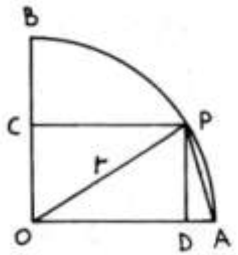
Settembre 1928

Determinare sopra l'arco $\overset{\frown}{AB}$ **quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, un punto P tale che detta C la proiezione ortogonale di P sul raggio OB, si abbia che la somma del segmento AP e del doppio del segmento PC sia uguale ad un segmento di lunghezza** ℓ**. Discussione.**



Poniamo

$$AD = x \qquad \text{con} \qquad 0 \le x \le r$$

Si ha

$$PC = OD = r - x$$

$$PD^2 = r^2 - (r - x)^2 = 2rx - x^2$$

$$AP = \sqrt{x^2 + 2rx - x^2} = \sqrt{2rx}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$AP + 2 \cdot PC = \ell$$

$$\sqrt{2rx} + 2(r - x) = \ell$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \sqrt{2rx} - 2x = \ell - 2r \\ & 0 \le x \le r \end{array}}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. Poniamo

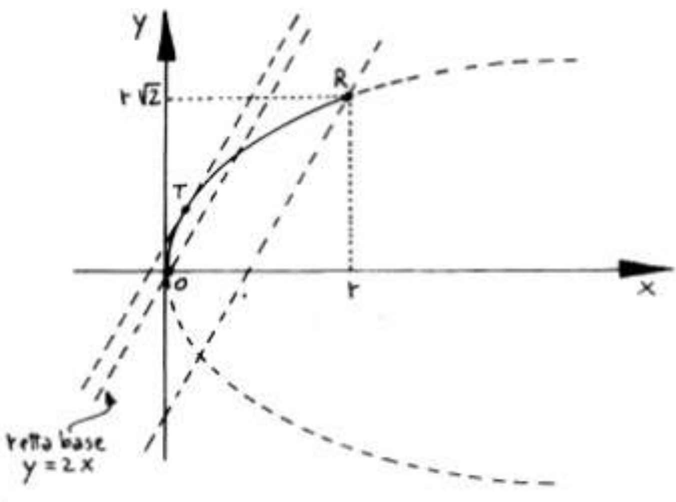
$$\sqrt{2rx} = y \qquad \text{con} \qquad y \ge 0$$

Sostituendo nella (1) e quadrando quest'ultima relazione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = 2x + \ell - 2r \\ x = \dfrac{1}{2r} y^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = 2 (dove ℓ rappresenta il parametro), e un arco di parabola con vertice nell'origine, asse orizzontale e concavità a destra.
L'arco di parabola è delimitato da

$$\begin{cases} 0 \le x \le r \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Imponiamo il passaggio del fascio di rette per i punti O ed R

$$O \equiv (0;0) \quad \rightarrow \quad \ell = 2r$$

$$R \equiv (r; r\sqrt{2}) \quad \rightarrow \quad r\sqrt{2} = 2r + \ell - 2r \quad \rightarrow \quad \ell = r\sqrt{2}$$

E determiniamo il valore di ℓ per cui si ha la tangenza in T, eliminando una incognita del sistema e ponendo $\Delta = 0$.

$$y^2 - ry + \ell r - 2r^2 = 0$$

$$\Delta = r^2 - 4\left(\ell r - 2r^2\right) = 0$$

$$\ell = \frac{9}{4} r$$

E perciò al variare di ℓ si avrà