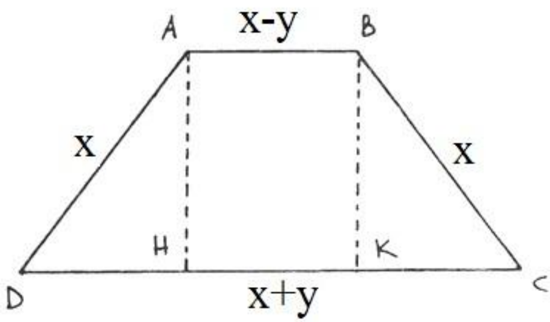
Luglio 1926

Di un triangolo isoscele le misure della base maggiore, del lato obliquo e della base minore, sono in progressione aritmetica. Determinare la misura x del lato obliquo e la ragione y, conoscendo la misura a della somma dei lati obliqui e della base minore, e la somma $2b^2$ delle aree dei quadrati dei quattro lati. Discussione.



Indicando con x i lati obliqui, sottraendo la ragione y si ha la base minore, e aggiungendo la ragione y si ha la base maggiore. Quindi

$$\begin{cases} BC = AD = x \\ AB = x - y \\ DC = x + y \end{cases}$$

Inoltre è

$$DH = KC = \frac{(x+y)-(x-y)}{2} = y$$

Applicando le due relazioni fornite dal problema si ha

$$\begin{cases} x + x + (x - y) = a \\ x^2 + x^2 + (x-y)^2 + (x+y)^2 = 2b^2 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} y = 3x - a \\ 2x^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

Sostituendo la prima relazione nella seconda si ha

$$\boxed{(1) \quad 11x^2 - 6ax + a^2 - b^2 = 0}$$

Sembrerebbe che la x possa assumere qualunque valore positivo (essendo un segmento), ma non è così. Infatti sia AB che KC essendo anch'essi segmenti, devono risultare positivi, e ciò implica le condizioni

$$\begin{cases} AB = x - y = x - (3x - a) > 0 \quad \rightarrow \quad x < \dfrac{a}{2} \\ KC = y = 3x - a > 0 \quad \rightarrow \quad x > \dfrac{a}{3} \end{cases}$$

Perciò deve essere

$$\boxed{(2) \qquad \frac{a}{3} < x < \frac{a}{2}}$$

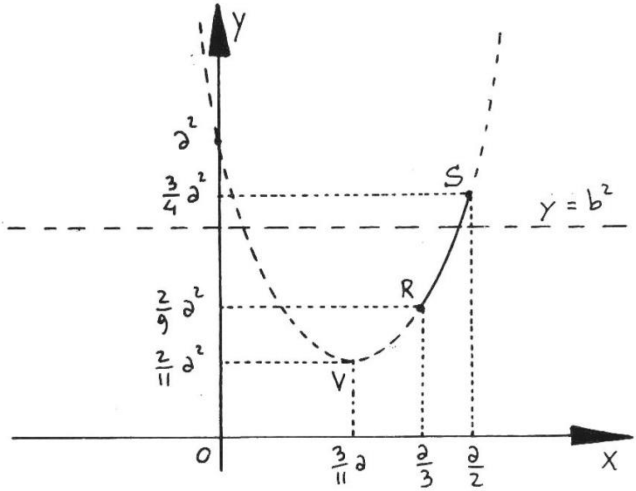
Consideriamo come parametro la b e poniamo $y = b^2$ nella (1).
Si ottiene il sistema

$$\boxed{(3) \qquad \begin{cases} y = 11x^2 - 6ax + a^2 \\ y = b^2 \end{cases}}$$

La prima equazione corrisponde ad una parabola con vertice in

$$V \equiv \left(\frac{3}{11}a; \frac{2}{11}a^2 \right)$$

di cui dovremo considerare solo l'arco compreso RS, ed un fascio di rette orizzontali



Le soluzioni del problema sono le intersezioni della retta generica del fascio con l'arco RS di parabola. Quindi il problema avrà sempre una soluzione per

$$\frac{2}{9}a^2 < b^2 < \frac{3}{4}a^2$$

$$\boxed{a\frac{\sqrt{2}}{3} < b < a\frac{\sqrt{3}}{2}}$$