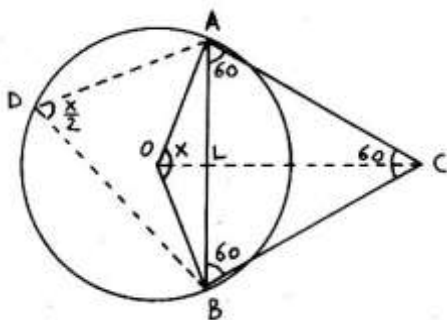


Settembre 1927

Dato un cerchio di raggio r , determinare in esso l'ampiezza di un angolo al centro $AOB = x$ in modo che costruito il triangolo equilatero ABC sulla corda AB da parte opposta al centro O , sia kr^2 l'area del quadrilatero $OACB$.

Discutere i risultati e dire quale valore deve avere x perché il quadrilatero abbia area massima.



Poniamo $AOB = x$ con $0 < x \leq 180^\circ$

Per il teorema della corda è

$$AB = 2r \sin \frac{x}{2}$$

Mentre nei triangoli rettangoli ALO e ALC si ha

$$\frac{OL}{AO} = \cos \frac{x}{2} \rightarrow OL = r \cos \frac{x}{2}$$

$$\frac{LC}{AC} = \frac{LC}{AB} = \sin 60 \rightarrow LC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r \sin \frac{x}{2} = r\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}$$

L'area del quadrilatero $OACB$ è il semiprodotto delle diagonali per il seno di uno degli angoli da esse formato. E perciò

$$S = \frac{AB \cdot OC \cdot \sin 90}{2} = \frac{AB \cdot (OL + LC) \cdot \sin 90}{2} = kr^2$$

Sostituendo e semplificando abbiamo

$$\frac{2r \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \left(r \cos \frac{x}{2} + r\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) \cdot 1}{2} = kr^2$$

$$2r^2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2r^2 \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 2kr^2$$

$$(1) \quad \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = k$$

Ma dalle formule di duplicazione si ricava

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{cases}$$

O anche, dimezzando gli argomenti

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2} \\ \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nella (1) si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} + \sqrt{3} \frac{1 - \cos x}{2} = k$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x &= 2k - \sqrt{3} \\ 0 < x &\leq 180 \end{aligned}$$

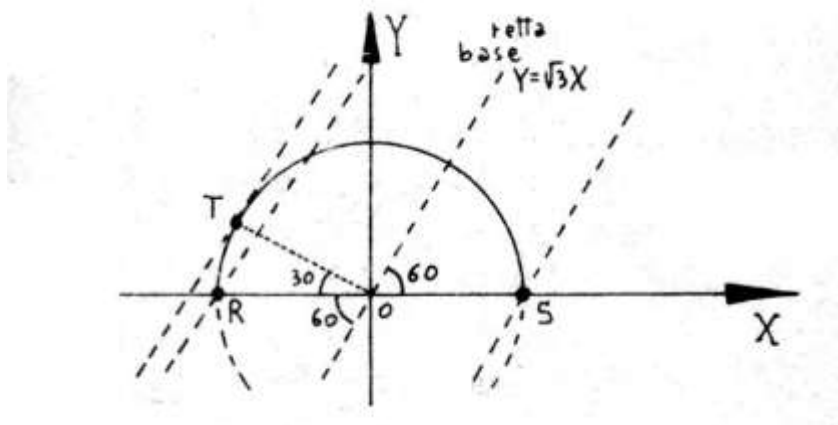
Ora poniamo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \operatorname{sen} x = Y \end{cases}$$

E associamo alla (2) la relazione fondamentale della trigonometria. Si ottiene

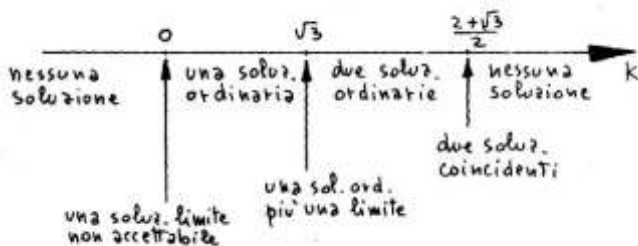
$$(3) \quad \begin{cases} Y = \sqrt{3} X + 2k\sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Che rappresentano un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = \sqrt{3}$ e una circonferenza con raggio unitario e centro nell'origine (di cui per le limitazioni dobbiamo considerare solo la metà superiore)



Le soluzioni del problema sono costituite dalle intersezioni fra le rette del fascio e la semicirconferenza.

Imponendo il passaggio del fascio per i punti R, S, T si trova



Infine, poiché l'area del quadrilatero è proporzionale a k , si avrà area massima quando k assume il suo valore più alto

$$k = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

In corrispondenza si ha

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 150^\circ$$