Settembre 1925

Determinare l'ampiezza degli angoli acuti $A\hat{B}C = \beta$ **e** $A\hat{C}B = \gamma$ **del triangolo rettangolo ABC in modo che sia**

$$p\,\text{sen}\beta + q\,\text{sen}\gamma = r$$

Dove p, q, r sono numeri reali positivi. Fissati p e q, con p < q, fra quali limiti può variare r affinché il problema abbia soluzioni ?

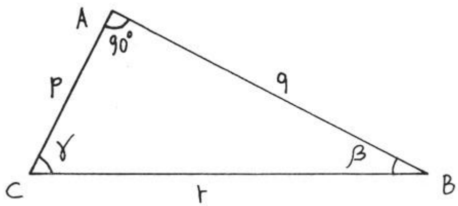
N.B. Il candidato potrà assumere, volendo, come incognita $x = \text{tg}\dfrac{\beta}{2}$

È poi in sua facoltà completare l'esercizio costruendo il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC = a i cui angoli β e γ fanno assumere a r, cioè a

$$p\,\text{sen}\beta + q\,\text{sen}\gamma$$

Il massimo valore di cui è suscettibile.

Consideriamo un triangolo rettangolo avente cateti di lunghezza p e q ed ipotenusa r.



Dalla relazione pitagorica

$$p^2 + q^2 = r^2$$

si ricava, dividendo per r

$$p\frac{p}{r} + q\frac{q}{r} = r$$

$$p\,\text{sen}\beta + q\,\text{sen}\gamma = r$$

Cioè la relazione proposta dal problema.
Da notare che la condizione p < q implica che sia

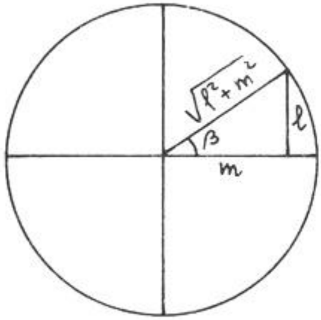
$$0 < \beta < 45°$$

Inoltre, essendo γ = 90 – β, la relazione precedente può essere messa nella forma

$$p\,\text{sen}\beta + q\,\text{sen}(90-\beta) = r$$

$$\boxed{(1)\quad p\,\text{sen}\beta + q\cos\beta = r}$$

Ora osserviamo che in una circonferenza generica di raggio r, per ogni angolo β valgono le formule



$$\begin{cases} \text{sen}\,\beta = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2}} = \dfrac{l/m}{\sqrt{l^2/m^2+1}} = \dfrac{\text{tg}\,\beta}{\sqrt{\text{tg}^2\,\beta+1}} \\ \cos\beta = \dfrac{m}{\sqrt{l^2+m^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{l^2/m^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{tg}^2\,\beta+1}} \end{cases}$$

Applicandole alla relazione (1), si ottiene

$$p\frac{\text{tg}\,\beta}{\sqrt{\text{tg}^2\,\beta+1}} + q\frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2\,\beta+1}} = 1$$

$$\boxed{(2)\quad p\,\text{tg}\,\beta + q = \sqrt{\text{tg}^2\,\beta+1}}$$

Ora poniamo

$$\begin{cases} \text{tg}\,\beta = x \\ \sqrt{\text{tg}^2\,\beta+1} = y \end{cases}$$

E sostituendo nella (2) abbiamo

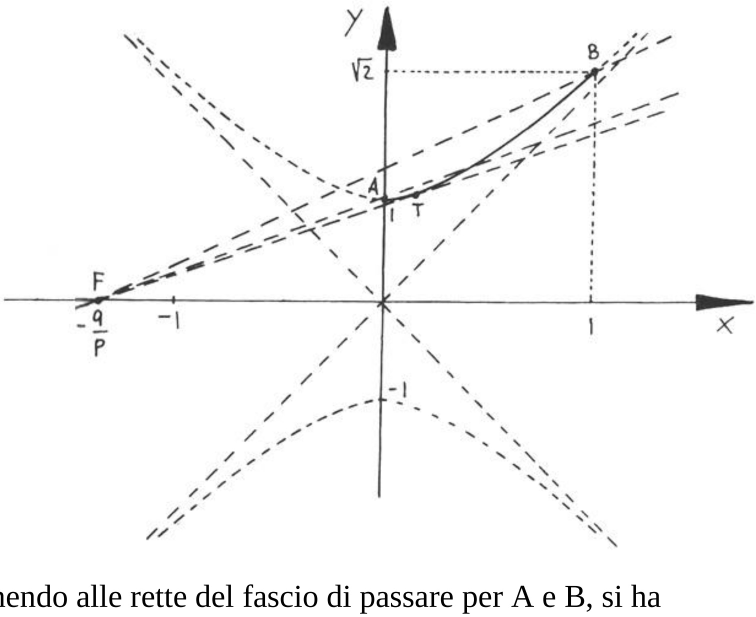
$$\begin{cases} px + q = ry \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

$$\boxed{(3)\quad \begin{cases} y = \dfrac{p}{r}x + \dfrac{q}{r} \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 < x < 1 \;\; \text{e} \;\; y \geq 0}$$

Cioè un fascio di rette (in cui il parametro variabile è r) con centro

$$F \equiv \left(-\frac{q}{p} ; 0 \right)$$

Come si ottiene facilmente assegnando ad r due valori arbitrari (per esempio $r = 1$ e $r = 2$) e risolvendo il sistema delle due rette ottenute.
Mentre l'altra equazione della (3) è una iperbole equilatera riferita agli assi e con i fuochi sull'asse y.
Dell'iperbole dovremo prendere in considerazione solo il tratto AB (A escluso e B escluso), a causa delle limitazioni delle variabili.
Le soluzioni del problema corrispondono alle intersezioni fra le rette del fascio e l'arco di iperbole AB, al variare di r.



Imponendo alle rette del fascio di passare per A e B, si ha

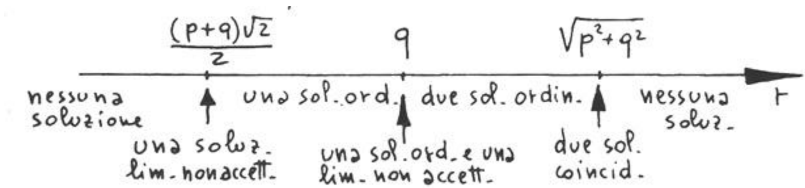
$$A \;\Rightarrow\; 1=\frac{q}{r} \;\to\; r=q$$

$$B \;\Rightarrow\; r=\frac{(p+q)\sqrt{2}}{2}$$

Si ha invece la tangenza in T quando

$$\frac{\Delta}{4}=p^2q^2-\left(p^2-r^2\right)\left(q^2-r^2\right)=0 \;\to\; r=\pm\sqrt{p^2+q^2}$$

E la soluzione negativa va scartata perché sostituita nel fascio fornisce una retta con coefficiente angolare negativo.
Riassumendo si ha



Per quanto riguarda la parte facoltativa del problema riprendiamo l'equazione parametrica (2)

$$p\,x+q=\sqrt{x^2+1}$$

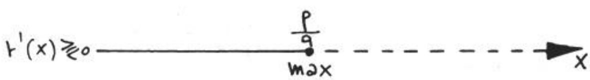
Ed esplicitiamo la variabile r

$$r=\frac{px+q}{\sqrt{x^2+1}}$$

Si ottiene una funzione algebrica irrazionale con le variabili x ed r di cui dobbiamo determinare il massimo. Derivando si ha

$$r'=\frac{-qx+p}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

Studiandone il segno, si ottiene



E quindi il massimo cercato si ha quando $x=\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{p}{q}$