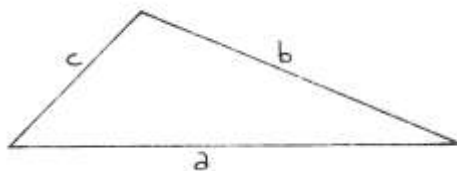


Settembre 1926

Essendo a, b, c le misure dei lati di un triangolo (con $a > b > c$), determinare x in modo che $a - x, b - x, c - x$ siano le misure dei lati di un triangolo rettangolo. Discussione.



Sappiamo che $a > b > c$ e il triangolo rettangolo ha come lati i segmenti

$$a - x > b - x > c - x$$

che costituiscono rispettivamente l'ipotenusa e i due cateti.

Il lato più piccolo deve comunque essere positivo, e quindi

$$(1) \quad c - x > 0 \rightarrow x < c$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo

$$(b - x)^2 + (c - x)^2 = (a - x)^2$$

$$(2) \quad x^2 - 2x(b + c - a) + b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

Risolvendola si ottiene

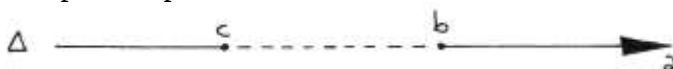
$$(3) \quad x = b + c - a \pm \sqrt{(b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}$$

Studiamo il segno del discriminante

$$(b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2) \geq 0$$

$$a^2 - a(b + c) + bc \geq 0$$

Risolviamo rispetto al parametro a



Il discriminante risulta positivo per ogni valore di a esterno all'intervallo cb . Ma per ipotesi sappiamo che $a > b$ e quindi il

discriminante è sempre positivo e la (3) ammette sempre due soluzioni algebriche.

Ma una sola di esse ha significato geometrico. Infatti in ogni triangolo un lato deve essere sempre minore della somma degli altri due, e quindi nel triangolo rettangolo deve essere

$$\begin{aligned} a - x &< (b - x) + (c - x) \\ x &< b + c - a \end{aligned}$$

quindi, osservando la (3), si comprende che ha significato geometrico solo la soluzione corrispondente al segno meno.

Il problema dunque ammette una sola soluzione, la minore della (3), pari a

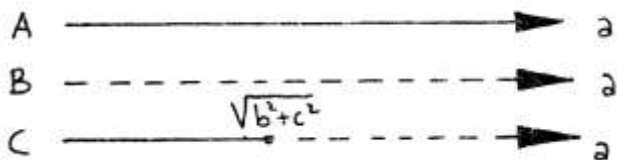
$$x = b + c - a - \sqrt{(b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}$$

Si può ancora aggiungere qualcosa osservando come varia il segno dei tre coefficienti della (2). Il coefficiente del termine di secondo grado è sempre positivo. Il coefficiente del termine di primo grado è invece sempre negativo (perché nel triangolo iniziale deve essere $a < b + c$ e allora $b + c - a > 0$). Il termine noto infine è positivo per

$$-\sqrt{b^2 + c^2} < a < \sqrt{b^2 + c^2}$$

Ma essendo possibili solo valori positivi di a , il termine noto risulta negativo per $a > \sqrt{b^2 + c^2}$.

Utilizzando ora la regola dei segni di Cartesio, ed indicando con A, B, C i tre coefficienti della (2), avremo la situazione seguente



Cioè due variazioni (soluzioni positive) per $a < \sqrt{b^2 + c^2}$ ed una permanenza ed una variazione (una soluzione positiva ed una negativa) per $a > \sqrt{b^2 + c^2}$.

Dovendo scartare, come si è detto, la soluzione più alta in entrambi i casi, si può concludere la discussione affermando che il problema

ammette sempre una soluzione $x < c$ che è positiva se $a < \sqrt{b^2 + c^2}$, e che è invece negativa se $a > \sqrt{b^2 + c^2}$.

Nel caso in cui $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ il triangolo dato è già rettangolo e risulta $x = 0$.