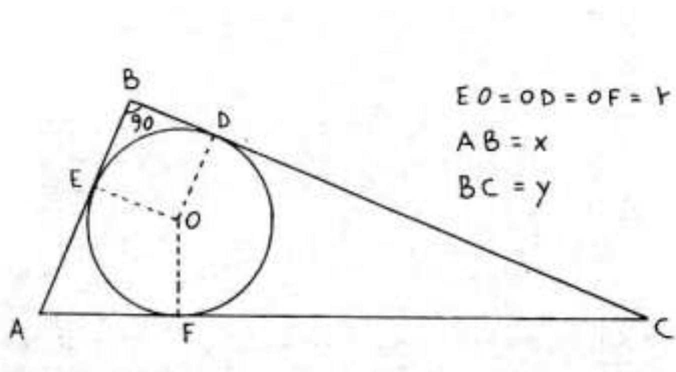
Luglio 1929

Considerato uno qualunque dei quadrilateri rettangoli aventi un centro il cui raggio misura r come cerchio inscritto o exinscritto tangente all'ipotenusa, far vedere che, fra le misure x e y dei cateti del triangolo, sussiste sempre la relazione

$$xy - 2r(x+y) + 2r^2 = 0$$

Servendosi poi di questa relazione determinare le misure dei lati di un triangolo rettangolo, del quale si conosce che il raggio del cerchio inscritto ha per misura r e l'area è uguale a quella di un rettangolo i cui lati misurano r ed a.
Discussione e costruzione geometrica. Il candidato può, se lo crede, formulare e risolvere qualche altro problema in cui convenga, in particolar modo, servirsi della relazione sopra riportata.



Il quadrilatero EODB è un quadrato con lato uguale ad r. risulta allora

$$\begin{cases} AE = x - r \\ DC = y - r \end{cases} \quad \text{ma è} \quad \begin{cases} AE = AF \\ DC = FC \end{cases}$$

Perché segmenti di tangente condotti da punti esterni alla circonferenza.
Ne consegue che

$$AC = AF + FC = (x - r) + (y - r) = x + y - 2r$$

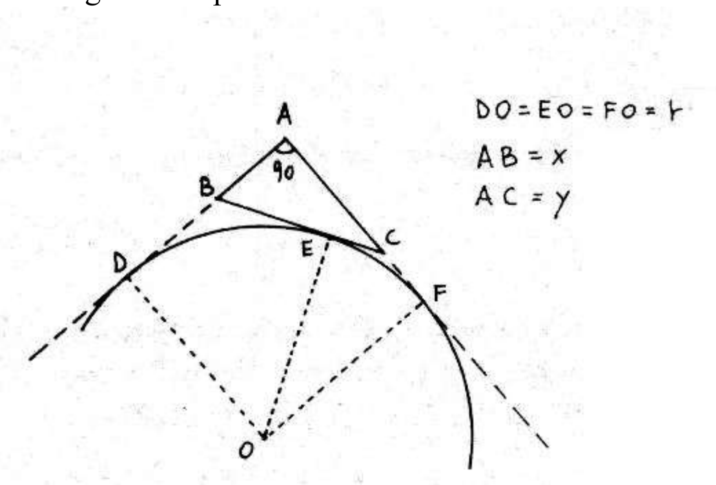
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC

$$x^2 + y^2 = \left(x + y - 2r\right)^2$$

Cioè, semplificando e ordinando,

$$\boxed{xy - 2r\left(x + y\right) + 2r^2 = 0}$$

Che è appunto la relazione che dovevamo dimostrare.
Dimostriamo ancora che essa rimane valida anche per la circonferenza ex inscritta tangente all'ipotenusa



Il quadrilatero AFOD è un quadrato avente il lato uguale ad r. Risulta allora

$$\begin{cases} BD = r - x \\ CF = r - y \end{cases} \quad \text{ma è} \quad \begin{cases} BD = BE \\ CF = CE \end{cases}$$

Perché segmenti di tangente condotti da punti esterni alla circonferenza.
Ne deriva che

$$BC = BE + CE = (r - x) + (r - y) = 2r - x - y$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC

$$x^2 + y^2 = \left(2r - x - y\right)^2$$

Cioè, semplificando e ordinando,

$$\boxed{xy - 2r\left(x + y\right) + 2r^2 = 0}$$

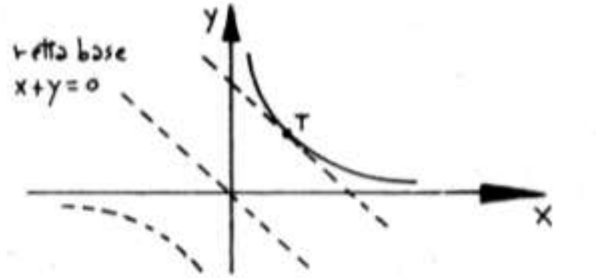
Che è ancora la relazione che dovevamo dimostrare.
Passiamo ora alla seconda parte del problema applicando le relazioni fornite dal testo
Si ottiene il sistema simmetrico

$$\begin{cases} xy - 2r(x+y) + 2r^2 = 0 \\ \dfrac{xy}{2} = ra \end{cases}$$

Dove a rappresenta il parametro, ed è x > 0 e y > 0 in quanto segmenti.
Il sistema, con una semplice sostituzione, può essere trasformato in somma e prodotto

$$\boxed{\begin{cases} x + y = a + r \\ xy = 2ar \end{cases}}$$

Che rappresenta nel piano cartesiano un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = -1 e una famiglia di iperboli equilatere riferite agli asintoti, di cui dovremo considerare solo il ramo contenuto nel primo quadrante



Si avranno due soluzioni simmetriche quando l'equazione

$$t^2 - (a+r)t + 2ar = 0$$

Ha due soluzioni reali e cioè quando

$$\Delta = (a+r)^2 - 8ar \ge 0$$

E ciò avviene quando

$$\begin{cases} a \le r\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \\ a \ge r\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

A le intersezioni si trovano nel primo quadrante solo quando

$$\boxed{a \ge r\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}$$

E con tale condizione il problema ammette sempre due soluzioni.