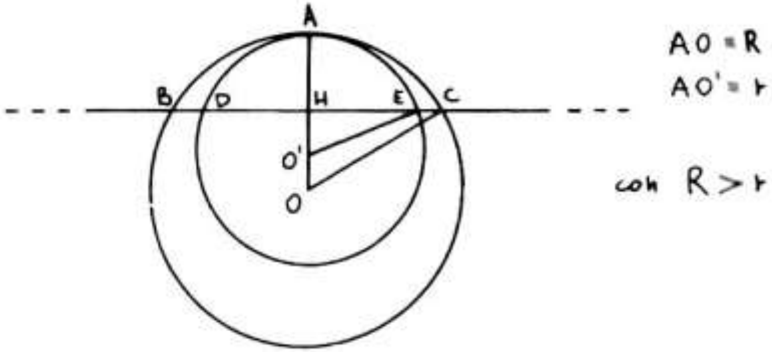
Settembre 1930

Una circonferenza di raggio r è tangente internamente, in A, ad un'altra di raggio R. Condurre parallelamente alla tangente in A alle due circonferenze una secante comune, in modo che la somma dei quadrati delle corde su essa staccate dalle due circonferenze, sia doppia dell'area del quadrato di lato 2k.
Discutere i risultati ed esaminare in relazione alla discussione fatta, i due casi particolari

$$\begin{cases} R = 9r \\ k = 3r \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \dfrac{3}{2}r \\ k = \dfrac{6}{5}r \end{cases}$$

E' in facoltà del candidato di aggiungere la costruzione geometrica, indicando anche come deve essere condotta la retta secante perché sia massima la somma dei quadrati delle due corde suddette.



Poniamo

$$AH = x \qquad \text{con} \qquad 0 < x \le 2r$$

Risulta

$$HO = |R - x|$$

$$CH = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}$$

$$BC = 2\sqrt{2Rx - x^2}$$

$$\boxed{BC^2 = 8Rx - 4x^2}$$

$$HO' = |r - x|$$

$$EH = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - x^2}$$

$$DE = 2\sqrt{2rx - x^2}$$

$$\boxed{DE^2 = 8rx - 4x^2}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$BC^2 + DE^2 = 2(2k)^2$$

$$8Rx - 4x^2 + 8rx - 4x^2 = 8k^2$$

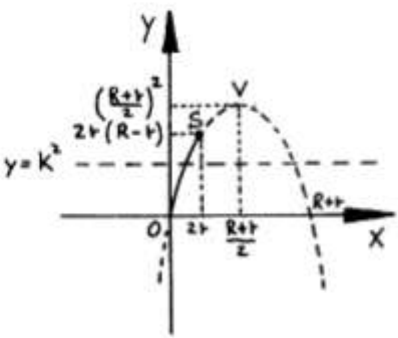
$$2Rx - x^2 + 2rx - x^2 - 2k^2 = 0$$

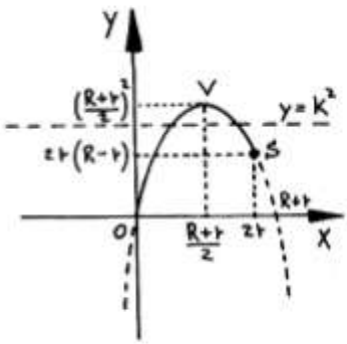
$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 - x(R+r) + k^2 = 0 \\ 0 < x \le 2r \end{array}}$$

Ponendo $k^2 = y$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = k^2 \\ y = -x^2 + x(R+r) \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette orizzontali e un arco di parabola con l'estremo O escluso e l'estremo S incluso.
Si possono avere due situazioni differenti a seconda che l'ascissa di S si trovi a sinistra o a destra dell'ascissa di V.





In questo caso è

$$2r < \frac{R+r}{2}$$

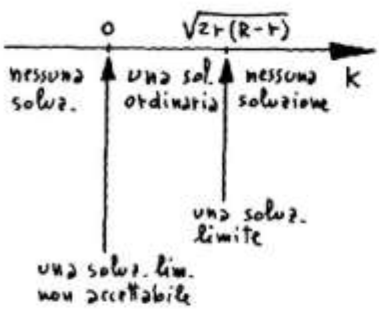
$$R > 3r$$

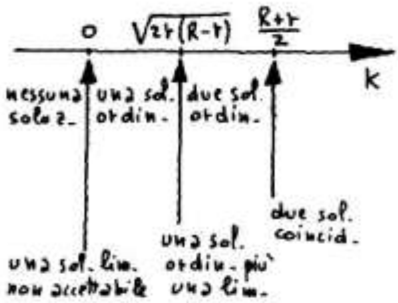
In questo caso è

$$2r > \frac{R+r}{2}$$

$$R < 3r$$

Al variare di k si avranno rispettivamente le due situazioni seguenti





Esaminiamo i due casi particolari

$$\text{per} \begin{cases} R = 9r \\ k = 3r \end{cases} \rightarrow \quad x^2 - 10rx + 9r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \left\langle \begin{array}{l} r \ (H \equiv O) \\ -9r \ (\text{non accett.}) \end{array} \right.$$

$$\text{per} \begin{cases} R = \frac{3}{2}r \\ k = \frac{6}{5}r \end{cases} \rightarrow \quad 25x^2 - 55rx + 36r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,\text{sol.comp.co.}$$

Infine il valore massimo di $BC^2 + DE^2$ si avrà in corrispondenza del massimo valore di k, che è 2r(R+r) nel primo caso e $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2$ nel secondo.

In corrispondenza si ha rispettivamente x=2r (cioè DE = 0 e tangenza alla circonferenza interna nella parte inferiore) e $x = \frac{R+r}{2}$.