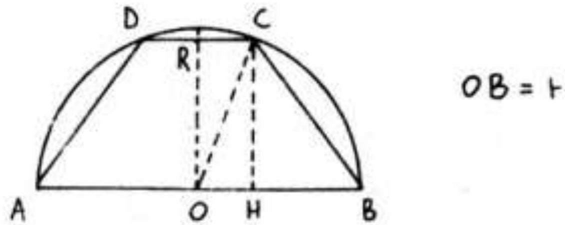
Luglio 1930

Un trapezio convesso, inscritto in un cerchio di raggio r ha per base maggiore un diametro del cerchio. Sapendo che k è il rapporto alla base maggiore della somma degli altri tre lati, determinare la misura di questi.
Discutere i risultati e far vedere che di tutti i trapezi convessi inscritti nel cerchio e aventi come base maggiore un diametro, quello di perimetro massimo è il semiesagono regolare, il quale soddisfa anche la condizione di avere area massima.
Il candidato, se vuole, può determinare inoltre il valore di k per cui il suddetto trapezio inscritto risulti anche circoscritto ad un cerchio, dando in questo caso la costruzione geometrica del trapezio stesso.

Il trapezio è chiaramente isoscele e inscritto in una semicirconferenza.



Poniamo

$$OH = x \qquad \text{con} \qquad 0 \le x < r$$

Risulta

$$AB = 2r$$

$$DC = 2x$$

$$CH^2 = OC^2 - OH^2 = r^2 - x^2$$

$$HB = r - x$$

$$BC = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(r^2 - x^2\right) + \left(r - x\right)^2} = \sqrt{2r^2 - 2rx}$$

Applichiamo ora la relazione proposta dal problema

$$\frac{2AD + DC}{AB} = k$$

$$\frac{2\sqrt{2r^2 - 2rx} + 2x}{2r} = k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{2r^2 - 2rx} + x = kr \\ 0 \le x < r\end{array}}$$

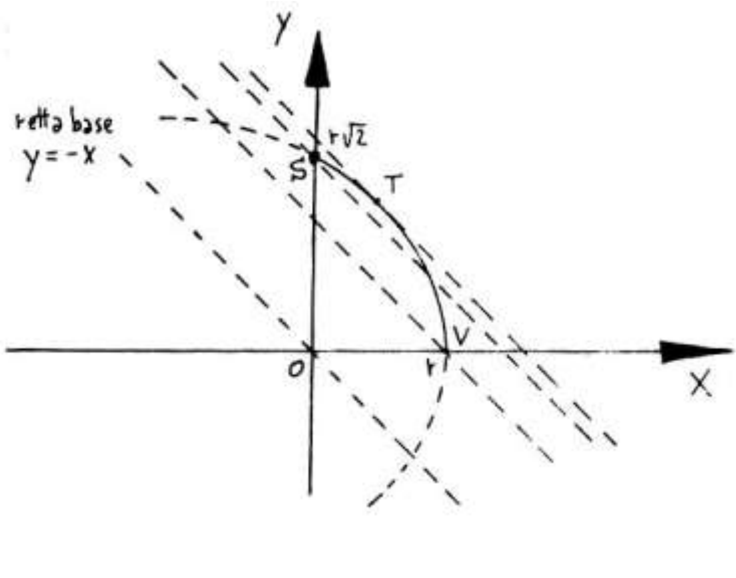
Poniamo ora

$$\sqrt{2r^2 - 2rx} = y$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = -x + kr \\ x = -\dfrac{1}{2r}y^2 + r \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = -1 e una parabola con asse orizzontale, concavità a sinistra, vertice in (r;0) e di cui dobbiamo considerare l'arco VS per via della condizione limitativa relativa alla x e del fatto che la y, essendo un radicale, non può che essere positivo.
Si noti inoltre che l'estremo S appartiene all'arco, mentre il vertice V no.



Imponiamo il passaggio del fascio di rette per i punti S e V.

$$S \equiv \left(0; r\sqrt{2}\right) \quad \rightarrow \quad r\sqrt{2} = kr \quad \rightarrow \quad k = \sqrt{2}$$

$$V \equiv (r; 0) \quad \rightarrow \quad 0 = -r + kr \quad \rightarrow \quad k = 1$$

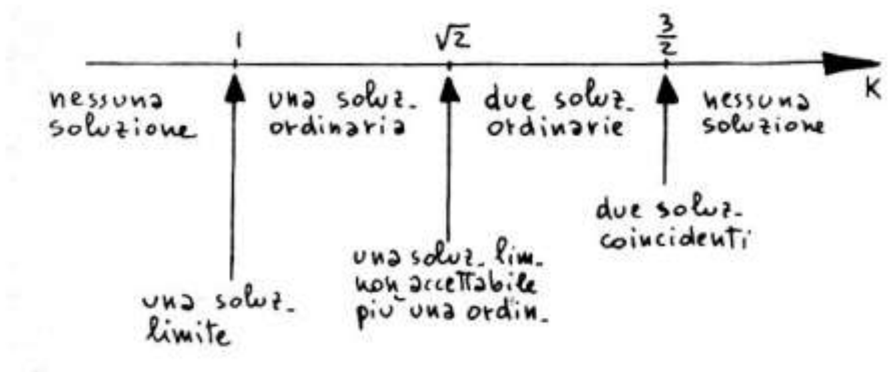
Si ha invece la tangenza (eliminando la y dal sistema) per

$$\boxed{(1) \qquad x^2 - 2rx(k-1) + k^2r^2 - 2r^2 = 0}$$

$$\frac{\Delta}{4} = r^2(k-1)^2 - \left(k^2r^2 - 2r^2\right) = 0$$

$$k = \frac{3}{2}$$

E quindi al variare di k si ha



Rispondiamo alle altre domande cominciando con l'osservare che la base maggiore del trapezio è costante e quindi il valore massimo del suo perimetro corrisponde al valore massimo di k pari a $\frac{3}{2}$. Ponendo $k = \frac{3}{2}$ nell'equazione (1) si trova

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

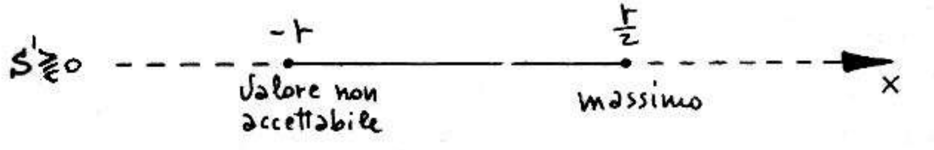
Che è il valore per cui il triangolo OCB diviene equilatero, e il trapezio diviene mezzo esagono regolare.
L'area del trapezio è

$$S=\frac{(x+r)\sqrt{r^2-x^2}}{2}$$

Derivando si ha

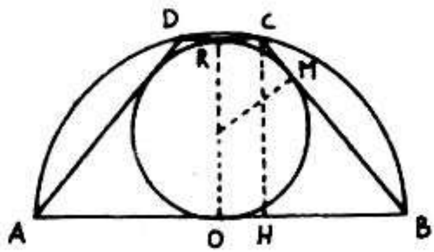
$$S'=\frac{-2x^2-rx+r^2}{2\sqrt{r^2-x^2}}$$

E lo studio del segno fornisce



Quindi per $x=\frac{3}{2}$ anche l'area del trapezio risulta massima.

Riguardo l'ultima richiesta si osservi la figura



Deve risultare RC = CM e OB = MB perché segmenti di tangente condotti da punti esterni alla circonferenza più piccola.

Il trapezio quindi ammette una circonferenza inscritta se

CB = CM + MB = RC+OB

Cioè

$$\sqrt{2r^2-2rx}=x+r$$

$$2r^2-2rx=x^2+2rx+r^2$$

$$x^2+4rx-r^2=0$$

$$x=r\left(-2\pm\sqrt{5}\right)$$

La soluzione negativa non ha significato geometrico, e va scartata. Resta

$$x = r\left(\sqrt{5} - 2\right)$$

Sostituendo questo valore nella (1) si ottiene

$$k = \begin{cases} -1 & \text{da scartare perché negativa} \\ 2\sqrt{5} - 3 & \text{valore cercato} \end{cases}$$