Luglio 1927

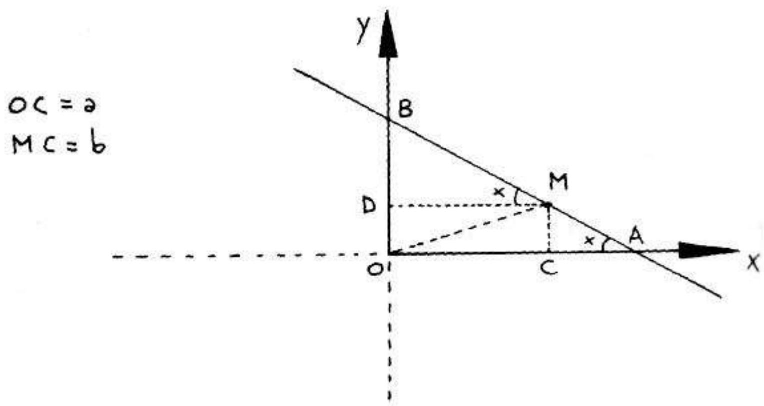
Dato l'angolo retto xOy **e un punto M interno ad esso che abbia da Oy e Ox rispettivamente le distanze a e b, condurre per M una retta tale che, detti A e B i punti di intersezione di essa coi lati dell'angolo retto, si abbia**

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = m^2$$

Dove m è un numero reale.
Discutere i risultati e dire come deve essere condotta la retta AB perché sia minima la somma

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$$

Il candidato ha facoltà di esaminare la questione da un punto di vista più generale, considerando anche i casi nei quali la retta AB incontra uno dei lati dell'angolo e il prolungamento dell'altro.



Affrontando il problema sotto l'aspetto più generico, abbiamo un punto M di coordinate a, b nel primo quadrante di un riferimento cartesiano.
Consideriamo la retta generica passante per M e indichiamo con x l'angolo che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.
Nel triangolo rettangolo MCA è

$$\frac{MC}{MA} = \operatorname{sen} x \qquad \to \qquad MA = \frac{b}{\operatorname{sen} x}$$

Mentre nel triangolo rettangolo BDM è

$$\frac{DM}{BM} = \cos x \qquad \rightarrow \qquad BM = \frac{a}{\cos x}$$

Applicando ora la relazione suggerita dal problema si ottiene

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = m^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{a^2}{\cos^2 x} = m^2$$

Conviene a questo punto ricorrere a due variabili ausiliarie, ponendo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = X \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = Y \end{cases}$$

E la relazione precedente diviene più semplicemente

$$\boxed{(1) \qquad b^2X + a^2Y = m^2}$$

L'angolo x può assumere qualsiasi valore (eccetto $x = k\frac{\pi}{2}$), e il valore del seno e del coseno, come è noto, possono assumere solo valori compresi fra -1 e 1. Ne deriva che i loro reciproci possono assumere solo valori che vanno da - ∞ ad 1 oppure che vanno da 1 ad ∞.
Ma dovendo essere i segmenti MA e BM positivi, le variabili X e Y possono assumere soltanto valori maggiori di 1.
Ora associamo alla (1) la relazione fondamentale della trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Che, dividendo per $\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$, può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$$

$$X + Y = XY$$

Cioè

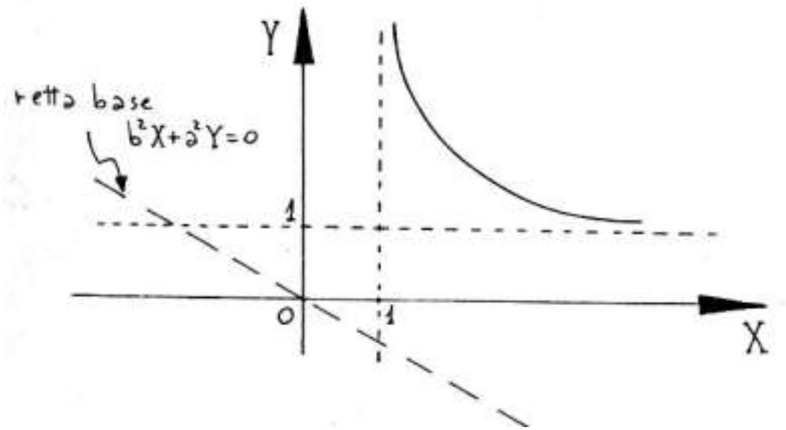
$$\boxed{(2) \qquad Y = \frac{X}{X-1}}$$

Il sistema formato dalle (1) e (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} b^2X + a^2Y = m^2 \\ Y = \dfrac{X}{X-1} \end{cases}$$

Considerando m^2 come parametro, corrisponde ad un fascio di rette parallele e da una funzione omografica (iperbole equilatera riferita agli asintoti).
A causa delle limitazioni precedentemente citate, dovremo prendere in considerazione solo il ramo di iperbole contenuto nel primo quadrante.

Il coefficiente angolare di tutte le rette del fascio è $-\dfrac{b^2}{a^2}$, negativo, e tutte le rette sono dirette verso il basso.
Chiamiamo retta base la retta del fascio che passa per l'origine degli assi.



Le soluzioni del problema sono costituite dalle intersezioni fra il ramo di iperbole e la retta generica del fascio.
Nel sistema (3) sostituiamo la seconda equazione nella prima. Si ottiene l'equazione di secondo grado

$$b^2X^2 + X\left(a^2 + b^2 - m^2\right) + m^2 = 0$$

Con due soluzioni quando il suo discriminante è maggiore o uguale a zero

$$\Delta = \left(a^2 + b^2 - m^2\right)^2 - 4b^2m^2 \geq 0$$

Cioè quando

$$a^4+b^4+m^4-2a^2b^2-2a^2m^2+2b^2m^2-4b^2m^2\geq 0$$

$$m^4-2m^2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0$$

$$m^2=a^2+b^2\pm\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2}=a^2+b^2\pm 2ab$$

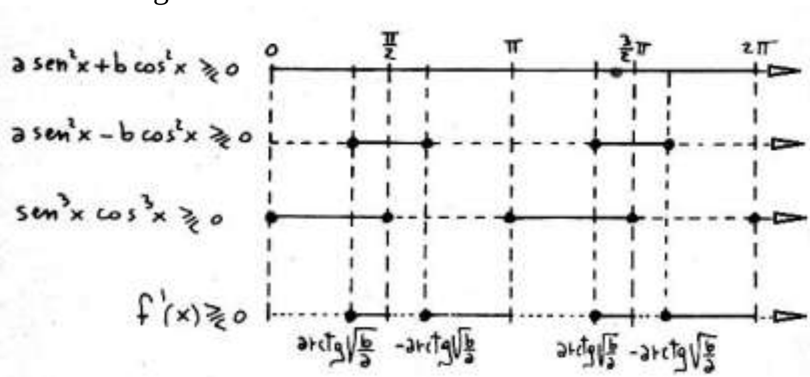
Determiniamo infine per quale valore dell'angolo x la funzione

$$y=\frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 x}+\frac{a^2}{\cos^2 x}$$

Assume valore minimo. La sua derivata è

$$y'=\frac{2\left(a\operatorname{sen}^2 x+b\cos^2 x\right)\left(a\operatorname{sen}^2 x-b\cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^3 x}$$

Lo studio del segno fornisce



Da cui si deduce che il minimo richiesto si ha quando

$$\boxed{x=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}}$$