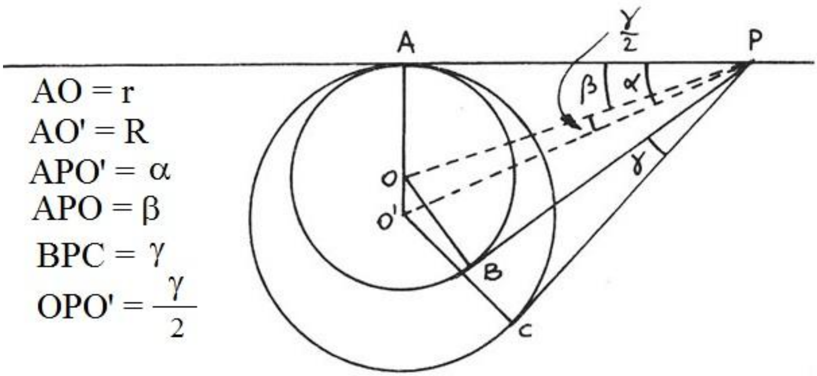
Luglio 1924

Due circonferenze i cui raggi misurano R ed r (con R > r), sono tangenti internamente nel punto A. Trovare sopra la tangente comune un punto P, tale che le rimanenti tangenti condotte per esso alle due circonferenze formino un dato angolo di ampiezza γ.
A quale condizione deve essere sottoposto γ affinché il problema sia possibile ?
Si osservi che la differenza degli angoli che la tangente comune forma con le congiungenti il punto P che si cerca, con i centri delle circonferenze è γ/2.



Verifichiamo innanzi tutto il suggerimento finale del testo. Deve essere

$$OPO' = \alpha - \beta = \frac{\gamma}{2}$$

Infatti

$$BPC = APC - APB = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \gamma$$

Poniamo ora AP = x (con $-\infty < x < \infty$).
Risulta

$$\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{AP}{AO'} = \dfrac{x}{R} \\ tg\beta = \dfrac{AP}{AO} = \dfrac{x}{r} \end{cases}$$

E, applicando le formule di sottrazione, si ha

$$tg\frac{\gamma}{2} = tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Cioè

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\dfrac{x}{R}-\dfrac{x}{r}}{1+\dfrac{x}{R}\cdot\dfrac{x}{r}}$$

Sviluppando e semplificando, otteniamo

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\dfrac{rx-Rx}{Rr}}{1+\dfrac{x^2}{Rr}} \qquad \to \qquad tg\frac{\gamma}{2} = \frac{rx-Rx}{Rr+x^2}$$

In cui, ponendo $tg\dfrac{\gamma}{2} = k$ e $x^2 = y$ si trasforma in

$$k = \frac{rx-Rx}{Rr+y} \qquad \to \qquad Rrk + yk = rx - Rx$$

$$yk = rx - Rx - Rrk \quad \to \quad y = \frac{r-R}{k}x - Rr$$

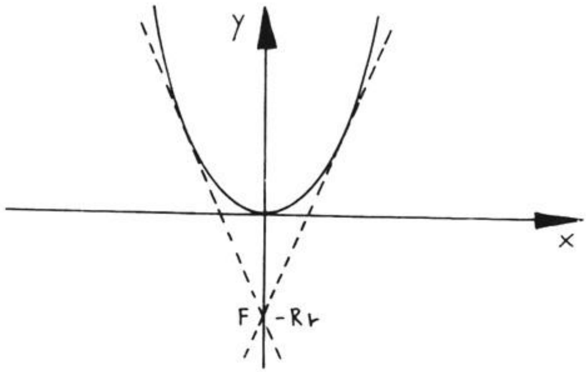
Prendiamo ora in considerazione il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{r-R}{k}x - Rr \end{cases}$$

La prima equazione è una parabola con vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y, e concavità verso l'alto.
La seconda equazione è invece un fascio di rette con centro nel punto

$$F \equiv (0;-Rr)$$

Come si ottiene facilmente assegnando a k due valori arbitrari (per esempio k = 1 e k = 2). Si ottengono due rette del fascio e risolvendo il sistema da esse formato, si ricava appunto il punto F.



Le soluzioni del problema corrispondono alle intersezioni fra la parabola e le rette generiche del fascio. Risolvendo il sistema (1) si ottiene l'equazione

$$(2) \qquad kx^2 + (R - r)x + kRr = 0$$

Dalla figura si vede che ci saranno sempre due intersezioni, cioè due soluzioni del problema, quando il discriminante della (2) risulta maggiore o uguale a zero. Cioè quando

$$\Delta = (R - r)^2 - 4k^2 Rr \geq 0$$

$$k^2 = \frac{(R - r)^2}{4Rr} \quad \rightarrow \quad k = \pm \frac{R - r}{2\sqrt{Rr}} = \pm \frac{R - r}{2Rr}\sqrt{Rr}$$

E il discriminante risulta positivo per valori di k (cioè di $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$) compresi nell'intervallo

Concludendo, il problema ammette sempre due soluzioni per ogni valore di γ tale che

$$-\frac{R - r}{2Rr}\sqrt{Rr} \leq \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leq \frac{R - r}{2Rr}\sqrt{Rr}$$

Con i segni di uguale si avranno le rette tangenti e con $\gamma = 0$ si ha la retta verticale. Infatti il coefficiente angolare della retta del fascio, come si vede nella (1), diventa infinito e si avrà una sola soluzione.