Luglio 1928

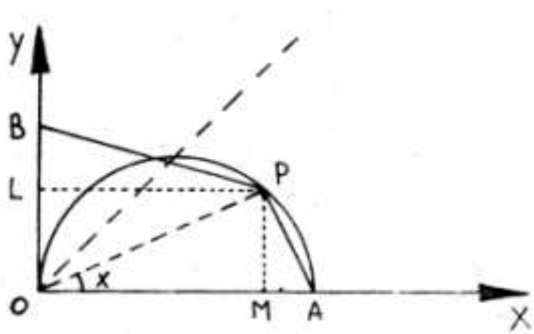
È dato l'angolo retto $\widehat{xOy}$ **e sono dati due punti A e B sui lati Ox e Oy in modo che** $\frac{OA}{OB}=\sqrt{3}$ **. Determinare un punto P interno all'angolo retto, sapendo che l'angolo** $\widehat{OPA}$ **è retto e che**

$$OP^2+PB^2=k\cdot OB^2$$

Si trovino anche le condizioni alle quali deve soddisfare il numero k affinché il problema sia possibile e si dica quali valori deve avere lo stesso numero perché il punto P cada sul lato Ox o sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{xOy}$**.**

E' in facoltà del candidato di risolvere e discutere il problema per via geometrica, non mancando di far vedere che la soluzione geometrica vale anche quando gli angoli $\widehat{xOy}$ **e** $\widehat{OPA}$ **e il rapporto** $\frac{OA}{OB}$ **abbiano valori qualsivogliano.**

N.B. Per la soluzione algebrica può essere comodo assumere come incognita $\operatorname{tg}\widehat{AOP}$**.**



Poiché l'angolo $\widehat{OPA}=90°$, il punto P è vincolato a muoversi lungo una semicirconferenza. Poniamo

$$\begin{cases} BO = a \\ POA = x \quad (\text{con} \quad 0 < x < 90) \end{cases}$$

Risulta

$$\frac{OA}{OB} = \sqrt{3} \qquad \to \qquad OA = a\sqrt{3}$$

$$\frac{PO}{OA} = \cos x \quad \to \quad PO^2 = 3a^2 \cos^2 x$$

$$\frac{PM}{PO} = \operatorname{sen} x \quad \to \quad PM = a\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\frac{MO}{PO} = \cos x \quad \to \quad MO = a\sqrt{3} \cos^2 x$$

Ed inoltre

$$BL = BO - PM = a - a\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x$$

$$LP = MO = a\sqrt{3} \cos^2 x$$

Applicando Pitagora al triangolo BLP si trova che

$$PB^2 = a^2 \left(1 - \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x\right)^2 + 3a^2 \cos^4 x$$

Sostituendo nella relazione del problema

$$OP^2 + PB^2 = k \cdot OB^2$$

Si ottiene

$$3a^2 \cos^2 x + a^2 \left(1 - \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x\right) + 3a^2 \cos^4 x = ka^2$$

E semplificando

$$3\cos^2 x + \left(1 - \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x\right) + 3\cos^4 x = k$$

$$3\cos^2 x + 1 - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = k$$

$$3\cos^2 x + 1 - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3\cos^2 x \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = k$$

$$3\cos^2 x + 1 - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3\cos^2 x = k$$

$$6\cos^2 x + 1 - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x = k$$

Dalle formule di duplicazione si possono ricavare le seguenti espressioni

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{cases}$$

E, sostituendo, avremo

$$6\frac{1+\cos 2x}{2} + 1 - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = k$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & 3\cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = k - 4 \\ & 0 < 2x < 180 \end{array}}$$

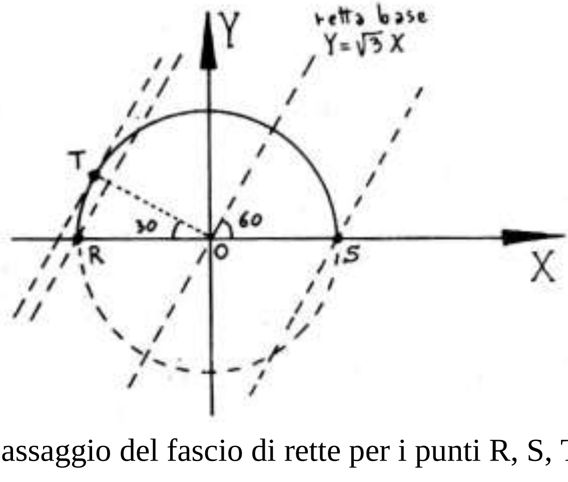
Che è l'equazione parametrica da discutere. Ponendo

$$\begin{cases} \cos 2x = X \\ \operatorname{sen} 2x = Y \end{cases}$$

Sostituendo nella (1), ed associando con la relazione fondamentale della trigonometria, si ha il sistema

$$\boxed{(2) \quad \begin{cases} 3X - \sqrt{3} Y = k - 4 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = \sqrt{3}$ (e quindi inclinate verso l'alto di 60°), e una semicirconferenza



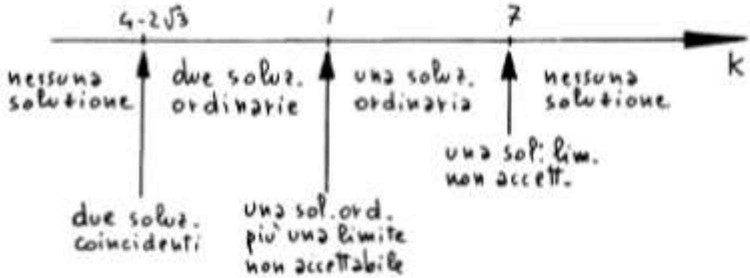
Imponiamo il passaggio del fascio di rette per i punti R, S, T

$$R \equiv (-1;0) \quad \rightarrow \quad -3 = k - 4 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

$$S \equiv (1;0) \quad \rightarrow \quad 3 = k - 4 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

$$T \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,\frac{1}{2} = k - 4 \quad \rightarrow \quad k = 4 - 2\sqrt{3}$$

Si avrà perciò, al variare di k, la situazione seguente



Infine, nelle due situazioni particolari richieste dal problema si ha

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 3\cos 0 - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,0 = k - 4 \quad \rightarrow \quad k = 7$$

$$x = 45° \quad \rightarrow \quad 3\cos 90 - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,90 = k - 4 \quad \rightarrow \quad k = 4 - \sqrt{3}$$