaiono dominanti nell'analisi matematica del Settecento e, coerentemente con essi, il concetto di dipendenza funzionale fra quantità variabili è quello che Euler (1707 – 1783), sicuramente il matematico più originale e fecondo del secolo, esprime con le seguenti parole:

> Una funzione di quantità variabili è un'espressione analitica composta in modo qualunque da quelle quantità e da numeri o quantità costanti [Euler, 1748, vol. 8, p. 4].

È questa la definizione che si legge in apertura del primo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum*, un trattato "standard" della matematica settecentesca. Qui è già del tutto assente ogni riferimento fisico al movimento dei corpi e il concetto di funzione viene espresso in termini puramente formali come combinazione di quantità (variabili e costanti) e di segni d'operazione.

Col termine "espressione analitica" si intende, per Euler, un'espressione composta da grandezze simboliche e numeri mediante operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice, "alle quali bisogna aggiungere ancora la risoluzione delle equazioni") oppure trascendenti, quali l'esponenziale e il logaritmo "e innumerevoli altre che ci fornisce il calcolo integrale".

A questa distinzione è correlata, per Euler, quella tra funzioni algebriche e trascendenti: le prime sono ottenibili mediante un numero finito di operazioni elementari (le equazioni algebriche sono in linea di principio risolubili algebricamente, è opinione di Euler) mentre per le seconde egli ritiene senz'altro che si possano sviluppare in serie (o comunque mediante un numero infinito di operazioni elementari), senza porsi il problema né della dimostrazione né della legittimità di tali estensioni.

Così, nel quarto capitolo dell'*Introductio*, considera come la maniera più generale di esprimere una funzione una serie del tipo

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots \qquad (1)$$

"Se qualcuno ne dubita – scrive Euler – il dubbio sarà tolto dallo sviluppo di ciascuna funzione [1748, p. 18]". Del resto, come ha osservato Bottazzini (1981, p. 23), le funzioni usate in analisi al tempo di Euler erano, nella grande maggioranza, analitiche nel senso oggi usuale, salvo al più punti "eccezionali" del dominio di definizione e, in singoli casi, si potevano presentare esponenti frazionari o negativi nelle potenze dello sviluppo. Euler osserva sì che la rappresentazione (1) può venir meno in questi punti "eccezionali", ma sostanzialmente si limita alla considerazione di funzioni algebriche ed estende in generale le loro proprietà alle funzioni trascendenti.

Non è difficile, dal nostro punto di vista, rilevare l'inadeguatezza della classificazione euleriana di funzioni algebriche e trascendenti. Infatti il carattere algebrico o trascendente di una funzione non si lascia rivelare da particolare tipo di "espressione analitica" impiegata nella definizione: così serie di potenze possono definire funzioni sia algebriche, come è il caso di

$$y(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots = \sqrt{1+x} \quad \text{per} \quad |x| < 1, \qquad (2)$$

sia trascendenti, come

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \log(1+x) \quad \text{per} \quad |x| < 1. \qquad (3)$$

Il modo di ragionare sostanzialmente formale di Euler, in cui ha un peso decisivo l'analogia supposta esistente tra il finito e l'infinito, è tipica dell'epoca. Tuttavia alcune procedure, oggi ritenute illegittime, non sono non rigorose per Euler: lo sono rispetto ai nostri criteri di rigore, passati attraverso il filtro di duecento anni di sviluppo dell'analisi. Questo è un punto delicato, la cui comprensione è decisiva se si vuole intendere lo sviluppo reale della matematica e non vederlo deformato dalle lenti "razionali" della critica contemporanea.

> Il rigore in matematica è anch'esso un concetto storico e dunque in divenire [...]. Appellarsi all'esigenza di rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi standard di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica o addirittura da problemi in certo senso esterni alla matematica che, trattati matematicamente, impongono mutamenti del quadro teorico [Bottazzini, 1981, p. 13].

Non è un caso che la fisica matematica e più in generale la matematica applicata siano state un motore formidabile per lo sviluppo della matematica pura. E non è neppure un caso che nuovi criteri di rigore si presentino il più delle volte nella formulazione delle definizioni anziché nelle dimostrazioni: il momento della definizione rientra infatti nell'assetto complessivo in cui una teoria si organizza ed è, da un punto di vista storico, conseguente alla scoperta matematica vera e propria.

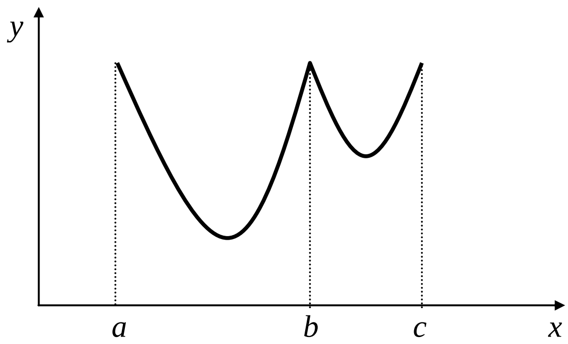


Figura 1. Un esempio di "curva discontinua" nella terminologia euleriana: la curva è "composta da differenti parti determinate da più funzioni di x [Euler, 1749, vol. 9, p. 4]".

La classificazione delle curve operata da Euler rimase standard per un lungo periodo e si ritrova ancora all'inizio dell'Ottocento. Dietro la vaga terminologia dell'epoca (oltre a quelle viste, si parlava di curve "totalmente discontinue", "tracciate con un libero movimento della mano", "che obbediscono alla legge di continuità", "meccaniche", "arbitrarie", "algebriche", "trascendenti", ecc.) si riconoscono, dal nostro punto di vista, due tipi di funzioni: quelle analitiche (che sono le "curve continue" secondo Euler) e quelle continue regolari a tratti (le "discontinue" o "miste" nella terminologia euleriana), mentre non vengono prese in esame le funzioni che oggi sono dette discontinue.

2. La fisica come fonte di problemi d'analisi: Fourier

L'opera di J. B. Fourier (1768 – 1830) impose un'ulteriore revisione al concetto di funzione e comportò un sostanziale ampliamento della classe di funzioni ammissibili in analisi. Nella *Théorie analytique de la chaleur* (1822), Fourier affrontò un problema fisico di grande interesse teorico e pratico: lo studio della natura e della propagazione del calore. Una questione che, fin dalla fine del Settecento, aveva attirato l'interesse di numerosi fisici e matematici.

Nell'integrare le equazioni differenziali ottenute, Fourier fece largo uso di serie trigonometriche, determinandone opportunamente i coefficienti (le "serie di Fourier"); come abbiamo visto, serie di questo tipo erano già note in matematica, ma "senza il background del fenomeno fisico tali questioni sarebbero rimaste delle curiosità matematiche; nell'opera di Fourier sviluppi in fisica-matematica e sviluppi in analisi erano intimamente connessi, fornendosi reciproci stimoli e reciproche motivazioni [Grattan – Guinness, 1972]".

Ciò che sollevò difficoltà fu non tanto l'equazione differenziale ottenuta da Fourier, quanto il metodo da lui adottato per integrarla. Il "nodo della questione" era che, sotto particolari condizioni, le soluzioni si potevano sviluppare in serie trigonometriche. Su questo punto, la memoria di Fourier incontrò obiezioni da parte dei commissari dell'Istituto di Francia (Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix), cui era stata sottoposta per un giudizio.

"Siccome questi risultati sembrano discostarsi dalle ordinarie conseguenze del calcolo – osservava egli a questo proposito – è necessario esaminarli con cura e interpretarli nel loro vero significato". Per esempio, l'equazione

$$y(u) = \cos(u) - \frac{1}{3}\cos(3u) + \frac{1}{5}\cos(5u) - \frac{1}{7}\cos(7u) + \ldots \tag{4}$$

rappresenta nel piano u, y

> [...] una linea composta da parti separate aa, bb, cc, dd, ... di cui ciascuna è parallela all'asse [delle ascisse] e uguale a una semicirconferenza. Queste parallele sono situate alternativamente al di sopra e al di sotto dell'asse a distanza 1 e sono unite dalle perpendicolari ab, cb, cd, ed, ... che fanno anch'esse parte della linea [corsivo nostro] [Fourier, 1822, p. 158].

Per farsi un'idea esatta della funzione definita dalla (4), Fourier suggeriva di considerare in un primo tempo solo un numero finito di termini della serie. In quest'ultimo caso, si ottiene

> [...] una linea curva che passa alternativamente ad di sopra e al di sotto dell'asse u, tagliandolo tutte le volte che l'ascissa u diventa uguale a $\pm\frac{1}{2}\pi,\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,\ \ldots$. Quanto più il numero dei termini dell'equazione aumenta, tanto più la curva in questione tende a confondersi con la linea precedente, composta di rette parallele e rette perpendicolari [Fourier, 1822, p. 158].

Il grafico che ha in mente Fourier (ma non lo disegna) è il seguente:

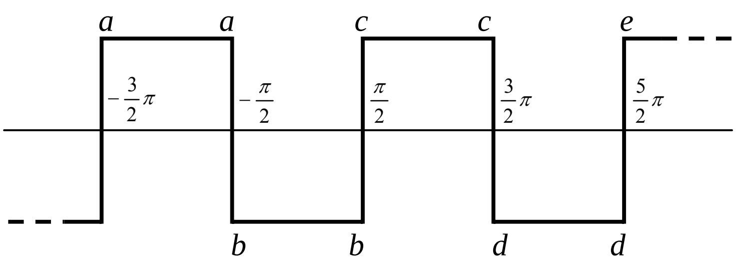


Figura 2. Un esempio di "funzione" somma di una serie trigonometrica dato da Fourier nella Théorie analytique de la chaleur. Per Fourier le perpendicolari ab, cb, cd, ed, ..., fanno anch'esse parte del grafico della funzione [Fourier, 1822]".

Dal punto di vista moderno, certamente un tale grafico non rappresenta una funzione, a meno che non si pensi a una funzione discontinua, immaginando il grafico senza i segmenti di perpendicolare ab, cb, cd, ed, ..., che invece Fourier espressamente considera come parte integrante della curva. In queste considerazioni è implicita la questione importante e delicata della continuità di una funzione, un concetto attorno al quale si intricano le concezioni dei matematici all'inizio dell'Ottocento. Fourier ha a questo riguardo un atteggiamento incerto, oscillante fra l'accettazione del punto di vista euleriano e l'intuizione di una concezione più moderna; anche la descrizione per così dire "genetica" della "spezzata" sopra disegnata testimonia questa sua ambiguità concettuale. Scrive Fourier:

> Risulta dalle mie ricerche che le funzioni arbitrarie anche discontinue possono sempre essere rappresentate da sviluppi in seno o coseno di archi multipli, conclusione che il celebre Euler ha sempre respinto [...]. Gli sviluppi in discorso hanno questo in comune con le equazioni differenziali alle derivate parziali, che essi possono esprimere la proprietà delle funzioni interamente arbitrarie e discontinue; è per questo che si presentano in maniera naturale per l'integrazione di queste ultime equazioni [Fourier, 1822, p. 185].

Che cosa intende qui Fourier per "discontinuità" di una funzione? Sorprendentemente, il primo esempio di "linea discontinua" è proprio la linea aa, bb, cc, ... della figura 2 presentata senza far parola dei segmenti di perpendicolare ab, cb, cd, ... Ciò corrisponde alla "moderna" definizione di continuità (e di discontinuità) che darà Cauchy nel 1821. Immediatamente dopo, però, egli (coerentemente con l'antica concezione euleriana) dichiara "discontinue" linee "composte da archi di parabola e segmenti di retta".

Fourier non enunciò mai le condizioni che deve soddisfare una funzione per poter essere sviluppata in serie trigonometrica. Tuttavia, la sua convinzione che ciò fosse sempre possibile è espressa durante tutto il corso della Théorie. Egli dice anche (1822, p. 196) che le sue serie sono sempre convergenti qualunque sia f(x), che le si assegni o no un'espressione analitica.

È importante osservare come Fourier sottolinei ripetutamente che le sue ricerche non avvengono sulla spinta di una sempre maggiore generalizzazione dei risultati: la generalità è un argomento indotto dai problemi affrontati. Le stesse affermazioni sulla rappresentabilità in serie, che sembrano svolgersi su un terreno esclusivamente analitico, sono da Fourier motivate proprio dalla necessità di risolvere problemi fisici; senza queste, egli dice, non si potrebbe fare un passo in avanti nelle sue ricerche. La matematica deve trovare nella realtà esterna (fisica) stimoli e motivazioni: questa "concretezza" (e anche modernità, dopo più di centocinquant'anni) è l'indicazione che emerge con chiarezza dall'opera di Fourier.

3. Il concetto di funzione di Dirichlet

L'opera di Fourier aveva rivelato che una vasta classe di funzioni può essere rappresentata mediante serie trigonometriche. Rimaneva però aperto il problema di determinare condizioni sufficienti affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Fourier. Gli sforzi compiuti da Cauchy e da Poisson non diedero frutti.

La questione della convergenza delle serie di Fourier fu affrontata da Dirichlet nel lavoro *Sur la convergence des séries trigonometriques* (1829); qui Dirichlet diede il primo insieme di condizioni sufficienti ("condizioni di Dirichlet") affinché la serie di Fourier di una funzione f periodica e continua converga puntualmente ad f. Come esempio di funzione che non soddisfa questa condizione egli dà la celebre "funzione di Dirichlet", una funzione di x che vale c (costante) quando x è razionale e d (costante $\neq c$) quando x è irrazionale.

Dirichlet sembra essere dell'opinione che una funzione continua sia sempre rappresentabile in serie di Fourier. Quando più di vent'anni dopo, nel 1853, Gauss ritorna sull'argomento e gli scrive, ipotizzando la possibilità di estendere la dimostrazione della convergenza delle serie trigonometriche a tutte le funzioni continue, Dirichlet non esita a rispondere: "Dopo un esame più ravvicinato della cosa, trovo completamente confermata la Sua supposizione, se si vuole in qualche modo prescindere da certi casi del tutto singolari [Dirichlet, 1853]".

Che l'ottimismo di Dirichlet sulla portata del suo teorema fosse mal posto sarà chiaro solo nel 1876, quando Du Bois – Reymond (1831 – 1889) renderà noto il controesempio di una funzione continua la cui serie di Fourier non converge puntualmente alla funzione data. In questa circostanza Du Bois – Reymond confermava di aver appreso da una conversazione con Weierstrass "che Dirichlet sembrò non aver mai perso la convinzione della validità del suo teorema".

Commentando il lavoro di Dirichlet, Hankel scriveva nel 1870 che i risultati di Fourier, che avevano ampliato la classe delle funzioni ammissibili in analisi alle funzioni discontinue, avevano definitivamente rivelato insostenibile l'ipotesi tacita, ma decisiva, che le proprietà delle funzioni analitiche si potessero comunque estendere a tutte le funzioni: perciò il vecchio concetto di funzione, che richiedeva che una qualunque funzione fosse rappresentabile analiticamente, si rivelava inadeguato. "Reciso questo nodo", dice Hankel, la via era spianata per una definizione di funzione come la seguente: "y si dice funzione di x se ad ogni valore della grandezza variabile x all'interno di un certo intervallo corrisponde un determinato valore di y, senza riguardo al fatto che su tutto l'intervallo y dipende o no da x secondo la stessa legge, e che la dipendenza sia o no esprimibile da operazioni matematiche".

L'interpretazione di Hankel della definizione di funzione continua (ma come si è visto questa precisazione è subito scomparsa nel suo commento) data da Dirichlet sono state fatte proprie dai moderni storici della matematica: così E. T. Bell vi ha visto la prima formulazione del moderno concetto di applicazioni fra insiemi e ha scritto (1945) che "la definizione di Dirichlet di una funzione (a valori numerici) di una variabile reale come una tavola o corrispondenza, o correlazione, fra due insiemi di numeri, lascia intendere una teoria dell'equivalenza degli insiemi di punti", dando con ciò prova di una notevole libertà interpretativa.

Tutto ciò è molto suggestivo, ma purtroppo non ha nulla a che fare con la storia reale: né Dirichlet propose quella definizione né tantomeno diede l'esempio di funzione "patologica" citato per illustrare l'arbitrarietà della regola di corrispondenza". Ciò che Dirichlet vuole chiarire è semplicemente che una funzione continua si può dare o arbitrariamente con un grafico (e qui la sua idea di funzione continua mostra di essere largamente intuitiva) oppure con una formula matematica, non necessariamente la stessa in ogni parte dell'intervallo [Bottazzini, 1981, p. 156]. L'idea di fondo di Dirichlet è che ogni funzione continua, per quanto arbitrariamente data, sia sviluppabile in serie di Fourier.

Quanto Dirichlet fosse distante da quello che oggi viene generalmente chiamato "il concetto di Dirichlet di funzione" emerge anche da ciò che egli scrive nella stessa memoria del 1837; quando si tratta di discutere il valore della somma della serie di Fourier nei punti di discontinuità della funzione, egli asserisce:

> La curva la cui ascissa è β e la cui ordinata è $f(\beta)$ consiste di più pezzi, la cui connessione è interrotta nei punti dell'asse delle ascisse che corrispondono a quei particolari valori di β, e per ognuna di tali ascisse corrispondono di fatto due ordinate, di cui l'una appartiene alla porzione di curva che termina in quel punto e l'altra alla porzione che vi comincia. Nel seguito sarà neces-

> sario distinguere questi due valori di $f(\beta)$ [corsivo nostro] e li indicheremo con $f(\beta-0)$ e $f(\beta+0)$ [Dirichlet, 1837, p. 156].

Dopo aver provato che la serie di Fourier di una funzione f, periodica e continua a tratti, converge in ogni punto x ∈ R in cui sono soddisfatte le "condizioni di Dirichlet", con somma

$$s(x)=\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] \tag{5}$$

(secondo la notazione introdotta), Dirichlet così commenta:

> Dove si presenta una soluzione di continuità e dunque la funzione ha propriamente due valori [corsivo nostro] la somma della serie, che per propria natura assume per ogni x un valore univoco, rappresenta la semisomma di questi valori [Dirichlet, 1837, p. 159].

Sono al più di questo tipo le funzioni "del tutto arbitrarie" che compaiono già nel titolo delle due memorie e che Dirichlet considera. L'origine dell'attribuzione a Dirichlet del "concetto di Dirichlet" di funzione è verosimilmente da attribuire al suo esempio di funzione "patologica", anche se Dirichlet stesso non sembrava attribuire grande interesse a questa funzione, che non rientrava neppure fra quelle "completamente arbitrarie", per le quali aveva senso parlare di integrale e rappresentazione in serie di Fourier. Il quadro concettuale cambierà solo con la fondazione del calcolo infinitesimale sul concetto di "numero reale", che sta al centro del programma di "aritmetizzazione dell'analisi".

4. Heaviside e il "calcolo operazionale"

Il significato fisico delle funzioni "impulsive" o "improprie" è quello di fornire una rappresentazione di cariche e masse puntiformi. È degno di nota come fisici e matematici siano stati in grado di aggirare abilmente i problemi connessi con questi oggetti, in ambiti dove a noi, oggi, sembrano giocare un ruolo fondamentale.

Nel trattamento delle forze elettriche o gravitazionali, per esempio, la procedura tradizionale consisteva nel trattare per prime le cariche (o le masse) puntiformi e successivamente nel considerare distribuzioni continue di carica (o di massa), mediante l'introduzione di una opportuna funzione densità. In questo modo, però, era impossibile rappresentare in modo rigoroso linee e superficie cariche, come anche le cariche (le masse) puntiformi da cui si era inizialmente partiti. Questa contraddizione logica era il prezzo pagato dai fisici per la mancanza di una teoria delle distribuzioni adeguatamente sistemata.

La situazione che precedette la scoperta della teoria delle distribuzioni sembra per certi aspetti paradossale. Né i fisici né i matematici riconoscevano le funzioni improprie come parte della propria disciplina; i matematici, se le usavano, le consideravano una nozione fisica intuitiva priva di rigore, mentre i fisici le consideravano mere idealizzazioni matematiche prive di significato fisico. Maxwell, nel suo Trattato sull'elettricità e il magnetismo (1873), commenta la formula del potenziale di una carica puntiforme

$$V=\frac{e}{r}, \qquad r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} \tag{6}$$

con queste parole:

> L'espressione del potenziale V [data dalla formula (2.10)] vale nello spazio fuori da una superficie chiusa contenente il punto (a, b, c), ma non possiamo

> supporre, eccetto che per scopi puramente matematici, che questa sia la forma corretta del potenziale in corrispondenza del punto (a, b, c). Infatti, se così fosse, la forza elettrostatica in corrispondenza della carica dovrebbe essere infinita, per cui sarebbe necessaria una quantità infinita di lavoro per caricare un punto con una quantità finita di carica [Maxwell, 1873, p. 81].

L'idea di "funzione impropria", concepita in modo euristico come un oggetto che può essere nullo tranne che in un punto e avere ugualmente integrale non nullo, entra stabilmente nel campo della matematica con le ricerche di O. Heaviside (1850 – 1925).

Heaviside, che di professione era un ingegnere telegrafico e telefonico, si occupò principalmente di elettromagnetismo. Nell'articolo Sugli operatori in fisica matematica (1893), Heaviside, trattando un circuito elettrico, considera una carica data dall'espressione $Q(t) = Q_0 H(t)$, dove $H(t)$ è la "funzione di Heaviside"

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

e Q_0 una costante. Egli calcola l'intensità di corrente $I(t) = pQ(t)$, dove p è la notazione di Heaviside per l'operatore di derivazione d/dt, da lui utilizzato come un "simbolo" algebrico, con una tecnica euristica chiamata "calcolo operazionale". Per Heaviside la "funzione" $I(t)$ è tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} I(t)dt = Q_0$.

> È un nonsenso? È un risultato assurdo che indica la scarsa attendibilità della matematica operazionale o la necessità di qualche modifica della teoria? Niente affatto. Infatti Q è una funzione del tempo, e pQ ha il significato di tasso di variazione istantaneo di Q rispetto a t. Se, come nel caso in questione, Q è zero per $t < 0$ e costante per $t \geq 0$, pQ è zero eccetto che per $t = 0$, dove è infinito. Però l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di pQ è Q_0. In altre parole, pQ è una funzione completamente concentrata all'istante $t = 0$ e tale che il suo integrale dia Q_0. È, per così dire, una funzione "impulsiva". L'idea di impulso è ben nota in meccanica ed è qui sostanzialmente la stessa. [...] La funzione pQ coinvolge gli ordinari concetti di derivata e integrale, spinti al limite (pushed to their limit) [corsivo nostro] [Heaviside, 1893, p. 14].

Le "funzioni impulsive", introdotte in modo euristico come derivate "simboliche" di funzioni discontinue, sono considerate da Heaviside – che qui riprende e sviluppa alcune idee di Fourier (1822) e di Kirchhoff (1882) – oggetti ben determinati, che possono essere rappresentati analiticamente. Egli considera la successione di funzioni

$$f_n(t) = \begin{cases} n & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{8}$$

la cui rappresentazione grafica è data nella figura 3.

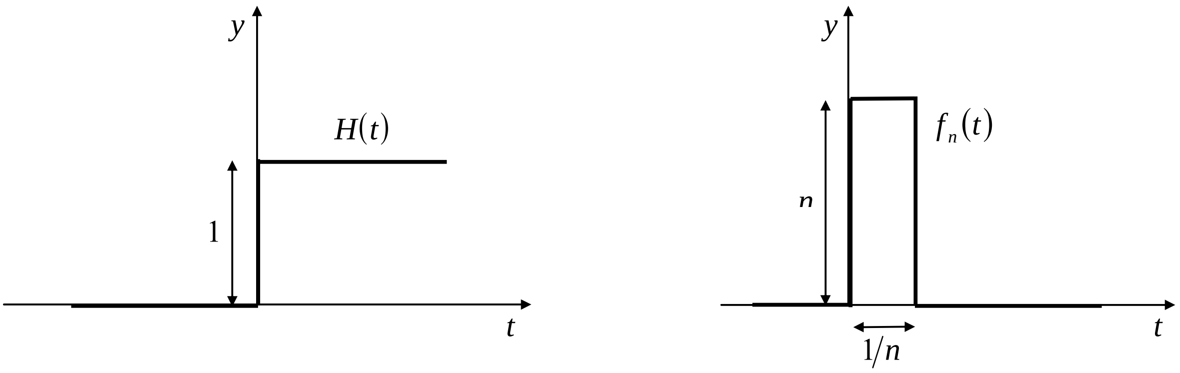


Figura 3. Le "funzioni impulsive", introdotte in modo euristico come derivate simboliche di funzioni discontinue, sono considerate da Heaviside oggetti rappresentabili come limite di una successione di funzioni.

È "geometricamente evidente" che quando $n \to +\infty$ l'altezza della regione rettangolare rappresentata in figura cresce indefinitamente mentre la larghezza diminuisce in modo tale che l'area della regione sia sempre uguale a 1, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1 .$$

Si può quindi immaginare, continua Heaviside, una funzione limite cui tende $f_n(t)$ quando $n \to +\infty$. Questa funzione limite, detta "funzione impulsiva unitaria", coincide con la derivata "simbolica" $pH(t)$ della funzione di Heaviside. L'ingegnere inglese non entrò in maggiori dettagli in questi esempi. È comunque significativo osservare che le sue intuizioni possono essere rese rigorose: le espressioni

$$\frac{d}{dt} Q_0 H(t) = Q_0 \delta(t) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = \delta(t) \tag{9}$$

sono corrette nel senso distribuzionale. Va però sottolineato che le nozioni e i procedimenti euristici usati da Heaviside sollevarono un grande scandalo fra i matematici, ed egli fu addirittura espulso dalla Royal Society di Londra per indegnità teorica.

Negli anni Venti e Trenta diversi matematici, da N. Wiener (1926) e P. Lévy (1926) a B. Van der Pol (1929) e F. K. Niessen (1932), contribuirono a dare una sistemazione teorica al calcolo operazionale di Heaviside; nel 1937 G. Doetsch diede un assetto rigoroso alla teoria della trasformata di Laplace (per funzioni ordinarie), nel cui contesto si collocava anche il calcolo dell'ingegnere inglese. I tentativi di rendere rigoroso il calcolo operazionale si concentrarono però principalmente nella spiegazione della sua manipolazione algebrica di operatori differenziali, mentre i problemi connessi con le "funzioni impulsive" vennero per lo più trascurati. Poiché nella maggior parte delle applicazioni le funzioni impulsive entravano come $pH(t)$ e scomparivano nel risultato, non veniva generalmente loro attribuito alcun particolare significato. In effetti le differenti sistemazioni del calcolo operazionale potevano spiegare il successo dei procedimenti di Heaviside solo nei casi in cui le funzioni impulsive non intervenivano. Alcuni dei matematici impegnati nell'opera di rendere rigoroso il calcolo di Heaviside bandirono tali funzioni trovandole "illegittime" (Doetsch, 1937, p. 57), mentre altri (fra i quali Van der Pol e Niessen) non si preoccuparono della debolezza dei loro fondamenti e le usarono senza curarsi del rigore.

Van der Pol (1929) descrive la "funzione impulsiva unitaria" come segue:

$$pH(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} pH(t)\, dt = 1 \quad . \tag{10}$$

Afferma che tale oggetto può essere definito in modo equivalente come limite di una successione di gaussiane:

$$pH(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} \quad , \tag{11}$$

dove n è "un numero naturale molto grande". Egli inoltre dà la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(pH(t)\right)' \, dt = -f'(0) \quad , \tag{12}$$

che dimostra attraverso un'integrazione per parti. Van der Pol illustra così i suoi argomenti:

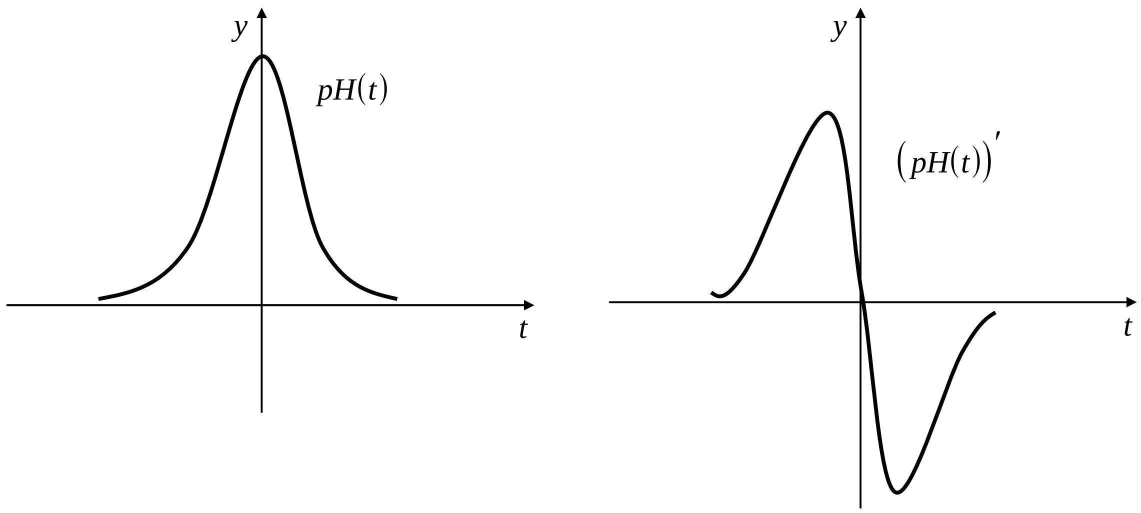


Figura 4. Alcuni dei matematici impegnati nell'opera di rendere rigoroso il calcolo di Heaviside bandirono le "funzioni impulsive" trovandole "illegittime", mentre altri, fra cui Van der Pol, non si preoccuparono della debolezza dei loro fondamenti e le usarono senza particolari commenti.

Per calcolare la trasformata di Laplace

$$L\left[pH(t)\right] = \int_{0}^{+\infty} pH(t)\, e^{-st} dt$$

della funzione impulsiva unitaria, Van der Pol procede come segue. Innanzitutto determina $L\left[f_n(t)\right] = \int_{0}^{+\infty} f_n(t)\, e^{-st} dt$ dove $f_n(t)$ è definita dalla (2.4); ottenuto $L\left[f_n(t)\right] = \frac{1-e^{-s/n}}{s/n}$ mostra che $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}\left[f_n(t)\right] = 1$ e conclude

$$L\left[pH(t)\right] = L\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right] = \lim_{n\to+\infty} L\left[f_n(t)\right] = 1 \tag{13}$$

La debolezza dell'impostazione di Van der Pol e Heaviside è dovuta essenzialmente ad una confusione circa le operazioni con i limiti doppi; va però riconosciuto che la spregiudicatezza del loro modo di procedere coglie, in un certo senso, nel segno. Bisogna sottolineare che tutti i risultati precedenti possono essere resi rigorosi nella teoria delle distribuzioni.

5. La teoria delle distribuzioni di Schwartz

La costruzione della teoria delle distribuzioni venne affrontata sistematicamente dal matematico francese L. Schwartz (n. 1915) fra il 1945 e il 1951.

Come Sobolev, anche Schwartz dedicò gran parte della sua vita scientifica allo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali ed alla risoluzione di problemi di analisi funzionale e di fisica – matematica. Le motivazioni che spinsero Schwartz alla creazione della teoria delle distribuzioni risiedono nella volontà di dare un assetto rigoroso alla categoria delle "funzioni improprie", come la Delta di Dirac e le sue derivate, e al contempo di porre su nuove basi la teoria delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, completando, di fatto, il lavoro di Sobolev.

Nel 1945 Schwartz pubblicò il primo di una serie di quattro articoli, presentati fra il 1945 e il 1948, che contengono le sue idee generali sulle distribuzioni: distribuzioni regolari e singolari, distribuzioni temperate ed L–trasformabili, trasformate di Fourier e di Laplace in senso distribuzionale, prodotto tensoriale, convoluzione ed equazioni differenziali per distribuzioni. Secondo quanto riferisce lo stesso Schwartz (1950, 1974), egli, all'epoca della pubblicazione dell'articolo del 1945, non conosceva il lavoro di Sobolev; fu J. Leray, nel 1946, a richiamare la sua attenzione sul lavoro del matematico sovietico.

I risultati di Schwartz sulle distribuzioni vennero esposti in maniera organica nella monografia Théorie des distributions, in due volumi (1950 – 1951), che divenne immediatamente il trattato standard sull'argomento e che ora esamineremo nelle sue linee essenziali. Per la creazione della teoria delle distribuzioni Schwartz venne insignito nel 1950 della Medaglia Fields.

Dopo aver menzionato l' "audace" calcolo simbolico di Heaviside e gli studi degli "ingegneri elettrici" ad esso ispirati, nella premessa al primo volume della Théorie Schwartz osserva che, dopo l'introduzione della "funzione" di Dirac,

> [...] le formule del calcolo simbolico sono diventate ancor più inaccettabili per il rigore dei matematici. Scrivere che la funzione di Heaviside, uguale a 0 per $x<0$ e a 1 per $x \geq 0$, ha per derivata la funzione di Dirac $\delta(x)$, la cui stessa definizione è matematicamente contraddittoria, e parlare di derivate $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ... di questa funzione priva di esistenza reale, è oltrepassare i limiti che ci sono permessi [Schwartz, 1950, p. 5].

Schwartz osserva inoltre che

> [...] per quanto riguarda le equazioni differenziali alle derivate parziali, l'opportunità di generalizzare le impostazioni tradizionali si rivela impellente nello studio di svariati fenomeni fisici, per i quali si impone la necessità di estendere la classe delle soluzioni ammissibili [Schwartz, 1950, p. 6].

Dopo aver definito le distribuzioni come funzionali lineari e continui su un opportuno spazio di funzioni ("funzoni test") e aver distinto le distribuzioni regolari (che sono indotte da funzioni localmente sommabili) da quelle singolari (come la Delta di Dirac), Schwartz affronta il problema di estendere a tali funzionali alcune operazioni fondamentali dell'analisi matematica, quali, per esempio, la derivazione, la convoluzione e le trasformate di Fourier e Laplace. Schwartz dimostra che le distribuzioni possiedono numerose proprietà notevoli che ampliano le possibilità dell'analisi matematica classica: ad esempio ogni distribuzione è infinitamente differenziabile (in senso generalizzato), le serie convergenti di distribuzioni si possono differenziare termine a termine un numero arbitrario di volte, la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata esiste sempre, e così via. L'uso delle distribuzioni estende in maniera essenziale l'ambito dei problemi considerati e, allo stesso tempo, automatizzando le operazioni elementari, conduce a semplificazioni notevoli (cfr. Pantieri, 2007).

Con la teoria delle distribuzioni di Schwartz, il lungo percorso del pensiero matematico verso la rigorizzazione concettuale delle “funzioni improprie” può dirsi finalmente concluso. Tale sistemazione logica rappresenta il punto di arrivo di oltre cinquant’anni di ricerche, cominciate verso la fine dell’Ottocento da Heaviside con l’introduzione del “calcolo operazionale” e proseguite da Van der Pol con gli studi sulle “funzioni impulsive” e da Dirac con l’introduzione della “funzione δ”.

La monografia di Schwartz divenne immediatamente il lavoro standard sulla teoria delle distribuzioni. Dopo la pubblicazione della *Théorie des distributions*, Schwartz continuò a lavorare alla teoria delle distribuzioni e ad aggiornare il libro, che resta ancora l’esposizione migliore e più completa della teoria. Schwartz applicò le distribuzioni alla teoria delle particelle elementari (1969) ed estese la teoria delle misure di Radon. Nelle mani di Schwartz e dei suoi allievi, la teoria delle distribuzioni si è rivelata uno strumento essenziale sia nell’analisi sia nelle sue applicazioni alla fisica. Secondo Dieudonné (1981, p. 231) “il ruolo di Schwartz nella teoria delle distribuzioni è molto simile a quello giocato da Newton e Leibniz nella storia del calcolo infinitesimale”; un ruolo di sistemazione, sia concettuale sia notazionale, di un algoritmo fra i più “potenti e versatili” dell’analisi contemporanea.

Bibliografia

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime: storia dell’analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri, Torino.

Bourbaki, N. (1939), *Les structures fondamentales de l’analyse. Théorie des ensembles* (fascicule des résultats), Hermann, Parigi.

Dieudonné, J. (1981), *History of functional analysis*, North Holland, Amsterdam.

Dirichlet, P. G. L. (1837), «Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus und Cosinusreihen», *Bull. Sci. Math.*

Euler, L. (1748), *Introductio in analysin infinitorum*, Bousquet, Losanna.

Fourier, J. B. (1822), *Théorie analytique de la chaleur*, Hermann, Parigi.

Grattan-Guinness, I. (1972), *Joseph Fourier*, Cambridge University Press, Cambridge.

Heaviside, O. (1893), «On operators in physical mathematics», Proc. Roy. Soc.

Maxwell, J. C. (1873), *A Treatise on Electricity and Magnetism,* Springer- Verlag, Oxford.

L. Pantieri, *Lo sviluppo storico del concetto di funzione le origini della teoria delle distribuzioni*, Bologna 2007.

Schwartz, L. (1950-1951), *Théorie des distributions*, Hermann, Parigi.

Van der Pol, B. (1929), «On the operational solution of linear differential equations and an investigation of the properties of these solutions», *Phil. Mag.*

56. Impostazione algebrica dell'Analisi Matematica

di Mauro Cerasoli
www.webalice.it/mauro.cerasoli - *Università dell'Aquila, presidente ADT*

Summary. *A new approach to teach the differential and integral calculus, starting from polynomials and Taylor's formula, is presented.*

1. Premessa

Continuare a insegnare l'Analisi Matematica, ovvero ciò che gli anglosassoni chiamano *Calculus*, così come si faceva nel '900, senza tener conto dei computer e dei software come *TI-nspire* e simili, assomiglia a certi comportamenti sociali che il *politicamente corretto* evita di esplicitare, se non si vuole essere presi per maleducati. Una pubblicità della Microsoft faceva vedere gli impiegati Dino e Saura, con la faccia da animali preistorici, invitandoli ad aggiornarsi. Noi ci stiamo provando da circa dieci anni con i docenti di matematica a ogni livello, purtroppo i risultati sono deludenti.

Il termine *matematica da rottamare*, coniato nel 1997 e riportato in [2], sembra sia stato allegramente ignorato dai sacerdoti del sapere e accettato solo per alcuni argomenti ovvii. Ad esempio, quasi tutti hanno rottamato l'algoritmo per calcolare le radici quadrate e i procedimenti lunghi e noiosi che servivano a calcolare logaritmi, seni, coseni e tangenti con le antiche tavole. Oggi *quasi* tutti i docenti di matematica, e sottolineo ancora quasi, ritengono che tali *calcoli*, possano essere effettuati con le calcolatrici. Scientifiche però, nel senso che altri calcoli, come quelli di espressioni algebriche, limiti, derivate e integrali sono vietati all'esame di stato con l'uso delle calcolatrici CAS (Computer Algebra Sistem). Molti però continuano allegramente a perdere mesi sul calcolo di radicali, espressioni a sette piani, limiti, derivate, integrali o nella risoluzione di quelli che Gian Carlo Rota chiamava *word problems*.

Chiedersi il perché di questi divieti, dopo più di un ventennio dall'avvento di formidabili software come *Derive* e *Mathematica*, è ormai solo una perdita di fiato e di tempo. Tra l'altro non vale più la pena preoccuparsi della cosa, visto il crollo dell'interesse da parte dei giovani nei confronti delle discipline scientifiche, in particolare della matematica. Con amarezza torna alla mente il proverbio *è inutile chiudere la stalla quando i buoi sono scappati*.

La matematica viene ancora insegnata, ma fra qualche anno sarà facoltativa anche al Liceo Scientifico e alle Facoltà di Ingegneria, ci scommetto, visto che sta già scappando dalle Facoltà di Economia e di Architettura. Più precisamente, verrà ancora insegnata, ma più che del teorema di Pitagora, o della distanza euclidea, della formula per la risoluzione dell'equazione di terzo grado, della teoria dei gruppi finiti, si parlerà del fatto che Pitagora odiava le fave, che Tartaglia tartagliava, cioè era balbuziente per una sciabolata, che Galois morì ucciso in duello per difendere l'onore di una donna (o di una sgualdrina?) e di altre questioni interessanti, culturali, storiche, diciamo *letterarie*, futili, ma sicuramente *non-matematiche*.

Per coloro invece che ancora credono in un insegnamento vero e utile della matematica, che si aspettano argomenti e contenuti nuovi che ancora sono tenuti fuori dall'aula per motivi corporativi, baronali, libreschi, per coloro insomma che vogliono sentir parlare di matematica e non soltanto di cognitivo e metacognitivo, ho immaginato un modo diverso di introdurre l'Analisi Matematica alla luce di questi software così potenti e a basso costo.

Supponiamo pertanto che i nostri studenti abbiano la possibilità di utilizzarlo e che abbiano studiato e appreso tutti i termini di cui non darò una definizione nel testo a seguire. Gli argomenti di cui tratterò possono essere svolti a partire dalla Scuola Media Superiore e collocati nello spazio e nel tempo a seconda della classe e del docente. In altri termini, non mi pongo il problema di quando presentare gli argomenti successivi ma solo il modo con cui presentarli.

Un ultimo avvertimento: se non si vuole perdere anche la stalla, oltre ai buoi, conviene che i docenti matematici rigorosi, rinuncino alle pretese assurde che *tutto* debba essere dimostrato e presentato in modo rigoroso e preciso. Questo è un mito, o pregiudizio ideologico, che nei licei conviene abbandonare per sempre. Al riguardo si consiglia la lettura di [1].

2. I polinomi in una variabile sono i mattoni del nuovo edificio

Gli allievi negli anni precedenti vengono a conoscenza di espressioni come

$$ax+b \quad \text{oppure} \quad ax^2+bx+c$$

almeno perché hanno risolto equazioni di 1° e 2° grado. Prima o poi è bene che qualcuno dica loro quanto segue. Prendiamo un qualunque numero naturale, ad esempio il numero 1.945 in base 10, che si scrive nella forma

$$1945 = 1\times10^3 + 9\times10^2+4\times10 +5.$$

Se al posto di 10 scriviamo una lettera, per esempio x, il secondo membro diventa

$$x^3+9x^2+4x+5$$

che è meglio scrivere in ordine inverso

$$5+4x+9x^2+x^3$$

Questa espressione, in cui leggiamo nell'ordine 5, 4, 9 e 1 sarebbe stata quella che avrebbe scritto un cittadino arabo o israelita, dato che loro scrivono da destra verso sinistra. Analogamente, il numero 18.074 dà luogo all'espressione algebrica

$$4+7x+8x^3+x^4$$

e 2.007 dà origine a

$$7+2x^3.$$

Se invece della lettera x ne avessimo usato un'altra, ad esempio la t, avremmo scritto

$$5+4t+9t^2+t^3, \qquad 4+7t+8t^3+t^4, \qquad 7+2t^3.$$

Tutte queste scritture, o *espressioni algebriche*, in cui compare la lettera x (o la t), sono chiamate *polinomi* (*polynomials*) nella *variabile* (*variable*) x. Un po' d'inglese non guasta mai per poi navigare su Internet e apprendere, gratis, altra matematica. Ad esempio, cercando *secretary problem*. La x è chiamata *variabile* perché al suo posto, invece di 10 può essere messo un qualsiasi altro numero, come 3, ottenendo un altro risultato numerico. Per il polinomio $5+4x+9x^2+x^3$ avremmo, sostituendo 3 alla x:

$$5+4\times3+9\times3^2+3^3 = 5+12+81+27 = 125.$$

A questo punto, si definiscono i concetti di: *grado* (*degree*), *primo coefficiente* (*leading coefficient*), *zeri* (*zeros*) ecc.. E' ovvio che tutta la parte riguardante le espressioni algebriche intere e fratte, con più di due variabili, comprese le scomposizioni e gli sviluppi, possono essere tranquillamente buttate nella spazzatura o eseguite con TI-*spire*. Per ora non servono a niente, o meglio, servono a fare la gioia dei nemici della Matematica.

In Geometria vengono studiati i poligoni ma prima di tutto si studiano triangoli, quadrati, rettangoli, trapezi, rombi, il pentagono regolare, l'esagono regolare. Cioè i poligoni più importanti che servono per fare mattonelle e altre cose utili. Per analogia, o per una *par condicio mathematica*, bisogna far vedere prima chi sono i *polinomi più importanti*. Il buon senso, l'esperienza e le loro innumerevoli applicazioni suggeriscono i seguenti, messi secondo le mie preferenze, ma che chiunque altro può alterare o sostituire a suo piacere, purché dotati di interessanti applicazioni:

1) il monomio x^n per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Si definisce $x^0 = 1$ per $x = 0$
2) il polinomio *geometrico* $1+x+x^2+x^3+---+x^n$
3) la potenza del binomio $(1+x)^n$.

Soffermarsi sul fatto che quest'ultimi due sono utili in Matematica Finanziaria e Attuariale, ora che i calcoli vengono svolti dal computer, dicendo ad esempio che $(1+x)^n$ è il montante di un capitale unitario al tasso composto x dopo n anni, o analoghi significati pratici per epidemie, utili a studenti di medicina o farmacia, fa sicuramente più bene che dire soltanto che Newton fu fatto baronetto o che era inglese.

4) Il polinomio *fattoriale decrescente* (*falling factorial*) di grado r
5)

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)$$

indicato spesso con la notazione di Pochammer $(x)_n$. Questo polinomio è importante per tre motivi:

a) Il primo combinatorio: uguaglia il numero di disposizioni (*permutations*) semplici di x oggetti presi r alla volta. TI-*nspire* lo calcola con il comando npr(x,r).
b) Il secondo ancora combinatorio: diviso per $r!$ dà il numero di combinazioni di x oggetti presi r alla volta. TI-*nspire* lo calcola con il comando ncr(x,r).
c) Il terzo algebrico: è il polinomio che ha gli zeri più semplici, cioè i numeri naturali 0, 1, 2, 3,…, r-1.

6) Il *fattoriale crescente* (*increasing factorial*) di grado r:

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)$$

che corrisponde al fattoriale decrescente $(x+r-1)_r$.

7) Il polinomio *beta* di parametri naturali α e β positivi:

$$x^\alpha(1-x)^\beta$$

di notevole importanza per $0\le x\le 1$. Conviene anche dire che un polinomio generico

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

è spesso indicato con l'abbreviazione $p_n(x)$ ad indicare che l'espressione, fissati i coefficienti a_k, dipende dalla variabile x e che in seguito si parlerà di funzioni (se non si è già fatto).

Dati i due polinomi $a(x)$ e $b(x)$ si definiscono le operazioni di *addizione* e *moltiplicazione* ovvero i polinomi *somma* e *prodotto*:

$$a(x)+b(x) \qquad \text{e} \qquad a(x)b(x)$$

dicendo che il coefficiente di x^n :

nella *somma* è $a_n + b_n$

nel *prodotto* è $\sum_{0 \le k \le n} a_k b_{n-k}$.

Ognuna di queste operazioni, come per le quattro elementari tra numeri reali o le radici quadrate o cubiche, o il calcolo dei logaritmi, dei seni e coseni, della tangente, viene effettuata con calcolatrici. Far eseguire a mano somme e prodotti di polinomi di grado elevato (per non parlare di frazioni algebriche) oggi dovrebbe essere considerato un reato da battezzarsi *misopedia*, punibile con il carcere, come il suo analogo chiamato *pedofilia*.

Analogamente si introduce il rapporto $a(x)/b(x)$ di due polinomi facendo notare che, come per le frazioni di numeri naturali, può non essere un polinomio e che prenderà il nome di *funzione razionale*, ecc. ecc.

Il tempo risparmiato a non fare calcoli a mano potrebbe essere sfruttato per parlare del *significato probabilistico* del prodotto di polinomi come illustrato in [5] pag. 120. Un po' più difficile è parlare della *composizione* di polinomi, ma ora ne abbiamo il tempo, e far vedere che non è *commutativa*:

$$a(b(x)) \neq b(a(x)).$$

C'è anche tempo per parlare del suo significato probabilistico.

3. La derivata di un polinomio

Per i polinomi le derivate si possono introdurre subito, prima ancora di trattare le funzioni e i loro limiti. Ci vuole poco a dare la seguente troppo facile

Definizione

Si chiama derivata del monomio cx^n rispetto a x il nuovo monomio ncx^{n-1}. La derivata di un polinomio è il polinomio ottenuto facendo la derivata di ciascuno dei suoi monomi.

A parole, la derivata ncx^{n-1} del monomio cx^n si ottiene moltiplicando il coefficiente c per l'esponente n della variabile x e diminuendo n di 1. La derivata di una costante c è uguale a 0.

Dato il polinomio

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

la sua derivata è quindi il nuovo polinomio

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Per esprimere ciò in forma più compatta, ovvero per scrivere che il secondo polinomio è il polinomio derivata (si dovrebbe dire derivato) del primo, si introduce il simbolo D dell'operazione di *derivazione*, ovvero l'*operatore derivata D*, e si scrive

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Ad esempio,

$$D(5+4x+9x^2+x^3) = 4+18x+3x^2.$$

Due semplici casi particolari sono molto importanti:

a) $D(ax+b) = a$
b) $D(ax^2+bx+c) = 2ax+b$.

Qual è il significato di questa nuova *operazione unaria* per i polinomi? Per rispondere bisogna fare qualche passo indietro. Se i due polinomi sono sposati alla variabile y nel senso che gli studenti sanno cosa significa scrivere

$$y = ax+b \qquad \text{oppure} \qquad y = ax^2+bx+c$$

in termini di funzioni, allora è possibile introdurre i grafici dei polinomi, ovvero delle funzioni $y = ax+b$ e $y = ax^2+bx+c$ perché con TI-*nspire* disegnare grafici è facile come calcolare $\sqrt{2}$ con una calcolatrice scientifica: basta sapere come si fa. Una volta che si è fatto vedere, si suppone al biennio, che a queste scritture corrispondono nel piano cartesiano *rette* e *parabole*, allora si può dare anche il *significato geometrico* di derivata in un punto prefissato. Gli studenti sono in grado di controllare algebricamente questa affermazione. Per la retta è banalmente ovvio. Per la parabola è solo un esercizio dimostrare che il *coefficiente angolare* della retta tangente alla parabola di equazione $y = ax^2+bx+c$ nel punto di ascissa x_0 è $2ax_0+b$.

E' facile inoltre far vedere che il polinomio derivata di $f(x)$ è ottenuto anche calcolando prima il *rapporto incrementale*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e, dopo aver semplificato o eliminato h al denominatore, ponendo $h = 0$. Il significato geometrico di tale operazione può essere illustrato facilmente. Allo studente si può dire subito che, fissato un punto di ascissa c, la derivata di $f(x)$ valutata in c, ovvero il numero reale

$$Df(x)_{|x=c}$$

uguaglia il *coefficiente angolare* della *retta tangente* alla *curva* di equazione $y = f(x)$ nel punto $(c, f(c))$. Qui, per i polinomi, non ci sono ancora le complicazioni che nascono quando si parla in generale di funzioni, perché con i polinomi non esistono forme indeterminate del tipo 0/0, né punti in cui la funzione non è definita o non è derivabile.

Il significato fisico di derivata ora è alla portata di tutti, specie per le leggi di Galileo sulla caduta dei gravi: i polinomi in questione sono solo di 1° e 2° grado, cioè i più semplici come quelli citati all'inizio. Anche il calcolo delle derivate si effettua con calcolatrici CAS e farlo fare a mano dovrebbe significare il buscarsi un'altra denuncia di misopedia. Anche rette tangenti e figure varie sono facili da ottenere con TI-*nspire*.

4. Derivate successive e regole di derivazione

L'operazione di derivazione può essere iterata, come per le potenze. Ovvero si può fare la derivata della derivata, cioè la *derivata seconda*, e così via. Le derivate successive si indicano con D^2, D^3, ecc. I seguenti passaggi illustrano il concetto per le derivate successive del polinomio $5+4x+9x^2+x^3$:

$$D(5+4x+9x^2+x^3) = 4+18x+3x^2$$

$$D^2(5+4x+9x^2+x^3) = D(4+18x+3x^2) = 18+6x$$

$$D^3(5+4x+9x^2+x^3) = D(18+6x) = 6$$

$$D^4(5+4x+9x^2+x^3) = \mathrm{D}(6) = 0.$$

Da questo esempio si deduce che la derivata $(n+1)$-esima di un polinomio di grado n è uguale a 0 e così le derivate successive.

Tra il coefficiente generico a_k di un polinomio e le sue derivate successive vale la formula di Mac Laurin (*sizigia*):

$$a_k = D^k f(x)/k!_{|x=0}$$

di facile dimostrazione e di fondamentale importanza per le applicazioni, soprattutto all'interno della matematica.

L'operazione di derivazione gode di alcune proprietà formali che bisogna conoscere. Esse si riferiscono alla derivata della somma, della differenza, del prodotto, del quoziente e della composizione di polinomi $f(x)$ e $g(x)$. Le esprimiamo nelle ben note formule:

$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$

$D(f(x) - g(x)) = Df(x) - Dg(x)$

$D(f(x)g(x)) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$

$D(f(x)/g(x)) = [f(x)Dg(x) - f(x)Dg(x)]/g(x)^2$

La dimostrazione di queste formule è un semplice esercizio di algebra.

4. Le funzioni analitiche

Introducendo la quaterna +… costituita da un segno + e da tre puntini, si passa semplicemente dai polinomi alle *serie di potenze*. Infatti che differenza c'è tra il polinomio

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

e la serie di potenze corrispondente, ovvero la somma di infiniti termini,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \ ?$$

Soltanto un + e tre puntini. E' chiaro che per n = 1.000.000.000!, sì, proprio *un miliardo fattoriale*, la differenza tra i due termini è davvero trascurabile. Ad esempio che differenza c'è tra il polinomio

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{1.000.000.000!-1} + x^{1.000.000.000!}$$

e la corrispondente serie geometrica ottenuta aggiungendo +… alla fine?

Ci vuole poco a far notare che quando si scrivono i tre puntini, cioè si dice eccetera, eccetera, la somma di infiniti termini può creare dei problemi nel senso che può essere infinita o indeterminata. Basta dare qualche esempio. Ci sono dei casi però, quelli che ci interessano in modo particolare, in cui questi problemi non si presentano. Esistono dei polinomi con infiniti termini, detti appunto *serie di potenze*, che hanno una somma finita. E' una verità che viene assunta come assioma in virtù del proverbio che dice: *una bugia a fin di bene vale più di mille verità*. I polinomi infiniti che maggiormente interessano sono i seguenti. Per ciascuno è scritta l'espressione, o *funzione*, con cui vengono indicati in tutto il mondo e l'intervallo della variabile x per cui la somma è finita.

Definizioni

a) la funzione *serie binomiale*

$\sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2/2 + \ldots = (1+x)^\alpha$

α numero reale qualsiasi, $|x|<1$.

b) La funzione *esponenziale*

$\sum_{k\geq 0} x^k/k! = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \ldots = \exp(x) = e^x$.

c) La funzione *logaritmo*
$\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} x^k/k = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots = \ln(1+x)$ con $|x|<1$.

d) La funzione *coseno*
$\sum_{k\geq 0} (-1)^k x^{2k}/(2k)! = 1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 + \ldots = \cos x$

e) La funzione *seno*
$\sum_{k\geq 0} (-1)^{k+1} x^{2k+1}/(2k+1)! = x - x^3/6 + x^5/120 - \ldots = \sin x$

Poiché sulle calcolatrici c'è la funzione tangente, tanto vale dare anche la sua definizione come rapporto:

$$\tan x = \sin x/\cos x$$

con l'avvertenza che $\cos x$ deve essere diverso da 0.

E' facile convincere gli studenti della verità di tali definizioni perché possono controllarle con la calcolatrice. Ad esempio, per $\alpha = ½$ e per $x = 1/3$, la serie binomiale dà $2/\sqrt{3}$. Con TI-*nspire* viene il valore numerico approssimato 1,15470053838 sia se facciamo calcolare $2/\sqrt{3}$ direttamente e sia con

$$\sum_{0\leq k\leq 100} \binom{1/2}{k} 3^{-k}$$

cioè la somma parziale della serie binomiale arrestata al 100° termine.

Si introducono poi le funzioni $f(x)$ a partire dalle sei fondamentali su definite combinate con le quattro operazioni aritmetiche elementari, la composizione e l'inversione. Anche per le funzioni fondamentali si può parlare di derivata.

Definizione
La derivata $Df(x)$ di ciascuna delle funzioni $f(x)$ su definite è la nuova serie di potenze ottenuta derivando ognuno dei termini che la compongono. Pertanto
$D(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$
$De^x = e^x$
$D\ln(x) = 1/x$
$D\cos(x) = -\sin(x)$
$D\sin(x) = \cos(x)$.

6. Il calcolo integrale

Per i polinomi il calcolo integrale diventa una banalità, ad eccezione delle funzioni razionali, cioè dei rapporti di polinomi. Dato il polinomio

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (1)$$

esiste sempre un polinomio di cui esso è la derivata. Basta dividere ciascun termine del polinomio dato per l'esponente della x aumentato di 1 e aumentare l'esponente di 1:

$$a_0x + a_1x^2/2 + a_2x^3/3 + \ldots + a_nx^{n+1}/(n+1).$$

Si scopre però che ne esistono *infiniti* di polinomi che hanno per derivata quello dato: si ottengono aggiungendo una costante arbitraria c a quello trovato. Tutti questi polinomi

$$c + a_0x + a_1x^2/2 + a_2x^3/3 + \ldots + a_nx^{n+1}/(n+1)$$

sono chiamati *polinomi integrali* di (1). Il polinomio integrale di $f(x)$ viene indicato con la scrittura

$$\int f(x)\,dx.$$

Ad esempio

$$\int(5+4x+9x^2+x^3)\,dx = 5x + 2x^2 + 3x^3 + x^4/4$$

a meno della costante c omessa per brevità.

Anche l'integrale di un polinomio viene fornito dal computer con l'apposito tasto. Ma quale è il significato dell'operazione di integrazione? A questo punto, dato il polinomio $f(x)$, si può prendere il grafico della funzione $y = f(x)$ compreso tra un punto di ascissa a prefissato e un altro a destra variabile di ascissa x, per ipotesi (ovviamente non restrittiva, cioè senza perdere in generalità) al disopra dell'asse orizzontale. L'area compresa tra la curva $y = f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette passanti per i punti di ascissa a e $x>a$ è una funzione $F(x)$ del punto x. Se fissiamo un $h>0$, l'area compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e le rette passanti per i punti di ascissa x e $x+h$ vale $F(x+h) - F(x)$. Se h è piccolo a piacere, per esempio 1/1.000.000.000, questa area può dirsi anche quasi uguale al prodotto $hf(x)$ che è l'area del rettangolo di base h e altezza $f(x)$. Ma allora si può scrivere che

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$$

e quindi

$$f(x) \approx [F(x+h) - F(x)]/h.$$

Quando si prende h sempre più piccolo, tende a 0, il secondo membro diventa la derivata di $F(x)$, ovvero $F(x)$ è l'integrale del polinomio $f(x)$.

A questo punto si possono fare i limiti per spiegare che cosa vuol dire che h tende a 0, utilizzando le serie di Taylor. Si vede subito, ad esempio, che $\sin x/x$ vale 1 quando x è 0 oppure che $(1-\cos x)/x^2$ vale ½, sempre per $x=0$. Con Taylor è facile. L'unico prezzo da pagare è accettare senza dimostrazione le definizioni-formule a)-e) del paragrafo precedente.

L'idea di presentare le derivate, gli integrali e le funzioni, partendo dai polinomi, riprende quella di *Edmund Landau* che in [6] presenta così le funzioni goniometriche sin e cos. La stessa storia della matematica ci insegna che tutto il calcolo differenziale e integrale fu sviluppato prima per i polinomi e poi per le funzioni. Perché non lo facciamo anche noi in classe?

Bibliografia

M. Cerasoli:
[1] *Lettera ad un collega a proposito del rigore e delle dimostrazioni nell' insegnamento della matematica*, La Mat. e la sua Did. (1995) 463- 469(ristampato sul Boll. Doc. Mat. (1995) 39-46).
[2] *Riga, compasso e computer*, Boll. Doc. Mat. 36 1998) 63-74.
[3] *Esempi di bufale nell'insegnamento della matematica*, Bol. Doc. Mat. 39(1999)69-81.
[4] *Un nuovo Syllabus di matematica*, Atti Conv. ADT: "Nuovi obiettivi, curricoli e metodologie nella didattica della matematica e delle scienze", Monopoli (BA), 11-13/10/2002, pp. 63-69.
[5] *Elementi di Probabilità*, Costabile Ed., 2005, pp. 208.
[6] E. Landau *Differential and Integral Calculus*, Chelsea P.C (1950)

57. Do I Dare Disturb the Universe?

La ricerca della materia oscura, prove sperimentali e accenni teorici

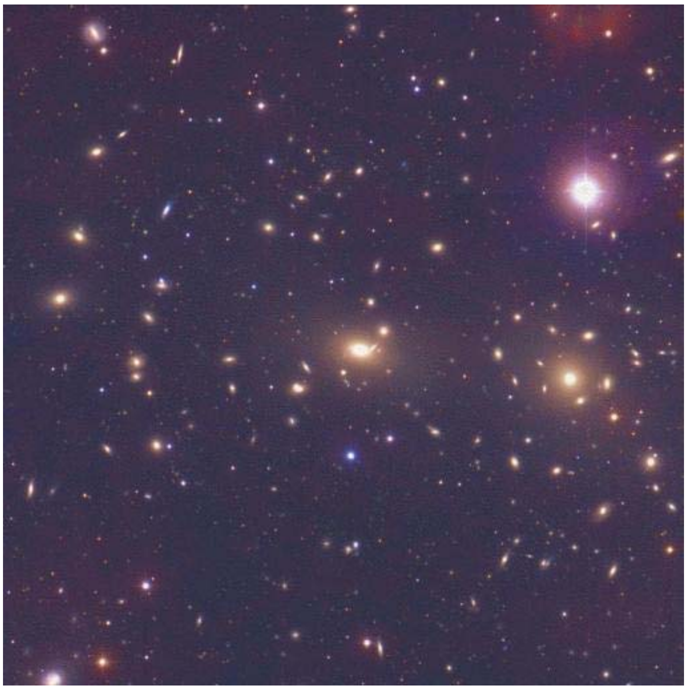
di Davide Gerosa

Premessa

Personalmente mi sento molto affascinato dalla volta celeste, con ciò che mostra e ciò che invece ancora nasconde. Il cielo non è altro che la testimonianza presente del mistero in cui l'uomo è immerso. Sviluppando questa mia passione per l'astronomia e il fascino per l'ignoto proprio di tutti noi, ho scelto di trattare, come lavoro di approfondimento per l'esame di maturità scientifica svolto da me nel 2007, di uno dei grandi misteri che nemmeno la scienza più moderna riesce a comprendere nella sua pienezza. La materia oscura ha una cruciale importanza a livello cosmologico, sul destino dell'Universo, eppure rimane sconosciuta, per ora, alle nostre osservazioni. Analizzare la storia di questa ricerca significa, in parte, percorrere gli ultimi passi dell'umanità verso il cuore del mondo. Nel '900 si fa avanti la concezione che ciò che esiste non è semplicemente quello che vediamo. In arte, letteratura, filosofia la mente comincia ad andare oltre ciò che appare. La ricerca della materia oscura in campo astronomico rappresenta il culmine scientifico di queste concezioni sulla realtà.

1. La nascita della materia oscura

La storia della materia oscura ha le sue radici nel 1933 quando l'astronomo Fritz Zwicky esaminò gli elementi dell'ammasso di galassie (456 elementi) della Chioma di Berenice. Studiò i movimenti delle singole galassie componenti l'ammasso paragonandoli con la legge di Hubble, nota dal 1929. Con sua sorpresa notò gli spostamenti verso il rosso dovuti alla recessione delle galassie variavano molto fra i vari componenti dell'ammasso: vi erano galassie con velocità relative notevoli. Quando stimò la massa totale del sistema sommando il materiale galattico luminoso, trovò qualcosa di molto preoccupante: le singole galassie avevano una velocità maggiore della presumibile velocità di fuga dovuta all'attrazione. Secondo le misure l'ammasso della Chioma non sarebbe dovuto esistere, in quanto le singole galassie dovrebbero sfuggire all'attrazione dell'ammasso. Eppure l'ammasso della Chioma è perfettamente stabile. Zwicky dovette quindi ammettere che la massa attrattiva è maggiore di quella che vediamo.

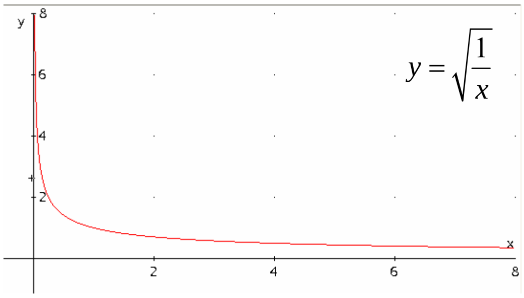


Ammasso della chioma di Berenice - Credit & Copyright: O. Lopez-Cruz (INAOEP) et al., AURA, NOAO, NSF

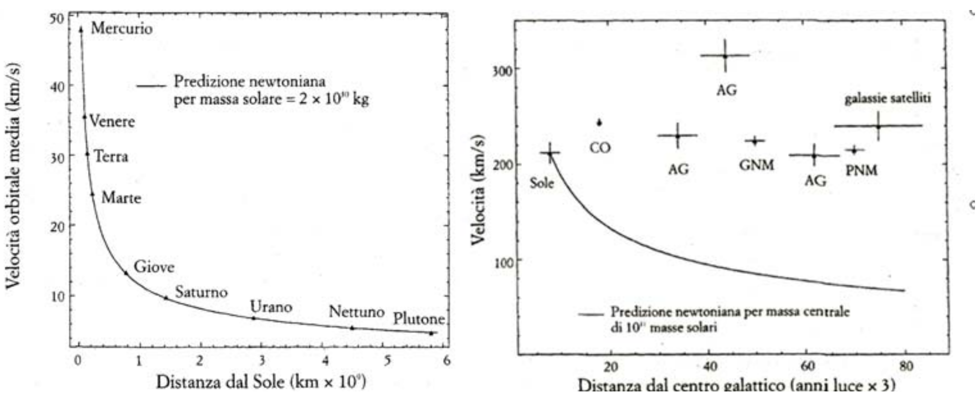
2. Le curve di rotazione

Una delle prove più scioccanti sull'esistenza della materia oscura è costituita dall'andamento delle curve di rotazione nelle galassie a spirale. Un grafico che riporti sulle ascisse la distanza dal centro galattico e sulle ordinate la velocità di rotazione dovrebbe avere l'andamento predetto dalla gravitazione di Newton. Nei piccoli spazi del sistema solare le predizioni sono confermate, ma già esaminando la nostra galassie gli astronomi trovarono anomalie. Furono tracciate curve di moltissime galassie (in particolare galassie a spirale) e tutte si presentavano sostanzialmente piatte, anche a grandissime distanze dal centro galattico. Solo una diversa distribuzione della massa può spiegare queste curve. Venne quindi introdotto un nuovo tipo di materia, detta "oscura", che non possiamo vedere (non emette radiazione elettromagnetica) ma che fa sentire la sua presenza tramite effetti gravitazionali.

$$F_{Centripeta} = m\frac{v^2}{d} \qquad F_{Gravità} = G\frac{m \cdot M}{d^2} \qquad G\frac{m \cdot M}{d^2} = m\frac{v^2}{d} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$



Predizione newtoniana delle curve di rotazione



Curve di rotazione del sistema solare e della via lattea (in Lawrence Krauss: Il mistero della massa mancante, Cortina Raffaello Editore (collana "Scienza e idee), 2000

La Galassia a Spirale M51 in atto di scambiare materia con una vicina galassia irregolare.
Credit: NASA, ESA, S. Beckwith (STScI), and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA).

3. Galassie ad anello polare

Le curve predicono una velocità lineare costante indipendentemente dalla distanza. Nella formula della velocità esposta prima infatti se la massa è esprimibile in funzione della distanza al primo grado, queste si elidono lasciando solamente costanti all'interno della radice quadrata. Pare quindi che intorno ad una galassia a spirale esista un "alone" esteso fino a distanze enormi di materia oscura. Sorgono quindi delle domande: perché dunque nel disco galattico materia oscura e materia luminosa solo in equilibrio, mentre fuori la materia oscura non segue assolutamente la distribuzione di quella luminosa? Non solo: mentre le galassie a spirale visibili sono dischi bidimensionali, gli aloni di materia oscura dovrebbero disporsi in modo sferico! Quasi in risposta a questa domanda gli astronomi hanno scoperto un particolare tipo di galassie: le galassie "Polar-ring" (ad anello polare). Queste mostrano una scia di materiale luminoso orientato perpendicolarmente al disco. Misurando le velocità di rotazione di stelle poste sul disco polare e confrontandole con quelle sul disco galattico principale, sembra che la concentrazione di massa compresa nelle rotazioni segua un andamento lineare e sferico. La materia luminosa potrebbe quindi, in questi casi essersi disposta perpendicolarmente al disco per l'attrazione dovuta agli aloni di materia oscura lì presenti. Questi anelli potrebbero evidenziare con materia luminosa la distribuzione di materia oscura presente.


"Polar Ring" Galaxy NGC 4650A
Image Credit: The Hubble Heritage Team (AURA/STScI/NASA)

4. Effetto Warp

Secondo queste ipotesi quindi, le galassie sono immerse in un involucro sferico di materia oscura. Una conferma di questa immersione può essere trovata nel cosiddetto "effetto warp". Alcuni dischi galattici visti di lato come quello in figura presentano delle torsioni (Warped Galaxy). Come una bandiera che "sventola" nell'aria perché urtata dal fluido in cui è immerso (l'aria, appunto) così, a livelli infinitamente più grande queste galassie subiscono torsioni in quanto immerse in una alone fitto di materia oscura.

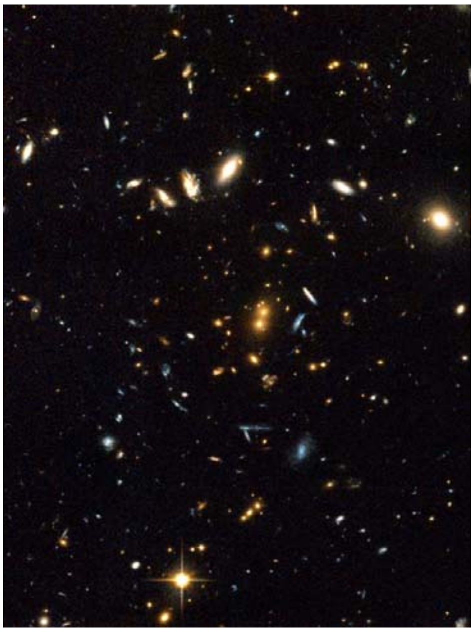

Una bandiera che sventola subisce delle torsioni in quanto immersa nell'aria.
Warped Edge-On Galaxy ESO 510-G13 - Image Credit: NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA) - Acknowledgment: C. Conselice (U. Wisconsin/STScI)

5. Ammassi di galassie: teorema del viriale cosmico

Questi aloni hanno un termine oppure continuano anche negli spazi enormi intergalattici? Il che equivale a chiedere: è possibile pesare strutture molto più grandi come gli ammassi di galassie o i superammassi (ovvero ammassi di ammassi di galassie)? Utilizzeremo una variazione statistica del metodo di Zwicky sulle velocità di fuga (non possedendo infatti dati così precisi come quelli sul "vicino" ammasso della Chioma) sicuri che "nella media" l'analisi rispetterà la distribuzione effettiva delle masse.
Il teorema del viriale dice che: *"dato un sistema di masse le cui interazioni reciproche siano di tipo gravitazionale e tali che i loro moti avvengano in una porzione limitata di spazio allora 2K+U=0 (con K che corrisponde all'energia cinetica del sistema e U che corrisponde all'energia potenziale gravitazionale, entrambe prese in un lungo intervallo di tempo)"*

In pratica se un qualche sistema autogravitante si dispone in equilibrio dinamico, la sua energia totale sarà in equilibrio in un modo fisso (a livello statistico non avrò più un espressione così semplice) fra l'energia cinetica di movimento dei suoi componenti e l'energia potenziale gravitazionale dovuta alla loro stessa massa. Questo teorema è una condizione necessaria per la stabilità del sistema stesso. Anche senza una dimostrazione rigorosa è facile capire che se prevale l'energia termica (cinetica), il sistema si espande (non è più stabile), se prevale l'energia potenziale gravitazionale il sistema si comprime (non è più stabile). Le energie devono quindi mantenersi in una qualche proporzione.

Se energia potenziale e cinetica in un sistema dominato dalla gravità sono strettamente legate, allora le velocità relative delle galassie in un ammasso dovrebbero riflettere l'entità della buca di potenziale nella quale esse sono cadute per ottenere quella velocità. Queste ricerche evidenziano la presenza di una quantità di massa solamente dieci o venti volte maggiore. Questo mio "solamente" non è ironico, ma è in realtà un risultato molto importante: essendo le galassie lontanissime fra loro all'interno dell'ammasso (stiamo parlando di dimensioni che vanno dai 3 ai 30 milioni anni luce) rispetto alla grandezza delle galassie stesse (diametro 90-100 mila anni luce), sappiamo ora che gli aloni non continuano indefiniti riempiendo tutto lo spazio ma sono localizzati solamente intorno al materiale visibile.

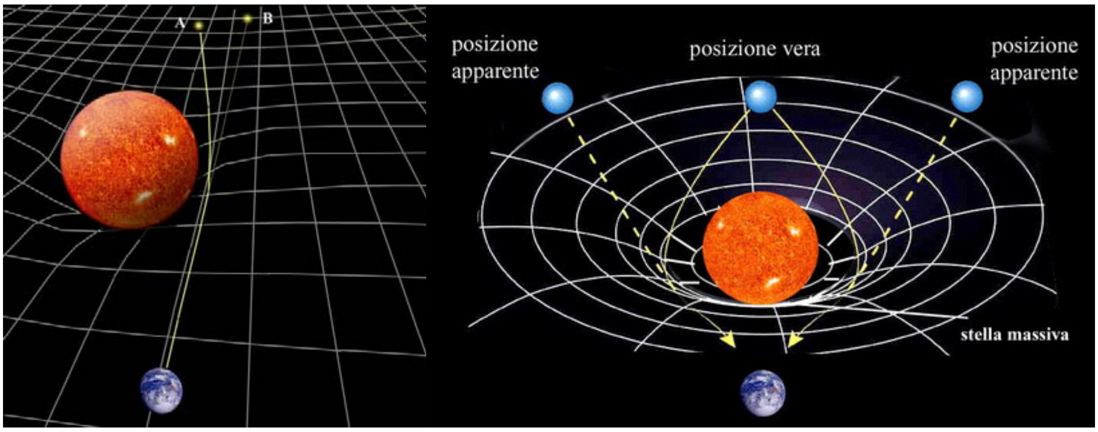


Ammasso RDCS 1252.9-2927 - Credit: NASA, ESA, J. Blakeslee (Johns Hopkins University), M. Postman (Space Telescope Science Institute), and P. Rosati (European Southern Observatory)

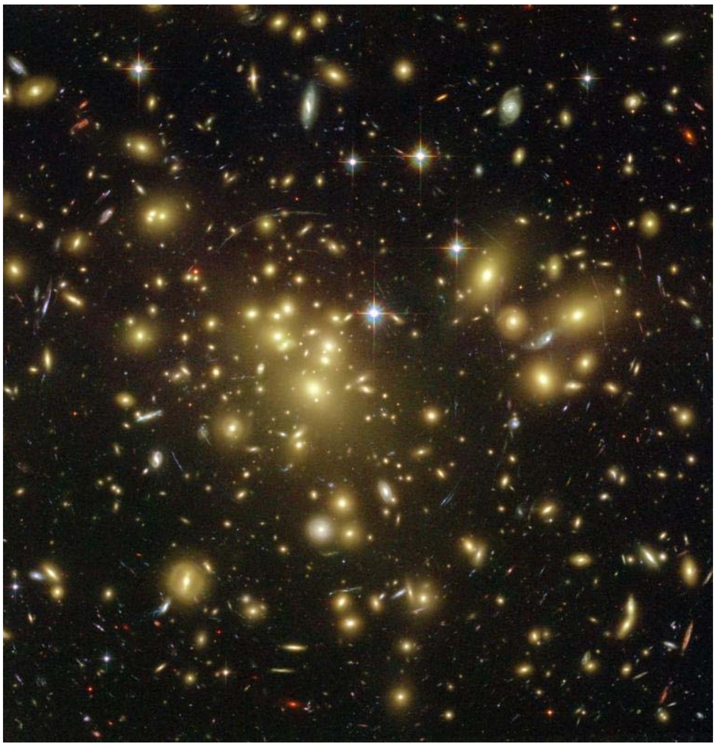
6. Einstein e le lenti gravitazionali

Veniamo ora alla prova più convincente, dopo le curve di rotazione, per l'esistenza di materia oscura. La teoria della relatività generale di Einstein afferma che lo spazio-tempo viene più o meno curvato dalla presenza di una massa; un'altra massa più piccola si muove allora come effetto di tale curvatura. Spesso, si raffigura la situazione come una palla che incurva un lenzuolo con il suo peso, mentre una biglia viene accelerata da questa deformazione del piano ed in pratica attratta dalla prima. Questa è solo una semplificazione alle dimensioni raffigurabili, in quanto ad essere deformato è lo spazio-tempo e non solo le dimensioni spaziali, cosa impossibile da raffigurare e difficile da concepire. Precedendo con le teorie di Einstein, il grande scienziato spiegò anche come la massa e l'energia potessero essere viste sotto la stessa ottica con la famosa formula $E = mc^2$. Masse minori ma comunque considerevoli, come una galassia o un ammasso di galassie sono in grado di curvare la direzione di propagazione del raggio luminoso. Se il raggio è passato vicino ad una grande massa e viene incurvato arriva a noi osservatori con un'altra direzione. Il nostro occhio, che ipotizza sempre una propagazione rettilinea della luce vede quindi la fonte luminosa in una posizione apparente che si discosta da quella reale tanto maggiore è l'entità della massa che ha curvato il raggio. Sfruttando questo principio sessant'anni dopo Einstein furono osservate le prime lenti gravitazionali. I raggi di luce provenienti da una sorgente lontana possono venire curvati da una massa presente sul loro cammino e aggirare la massa in due direzioni, come mostrano i disegni. A noi osservatori ci giungono quindi due fasci luminosi perfettamente identici, in quanto provenienti dalla stessa sorgente. Noi osserviamo più immagini apparenti provenienti da una singola sorgente reale. Queste immagini ci appaiono circondare la massa che ha causato la deviazione.

Studiando l'immagine delle lenti gravitazionali possiamo risalire alla distribuzione di massa che l'ha generata. Le stime sulle lenti gravitazionali prevedono che la massa degli oggetti lenti (principalmente galassie e ammassi) sia di circa 10-30 volte superiore al materiale visibile. Ancora una volta troviamo una stima in accordo con i nostri dati.



Formazione di una lente gravitazionale



Lente gravitazionale prodotta dall'ammasso Abell 1689. Le galassie più lontane appaiono schiacciate attorno all'ammasso centrale- Credit: NASA, N. Benitez (JHU), T. Broadhurst (Racah Institute of Physics/The Hebrew University), H. Ford (JHU), M. Clampin (STScI), G. Hartig (STScI), G. Illingworth (UCO/Lick Observatory), the ACS Science Team and ESA

7. Sulle curvature del cielo

Dalla fine del 800 cominciano a venire meno i fondamenti scientifici classici. La matematica si apre alle geometrie non euclidee. E' possibile creare un modello geometrico coerente ipotizzznado di trovarsi su una superficie curva e non più su un piano. Vengono quindi definite tre geometrie diverse:

1. Geometria euclidea: curvatura nulla;

2. Geometria ellittica: curvatura positiva;
3. Geometria iperbolica: curvatura negativa.

Einstein in fisica prevede la presenza di tre tipi di spazio diversi: a curvatura positiva, negativa, o nulla. Il destino dell'universo è quindi legato alla sua curvatura. In un universo chiuso la materia sarà sufficiente da superare con la forza di gravità l'espansione di Hubble. La materia incurva lo spazio a tal punto da chiuderlo su se stesso, generando così una curvatura positiva. La gravità fermerebbe l'Universo facendolo collassate in un punto, generando una nuova esplosione, detta Big Crunch. In un universo aperto la quantità di materia non è sufficiente a contrastare la forza di gravità. L'universo sarebbe spazialmente infinito e dominato da una curvatura negativa (una geometria iperbolica quindi). L'espansione continuerebbe a livelli sempre maggiori, con velocità costante. L'universo piatto, il più improbabile date le equazioni di Einstein, è un caso limite fra i due. Comporterebbe l'adozione della semplice geometria euclidea (curvatura nulla). Espansione e gravità si annullano perfettamente. La velocità di espansione diminuisce tenendo asintoticamente a zero. Descriviamo la densità di massa con la lettera **Ω** definito come: rapporto fra la densità effettiva e quella critica, ovvero quel valore di densità che generebbe un universo piatto. La densità critica risulta dalle equazioni di Einstein

$$\Omega_0 = \frac{3H_0^{\,2}}{8\pi G} \cong 5\cdot 10^{-30}\,\frac{g}{cm^3}$$

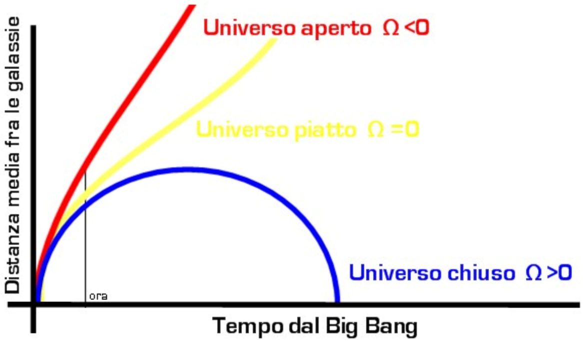
$$\Omega = \frac{densità}{\Omega_0} \quad \text{con } \Omega_0 = \text{densità per Universo piatto (densità critica)}$$

Quindi se:

- **Ω** >0 siamo in presenza di un Universo chiuso
- **Ω** <0 siamo in presenza di un Universo aperto
- **Ω** =0 siamo in presenza di un Universo piatto

Trovare l'esatto valore di **Ω** coincide ora con lo scoprire il destino dell'Universo.

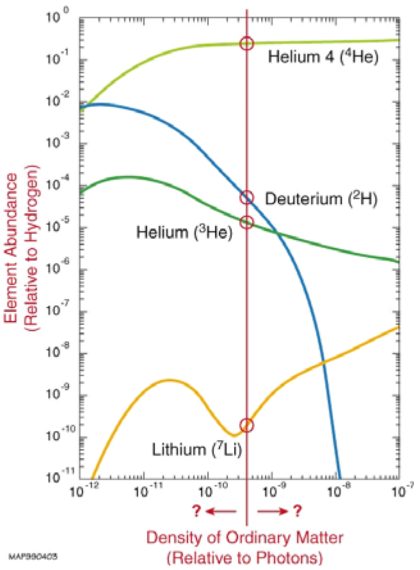
L'astrofisica moderna è portata a credere che l'Universo sia piatto. Bastino alcune affermazione intuitive a sostegno di questa tesi. Tutti gli esperimenti fin'ora effettuati (per esempio moltissimi esami sul viaggio dei neutrini) hanno evidenziato un **Ω** che si scosta pochissimo in positivo da 1. Il discorso ora diventa questo. Supposta intorno ai 13-14 miliardi di anni l'età dell'Universo, se l'Universo non fosse piatto la densità **Ω** si sarebbe discostata immensamente da 1. Se l'**Ω** non fosse stato al momento della creazione esattamente 1, anche solo di un piccolo spostamento, oggi sarebbe *molto* diverso da 1. Il fatto di trovare un **Ω** quasi uguale a 1 ci porta a dire che esso sia 1, e noi non riusciamo a misurarlo alla perfezione. Le prove teoriche e sperimentali sulla nucleosintesi del Big Bang, e dei primissimi istanti di vita del cosmo dimostrano la necessità teorica di un Universo piatto. Se l'Universo è effettivamente piatto come sembra, la materia presente deve essere tale da giustificarlo. La materia visibile fornisce solo l'1%-2% circa della massa necessaria per giungere oggi alla densità critica.



Grafico, il destino dell'Universo. Attraverso **Ω** possiamo definire la fine del nostro Universo.

8. Rapporto barioni\fotoni

La teoria sulla nucleosintesi del big bag (la cosiddetta teoria alfa-beta-gamma dai nomi dei fisici Alpher, Bethe e Gamow) descrive la creazione dei nuclei comuni a seguito della grande esplosione primordiale. Rilevando I fotoni dalla radiazione cosmica di fondo e le abbondanze relative di alcuni nuclei (come il deuterio) è possibile tracciare un rapporto tra la quantità di barioni (ovvero protoni e neutroni) e fotoni nel cosmo. Ad oggi tale rapporto è ritenuto essere intorno a 1 barione per 10^9 fotoni. Essendo conosciuta la quantità dei fotoni presenti nell'universo, perché equivalenti alla radiazione di fondo cosmologica, deduciamo, dalla conoscenza del rapporto fra barioni e fotoni, la materia barionica. La materia barionica dedotta si è rilevata essere in grado di soddisfare Ω per un 5%, sempre nel caso di Universo piatto. Una quantità di massa superiore a 5 volte quella valutata dal punto di vista luminoso. I problemi che sorgono all'orizzonte sono parecchi, ma anche qualche certezza. Sicuramente il rimanente di questo 5% di Ω, partendo dall'1-2% dato dalla materia visibile è composto da materia oscura. Non solo: ora sappiamo che cos'è questa materia oscura: barioni. Infatti il rapporto barioni\fotoni necessita la presenza di più barioni di quelli che osserviamo. Il resto 95% rimane per ora completamente oscuro.



La riga rossa verticale rappresenta la quantità di fotoni dedotta dalla radiazione di fondo. Le righe curve segnano il variare degli elementi al variare della potenza della radiazione iniziale. Con un tale numero di fotoni le osservazioni si accordano perfettamente con le intersezioni fra la riga rossa e le righe curve.

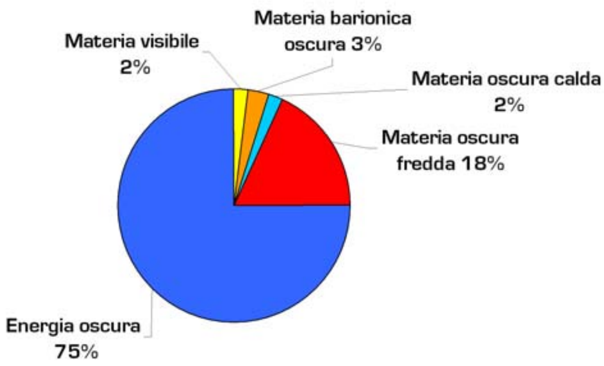
9. Materia oscura barionica: MACHOs

Quella parte della materia oscura che sappiamo essere barionica, per giungere al corretto rapporto barioni\fotoni, si pensa sia costituita da MACHOs. Il termine MACHO (plurale MACHOs) è un acronimo che sta per MAssive Compact Halo Object, ossia oggetto massivo compatto di alone. La categoria dei MACHOs comprende tutti gli oggetti cosmici "usuali" che NON emettono luce: stelle di neutroni, buchi neri, nane brune, pianeti, polveri interstellari. I MACHOs a livello di particelle elementari sono costituite da nuclei atomici convenzionali.

10. Materia oscura calda e fredda

La materia oscura non barionica viene divisa in calda (quando si muove a velocità prossime a c) e fredda (a velocità non relativistiche). Il candidato principale per la materia oscura calda è il neutrino. Questa particella dotata di massa bassissima viene generata in tutte le reazioni nucleari. Un fondo di neutrini riempie l'universo nonostante essi siano così piccoli e veloci da oltrepassare la materia praticamente indenni. Si ritiene che i neutrini coprano il 2% di Ω. Le grandi speranze ricadono quindi sulla materia oscura fredda. Si tratta di particolari particelle esotiche richieste in alcune teorie.
L'assione trova la sua collocazione delle teorie della simmetria per spiegare la conservazione dello spin in alcuni particolari decadimenti.

Il monopolo magnetico è previsto dalla recente GUT (Grande teoria unificata) che unisce le forze fondamentali in più manifestazioni di una sola radice.
Le WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) sono la ultima vera speranza. Una Wimp è un'ipotetica particella dotata di massa che interagisce debolmente con la materia normale solo tramite la gravità e la forza nucleare debole. Non possiedono ne carica elettrica (per non interagire con la forza elettromagnetica) né "colore" (per non interagire con la nucleare forte). Le ricerche si stanno svolgendo in questi anni in Italia al Gran Sasso con l'esperimento DAMA. I primi dati presentano effettivamente rilevamenti di particelle con le caratteristiche desiderate (come il ciclo annuale, dovuto alla rivoluzione terrestre).



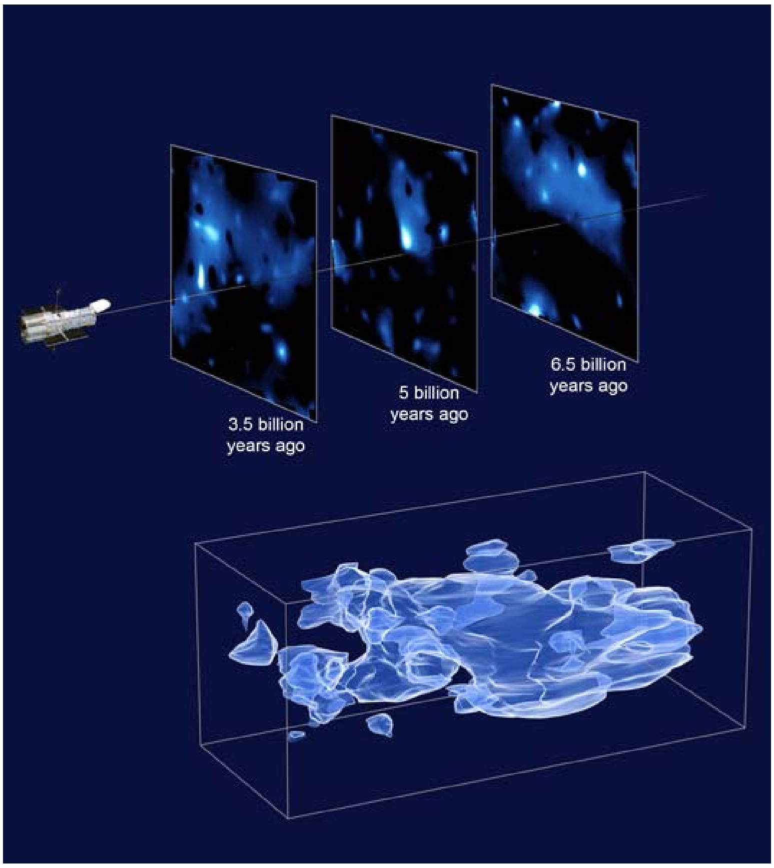
Distribuzione di materia nel cosmo

Arriviamo così al 25% della densità critica. Il resto 75% per cento si pensa che non sia sotto forma di materia, bensì di energia. L'energia oscura potrebbe essere la vera responsabile del destino del nostro universo.

Candidato	Tipo di materia	Percentuale	
Stelle e galassie,	Barionica visibile	2%	5%
MACHOs	Barionica oscura	3%	
Neutrini	Non barionica calda	2%	20%
WIMP e assioni	Non barionica fredda	18%	
Energia oscura	???	75%	

11. Hubble 2007

L'ultimo paragrafo nella storia della materia oscura è recentissimo. Gli sforzi approdano il 7 gennaio del nostro 2007 con la pubblicazione da parte di NASA ed ESA (enti spaziali americano ed europeo) della prima mappa tridimensionale della materia oscura. Questa mappa tridimensionale è la prima rappresentazione della distribuzione fibrosa della materia oscura su grande scala. La mappa rivela una rete libera di filamenti in collasso gravitazionale. La serie di dati è creata separando la sorgente di luce sullo sfondo proveniente dalle popolazioni di galassie in epoche temporali e guardando nel passato. Il processo è calibrato dalla misurazione del redshift o dal fenomeno di lente gravitazionale delle galassie utilizzato per mappare la distribuzione di materia oscura; le sezioni sono separate successivamente in "fette" di distanza ed età temporale decrescente. Notare che il collasso della materia oscura diviene progressivamente più consistente, muovendosi da sinistra a destra attraverso il volume della mappa, dall'Universo primigenio all'Universo attuale.



Mappa tridimensionale della materia oscura - Credit: NASA, ESA, and R. Massey (California Institute of Technology)

Bibliografia

Lawrence Krauss, *Il mistero della massa mancante*, Cortina Raffaello Editore, 2000
Lawrence Krauss, *Il cuore oscuro dell'Universo*, Mondadori, 1990
Robert Ossermann, *Poesia dell'Universo,* TEA Scienze 2000
Kevin Tildsley, *Cielo Notturno*, Fabbri Editore, 2007
Marco Roncadelli, *Quaderni di fisica teorica, Aspetti astrofisici della materia oscura,* Bibliopolis, 2004
AA. VV., *The early history of dark matter,* Publications of the Astron. Soc. of the Pacific, 111, 1999
Le Scienze 405 (Maggio 2002): *Bagliori dalla Materia Oscura*
Le Scienze 464 (Aprile 2007) *Energia Oscura: La mano invisibile dell'Universo*
Umberto Bottazzini, *La quintessenza oscura,* Il Sole 24 Ore
"*A che tante facelle? La Via Lattea tra scienza, storia e arte*" A cura dell'Associazione EURESIS: Catalogo della mostra presentata all'edizione 2006 del Meeting per l'amicizia fra i popoli di Rimini.
Unione astrofili italiani: http://astrocultura.uai.it/ http://www.uai.it/
The DAMA (DArk MAtter Project): http://people.roma2.infn.it/~dama/web/home.html
Università di Trieste: http://physics.infis.univ.trieste.it/
Astronomical Departement of Saint Petersburg State University: http://www.astro.spbu.ru/
Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics: http://www.mpe.mpg.de/
WARP programme: http://warp.pv.infn.it/
Chandra X-Ray Observatory: http://chandra.harvard.edu/
Le immagini astronomiche sono tratte da: Hubble Space Telescope: http://hubblesite.org

58. La matematica in Italia: interviste

di Antonio Bernardo

In occasione del recente congresso dell'UMI a Bari (24-29 set. 2007) abbiamo incontrato alcuni dei partecipanti e gli abbiamo chiesto di parlarci della situazione della matematica in Italia, sia per quanto riguarda la ricerca sia per quanto riguarda la didattica. Le risposte che abbiamo riportato sono quelle di Italo Capuzzo Dolcetta, Eugenio Regazzini e Domenico Lenzi (fuori dal congresso).

B: *Qual è l'utilità di un convegno. Perché è importante che un matematico vada a un congresso.*

Prof. Italo Capuzzo Dolcetta, foto da: http://www.mat.uniroma1.it/people/capuzzo

Capuzzo Dolcetta: L'utilità dipende anche dal convegno. Convegni specialistici su settori limitati sono fondamentali per tenersi al passo per scambiare risultati di ricerca in tempi brevi, con altri partecipanti. L'utilità invece di convegni più generalisti come questo dell'UMI è invece quello di avere un panorama più ampio della ricerca matematica, allargato rispetto al settore di interesse specifico e quindi anche per conoscere persone in settori di ricerca che uno abitualmente non pratica. Serve anche per la valutazione: nella mia attività la valutazione di progetti, conoscere e aver visto le persone è molto utile.

B: *Può dare un quadro semplificato, generale della ricerca matematica in Italia?*

Capuzzo Dolcetta. La ricerca matematica in Italia, tradizionalmente è sempre stata di buona qualità, anzi più che buona. A livello internazionale siamo tra le prime dieci nazioni, non saprei dire esattamente, ci sono diversi di modi di valutare. Ed è anche a largo spettro; siamo in tanti, si lavora su quasi tutti gli argomenti con collaborazioni internazionale. Penso che tutti i settori della matematica sono praticati a vario livello e con varia intensità in Italia oggi.

B: *A proposito della ricerca e della convalida dei risultati della ricerca tra pari. Che cosa fa un referee di una rivista, cosa dovrebbe fare. Come funziona il controllo tra ricercatori?*

Capuzzo Dolcetta. Il referee diventa un'attività sempre più difficile: il numero delle riviste cresce continuamente, il numero dei lavori pubblicati o pubblicabili cresce continuamente, la specializzazione diventa sempre più spinta. Quindi il referee per lavorare bene deve limitarsi a verificare veramente i lavori del suo campo altrimenti rischia di essere incompetente. Si usano molto gli strumenti informatici per andare a cercare link e collegamenti del lavoro che si sta esaminando con altri, perché non tutto si può conoscere, non tutto si può avere a mente. Ci si basa anche su fattori come la partecipazione a convegni dell'autore, che se non si conosce personalmente non si hanno. E ci si basa anche sul parere delle persone; si chiede ai colleghi. Poi la verifica tecnica è puntuale, andare a controllare i calcoli, diciamo.

B: *Dalla ricerca alla divulgazione, che opinione ha della divulgazione della matematica, è difficile divulgare questa scienza, è possibile?*

Capuzzo Dolcetto. Possibile senz'altro sì. Non penso che la matematica sia una scienza così esoterica. Certo è difficile. La difficoltà in sé è soprattutto dovuta al fatto che l'utente della divulgazione ha una bassa cultura matematica. La maggior parte delle persone che leggono giornali o libri, magari hanno una forte competenza sulla divina Commedia - ed è un'ottima cosa - ma sulla matematica più elementare hanno delle difficoltà. Quindi io trovo molto difficile divulgarla. Intanto i matematici non vi si dedi-

cano e sbagliano, soprattutto perché gli utenti hanno una scarsa alfabetizzazione. Vedo questi due aspetti insomma.
Bernardo. La ringrazio professore e buon lavoro.

*** *** ***

B: *Prof. Regazzini, perché un matematico va a un congresso? Qual è l'utilità dei congressi? Si può non partecipare ai congressi e continuare a lavorare nel proprio studio?*

Prof. Eugenio Regazzini, foto da: http://www-dimat.unipv.it/eugenio/

Regazzini: Potrebbe anche restare a lavorare nel proprio studio, però bisogna vedere. Poi ci sono varie tipologie di congressi. Questo è un congresso di tipo generale, della società nazionale della matematica. Penso che periodicamente sia interessante anche vedere un po' tutto il quadro generale. Un congresso di questo tipo può fornire un quadro generale della situazione nazionale in tutti i rami della matematica.
B: *Qual è lo stato della ricerca matematica in Italia, si evince da un congresso di questo tipo?*
Regazzini: Questo non penso sia sufficiente, dà un'idea. Anche perché per circostanze contingenti può capitare che non siano presenti necessariamente tutti i rappresentanti della ricerca matematica.
B: *In generale come giudica lo stato della ricerca matematica in Italia.*
Regazzini: Mi sembra che rispetto alle risorse finanziarie impiegate sia tutto sommato buona. Dal lato capitale umano c'è un impegno e una qualità abbastanza elevata.
B: *Come funziona il controllo della ricerca tra pari, quindi della qualità dei risultai. Che cosa fa un referee di una rivista di matematica per ritenere idoneo un contributo.*
Regazzini: Nel giudizio del referee giocano le preferenze personali, quindi senz'altro c'è una forte componente soggettiva. Quello che si guarda è soprattutto l'originalità del lavoro, accertarsi che il lavoro sia originale e non sia già stato sostanzialmente pubblicato. Secondo, che sia ben scritto, questo è un altro requisito, però non è motivo, in generale, perché il lavoro sia respinto, si possono dare consigli in modo che venga riscritto meglio. In relazione al livello della rivista, il referee può essere più o meno selettivo, in base agli scopi della rivista, a ciò che indica la rivista, alle esigenze che esprime.
B: *Dalla ricerca alla divulgazione il passo è breve o impossibile? Che opinione ha della divulgazione in matematica.*
Regazzini: Io penso che la divulgazione matematica sia abbastanza difficile in sé, però non impossibile. Sarebbe necessario un impegno abbastanza forte, non è banale passare alla divulgazione. Però forse non c'è sempre un impegno adeguato per questa operazione che invece sarebbe necessaria per la matematica, per la visibilità della matematica. Molte volte ci sono certi tipi di divulgazione, molto unilaterali, che non danno necessariamente l'idea vera dello spirito della matematica. Ci sono tentativi senz'altro lodevoli, credo che sia difficile ma bisognerebbe impegnarsi in quello.
B: *Perché la matematica dovrebbe attrarre un giovane e perché invece non lo attrae.*
Regazzini: Io penso che non sia solo italiano questo fenomeno, è un fenomeno diffuso. Io credo intanto che la matematica insegna a ragionare, a ordinare, a vedere le cose in un certo modo; è certamente affascinante. Molte volte ai giovani non viene indicato questo aspetto. Molte volte i primi contatti che un giovane ha con la matematica sono di puro calcolo, qualche piccola dimostrazione ma non sempre … E' poco frequente che gli vengano indicate le possibilità della matematica, non solo le applicazioni che ovviamente sono notevolissime. Poi naturalmente giocano tanti aspetti. Magari anche a parità di interesse, per un giovane può contare molto la scelta professionale, del guadagno, fattori un po' incontrollabili. Certo che se però la matematica non viene adeguatamente divulgata, o insegnata, parlo anche a livello di scuola media, è chiaro che questi aspetti del guadagno, dell'idea che è sbagliata molte volte,

sulla forza che hanno certe professioni rispetto a quelle del matematico, queste idee un po' distorte rimangono e si fanno sempre più forti, se la matematica si riduce a qualche conticino magari noioso.
B: *A questo proposito qual è lo stato dell'insegnamento della matematica?*
Regazzini: Nella scuola superiore io non ho mai insegnato, a parte qualche esperimento che ho un po' seguito, come il progetto delle Lauree Scientifiche. Non mi pare che la scuola media superiore sia adeguata, c'è qualche cosa che non va. Forse è anche colpa dell'insegnamento universitario. Rimane sempre vecchia secondo me, sempre ancorata a vecchi schemi. La matematica cura l'aspetto della didattica, i matematici lo curano, però sempre con una visione molto unilaterale. E' sempre prevalente l'algebretta, non si esce molte volte da quello e quindi un giovane non può trarre dall'insegnamento la portata effettiva della matematica. Invece si potrebbe anche a un ragazzo fino a 19 anni far capire qual è la portata vera della matematica.
B: *Un'ultima domanda: che differenza c'è tra la matematica che si insegna a un ingegnere e quella che si insegna a un matematico.*
Regazzini: Io credo che la matematica debba essere sempre la stessa. Sì certo, a un matematico bisogna dare una base solida. Penso anche per un ingegnere. Penso che la parte di base sia importante. Però come si vede viene tolto sempre più spazio. I colleghi si lamentano molto di questi aspetti. Anche molte critiche vengono rivolte ai matematici perché non rivolgono l'insegnamento alle applicazioni, al contesto. Però io credo che sia difficile rivolgere in modo serio lo sguardo alle applicazioni se non si è data una base adeguata. Quello che manca, in Italia soprattutto, è che non si insegna a fare la matematica. Si impara, si va agli esami a riportare i teoremi dimostrati. Ma non si ha sempre la garanzia che davanti a un problemino che richiede semplicemente l'applicazione di quei risultati, lo studente sia in grado di applicarlo adeguatamente. In Italia si pensa ancora a privilegiare la ripetizione. Ma non si può rinunciare all'insegnamento dei concetti di base. Bisognerebbe anche insegnare a usare le cose. Io vedo negli altri ordinamenti che gli studenti imparano a risolvere problemi e ad applicare quello che studiano.
B: *La ringrazio.*

*** *** ***

B: *Siamo con il prof. Domenico Lenzi, vicepresidente della Mathesis, l'associazione nazionale degli insegnanti di matematica, fisica e scienze. Professore Lenzi, come nasce la Mathesis, con quali esigenze, quali obiettivi.*
Lenzi: Il professore Bernardo usa il presente storico. In realtà, la Mathesis nacque nel lontano 1896, sono 111 anni. La Mathesis a suo tempo nacque con l'intento di promuovere l'insegnamento della matematica e della fisica, e in generale delle scienze. Direi che nel corso di questi 111 anni tra alti e bassi, per quanto è possibile, è riuscita a mantenere accesa la fiaccola della matematica e delle scienze. Anche se questa fiaccola spesso è stata sottoposta a ventate che ci hanno fatto correre il rischio che essa si spegnesse.
B: *Qual è lo stato attuale dell'insegnamento della matematica, a cominciare dalla scuola media?*
Lenzi: A mio avviso è triste. Partiamo dalla scuola media di primo grado. Forse il 10%, ma sono ottimista, di insegnanti di matematica e scienze è laureato in matematica. Io insegno nelle SISS che danno la specializzazione per l'insegnamento nella cattedra di matematica e scienze. Non so con precisione da quanti anni insegno, debbo dire che non ho mai avuto studenti che fossero laureati in matematica, con tutte le conseguenze che questo comporta. Nella scuola media superiore arrivano studenti che non hanno una sufficiente preparazione in matematica, hanno spesso un'idea distorta della matematica e non conoscono quelli che sono i fondamenti della matematica e quindi l'insegnamento della matematica lascia a desiderare anche nella scuola superiore.
B: *Secondo lei come dovrebbe prepararsi un docente, che cosa gli manca dopo la laurea? Che cosa dovrebbe conoscere in più.*

Lenzi: Purtroppo gli manca qualcosa che già l'università gli dovrebbe dare. Io ho seguito di recente un dibattito su una mailing list: i docenti lamentano anche l'impossibilità per ragioni economiche di partecipare a convegni di matematica rivolti alle problematiche dell'insegnamento. Le cose che dovrebbero sapere sono tante, a partire dai fondamenti della matematica, un po' di storia della matematica. Sono tutte cose che si insegnano qualche volta ma a macchia di leopardo nelle università italiane. C'è molto, molto da fare.
B: *L'insegnamento nelle università lo vede un po' diverso o anche quello è in crisi?*
Lenzi: L'insegnamento universitario non posso dire che sia in crisi. Almeno nell'Università di Lecce quest'anno abbiamo quasi 90 iscritti al primo anno di matematica. E' una grossissima cifra. Io mi auguro che non si perdano per strada. A Lecce abbiamo un ritorno di fiamma che lascia ben sperare. Sta a noi docenti universitari fare in modo che queste persone traggano profitto da questo loro impegno.
B: *A parte i dati di quest'anno c'è una carenza di vocazione per la matematica, una mancanza di iscrizioni ai corsi di matematica. Secondo lei a cosa è dovuto? E' ipotizzabile una motivazione specifica?*
Lenzi: E' dovuta al fatto che non hanno capito bene cosa sia e cosa voglia la matematica. Spesso la matematica gli viene presentata come dei formulari da imparare a memoria, di cui non hanno coscienza. E questo si riflette anche nell'insegnamento o nell'apprendimento della matematica in corsi in cui la matematica svolge un ruolo di servizio e spesso succede che gli esami di matematica che dovrebbero servire da base vengono sostenuti alla fine poco prima della laurea. La matematica non si studia e non si apprezza perché non si sa con precisione cosa effettivamente sia la matematica, quali sono le valenze della matematica e le possibilità che la matematica può offrire.
B: *La matematica ha un suo linguaggio simbolico astratto poco naturale, diciamolo pure un po' complesso, difficile da acquisire. A che età si dovrebbe imparare questo linguaggio?*
Lenzi: Io direi da subito. Il linguaggio della matematica è un po' il linguaggio del pane al pane e del vino al vino. E questo tipo di linguaggio è il primo tipo di linguaggio che i bambini acquisiscono. Il linguaggio fatto di metafore, del dire e non dire, del così è se vi pare è un linguaggio a cui si abituano nel tempo, perdendo poi l'altra caratteristica del linguaggio: la precisione. Bisognerebbe già a livello di scuola materna e di scuola elementare, coltivare il linguaggio della precisione perché i bambini si rendano conto che esistono due modi di fare comunicazione, quello della precisione e l'altro tipo di linguaggio quello dell'uso quotidiano. Se noi riuscissimo a fare in modo che conservino quella che è una loro qualità, che poi perdono un po' per colpa nostra, forse sarebbe diverso poi anche l'approccio al linguaggio della matematica, quando diventa un tantino più specialistico, più tecnico. Quindi è da subito che bisogna intervenire su quello che è il linguaggio della matematica.
B: *Il linguaggio della matematica, quindi, un po' prima del linguaggio comune.*
Lenzi: Dovrebbero poter coesistere; chi comunica deve capire quando fare riferimento a un tipo di linguaggio o all'altro.
Bernardo: Grazie.

59. Intervista a Piergiorgio Odifreddi

di Gabriella Zammillo

Laureato in matematica a Torino e specializzato presso le università dell'Illinois e della California, *visiting professor* di logica matematica presso le Università di Novosibirsk, Melbourne, Pechino e Nanchino, Piergiorgio Odifreddi è docente presso l'Università di Torino e la Cornell University. Il suo lavoro scientifico riguarda la logica matematica e più in particolare la teoria della calcolabilità che studia potenzialità e limitazioni dei calcolatori. Il suo lavoro divulgativo esplora le connessioni fra la matematica e le scienze umane, dalla letteratura alla pittura, dalla musica agli scacchi. Suo il Premio Galileo 1998 e il Premio Peano 2002 per la divulgazione scientifica, collabora a La Repubblica, L'Espresso, La Stampa, Tuttoscienze, Le Scienze e Sapere.
Lo abbiamo incontrato a Cavallino, il 15 giugno 2007, in occasione di un incontro con gli studenti dell'ISUFI e poi a Lecce, il 28 settembre 2007, in occasione dell'evento Notte dei Ricercatori rimanendo contagiati, non poco, dalla sua impertinenza e simpatia.

Z.: *Lei è un matematico, ma prima di tutto un logico, oggi un divulgatore di successo. Cosa la fa sentire più orgoglioso: il fatto di essere un matematico o di essere riconosciuto come personaggio del momento?*
O.: Prima di tutto non sono una *star*… al massimo, una *star nana*, come si dice, una *stella nana*. No, non c'è bisogno di essere orgogliosi, uno deve semplicemente fare quello che si sente di fare a seconda dei momenti della vita. Ci sono stati momenti, per l'appunto quand'ero un po' più giovane, fino ai quarant'anni, in cui facevo più il matematico… d'altra parte si sa, il matematico si fa fino a quell'età perché, come diceva Hardy, *la matematica è uno sport da giovani*. Adesso faccio divulgazione. Importante è fare, non dico nemmeno bene perché quello non dipende tanto da noi, ma fare il meglio che si può. Poi sono contento, certo, che ci sia questa rispondenza anche tra il pubblico, ma non c'è bisogno di montarsi la testa anche perché è una cosa molto limitata… in fondo non sono un attore.

Z.: *Da alcune indagini risulta che i laureati in matematica trovino subito impiego, ma paradossalmente si parla ancora di "crisi vocazionale". Cosa pensa si possa fare per migliorare la pessima immagine che la matematica ha tra gli studenti?*
O.: Uno dei motivi per cui la crisi vocazionale non riesce a trovare una svolta sta nelle numerose fonti di distrazione in cui i ragazzi oggi crescono. Distrazioni che certamente non aiutano la concentrazione necessaria per lo studio della matematica e che spingono a privilegiare lo studio di discipline molto più semplici di cui però il mercato del lavoro non ha bisogno. Inoltre va detto che l'attitudine alla matematica si sviluppa verso i 13-14 anni, quindi dopo le medie. Di questo però purtroppo i programmi scolastici e gli insegnati non ne tengono molto conto. E' inutile infliggere ai ragazzi anni di esercizi ed espressioni da risolvere, meglio semmai soffermarsi sugli aspetti interdisciplinari che stimolano la curiosità piuttosto che atrofizzarla.

Z.: *Spesso si colpevolizzano le scuole per il cattivo insegnamento della matematica, ma non pensa che sia necessario intervenire anche nell'insegnamento universitario, dove molto spesso non viene messo in luce il ruolo che la matematica ha nella Cultura?*

O.: Credo si debba intervenire a tutti i livelli, non soltanto nelle università, ma anche nei licei, alle elementari, finanche negli asili. Bisognerebbe muoversi in maniera coordinata perché altrimenti le riforme fatte a pezzi e spizzichi non potranno mai funzionare. Bisognerebbe avere un quadro globale su come insegnare la matematica a tutti i livelli, dentro e fuori le scuole compreso il collegamento con il pubblico esterno… tanto per intenderci, sia per l'insegnamento che per la divulgazione.

Z.: *Quanto, secondo lei, è grave che i matematici snobbino la divulgazione?*
O.: Questo è gravissimo, tra l'altro non sono solo i matematici, io credo siano gli accademici. Gli accademici sono degli idealisti, impegnatissimi a pensare tutto il giorno e mai a sporcarsi le mani… Siamo accademici un po' tutti, chi più chi meno, però effettivamente c'è snobismo e spocchia nei confronti di coloro che fanno divulgazione che vengono tacciati di sprecare tempo piuttosto che dedicarlo alla ricerca, avendo spesso un'idea esagerata della ricerca. Molto spesso quello che viene chiamata ricerca è esercizio scolastico e accademico pure quello, non tutto per fortuna, però ci si trincera dietro le categorie linguistiche invece che dietro ai fatti concreti. Nel momento poi in cui un divulgatore raggiunge il successo della divulgazione, che non è l'analogo del successo che raggiunge un divo del cinema, allora poi subentrano altri aspetti della psicologia umana, perché anche gli accademici fanno parte della razza umana nonostante tutto, quindi invidia, la seccatura nei confronti del collega che magari ha più visibilità ecc… Questo tuttavia è un fenomeno abbastanza italiano, gli anglosassoni per esempio hanno una tradizione antichissima di divulgazione […]. Il trattato di Galileo Galilei non è che un trattato di divulgazione […] E' quasi una prassi che coloro che prendono il Nobel in discipline scientifiche, immediatamente dopo, scrivono libri di divulgazione in cui raccontano le loro ricerche […] Quindi quello che dicevo prima sugli accademici, ha un fondo di verità, c'è una spocchia che però non è giustificata. Se tutti facessimo ricerca ai massimi livelli e questa ricerca resta scollegata dalla gente a cui deve arrivare, rischia di essere inutile. E allora questo a cosa serve? Se uno vuole fare le cose per la società, poi alla fine deve farle conoscere.

Z.: *Lei è un logico e come alcuni logici che sono passati alla storia, anche lei è un "bel personaggio"…*
O.: …questo lo dici tu!

Z.: *… solo per fare qualche esempio: Zenone si mozzò la lingua con un morso e la sputò in faccia al tiranno…*
O.: … beh, io quello non l'ho mai fatto…

Z.: *…Platone fu venduto una volta come schiavo, un'altra finì agli arresti domiciliari…*
O.:… se pensi che in Russia mi hanno scambiato per una spia…

Z.: *…Lullo fu lapidato dagli infedeli che credeva di aver convertito…*
O.: … ecco, questo è un possibile rischio…

Z.: *…Boole, dopo aver preso la polmonite fu finito a secchiate d'acqua gelida dalla moglie; Cantor credeva di essere lo scriba di Dio e finì in manicomio; Russel e Wittgenstein finirono in galera; Gödel morì di fame perché temeva volessero avvelenarlo con il cibo; Turing si avvelenò dopo un processo... Lei, con la sua "impertinenza", quale futuro vede davanti a sé?*
O.: …spero di tenermi la lingua intatta, naturalmente; di non essere venduto come schiavo, ovviamente, né mangerò alcuna mela avvelenata e quindi, come vedi, non sono un "bel personaggio".

Z.: *Lei è tacciato d'essere arrogante, mangia preti, insolente. La sua impertinenza suscita parecchia stizza in alcuni eppure è uno dei più accaniti sostenitori nella lotta contro l'irrazionalità dilagante senza la quale il mondo e la vita sarebbero migliori. Sembra quasi un paradosso. Come se lo spiega?*

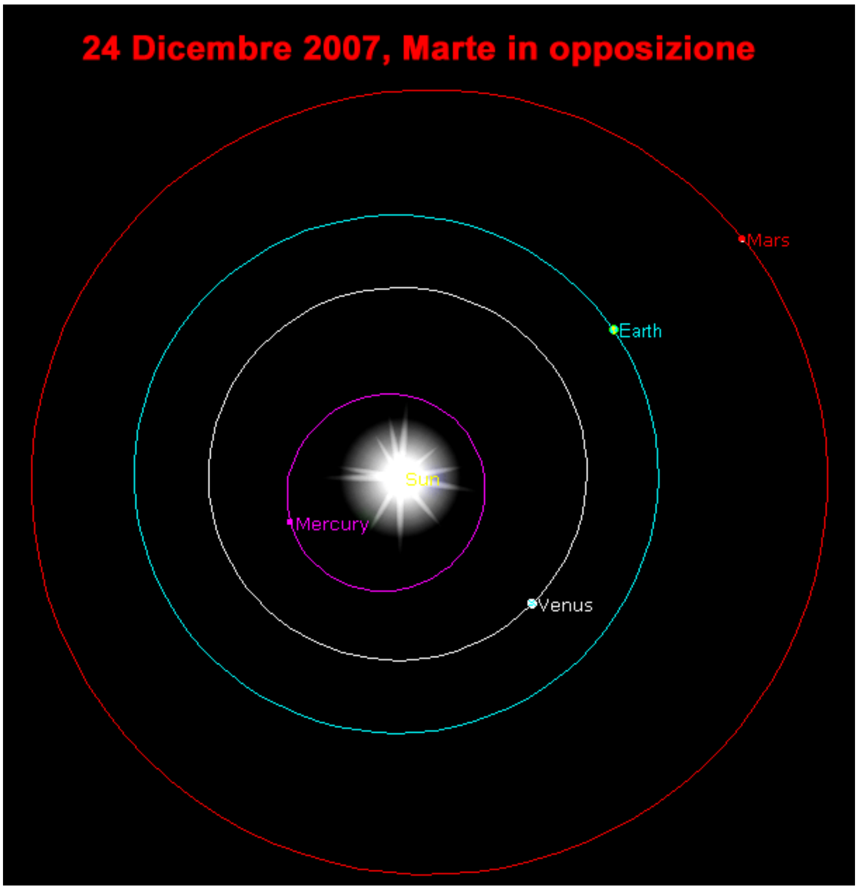
O.: Eh, come me lo spiego? Non me lo spiego. In realtà l'impertinenza è soltanto un modo di essere, è magari mettere il sale nelle cose che uno dice per cercare di provocare un pochino. Naturalmente la razionalità dà fastidio a tutti coloro che sono irrazionali, così come è anche vero che l'irrazionalità dà fastidio a tutti coloro che sono razionali, la cosa è reciproca e non ci trovo niente di male in tutto questo. Io non sono particolarmente razionale o razionalista. Non penso che soltanto la ragione debba essere il metro di giudizio per tutte le cose che facciamo. Per esempio, quando mi innamoro… mi sono sposato due volte, ma anche divorziato due volte… non so quale delle due circostanze sia stata quella razionale e quale quella irrazionale, ma evidentemente ci sono state tutte e due. Penso che in moltissime attività della vita umana la razionalità sia, se non superflua, almeno un po' contenuta, in altre no. In particolare, credo non si possa fare a meno della razionalità quando si parla della verità. La verità è qualcosa che ha a che fare con proposizioni che sono per l'appunto vere; possono essere anche astratte che poi diventano vere perché si dimostrano, come per esempio quelle matematiche. Non è che noi crediamo al teorema di Pitagora così come si crederebbe al dogma della verginità della Madonna, sono cose diverse. Nel primo caso uno ci crede perché si dimostra, nell'altro caso la credenza è basata sulla fede. Penso che quando si ha a che fare con proposizioni che possono essere vere o false, bene, lì ci sono due metodi principali che sono la dimostrazione, la ragione per l'appunto, e la verifica sperimentale. Quindi le verità matematiche e le verità della scienza… altre verità non ne conosco. La musica e la pittura non hanno nulla a che fare con la verità, certo se poi uno vuole tirare per i capelli questa nozione di verità in maniera che copra tutto, allora va beh… spesso si fa così per poter affermare che la verità non è un patrimonio unico della ragione, della matematica e della scienza. Per esempio, il mito. Il mito fa parte della letteratura, ma la letteratura racconta, mica dice delle cose vere o false. Quello che importa nella letteratura è al massimo la verosimiglianza ma non la verità, eppure molti filosofi soprattutto post moderni pensano che il mito abbia una verità e che non solo, la verità del mito sia paragonabile come valore a quello della scienza. E allora uno racconta il suo mito che è quello per esempio del big bang, dell'evoluzione ecc… e l'altro racconta il suo mito, che è una storia totalmente diversa e tutti e due sono messi sullo stesso livello. Ebbene, io questo non lo credo. Ahhh… questa è la fede!

Z.: *Tra tutte le "menti straordinarie" che ha avuto modo di incontrare, nella sua mente altrettanto straordinaria, quale è rimasta più impressa?*
O.: Forse, per motivi contingenti, Nash perché al Festival di Roma abbiamo avuto questa occasione abbastanza rara di intervistarlo in pubblico. Ho trascorso una settimana con lui, tanto che era diventato psicologicamente dipendente. Però, devo dire che è stata un'esperienza molto interessante come quella vissuta qualche anno fa a Crotone, quando Wiles ritirò il premio Pitagora. Lì ho avuto un'occasione ancora migliore, forse, perché lontana dai riflettori. Anche con Wiles ho trascorso una settimana a Roma e lì, mentre eravamo in giro a vedere monumenti abbiamo parlato di tutto, della nostra vita, del nostro lavoro e della matematica in generale. Sono bei personaggi e ce ne sono altri, tra quelli che ho intervistato nel libro *Incontro con le menti straordinarie*, che in qualche modo ho continuato a frequentare. Per esempio, ho rivisto Kroto, il nobel per la chimica (1996). Recentemente ci siamo incontrati a Vico Equense in occasione del ritiro di un premio conferito ad entrambi. Lui è molto impegnato nella battaglia ateista, si dichiara un ateo fondamentalista. Poi c'è Hoffmann, anche lui Nobel per la chimica (1981) che però ha anche l'interesse per la divulgazione e scrive per il teatro. Lui lo incontro spesso perché sta alla Cornell. L'ho rivisto a New York e a ottobre ci ritroveremo a Bergamo dove siamo riusciti a mettere in piedi il suo spettacolo teatrale. Direi comunque più di altre, quelle di Nash e Wiles.

Lecce, 15 giugno – 28 settembre 2007

60. Spicchi di cielo: Marte 2007 la "stella" di Natale

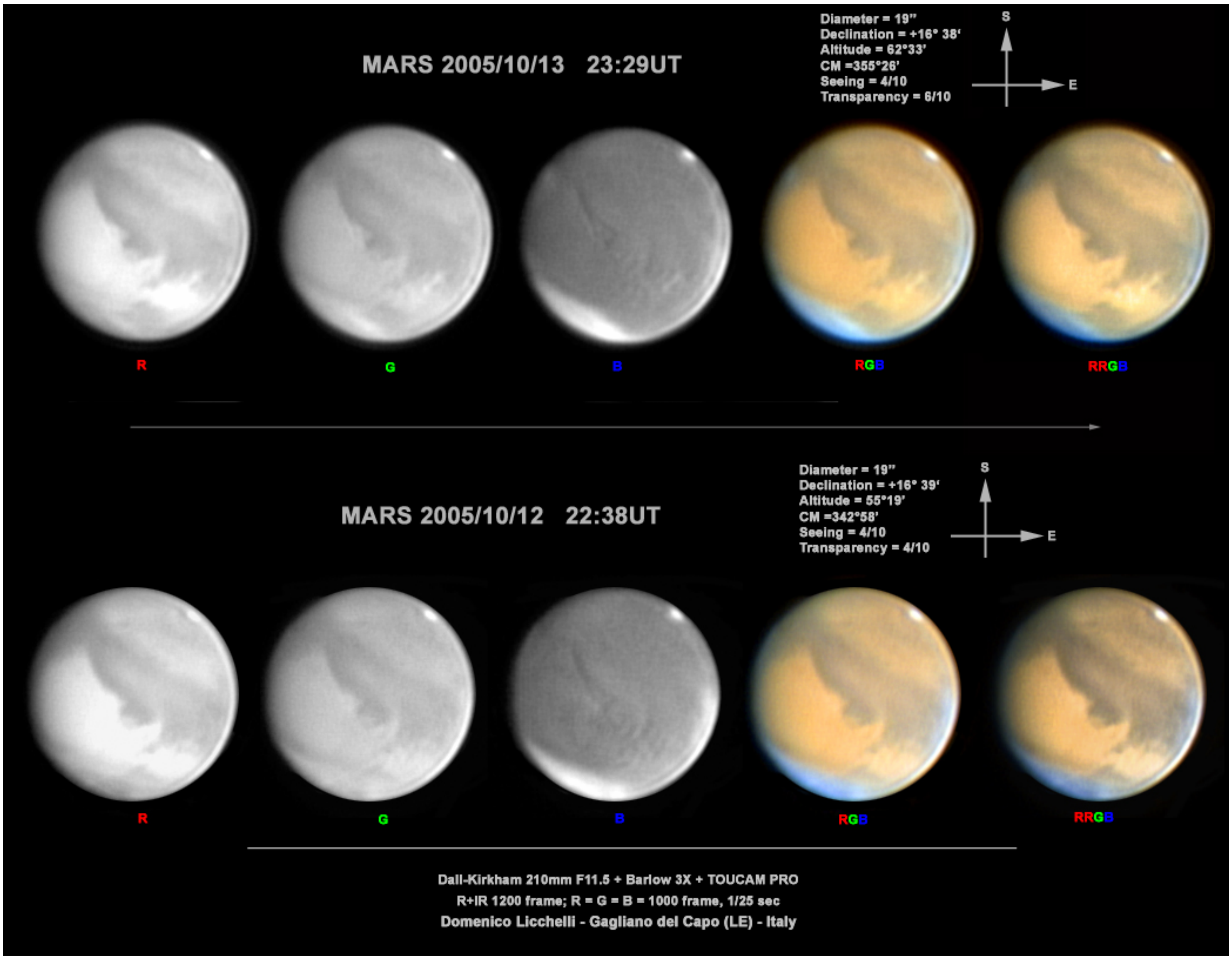
di Domenico Licchelli
www.dlcosmos.eu



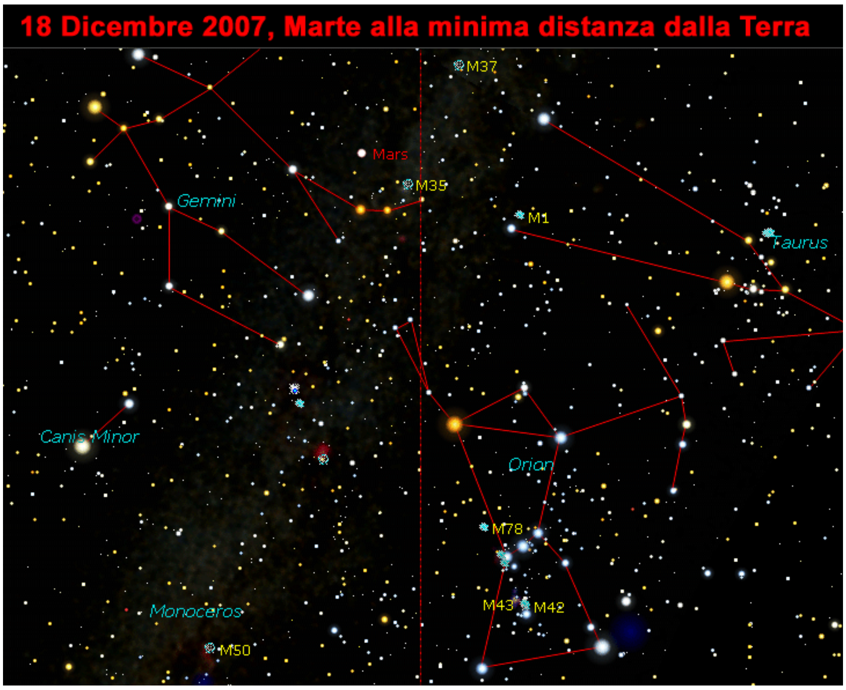
A meno di clamorose scoperte dell'ultima ora quest'anno non ci saranno comete brillanti in cielo nel periodo natalizio. Tuttavia, un'altra "stella" allieterà col suo splendore le fredde notti dicembrine. Gli osservatori più attenti si accorgeranno subito che in realtà si tratta di un pianeta e grazie al caratteristico colore rosso-arancio sarà facile identificarlo con Marte. Il pianeta Rosso sarà infatti in opposizione il 24 Dicembre.

L'opposizione si verifica quando il Sole, la Terra ed un pianeta esterno sono allineati tra loro. Nel caso di Marte questa configurazione si ripete ogni 26 mesi, più precisamente ogni 779.94 giorni, in punti diversi delle rispettive orbite. Data la marcata eccentricità dell'orbita marziana la distanza tra i due pianeti al momento dell'opposizione varia notevolmente secondo che ci si trovi vicino al perielio o all'afelio. Inoltre l'inclinazione delle orbite e l'influenza lunare fanno si che il momento di massimo avvicinamento avvenga alcuni giorni prima. Quest'anno per esempio sarà il 18 Dicembre quando la distanza relativa sarà di 88.42 milioni di km. E' un valore abbastanza elevato se lo si confronta con quello della grande opposizione del 2003 che si aggirava attorno ai 56 milioni di km, ma è comunque sufficientemente piccolo per sfruttare questi mesi per lanciare sonde automatizzate verso Marte, come è stato fatto ad Agosto per l'americana Phoenix che giungerà a destinazione il prossimo Maggio.

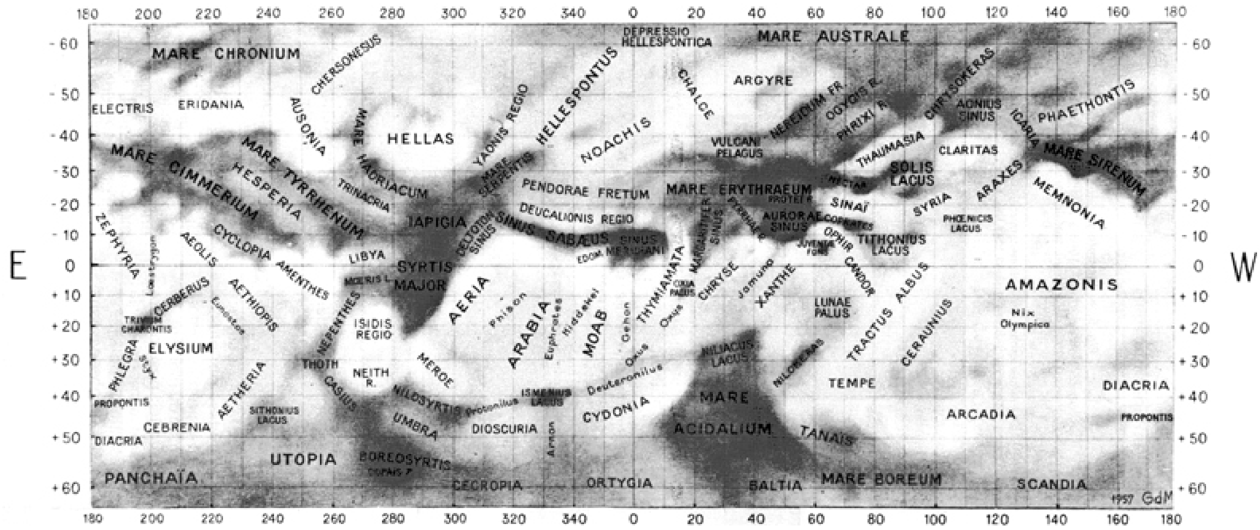
Le opposizioni sono importanti per le osservazioni telescopiche principalmente perché il diametro apparente del pianeta è abbastanza grande da mostrare significativi dettagli sulla superficie e nell'atmosfera del pianeta. Nell'immagine sottostante per esempio, che si riferisce al 13 Ottobre del 2005, oltre alla calotta polare in rapido scioglimento e il cappuccio di nubi che copre la calotta dell'emisfero opposto, si vede anche una tempesta di sabbia che si sviluppò nella piana di Chryse tra il 12 ed il 13 Ottobre 2005, quando il diametro del pianeta era di 19 secondi d'arco.



Proprio per il fatto che quest'anno la separazione è più consistente, il diametro massimo sarà di 15.88 secondi d'arco con una magnitudine di -1.64. Tuttavia la declinazione molto positiva, maggiore di +26° si tradurrà per noialtri italiani in una altezza sull'orizzonte dell'ordine dei 76° al momento del passaggio al meridiano. Il pianeta sarà perciò facilmente riconoscibile per la sua luminosità ed il suo colore, alto in cielo nella costellazione dei Gemelli, con nelle vicinanze alcune ricche regioni stellari della Via Lattea e interessanti ammassi aperti come lo spettacolare M35.



L'osservazione può essere fatta anche ad occhio nudo o con un binocolo, ma è necessario un telescopio per poter discernere qualcosa di più di un minuscolo dischetto. L'ideale sarebbe poter disporre di un rifrattore apocromatico di grande diametro. Più realisticamente, con opportuni aggiuntivi ottici, si possono impiegare con buona soddisfazione praticamente tutti gli strumenti a partire dai 10-12 cm di apertura. Naturalmente la visibilità dei dettagli andrà di pari passo con la qualità dello strumento impiegato, ma più spesso sarà il *seeing* a determinare cosa si vedrà e cosa no.



Per riconoscere le principali strutture visibili al telescopio, in realtà macchie di albedo che in genere non hanno corrispondenza fisica con la geologia del pianeta, è opportuno utilizzare una buona mappa, come quella disegnata da De Mottoni e adottata dall'Unione Astronomica Internazionale.
Contrariamente a due anni fa, la calotta polare Sud è praticamente invisibile a quasi due mesi dall'opposizione. Sulla calotta polare nord è già presente il classico cappuccio di nubi che nasconde alla vista il riformarsi dei ghiacci. Prolungando l'osservazione cominceranno a rendersi visibili anche particolari del disco. Un aiuto può venire dall'impiego di filtri colorati. Come regola generale si può dire che con i filtri rosso-arancio-giallo vengono messe in evidenza le strutture al suolo, con un contrasto decrescente passando dal rosso al giallo. Un filtro blu, invece, cancella quasi del tutto le caratteristiche superficiali, mentre esalta le nubi e le brine mattutine e serali. Può succedere di vedere una macchia molto brillante in luce rossa: si tratta di una tempesta di polvere, un fenomeno in genere più probabile man mano che il pianeta si avvicina al perielio e che può rimanere confinata a livello regionale, come per esempio quella dei primi di Luglio 2003, o diventare globale come avvenuto durante l'opposizione del 2001.
Per facilitare le osservazioni e renderle più proficue si può utilizzare il piccolo promemoria seguente:

1. lasciare acclimatare lo strumento. Secondo le dimensioni questo può voler dire portarlo fuori anche due-tre ore prima. Le differenze di temperatura hanno conseguenze disastrose sulla forma delle ottiche, per cui è praticamente impossibile sfruttare un'ottica corretta a l/16 per esempio, se non è stabilizzata termicamente;
2. curare in maniera maniacale la collimazione delle ottiche e fuocheggiare con molta cura;
3. soprattutto con gli Schmidt-Cassegrain tenere presente che in genere il primario è abbastanza instabile, per cui è necessario ricontrollare il tutto dopo una mezzoretta di osservazioni e/o riprese;
4. se il *seeing* è infame è inutile utilizzare focali lunghe; l'immagine molto dilatata non sta ferma un attimo e rende difficile l'osservazione visuale e ancor di più la ripresa ccd;

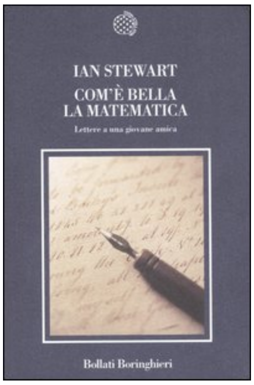
5. osservare con un ingrandimento adeguato alle condizioni di *seeing* della serata. In media, su Marte è possibile utilizzare ingrandimenti pari a 2 volte il diametro dell'obiettivo espresso in millimetri (1.5 se l'ottica non è eccelsa, fino a 3 nel caso degli apocromatici) ;
6. nelle riprese è preferibile ridurre la focale piuttosto che il campionamento che è bene sia quello della massima risoluzione spaziale (fisica e non interpolata);
7. ultimo suggerimento, ma forse il più importante: Marte è un soggetto difficile. Anche nelle migliori condizioni di visibilità equivale ad osservare un cratere lunare di appena 45 km di diametro. Questo significa che sono necessarie alcune ore di "esercizio" perché comincino a mostrarsi gli evanescenti dettagli della sua superficie. Quando ciò avverrà non si potrà più sfuggire al fascino del Pianeta Rosso. Provare per credere.

Sitografia

http://www.dlcosmos.eu/pagine/Sistema%20Solare/Marte.htm
http://phoenix.lpl.arizona.edu/
http://www.esa.int/SPECIALS/Mars_Express/index.html

61. Lo scaffale dei libri

a cura di Antonio Bernardo



Ian Stewart, *Com'è bella la matematica. Lettere a una giovane amica,* Bollati Boringheri, 2006

Se il grande matematico inglese Hardy esordiva nel suo libro del 1940, *Apologia di un matematico*, affermando che "Per un matematico di professione è un'esperienza melanconica mettersi a scrivere di matematica", Ian Stewart, è convinto del contrario. I tempi sono cambiati, scrive Stewart nell'introduzione del suo libro "Una giornata tipo del grande studioso di Cambridge [Hardy] consisteva in quattro ore al massimo di riflessione intensa sui problemi della ricerca mentre il resto del tempo trascorreva fra le partite a cricket e la lettura dei giornali. Rimaneva probabilmente lo spazio per qualche sporadico incontro con gli studenti. Oggi la giornata tipo di un accademico è lunga dieci o dodici ore, divise fra l'insegnamento, le richieste di sovvenzioni, la ricerca da proseguire, e ampie dosi d'inutile burocrazia necessarie ad avviare qualsiasi progetto creativo." *Com'è bella la matematica* è il tentativo di Ian Stewart, noto matematico inglese e prolifico divulgatore, di 'aggiornare' il libro di Hardy. La finzione narrativa si basa su una serie di lettere scritte da Stewart a Meg, una studentessa di scuole superiori appassionata di matematica, che nel corso del tempo trascorso tra una lettera e l'altra si iscrive a Matematica, fa il dottorato e infine conquista un incarico universitario. Le lettere rispondono a una serie di domande che Meg, personaggio probabilmente inventato, pone a Stewart. Perché fare matematica? I matematici, risponde Stewart, li incontriamo ogni giorno e in ogni luogo, eppure non ci viene mai in mente che il nostro direttore di banca possa essere laureato in matematica. I produttori di DVD, di lettori MP3, di film di animazione utilizzano una schiera di matematici. Gli effetti speciali nei film e tutti i moderni film di animazione che si basano sulla grafica computerizzata usano in maniera massiccia la matematica. La grafica computerizzata non è semplicemente il risultato dell'uso stupido dei computer: occorre la geometria tridimensionale, la matematica della diffusione luminosa, l'interpolazione tra un fotogramma e l'altro per rendere fluida l'immagine. Il film Toy Story, per esempio, ha portato ad almeno una ventina di pubblicazioni matematiche. Prima di iscriversi al corso di laurea in matematica, Meg chiede qual è la matematica e che cosa si insegna nei corsi più avanzati. A scuola, scrive Stewart, tu leggi Shakespeare, Dickens, Eliot e supponi che non esistano livelli più alti della letteratura. Per analogia ti domandi se la matematica che impari a scuola corrisponde alla matematica di livello superiore. La matematica che insegnano a scuola è "un insieme di piccoli trucchi del mestiere" che si applicano in contesti molto semplici. E' come per un apprendista falegname che impara a mettere chiodi ma non vede come si fabbrica una sedia o un mobile. Mentre nella scuola superiore una parte cospicua di quella che viene chiamata matematica è in realtà aritmetica ed ha a che fare con i numeri, all'università si impara ad astrarre dai numeri, a generalizzare, a formalizzare. Di fronte a questa grande varietà di studi matematici la domanda è allora quella di capire che cos'è la matematica e di darne una definizione. "Le definizioni, scrive Stewart, sono paralizzanti, sbarrano la strada alla creatività e alla diversità. Una definizione cerca implicitamente di ridurre le possibili varianti di un concetto a un'unica soluzione. La matematica, come qualsiasi campo in via di sviluppo, è sempre fonte di stupore." La definizione di matematica preferita da Stewart è quella di Lynn Arthur Steen secondo la quale la matematica è "la scienza della forma significante".

Un altro tema è la filosofa della matematica, tradizionalmente divisa tra platonismo e formalismo. In che senso, per esempio, esiste un cerchio matematico? Per i platonisti il cerchio matematico è un'idea non realizzata in questo mondo e che esiste indipendentemente dalla mente umana. I formalisti giudicano queste osservazioni insensate e confuse. Un'affermazione del tipo 2+2=4 per un formalista è un gioco senza significato basato su rigide regole esplicite. Il formalismo di fatto morì quando Goedel dimostrò che nessuna teoria puramente formale è in grado di esprimere interamente l'aritmetica. Resteranno sempre 'fuori dal gioco' degli enunciati matematici che non sono né dimostrabili né indimostrabili. Più recentemente, Reuben Hersh ha sostenuto che la matematica è un'attività umana che si svolge all'interno di una società e che si sviluppa storicamente. Si tratta di una descrizione moderna di quella che è l'attività dei matematici che non tocca e non specifica il contenuto di questa attività. Così posta mancherebbe di un anello importante che ha a che fare con una sorta di coerenza logica interna dell'attività. Se, per esempio, tutti i matematici si accordassero all'unanimità che π vale 3, ciò non sarebbe vero e non avrebbe senso per la comunità dei matematici. "La matematica, pur essendo un prodotto della mente umana, non si piega alla volontà umana." Quando due matematici discutono prima o poi uno si ferma e dice "mi dispiace, hai ragione tu, ora ho capito dove sbagliavo". Per capire meglio il punto di vista di Hersh si può seguire il suo stesso esempio relativo al denaro. Il mondo gira intorno al denaro ma cos'è il denaro? dei pezzi di carta? dei dischetti di metallo? Non sono neppure dei numeri in un calcolatore. Infatti, se il computer della banca si rompe i soldi sono sempre tuoi. Anche il denaro è un costrutto socialmente condiviso ma con delle restrizioni. Se vai in banca e dici al direttore che i tuoi soldi dovrebbero essere di più di quelli che risultano sul conto, il direttore non ti risponderà "nessun problema, eccole altri dieci milioni, buona giornata". La matematica, come in fondo il denaro, pur essendo un costrutto socialmente condiviso ha una certa inevitabilità logica e tutte le menti devono pervenire alla stessa matematica. Ma la matematica è universale? Gli extraterrestri conterebbero come noi? Stewart ritiene che la matematica sia strettamente connessa alla nostra fisiologia alle nostre esperienze e alle nostre caratteristiche psicologiche. Punti e linee, per esempio, sembrano le basi naturali per una teoria della forma ma sono anche gli elementi fondamentali in cui il nostro sistema visivo scompone il mondo. Gli elementi fondamentali di un sistema visivo alieno potrebbero essere invece luci e ombre, o movimento e immobilità, la frequenza delle vibrazioni. La stessa osservazione si può fare per i numeri discreti (1, 2, 3, ...); ci sembrano universali perché nascono dalla nostra tendenza ad assemblare oggetti simili: probabilmente l'aritmetica è nata a causa dell'avvicendarsi delle stagioni e per il commercio, legato alla proprietà di beni. Creature extraterrestri fluttuanti che vivono, per esempio, su pianeti come Giove potrebbero non avere alcuna idea di proprietà: prima di arrivare fino a contare tre oggetti, gli oggetti stessi si sarebbero dissolti nel vento di ammoniaca. Potrebbero invece essere molto esperti nella dinamica dei flussi turbolenti.
Come si studia la matematica? Molti studenti sono convinti che quando ci si blocca su qualche argomento la cosa migliore sia fermarsi, tornare indietro e rileggere la parte incriminata finché non si intravede la luce. Questo metodo è quasi sempre fatale. Per Stewart, la prima regola è proseguire. Occorre segnarsi il punto in cui ci si è fermati, spesso la frase successiva o il paragrafo successivo chiariscono la difficoltà. Se così non fosse, occorre ritornare dove ci si era bloccati e ripercorrere i passi fino a raggiungere un punto dove si è sicuri di aver capito tutto e si riprende da lì.
Nell'ultima parte del libro, Stewart, con un po' di ironia descrive la struttura della 'tribù dei matematici mondiali': un giovane ricercatore parte dalla posizione di SSDX (studente specializzando del dottor X), per diventare PGR (promettente giovane ricercatore), subito dopo un RC (ricercatore confermato) e poi SS (scienziato senior), GV (grande vecchio) e GE (guru emerito).
La lettura di questo libro mi è sembrata particolarmente interessante, a mio giudizio è uno dei pochi libri di tipo 'divulgativo' ben fatto. Qualche sbavatura non manca, l'editore ha lasciato più di una decina di refusi sparsi per il libro e per un editore come Bollati Boringheri mi sembra un eccessivo disinteresse

per libri i di matematica che pure hanno firme autorevoli. L'autore ha invece trascurato in qualche passaggio la finzione base del suo libro: se scrive delle lettere a una che dopo tanta fatica è diventata docente universitaria di matematica non credo sia ipotizzabile che debba spiegargli come si giustifica il fatto che "meno per meno fa più". Se voleva discutere questo tema probabilmente doveva presentarlo all'inizio del libro quando Meg è ancora una studentessa di Liceo. Si tratta comunque di piccoli 'difetti' che si notano proprio perché il libro si presenta particolarmente ben fatto. Complessivamente poi non è ben chiaro se la matematica sia bella perché la incontriamo dappertutto come applicazione alla vita di tutti i giorni e come lettura del mondo o se come ci si aspettava leggendo il titolo del libro abbia un valore estetico e accattivante per la mente umana.

Antonio Bernardo

*** *** ***

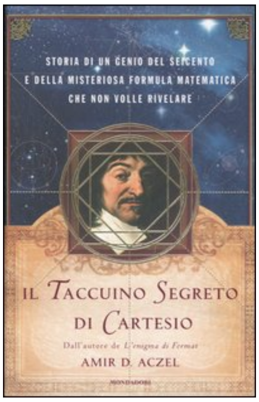
Michael F. Atiyah, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo Editore, 2007.

Su qualunque argomento, non c'è parola più attendibile di quella di un addetto ai lavori; meglio ancora se si tratta dell'opinione di un esperto del settore. Quale miglior modo, dunque, di osservare la matematica che farlo dal punto di vista di un suo autorevole esponente?
Nel contesto matematico, sicuramente Michael Francis Atiyah riveste un ruolo di spicco a livello mondiale, come dimostrano i numerosi riconoscimenti ottenuti nel corso della sua lunga attività, tra l'altro non ancora conclusa, dato che egli è attualmente professore presso l'Università di Edimburgo. La sua breve opera dal titolo "Siamo tutti matematici", che rientra a tutti gli effetti nel genere letterario del saggio, può essere considerata come una chiacchierata dell'autore riguardo a vari temi inerenti la matematica. Il tono del discorso è molto colloquiale e numerosi sono i riferimenti alla vita dell'autore stesso, il quale parla in prima persona.
Nella prima parte del libro si parla del rapporto tra la matematica e la mente umana, un tema di cui si è sempre molto discusso e che è alla base della natura stessa della disciplina. A tal proposito, ecco un breve ma significativo frammento di testo: *Sappiamo che il cervello umano è diviso in due parti – l'emisfero sinistro e quello destro – che hanno ruoli fondamentalmente diversi: un emisfero sovrintende alle funzioni del linguaggio, mentre l'altro agli aspetti spaziali. Dove si colloca, allora, la matematica? Quale parte del cervello entra in gioco nel ragionamento di tipo logico-numerico? La mia personale opinione è che la geometria sia legata alla visione e l'algebra al linguaggio"*. In questo estratto, così come in tutto il libro, l'autore non si limita a riportare semplicemente i fatti, ma espone anche la propria opinione a riguardo.
Un importante rilievo viene dato, in varie parti del testo, al rapporto tra matematica e fisica, tema molto caro ad Atiyah. Il suo nome è ben conosciuto nel mondo dei fisici, ai quali ha aperto diverse porte grazie ai propri lavori: nel corso degli anni, infatti, sono state trovate fondamentali applicazioni delle teorie matematiche di Atiyah nel campo della fisica.
Tra i principali risultati che ha conseguito nell'ambito della ricerca, l'autore parla in particolare del forte impulso dato alla K-teoria e del fondamentale "teorema dell'indice"; quest'ultimo, va ricordato, gli valse la medaglia Fields nel 1966.
Un ampio spazio è dedicato all'evoluzione della matematica nel XX secolo. Si tratta di una panoramica sulle branche della matematica che maggiormente hanno attirato su di sé la propria attenzione nel corso del '900, in particolare vengono segnalati i risultati più significativi raggiunti e i personaggi che hanno contribuito a delineare la storia della matematica novecentesca. Il XX secolo, tuttavia, non viene consi-

derato come una monade temporale: interessanti sono anche i numerosi paragoni con il passato, così come di straordinario interesse sono le previsioni di chi scrive riguardo alle direzioni che prenderà la matematica nel secolo appena iniziato. Vale a la pena di soffermarsi a leggere quanto riportato in merito: *Quella del XXI, come sarà? Ho già detto che prevedo che il nostro secolo vedrà una grande influenza della matematica quantistica o, se preferite, della matematica a infinite dimensioni. La matematica quantistica potrebbe, in un futuro, contribuire a comprendere correttamente l'analisi, la geometria, la topologia e l'algebra di diversi spazi di funzioni non lineari.* Ma è meglio fermarsi qua, per non rovinare la sorpresa ai futuri lettori.
La parte finale del libro contiene delle personali riflessioni sulle enormi responsabilità della scienza nella società contemporanea, dove spesso e volentieri si è fatto un uso improprio di importanti risultati scientifici. Atiyah espone la propria opinione senza mezzi termini, indicando con chiarezza la propria linea di pensiero su temi molto delicati, come la moralità dell'uso della bomba atomica, l'organizzazione Pugwash, la questione cinese, i test nucleari condotti da India e Pakistan.
Quella fatta finora è solo una sommaria descrizione dei rami principali in cui si snoda l'intera opera. Sarebbe davvero arduo citare tutte le tematiche affrontate. D'altronde, non si tratta di un testo didattico, né tantomeno divulgativo, per cui risulta difficile suddividerlo in blocchi ben separati e distinti tra loro. Leggere "Siamo tutti matematici" equivale ad osservare la matematica, e la scienza in genere, con gli occhi di qualcun altro; non dovrebbe, tuttavia, essere una visione molto distorta, dato che questo qualcuno è un matematico di rilievo come Michael Atiyah.

Andrea Vitiello

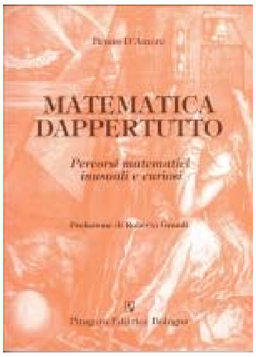
****



Amir D. Aczel, *Il Taccuino Segreto di Cartesio, Storia di un genio del Seicento e della misteriosa formula matematica che non volle rivelare*, Mondatori, 2006, pp. 250.
A mezzanotte Amir Aczel vagava smarrito in una tempesta di neve da qualche parte nell'Ontario; uscito dall'autostrada per cercare un posto dove aspettare che la tempesta finisse, giunse ... alla conclusione che si era perso. A salvarlo fu la tecnologia del GPS che gli permise di localizzare la sua posizione e farsi guidare da un operatore al telefono (siamo nel 2002 e i sistemi di navigazione tramite GPS non erano così avanzati come sono oggi). Questo 'salvataggio' così provvidenziale lo fece riflettere su quanto fosse importante l'invenzione di Cartesio: la tecnologia che è alla base del GPS funziona infatti grazie all'invenzione del sistema di coordinate cartesiane. A ben guardare il numero di applicazione del sistema di coordinate cartesiane nella nostra vita quotidiana è impressionante: tutto ciò che facciamo o vediamo o usiamo nella vita di ogni giorno ha qualcosa a che fare con la grande invenzione di Cartesio. Da qui l'idea dell'autore di dedicare un libro alla biografia di questo personaggio che ha segnato una svolta nel mostro modo di vivere e di pensare. Aczel si reca a Parigi sulle orme di Cartesio, lì ha modo di consultare lettere originali di Cartesio a Mersenne, edizioni originali delle opere di Cartesio e a un certo punto scopre che Cartesio aveva tenuto un taccuino segreto di cui si erano perse le tracce. Il libro di Aczel, nonostante il tono un po' da romanzo poliziesco, e il vago tentativo di imitare romanzi di successo, è sostanzialmente una biografia di Cartesio, ricca di informazioni e di commenti sulle sue opere. Sullo sfondo del racconto la storia di un libro e di alcune ricerche matematiche che Cartesio sembra abbia scritto e che sono andate perdute. Le vicende di questa 'formula' misteriosa si intersecano poi con la storia dei Rosacroce, una confraternita segreta alla quale non è ben chiaro se Cartesio abbia mai aderito. Alla fine del libro Aczel rivela questa misteriosa formula.

a.b.

****



Bruno D'Amore, *Matematica dappertutto. Percorsi matematici inusuali e curiosi*, Pitagora Editrice, Bologna, 2007, pp.88

Bruno D'Amore ci mostra una matematica che ha invaso tutte le altre forme della cultura umana in 14 brevi ma intensi percorsi, ben illustrati e ricchi di citazioni. Per citarne qualcuno: la superformula di Lamé-Gielis che con opportuni valori dei parametri permette di ottenere una grande quantità di forme geometriche che effettivamente si incontrano in natura, dai cristalli alle conchiglie, dalle alghe alle foglie. D'amore ci mostra il confronto tra le forme geometriche disegnate per mezzo della formula e le foto degli oggetti reali. Divertente anche il capitolo in cui confronta l'ignoranza matematica di alcuni scienziati con le competenze raffinate di alcuni scrittori. Gilbert White (1720-1793) studioso di uccelli, dallo studio di un esemplare di cavaliere, un uccello di palude, dal peso di 120 g e lunghezza delle zampe 20,4 cm, trovò che il rapporto peso/lunghezza delle zampe doveva essere 120:20,4 = 5,8. Quando lo stesso White catturò un fenicottero, simile al cavaliere ma molto più pesante, 1,82 kg su zampe lunghe 50 cm, osservò che la proporzione non era la stessa di quella del cavaliere, il fenicottero avrebbe dovuto infatti avere le zampe di 3m. Da qui White dedusse che la natura non lavora con 'armonia matematica'. Jonathan Swift (1667-1745) nel suo famoso romanzo *I Viaggi di Gulliver* scrive che quando Gulliver raggiunge il paese di Lilliput, i matematici di questo paese avendo scoperto che la statura di Gulliver eccedeva la loro nella proporzione di dodici a uno, e considerando che i loro corpi erano simili al suo, dedussero che doveva contenere 1728 corpi loro e che quindi Gullier aveva bisogno di tanto cibo quanto ne occorreva per altrettanti lillipuziani. Come mai un naturalista come White non si è reso conto che il peso degli uccelli, va pensato come un volume e quindi va rapportato con il cubo delle lunghezze (delle gambe) mentre Swift lo aveva capito? Scrivendo infatti correttamente la proporzione si osserva che la natura lavora armonicamente anche negli uccelli: $120:20{,}4^3=1820:50^3$. Si tratta di un caso in cui i letterati sanno più matematica degli scienziati.

a.b.

*** *** ***

Roberto Lucchetti, *Passione per Trilli. Alcune idee dalla matematica*, Springer, 2007, pp.154.

Trilli è la fatina innamorata di Peter Pan. Cosa c'entri con la matematica lo si scopre soltanto a pagina 123 del libro: "la matematica è un mondo vivo, che contiene anche tante contraddizioni, pieno di difetti. La matematica è possessiva, gelosa e incline alla vanità: proprio come Trilli.". Lucchetti ha voluto scrivere un libro di matematica e sulla matematica presentandocela sotto l'aspetto di disciplina brillante e variegata, una disciplina che incontri anche dove non te lo aspetti. Professore di Analisi presso il Politecnico di Milano, appassionato studioso di Teoria dei Giochi, autore di un libro divulgativo di successo su questa teoria (*Di duelli, scacchi e dilemmi*, Mondatori, 2001), Lucchetti presenta in sei capitoli, altrettanti temi di matematica, descrivendone le idee in modo non tecnico, convinto che le idee importanti della matematica si possano comunicare senza formule e senza usare il linguaggio tecnico di questa disciplina, linguaggio incomprensibile alla maggior parte dei lettori comuni. Fanno da *Intermezzo* a queste storie di matematica altrettante storie personali e semiserie dell'autore: una poesia, un commento all'ultimo mondiale di calcio e altre amenità che in un libro di matematica disorientano il lettore ma lo coinvolgono sul piano più strettamente personale. Ma veniamo ai contenuti matematici, si tratta per lo più di temi che hanno attinenza con la teoria dei giochi: dai primi elementi di questa teoria alle sue applicazioni alle scienze sociali: il teorema di Arrow sulle difficoltà a prendere decisioni 'democratiche' in un gruppo di persone e l'indice di Shapley che misura la forza dei singoli componenti di un gruppo cooperativo. Oltre ai temi di teoria dei giochi Lucchetti discute delle problematiche dell'infinito in matematica, il passaggio dalle strutture numeriche alla strutture algebriche, qualche biografia controversa di matematici del '900, in particolare Nash e von Neumann, principali artefici della teoria dei giochi. Un libro per tutti: adulti e ragazzi, docenti e studenti, professionisti e semplici appassionati di Trilli.

a.b.

*** *** ***

Rodolfo Clerico e Piero Fabbri, *Rudi simmetrie*, CS libri, 2007, pp. 127

Rudi Mathematici, rivista on line di matematica, nata nel lontano 1999, è diventata un libro di carta, o meglio ha prodotto un libro che si può leggere anche senza stare davanti al computer. Gli autori finora sempre celati da misteriosi nick si sono dovuti rivelare con i loro nomi veri; la carta stampata non ammette tanti misteri. E così scopriamo che dietro la divertente rivista pdf ci sono tre persone in carne e ossa; lascio a voi la possibilità di scoprire chi sono e cosa fanno. Nel libro sono presentati sostanzialmente sette temi di divulgazione della matematica o forse è meglio dire sette tematiche strettamente connesse alla matematica. Come mia abitudine vi racconto brevemente cosa il lettore può trovare nel libro. Il primo dei temi proposti introduce alla problematica del raccontare la storia della matematica, la storia della ricerca e dei ricercatori. Un aneddoto su tutti: Julia Robinson, ricercatrice non da poco, visto che ha poi risolto il X problema di Hilbert, per essere assunta come ricercatrice di matematica è costretta a redigere un rapporto del suo lavoro, rapporto che è diventato famoso e significativo: "Lunedì: Provato a dimostrare teorema; Martedì: Provato a dimostrare teorema; Mercoledì: provato a dimostrare teorema; Giovedì: provato a dimostrare teorema; Venerdì: Teorema falso." La narrazione preferita dagli autori del libro non è sempre quella lineare di una storia che si lascia raccontare dall'inizio alla fine. Clerico e Fabbri preferiscono percorsi più tortuosi e originali. *A che punto è la notte* è un pezzo che ha tanti inizi ma parla tante volte della stessa cosa: la teoria dei gruppi. In *Difficile contare fino a dieci*, gli autori partono da un giro sul cavalluccio di una giostra per parlare di astronomia, delle discussioni recenti su quali debbano essere i pianeti del sistema solare, per poi arrivare alle discussione, anche filosofiche, sulla geometria dello spazio. Altri capitoli del libro sono dedicati alle trasformazioni geometriche, tassellazioni, decorazioni ritmiche, i rapporti tra matematica e arte. Il ritmo complessivo del racconto sta nelle simmetrie più o meno evidenti espresse nel titolo del libro. Lo stile narrativo è accattivante, semplice,... un libro che mi ha impressionato positivamente.

a.b.

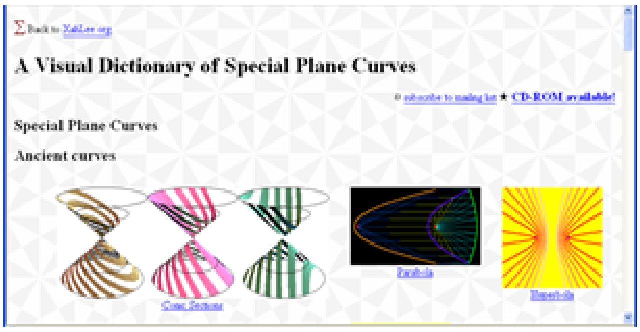
62. Recen… siti

a cura di Flavio Cimolin

Example Problems
http://www.exampleproblems.com/wiki/index.php/Main_Page

Avete presente Wikipedia, l'"enciclopedia libera" che viene creata e aggiornata costantemente da migliaia e migliaia di persone da tutto il mondo, che letteralmente scrivono un pezzettino di testo ognuno, fino a superare in numero di voci le più celebri enciclopedie del mondo? Ecco qui una sua nuova versione, applicata questa volta agli esercizi matematici! Per una qualsiasi disciplina matematica, come l'aritmetica, l'algebra, l'analisi, o ancora l'ottica o la teoria dei numeri, su questo sito sono raccolti centinaia e centinaia di esercizi inseriti dagli utenti. Nella pagina riassuntiva dell'argomento sono elencati tutti gli esercizi proposti, poi cliccando sui singoli si apre una pagina a parte in cui è mostrata la relativa soluzione. Si tratta davvero di un ottimo strumento innovativo, che può risultare utile sia agli studenti per avere una buona dose di esercizi svolti, sia agli insegnanti che vogliano avere un punto di riferimento grazie al quale collezionare i problemi da assegnare in classe.

A visual dictionary of special plane curves
http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html



Si tratta di una raccolta estremamente ricca e dettagliata, questa che va sotto il nome di "Dizionario visivo di curve piane speciali". Si va dalle coniche, ben studiate nelle scuole, alle spirali, alle cicloidali e a quelle definite per via analitica tramite problemi variazionali; poi ci sono i metodi per costruire nuove curve tramite inviluppi, inversioni, pedali, caustiche, e così via… Ogni tipo di curva è chiaramente spiegato sia in termini matematici sia nei suoi rapporti con altre curve, e ove possibile sono riportati esempi extra-matematici così come links esterni a curiosità storiche o approfondimenti. In buona parte dei casi, oltre alle immagini esplicative, è possibile scaricare programmi (ad esempio notebook di Mathematica) e animazioni che consentano di studiare le curve ancora meglio, magari al variare di parametri caratteristici. Chi ama la geometria e le proprietà di queste curve "speciali" non può che considerare questo come un punto di riferimento fondamentale sul web.

63. Giochi matematici

Copia e incolla

di Flavio Cimolin

Tutti i possessori di una casella di posta elettronica sono ormai sempre più pieni di messaggi spazzatura, detti anche “spam”. Oggi voglio giocare a fare lo spammer e inviare a una serie di persone una mail con ripetuto più volte possibile il testo seguente:

Io sono uno spammer!
Io sono uno spammer!
Io sono uno spammer!
………………………

Inizio a scrivere la prima riga, e poi procedo per passi successivi scegliendo ogni volta fra le seguenti due operazioni:

A) Con la sequenza di tasti opportuna, posso selezionare l'intero testo che ho scritto, fare CTRL+C per copiarlo e poi CTRL+V per incollarlo subito sotto, in modo da raddoppiare il numero di righe scritte.
B) Premendo unicamente CTRL+V sulla riga sotto posso incollare ancora una volta il testo precedentemente copiato.

Supponendo che l'operazione A richieda 2 secondi, mentre l'operazione B ne richieda 1 solo, sapete dirmi qual è la strategia che mi consente di scrivere la mail più lunga possibile? Guai a voi se mi intasate la posta con risposte ripetute… :-)

Inviare la soluzione a flaviocimolin@matematicamente.it; come oggetto della mail scrivere "GIOCHI MATEMATICI" *le risposte ritenute più interessanti saranno pubblicate sul prossimo numero della rivista*

Soluzione del gioco del numero precedente: Nel tempo del puzzle

Una soluzione interessante del gioco matematico proposto nello scorso numero è stata quella di Ivo Cicchese.

Definiamo un puzzle avente forma e dimensioni irregolari come ciascuno dei pezzi da cui è composto. Di conseguenza, il solo modo di procedere sarà di scegliere un primo pezzo del puzzle a caso, trovarne un altro che combaci con esso, poi un altro che combaci con l’uno, con l’altro o con entrambi e via dicendo... È lecito supporre che, una volta posto il primo pezzo, il tempo per trovare il secondo sia proporzionale al numero rimanente di pezzi che si ha a disposizione: $T_i = k(N-i)$, dove T_i è il tempo necessario a reperire l’i-esimo pezzo del puzzle (ovviamente non bisogna tenere in conto il pezzo posto inizialmente) ed N il numero di pezzi complessivi che compongono il puzzle. Il tempo necessario al completamento è dato da $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{N-1} = k\left[(N-1)+(N-2)+\ldots+1\right] = k\sum_{i=1}^{N-1} i = k\dfrac{N(N-1)}{2}$. In definitiva, evitando di calcolare il valore di K, sfruttiamo la proporzionalità tra T e N(N-1)/2. Il primo dei due ha 1000 pezzi e il vecchio lo completa in 10 ore; il secondo ne ha 2000: $N_A = 1000$, $N_B = 2000$, $T_A = 10$. Ora, dalla legge di proporzionalità diretta, si ricava facilmente: $\dfrac{T_B}{T_A} = \dfrac{N_B(N_B-1)}{N_A(N_A-1)}$. Il rapporto al secondo membro è $\dfrac{2000\cdot 1999}{1000\cdot 999} \cong 4{,}002$: il tempo per finire il secondo sarà circa il quadruplo di quello impiegato per il completare il primo, cioè 40 ore.

Cruciverba matematico

Soluzione del numero precedente

1 R	2 E	G	3 O	4 L	5 A	6 D	7 E	8 L	L	9 A	10 L	11 E	12 V	13 A	■	14 C	■
15 O	L	■	16 D	E	C	I	M	I	■	17 C	A	D	I	L	18 L	A	19 C
20 M	I	21 T	■	X	■	S	■	22 M	E	A	T	O	■	23 T	A	N	A
24 B	O	R	25 R	A	26 C	C	27 I	A	■	28 R	I	■	29 T	I	M	O	R
O	■	30 E	U	L	E	R	O	■	31 B	O	■	32 C	R	■	33 P	A	T
■	34 A	F	F	E	R	E	N	35 Z	A	■	36 P	R	I	37 N	A	■	A
38 D	I	O	F	A	N	T	E	E	■	39 S	L	O	B	O	D	40 A	N
41 I	L	L	I	R	I	A	■	42 R	43 A	M	A	N	U	J	A	N	■
■	44 A	O	N	I	E	■	45 I	M	M	A	G	I	N	A	R	I	46 A
47 N	N	■	48 I	A	■	49 C	R	E	M	L	I	N	O	■	50 I	D	I
51 O	T	52 T	■	■	53 I	S	O	L	A	T	O	■	■	54 T	O	R	O
55 R	O	T	O	R	E	■	56 N	O	N	O	■	57 I	C	S	■	58 O	N

Rivista di matematica per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito *www.matematicamente.it*

Anno 1 Numero 4 - Ottobre 2007

Registraz. n. 953 Trib. Lecce

Dir. resp. Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it