Luglio 1925

In un cilindro retto di raggio r e altezza h, è descritta con centro O sull'asse del cilindro e uguale al raggio, una sfera che si suppone non abbia punti esterni al cilindro. Si vuole che il volume della sfera risulti medio proporzionale fra i volumi dei due solidi rotondi, che sommati alla sfera, danno il cilindro.

1) **Si determini a quale distanza da una delle basi del cilindro va preso il centro O della sfera.**
2) **Si esaminino i due casi particolari h = 4r e h = 7r calcolando in ciascuno di essi i volumi dei due solidi rotondi suindicati.**
3) **(facoltativo) Tenendo presenti le condizioni di realtà delle soluzioni e la condizione espressamente aggiunta che la sfera abbia tutti i punti interni o non esterni al cilindro, si dimostri che per ogni r assegnato, h si deve supporre prefissato in modo che sia** $4r \le y \le 7r$

Poniamo

$$AB = x \qquad \text{con} \qquad r \le x \le h - r$$

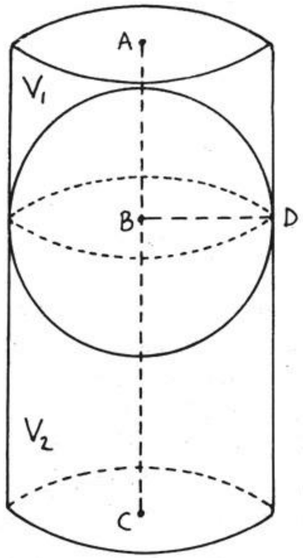
Affinché la sfera risulti non esterna al cilindro.

Indicando con V_1 e V_2 i volumi dei due solidi rotondi e con V il volume della sfera, si ha

$$V_1 = \pi r^2 x - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2\left(x - \frac{2}{3}r\right)$$

$$V_2 = \pi r^2\left(h - x\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2\left(h - x - \frac{2}{3}r\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Ma V deve essere medio proporzionale fra V_1 e V_2 e perciò

$$V_1 : V = V : V_2 \qquad \rightarrow \qquad V^2 = V_1 \cdot V_2$$

Sostituendo avremo

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 = \pi r^2 \left(x - \frac{2}{3}r\right) \cdot \pi r^2 \left(h - x - \frac{2}{3}r\right)$$

$$\frac{16}{9}\pi^2 r^6 = \pi^2 r^4 \left(x - \frac{2}{3}r\right) \cdot \left(h - x - \frac{2}{3}r\right)$$

$$16r^2 = 9\left(x - \frac{2}{3}r\right) \cdot \left(h - x - \frac{2}{3}r\right)$$

$$16r^2 = 9\left(hx - x^2 - \frac{2}{3}rx - \frac{2}{3}rh + \frac{2}{3}rx + \frac{4}{9}r^2 \right)$$

$$16r^2 = 9\left(hx - x^2 - \frac{2}{3}rh + \frac{4}{9}r^2 \right)$$

$$16r^2 = 9\,\frac{9hx - 9x^2 - 6rh + 4r^2}{9}$$

$$16r^2 = 9hx - 9x^2 - 6rh + 4r^2$$

$$9x^2 - 9hx + 12r^2 + 6rh = 0$$

$$3x^2 - 3hx + 4r^2 + 2rh = 0 \qquad \text{con} \qquad r \le x \le h - r$$

Ora poniamo $x^2 = y$ ed otteniamo il sistema

$$\boxed{\begin{cases} y = hx - \frac{4}{3}r^2 - \frac{2}{3} \\ y = x^2 \end{cases}}$$

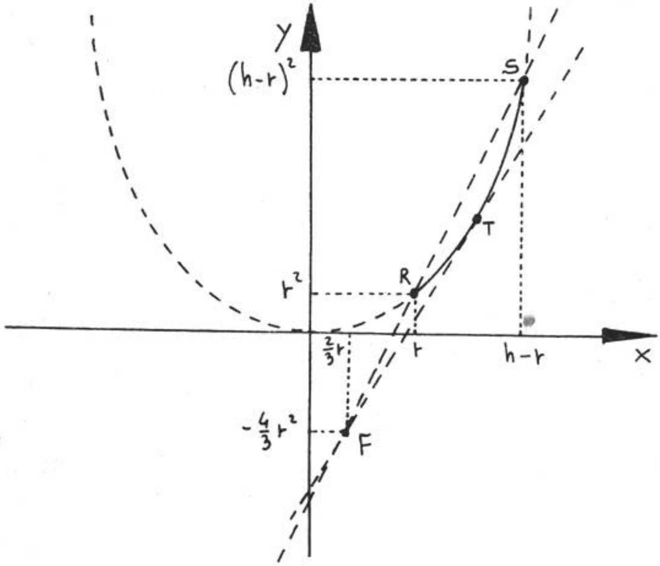
Considerando r come valore fisso ed h variabile, la prima equazione corrisponde ad un fascio di rette il cui centro si trova assegnando due valori arbitrari (per esempio h = 0 ed h = r) e risolvendo il sistema formato dalle due retta del fascio.

Si trova

$$F \equiv \left(\frac{2}{3}r; -\frac{4}{3}r \right)$$

La seconda equazione è invece una parabola con vertice nell’origine, asse coincidente con l’asse y e concavità verso l’alto. Però dovremo considerare solo l’arco di parabola che soddisfa la condizione $r \le x \le h - r$

Si può allora tracciare il grafico seguente, in cui le intersezioni fra retta del fascio e l’arco di parabola corrispondono alle soluzioni accettabili del problema.



Imponendo il passaggio del fascio di rette per R ed S si ottiene in entrambi i casi h = 7r e perciò la stessa retta del fascio passa per entrambi i punti.

Calcoliamo ora il valore di h per cui si ha la tangenza. Basta imporre che si annulli il discriminante di

$$3x^2 - 3hx + 4r^2 + 2rh = 0$$

Avremo

$$\Delta = 9h^2 - 12\left(4r^2 + 2rh\right) = 0 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} h = -\dfrac{4}{3} \\ h = 4r \end{cases}$$

La soluzione negativa va scartata perché corrisponde ad una retta con coefficiente angolare negativo, e quindi alla tangenza nel secondo quadrante.

Dunque si ha la tangenza in T quando h = 4r e il passaggio per R ed S quando h = 7r. Quindi il problema avrà sempre due soluzioni quando

$$4r \le h \le 7r$$

Infine per rispondere al punto 2, si ha

$$h = 4r \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 = V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$h = 7r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{16}{3}\pi r^3 \\ V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

Nel primo caso la sfera si trova nel punto medio dell'altezza del cilindro, e nel secondo caso la sfera poggia su una delle due basi del cilindro.