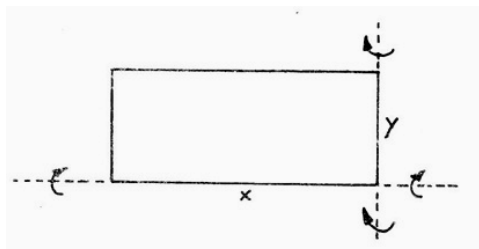


Settembre 1924

Un rettangolo, ruotando successivamente di un giro completo intorno alla sua base e alla sua altezza, genera due cilindri, la somma dei volumi dei quali è tripla del volume della sfera di raggio a .

Sapendo che il perimetro del rettangolo misura $2p$, calcolare la misura della base e dell'altezza. Discussione.



Il volume del cilindro generato dalla rotazione attorno all'asse y è

$$V_1 = \pi x^2 y$$

Quello del cilindro generato dalla rotazione intorno all'asse x è

$$V_2 = \pi x y^2$$

E il volume della sfera è

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

Applicando la condizione del problema, si ha

$$V_1 + V_2 = 3V$$

$$\pi x^2 y + \pi x y^2 = 4\pi a^3$$

$$(1) \quad x^2 y + x y^2 = 4a^3$$

Deve essere inoltre

$$2x + 2y = 2p$$

$$(2) \quad x + y = p$$

Mettendo a sistema le (1) e (2) abbiamo

$$\begin{cases} x^2 y + x y^2 = 4a^3 \\ x + y = p \end{cases}$$

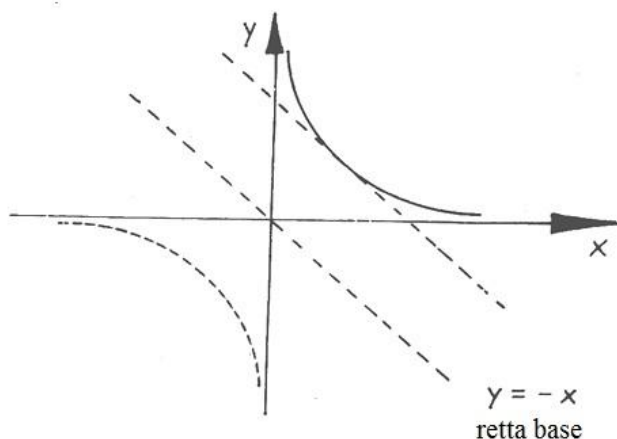
Cioè un sistema simmetrico che può essere trasformato in somma e prodotto

$$\begin{cases} xy(x+y) = 4a^3 \\ x+y = p \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} xy = \frac{4a^3}{p} \\ x+y = p \end{cases}$$

Con x , y e p sempre positivi.

La prima delle (3) è una iperbole equilatera riferita agli asintoti (di cui però dobbiamo considerare solo il ramo nel primo quadrante. Mentre la seconda corrisponde ad un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -1$



Le soluzioni del sistema (e quindi del problema), corrispondono alla soluzione dell'equazione

$$t^2 - pt + \frac{4a^3}{3} = 0$$

Che ha due soluzioni reali per tutti i valori di a e p per i quali il discriminante dell'equazione è maggiore o uguale a zero

$$\Delta \geq 0 \quad \rightarrow \quad p^2 - 4 \frac{4a^3}{p} \geq 0$$

Cioè per tutti i valori di a e p per i quali

Carlo Sintini, Problemi di maturità, 1924 Settembre, matematicamente.it

$$p^3 \geq 16a^3$$

$$p \geq a\sqrt[3]{16}$$

$$p \geq 2a\sqrt[3]{2}$$