Settembre 1929

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2 \\ x(x+y)=m^2 \end{cases}$$

E dare la condizione a cui debbono soddisfare a, m, α affinché x ed y siano reali.
Il candidato può, se lo crede, discutere anche il segno delle radici in relazione ai valori di a, m, ed α.

Il problema può essere affrontato per via grafica osservando che la prima equazione corrisponde al teorema di Carnot applicato ad un triangolo generico con lati x, y, a, e con α corrispondente all'angolo interno opposto ad a.
Ma così facendo si prenderebbero in considerazione solo i valori positivi di x, y, a.
Percorriamo quindi la via algebrica osservando che il sistema è omogeneo, e tali sistemi possono essere risolti ponendo

$$x = yt$$

Si ha

$$\begin{cases} y^2t^2+y^2-2ty^2\cos\alpha=a^2 \\ y^2t^2+y^2t=m^2 \end{cases}$$

Dividiamo membro a membro e semplifichiamo

$$\frac{y^2t^2+y^2-2ty^2\cos\alpha}{y^2t^2+y^2t}=\frac{a^2}{m^2}$$

$$\frac{t^2+1-2t\cos\alpha}{t^2+t}=\frac{a^2}{m^2}$$

Con le condizioni $t\neq 0$ e $t\neq -1$ possiamo eliminare il denominatore e ottenere

$$m^2t^2+m^2-2m^2t\cos\alpha=a^2t^2+a^2t$$

$$t^2\left(m^2-a^2\right)-t\left(2m^2\cos\alpha+a^2\right)+m^2=0$$

Senza proseguire nella determinazione delle soluzioni, possiamo affermare che esse sono reali quando il discriminante dell'equazione di secondo grado in t è maggiore o uguale a zero.
Deve cioè essere soddisfatta la relazione seguente

$$\Delta = \left(2m^2\cos\alpha + a^2\right)^2 - 4m^2\left(m^2 - a^2\right) \geq 0$$

$$4m^4\cos^2\alpha + 4a^2m^2\cos\alpha + a^4 - 4m^4 + 4a^2m^2 \geq 0$$

$$4m^4\left(\cos^2\alpha - 1\right) + 4a^2m^2\left(1+\cos\alpha\right) + a^4 \geq 0$$

$$-4m^4\mathrm{sen}^2\alpha + 4a^2m^2\left(1+\cos\alpha\right) + a^4 \geq 0$$

$$\boxed{4m^4\mathrm{sen}^2\alpha - 4a^2m^2\left(1+\cos\alpha\right) - a^4 \leq 0}$$

Questa è in sostanza la condizione richiesta dal problema
In essa compaiono i parametri m, a, α. Risolvendo rispetto al parametro m^2 si ha

$$m^2 = \frac{4a^2\left(1+\cos\alpha\right) \pm \sqrt{16a^4\left(1+\cos\alpha\right)^2 + 16a^4\mathrm{sen}^2\alpha}}{8\mathrm{sen}^2\alpha}$$

$$m^2 = a^2\,\frac{\left(1+\cos\alpha\right) \pm \sqrt{\left(1+\cos\alpha\right)^2 + \mathrm{sen}^2\alpha}}{2\mathrm{sen}^2\alpha}$$

$$\boxed{m^2 = a^2\,\frac{1+\cos\alpha \pm \sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}}{2\mathrm{sen}^2\alpha}}$$

Ed m^2 deve risultare interno all'intervallo delle due radici.